

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Carine REYDY

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

---

ÉTUDE D'INVARIANTS DES GERMES DE COURBES PLANES À L'AIDE DES  
DIAGRAMMES DE NEWTON

---

Soutenue le : 16 décembre 2002

Après avis de :

E. ARTAL BARTOLO, Professeur	Université de Zaragoza	Rapporteur
M. MERLE, Professeur	Université de Nice	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

E. ARTAL BARTOLO, Professeur	Université de Zaragoza	
Pi. CASSOU-NOGUÈS, Professeur	Université Bordeaux 1	Directrice
A. DIMCA, Professeur	Université Bordeaux 1	Rapporteur
M. MERLE, Professeur	Université de Nice	
A. ZVONKINE, Professeur	Université Bordeaux 1	Président

# Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de thèse, Pierrette Cassou-Noguès, sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Depuis plusieurs années maintenant, elle m'accompagne et me guide dans la découverte des mathématiques en m'apportant ses connaissances et en me prodigant de nombreux conseils. Je la remercie également pour sa patience et pour la richesse des rapports humains que nous avons échangés.

Je remercie spécialement Enrique Artal Bartolo et Michel Merle qui ont accepté de rapporter ma thèse, ainsi qu'Alexandru Dimca et Alexandre Zvonkine qui ont eu la gentillesse de faire partie de mon jury. Ils m'ont fourni à cette occasion des commentaires de qualité qui me permettront de poursuivre mon travail mathématique dans d'intéressantes perspectives.

Je suis particulièrement reconnaissante envers Arkadiusz Płoski qui m'a accueillie à Kielce et avec qui j'ai échangé de fructueuses discussions mathématiques.

Je remercie Mauricette Jaubert qui se charge toujours avec brio et bonne humeur de la réalisation matérielle de nos thèses, ainsi que Christine Parison pour sa disponibilité et son efficacité au sein du secrétariat de l'école doctorale.

Je n'oublie pas mes anciens professeurs, Denise Schneider, Geneviève Bretenoux et Gérard Galusinski qui ont su, alors que j'étais étudiante, me donner le goût de l'enseignement et des mathématiques.

Je remercie le personnel de l'IUT A et de l'IUFM de Bordeaux avec qui j'ai agréablement partagé mes premières expériences d'enseignante.

Mes pensées se tournent naturellement vers tous ceux qui m'entourent.

Mes parents - les mots ne sauraient exprimer ce qu'ils m'apportent chaque jour depuis 28 ans -, mon frère Franck, Cécile et Clotilde qui illumine notre vie depuis maintenant 9 mois, et les autres membres de ma famille.

Mes amies de 15 ans : Zabou, Carotte, Juliette et Myriam, celles que j'ai recontrées plus récemment : Anne et Laurence, et ceux qui sont grâce à elles devenus mes amis : Lénou, Jérôme, Marie, Jennifer, Nolwenn, Carlos, Bertrand, Julie, Chach et de l'autre côté de la France, Raoul, JP, Julie, Lili et tous les acquinois.

Les fabuleux membres du bureau 155 : Isabelle, notre doyenne. Mes deux compères Manu et Hugo avec qui je ne désespère pas à ce jour de revivre des moments aussi inoubliables que ceux que nous avons déjà partagés dans un nouveau bureau 155. Anne, tu seras bientôt "l'ancienne" du bureau et nous comptons sur toi pour assurer la continuité de sa renommée. Enfin Julien, notre nouveau designer.

Mes voisins de bureau, Thomas, Sylvain, Guillaume et Fred qui jamais ne se sont lassés de répondre à mes éternelles questions.

Mes grands frères de thèse : Gilles, Philippe, Etienne, Andreas, Stéphane, Niels, Hakim et mon frère de thèse Eric qui étaient là pour m'accueillir et qui depuis ne m'ont plus quittée.

Mathilde, ma filleule préférée.

Tous ceux que je ne cite pas.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>i</b>
<b>1 Diagrammes de Newton.</b>	<b>1</b>
1.1 Notions préliminaires. . . . .	1
1.1.1 Polygone de Newton. . . . .	1
1.1.2 Éventail dual. . . . .	2
1.1.3 Notion de poids. . . . .	3
1.1.4 Addition de deux polygones de Newton. . . . .	4
1.1.5 Multiplicité d'intersection. . . . .	5
1.2 Construction des diagrammes de Newton. . . . .	6
1.2.1 Première étape : construction d'un axe correspondant à un polygone de Newton. . . . .	6
1.2.2 Deuxième étape : transformation de Duval-Newton. . . . .	7
1.3 Diagrammes minimaux, diagrammes maximaux. . . . .	11
1.3.1 Diagramme minimal. . . . .	11
1.3.2 Diagramme maximal. . . . .	11
1.3.3 Un exemple. . . . .	12
1.4 Définitions. . . . .	14
1.5 Calcul des multiplicités d'intersection. . . . .	16
1.6 Graphe dual de la résolution. . . . .	18
1.7 Relation entre diagramme et graphe dual. . . . .	20
1.7.1 Pour obtenir le diagramme minimal de Newton à partir du graphe dual de résolution minimal. . . . .	20
1.7.2 Pour obtenir le graphe dual de résolution minimal à partir du diagramme minimal de Newton. . . . .	20
1.7.3 Exemple. . . . .	20
1.8 Diagrammes d'Eisenbud et Neumann. . . . .	22
<b>2 Quotients jacobiens.</b>	<b>23</b>
2.1 Une remarque. . . . .	26
2.2 Zones de stabilité. . . . .	27
2.3 Notations. . . . .	29
2.4 Nouvelle formulation du théorème. . . . .	31
2.5 Étude des zones de stabilité. . . . .	32
2.6 Étude du germe jacobien. . . . .	39
2.6.1 Principe. . . . .	39

2.6.2	Extérieur des zones du premier axe vertical de $D_m(fg)$ , zones de type 4. . . . .	42
2.6.3	Zones de type 1. . . . .	43
2.6.4	Zones de type 2. . . . .	48
2.6.5	Zones de type 3. . . . .	51
2.6.6	Étude des flèches. . . . .	53
2.6.7	Un résultat pour le cas non-dégénéré. . . . .	54
2.6.8	Application : $N(f, g)$ . . . . .	55
2.6.9	Étude de certaines composantes communes. . . . .	58
2.6.10	Étude des axes verticaux suivants. . . . .	60
2.6.11	Zones de type 5 : situation d'Abhyankar faible. . . . .	64
2.7	Quelques commentaires. . . . .	67
2.8	Croissance des quotients jacobiens. . . . .	70
2.9	$N(\Delta)$ . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Fonction zêta-topologique locale.</b>	<b>75</b>
3.1	Calcul des données numériques. . . . .	78
3.2	Plusieurs résultats sur les données numériques. . . . .	81
3.2.1	Résultats sur les données numériques de deux sommets de rupture ou de valence 2 consécutifs quelconques. . . . .	81
3.2.2	Résultats sur les chaînes. . . . .	82
3.2.3	Résultats sur les sommets adjacents. . . . .	83
3.3	Calcul de $Z_{top,0}(f)$ à l'aide du diagramme. . . . .	89
3.3.1	La nouvelle expression. . . . .	89
3.3.2	Un exemple. . . . .	90
3.3.3	Démonstration du théorème 3.3.1. . . . .	91
3.4	Calcul de $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)$ . . . . .	93
3.5	Les pôles de la fonction zêta sont effectifs. . . . .	95
3.5.1	Énoncé du problème. . . . .	95
3.5.2	Structure de la démonstration. . . . .	95
3.5.3	Étude des $\mathcal{A}_v$ pour les sommets de rupture. . . . .	98
3.5.4	Structure ordonnée de $\mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ . . . . .	102
3.5.5	Un rapport avec les quotients jacobiens. . . . .	104
3.5.6	Un exemple. . . . .	104
3.6	La fonction zêta détermine la topologie. . . . .	106
3.6.1	Un exemple. . . . .	106
3.6.2	La fonction zêta-topologique locale multi-variables détermine la topologie d'un germe. . . . .	107
3.6.3	Résultats préliminaires. . . . .	108
3.6.4	Les hyperplans sont différents. . . . .	112
3.6.5	Démonstration du théorème 3.6.4 dans le cas d'une branche irréductible. . . . .	114
3.6.6	Squelette du diagramme. . . . .	117
3.6.7	Connexion des sommets des sous-ensembles de $S(f)$ . . . . .	125
3.6.8	Décoration de l'arbre $T(f)$ . . . . .	132
3.6.9	Un exemple. . . . .	139

3.7	Un théorème généralisé de la monodromie. . . . .	146
3.8	Polytope de quasiajonction. . . . .	148
3.8.1	Définition. . . . .	148
3.8.2	Une nouvelle caractérisation. . . . .	148
3.8.3	Un autre théorème généralisé de la monodromie. . . . .	152



# Introduction

L'objet de ce travail est l'étude de deux invariants des germes de courbes planes à l'aide des diagrammes de Newton de ces germes.

Soit  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On considère l'anneau  $K[[x, y]]$  des séries formelles à deux indéterminées sur  $K$ . Soit  $f(x, y) = \sum A_{a,b} x^a y^b \in K[[x, y]]$  telle que  $f(0, 0) = 0$ . Alors  $C : f(x, y) = 0$  définit un germe de courbe plane en l'origine de  $K^2$ . On s'intéresse aux germes de courbes planes admettant une singularité en l'origine de  $K^2$ .

Les diagrammes de Newton sont des arbres décorés qui permettent d'étudier le germe auquel ils sont associés et d'en calculer les invariants. Ils sont quasiment identiques aux diagrammes d'Eisenbud et Neumann introduits dans [EN] par D. Eisenbud et W.D. Neumann et en sont inspirés, mais ils font appel à une construction différente : dans notre cas, on utilise la décomposition de Newton qui est une décomposition algébrique, alors que dans le cas des diagrammes d'Eisenbud et Neumann, il s'agit d'une décomposition topologique en variétés de Seifert. Il existe plusieurs autres manières de représenter les caractéristiques d'une singularité de courbe plane : les diagrammes d'Eggers, les graphes de résolution, les tables de Hamburger-Noether définies par Russel, etc. Nous orientons notre choix vers les diagrammes de Newton car ce sont ceux qui nous paraissent le plus appropriés et le plus efficaces pour effectuer les calculs d'invariants qui nous intéressent.

Dans la première partie de ce travail, nous rappelons tout d'abord quelques notions qui seront utiles par la suite. En particulier, nous définissons une addition sur l'ensemble des polygones de Newton des germes de courbe plane (qui est par exemple décrite dans [P]), et nous démontrons une propriété de cette addition qui sera indispensable à notre étude. Nous rappelons également la notion de poids et expliquons comment utiliser cette notion pour étudier le polygone de Newton d'un germe.

Nous expliquons ensuite l'algorithme de construction du diagramme de Newton  $D(f)$  d'un germe  $f$ . Il est constitué d'étapes successives : des étapes correspondant à un polygone de Newton à l'aide duquel on construit un axe vertical de  $D(f)$ , et les étapes où l'on effectue une transformation appelée transformation de Duval-Newton et qui permettent de passer d'un axe vertical à l'autre. La construction est basée sur l'algorithme de Newton-Puiseux ([BK], p.371). À partir de ce diagramme, en introduisant la notion de déterminant  $\Delta_{[v,v']}$  d'une arête  $[v, v']$  du diagramme, nous expliquons ensuite comment construire le diagramme minimal  $D_m(f)$  et le diagramme maximal  $D_M(f)$  de Newton associés à l'équation ce germe. Les résultats que l'on énonce dans les deux parties suivantes concernent le diagramme minimal de Newton d'un germe. La principale propriété de ce diagramme est la suivante :



**Théorème 0.0.1 ([EN]).** *Le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  du germe  $f$  est un invariant du type topologique de  $f$ .*

Les diagrammes de Newton, qu'ils soient simples, minimaux ou maximaux, présentent également un intérêt majeur : ils permettent de calculer de façon très simple des multiplicités d'intersection. Nous énonçons les propriétés de calcul de multiplicités d'intersection à partir des diagrammes de Newton.

Puis nous rappelons brièvement ce qu'est le graphe de résolution minimal d'un germe et expliquons comment obtenir le diagramme minimal de Newton d'un germe à partir de son graphe de résolution minimal et vice et versa.

Enfin, puisque l'on utilisera plus tard une propriété démontrée sur les diagrammes d'Eisenbud et Neumann, nous expliquons le lien existant entre le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann d'un germe et son diagramme minimal de Newton.

Dans le second chapitre de cette thèse, nous étudions un premier invariant des germes de courbes planes qui est l'ensemble des quotients jacobiens d'un germe d'application. Il est défini de la façon suivante : soit  $\phi$  le germe d'application :

$$\begin{aligned} \phi: K^2, 0 &\longrightarrow K^2, 0 \\ (x, y) &\longrightarrow (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  sont deux germes non identiquement nuls admettant une singularité à l'origine. On définit le déterminant de la matrice jacobienne de  $\phi$  par  $J(f, g) = (\partial f/\partial x)(\partial g/\partial y) - (\partial f/\partial y)(\partial g/\partial x)$ . Le **germe jacobien**  $\mathcal{J}$  du couple  $(f, g)$  est alors le produit des composantes irréductibles de  $J$  qui ne divisent pas  $fg$ . Enfin, le **lieu jacobien** de  $(f, g)$ , noté  $\tilde{\mathcal{J}}$ , est le lieu réduit des zéros du germe jacobien, et la **courbe discriminante** de  $(f, g)$  est  $\Delta = \phi(\mathcal{J})$ . Si  $(u, v)$  sont les coordonnées de  $\phi(K^2)$ , alors par définition,  $\{u = 0\} = \phi(\{f = 0\})$  n'est pas une branche de  $\Delta$  ; donc si  $\delta$  est une branche de  $\Delta$ , on peut trouver une paramétrisation de Puiseux de  $\delta$  de la forme  $u = v^{q_\delta/p_\delta}(a + \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k v^{\frac{k}{m}})$ .

**Définition 0.0.2.** *L'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est l'ensemble des nombres rationnels  $\frac{p_\delta}{q_\delta}$  pour les branches  $\delta$  de  $\Delta$ .*

H. Maugeudre a démontré le résultat suivant ([M1] ou [M2]) qui permet d'évaluer les quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  sur le graphe dual de résolution minimal de  $fg$ .

**Théorème 0.0.3.** *Soient  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  deux germes réduits et sans composante commune. Alors l'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est le sous-ensemble des rationnels composé des*

$$\frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}$$

où  $\rho_v$  est une curvette issue du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture du graphe dual de résolution minimal de  $fg$ .

Elle démontre donc en particulier que l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est un invariant du type topologique de  $(f, g)$ . Pour démontrer ce théorème, elle utilise des outils topologiques (décomposition de Waldhausen en variétés de Seifert). Nous

voulons donner une démonstration algébrique de ce théorème afin, en particulier, de le généraliser à un corps  $K$  algébriquement clos de caractéristique 0 et à des germes non réduits. Pour démontrer ce théorème, nous étudions les polygones de Newton successifs rencontrés lors de la construction du diagramme de Newton de  $fg$  en utilisant les notions de poids développées dans le premier chapitre. Soit  $w$  un poids. On dit que l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  si les parties initiales de  $f$  et  $g$  vérifient  $in_w(f)^{w(g)} = in_w(g)^{w(f)}$ . Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$ . Alors  $v$  est obtenu après  $k$  transformations de Newton successives (on peut avoir  $k = 0$  si  $v$  est sur le premier axe vertical). Il existe une face  $S$  du polygone de Newton  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  correspondant à ce sommet. Soit  $(\alpha, -\beta)$  un vecteur directeur de cette face, avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On dit qu'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au sommet  $v$  si l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(y_k^{N_{k-1,f}} f^k, y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  par rapport au poids  $w$ . Nous ne traitons pas cette situation. Nous comparons les diagrammes minimaux de Newton  $D_m(fg)$  et  $D_m(fg\mathcal{J})$  afin de savoir dans quelles "zones" de  $D_m(fg)$  les composantes de  $\mathcal{J}$  apparaissent sur  $D_m(fg\mathcal{J})$ . Nous démontrons finalement le théorème suivant :

**Théorème 0.0.4.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes de fonctions non nuls admettant une singularité à l'origine et n'ayant pas de composante commune. Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . On suppose que pour chaque sommet de rupture  $v$  de  $D_m(fg)$ , on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au sommet  $v$ . Alors l'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est le sous-ensemble des rationnels composé des*

$$\frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}$$

où  $\rho_v$  est une curvette issue du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture du diagramme minimal de Newton  $D_m(fg)$ .

En particulier, on retrouve le fait que sous ces hypothèses, l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est un invariant du type topologique de  $(f, g)$ . On déduit de ce théorème les deux corollaires suivants :

**Corollaire 0.0.5.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes de fonctions transverses admettant une singularité en  $(0, 0) \in K^2$ . Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . Alors l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est égal au sous-ensemble des rationnels*

$$\left\{ \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} \right\}_v,$$

où  $\rho_v$  est une curvette du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(fg)$ .

**Corollaire 0.0.6.** *Soit  $g \in K[[x, y]]$  un germe admettant une singularité en  $(0, 0) \in K^2$ . Soit  $D_m(g)$  le diagramme minimal de Newton de  $g$ . Alors l'ensemble des quotients polaires de  $g$  est égal au sous-ensemble des rationnels*

$$\left\{ \frac{(g, \rho_v)_0}{\text{mult}(\rho_v)} \right\}_v,$$

où  $\rho_v$  est une courvette du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(g)$ .

On déduit ensuite de ce théorème des résultats sur la croissance des quotients jacobiens. Pour cela, nous avons précédemment introduit un diagramme minimal coloré de Newton de  $fg$  qui permet de différencier les portions du diagramme représentant  $f$  (portions rouges) de celles représentant  $g$  (portions bleues).

**Théorème 0.0.7.** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 0.0.4, si l'on parcourt les géodésiques de  $f$  et de  $g$  sur  $D_m(fg)$  dans le sens positif, il y a*

- a) *décroissance (resp. croissance) stricte des quotients jacobiens de  $D_m(fg)$  le long des géodésiques strictement rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ ,*
- b) *constance des quotients jacobiens de  $(f, g)$  le long des arêtes noires de  $D_m(fg)$ ,*
- c) *décroissance (resp. croissance) non stricte des quotients jacobiens de  $(f, g)$  le long des arêtes par lesquelles passent toutes les géodésiques rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ .*

Enfin, on conclut ce chapitre par des questions ouvertes sur le polygone de Newton de la courbe discriminante  $\Delta$ .

Dans le troisième chapitre, le second invariant topologique des germes de courbes planes auquel nous nous intéressons est la fonction zêta-topologique locale. Elle a été introduite par Denef et Loeser [DL1] en dimension  $n$ , mais nous l'étudions ici pour  $n = 2$  : soit  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un germe de fonction analytique en 0 et soit  $h : X \rightarrow \mathbb{C}^2$  une résolution de  $f^{-1}\{0\}$ . On note  $E_i, i \in T$  les composantes irréductibles de  $h^{-1}(f^{-1}\{0\})$ , et  $N_i$  et  $\nu_i - 1$  les multiplicités de  $E_i$  dans le diviseur de respectivement  $f \circ h$  et  $h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ . Enfin, pour  $I \subset T$ , soient  $E_I := \bigcap_{i \in I} E_i$  et  $E_I^\circ := E_I \setminus \bigcup_{j \notin I} E_j$ .

**Définition 0.0.8.** *La fonction zêta-topologique locale associée à  $f$  est définie par*

$$Z_{top,0}(f)(s) = \sum_{I \subset T} \chi_{top}(E_I^\circ) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + N_i s}$$

où  $\chi_{top}(\cdot)$  est la caractéristique complexe d'Euler-Poincaré.

Nous restreignons notre étude au cas des courbes, car dans ce cas, la fonction zêta-topologique locale est un invariant topologique du germe, ce qui est faux pour les dimensions supérieures [ACLM]. Cependant, nous verrons sur un exemple qu'elle ne détermine pas, en général, la topologie du germe. Nous nous proposons donc d'étudier une fonction zêta-topologique locale à plusieurs variables qui a été introduite par E. Looijenga ([Loo] prop.4.2 et cor.4.3), et qui contient plus d'informations que la fonction zêta-topologique locale classique. Soit  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un germe de fonction analytique tel que  $f(0, 0) = 0$ . On décompose  $f$  en produit de  $r$  paquets, pas forcément irréductibles

$$f = f_1 \cdots f_r = \prod_{j=1}^r f_j.$$

Pour  $i \in T$ , soit  $\nu_i$  la multiplicité de  $E_i$  sur le diviseur de  $h^*(dx \wedge dy)$  et pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $N_{i,j}$  la multiplicité de  $E_i$  dans le diviseur de  $f_j \circ \pi$ . On appelle les  $(\nu_i, N_{i,1}, \dots, N_{i,r})_{i \in T}$  les **données numériques de la résolution**.

**Définition 0.0.9.** *La fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à  $f$  est définie par*

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \sum_{I \subset T} \chi_{top}(E_I^\circ) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + N_{i,1}s_1 + \dots + N_{i,r}s_r}$$

où  $\chi_{top}(\cdot)$  est la caractéristique complexe d'Euler-Poincaré.

On a  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Q}(s_1, \dots, s_r)$ .

Nous voulons dans ce chapitre étudier la fonction zêta-topologique multi-variables locale  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  associée à un germe  $f$  à l'aide du diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  de  $f$ . En utilisant le lien existant entre le diagramme minimal de Newton et le graphe dual de la résolution minimale d'un germe, nous démontrons des propriétés permettant de calculer les données numériques de la résolution sur  $D_m(f)$ , puis nous énonçons un théorème permettant de calculer la fonction zêta-topologique multi-variables locale de  $f$  en utilisant seulement les décorations de son diagramme minimal de Newton.

Alors on montre que  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = 1$ .

La fonction zêta-topologique multi-variables locale de  $f$  s'exprime à l'aide du premier théorème comme un élément de  $\mathbb{Q}(s_1, \dots, s_r)$  dont le dénominateur est composé de formes affines de  $\mathbb{Q}[s_1, \dots, s_r]$ . Nous nous demandons si les hyperplans définis par ces formes sont des "pôles" de la fonction zêta-topologique locale multi-variables. Nous démontrons alors un théorème décrivant de façon exhaustive les hyperplans au voisinage desquels  $Z_{top,0}(f)$  n'est pas holomorphe.

Nous nous posons alors la question qui a motivé notre étude : la fonction zêta-topologique locale détermine-t-elle la topologie du germe auquel elle est associée ? Nous commençons par montrer sur un exemple que la fonction zêta-topologique locale à une variable associée à un germe ne détermine pas, en général, la topologie de ce germe. En revanche, nous démontrons le théorème suivant.

**Théorème 0.0.10.** *Soient  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  deux germes de courbes planes. Soient  $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$  et  $g = \prod_{j=1}^t g_j^{m_j}$  les décompositions de  $f$  et  $g$  en produit de composantes irréductibles. Enfin, soit  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  (resp.  $Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t)$ ) la fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à  $f$  (resp.  $g$ ) pour la décomposition de  $f$  (resp.  $g$ ) en les  $r$  (resp.  $s$ ) paquets  $f_1^{n_1}, \dots, f_r^{n_r}$  (resp.  $g_1^{m_1}, \dots, g_t^{m_t}$ ). Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t)$ ,
- (ii)  $D_m(f) = D_m(g)$ .

Puisqu'on a vu que le diagramme minimal de Newton d'un germe est un invariant du type topologique de ce germe, on obtient donc le fait que la fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à un germe pour sa décomposition en composantes irréductibles avec multiplicités détermine la topologie de ce germe. Pour démontrer ce théorème, nous donnons un algorithme permettant de reconstruire le diagramme  $D_m(f)$  à partir de la donnée de  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$ .

La conjecture de la monodromie a été énoncée par Denef et Loeser ([DL1], (3.3.2)) et établit un lien entre la fonction zêta-topologique locale classique d'un germe  $f$  et les valeurs propres de la monodromie de  $f$  :

**Conjecture 0.0.11.** *Si  $s_0$  est un pôle de  $Z_{top,0}(f, s)$ , alors  $e^{2i\pi s_0}$  est une valeur propre de la monodromie locale de  $f$  à un point de  $f^{-1}\{0\}$ .*

F. Loeser [Loe] et W. Veys [V3] ont montré que cette conjecture était vraie dans le cas de la dimension 2. Nous nous demandons s’il existe un théorème similaire pour la fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à un germe pour sa décomposition en composantes irréductibles. En faisant appel à la notion de polynôme d’Alexander multivariable d’un germe, nous démontrons un premier “théorème généralisé de la monodromie” .

Dans [Li], l’auteur introduit une procédure algébrique permettant de calculer le *polytope de quasiadjonction* d’un germe qui est un objet généralisant la notion de spectre d’un germe au cas  $r > 1$ . Nous donnons une nouvelle caractérisation du polytope de quasiadjonction permettant de le calculer à partir du diagramme minimal de Newton du germe. Nous démontrons alors un autre “théorème généralisé de la monodromie” pour la fonction zêta-topologique locale multi-variables associée à un germe pour sa décomposition en composantes irréductibles.

# Chapitre 1

## Diagrammes de Newton.

Dans cette première partie, nous rappelons tout d'abord les notions élémentaires qui seront utiles à l'étude des invariants des germes de courbes planes que nous allons aborder. Dans un second temps, nous expliquons la construction et nous donnons les propriétés du principal outil de notre étude : les diagrammes de Newton. En particulier, nous décrivons le lien existant entre ces diagrammes et les graphes duaux de la résolution.

Dans tout le chapitre 1,  $K$  désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

### 1.1 Notions préliminaires.

#### 1.1.1 Polygone de Newton.

Soit  $K[[x, y]]$  l'anneau des séries formelles à deux indéterminées sur  $K$  et soit  $f(x, y) = \sum A_{a,b}x^a y^b \in K[[x, y]]$  telle que  $f(0, 0) = 0$ . Alors  $C : f(x, y) = 0$  définit un germe de courbe plane en l'origine de  $K^2$ .

On définit le support de  $f$  par  $Supp(f) = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 / A_{a,b} \neq 0\}$ . Soit  $\Delta(f)$  l'enveloppe convexe de  $\{(a, b) + \mathbb{R}_+^2, (a, b) \in Supp(f)\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 1.1.1.** *Le polygone de Newton de  $f$ , noté  $N(f)$ , est la réunion des faces compactes de  $\Delta(f)$ .*

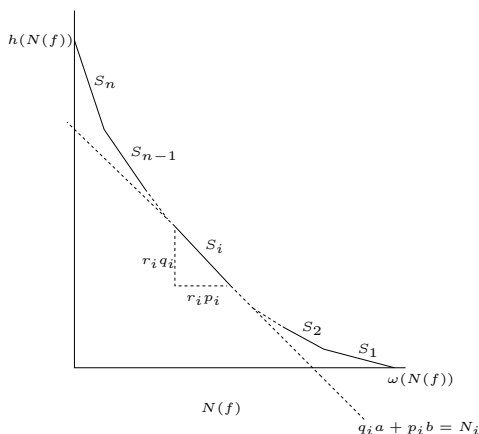
**Définition 1.1.2.** (i) *Si  $(a, b)$  et  $(a', b')$  sont les extrémités d'une face  $S$  de  $N(f)$  avec  $a > a'$  et  $b < b'$ , on définit la **largeur** de la face  $S$  par  $|S|_1 = a - a'$  et sa **hauteur** par  $|S|_2 = b' - b$ .*

(ii) *La **largeur** de  $N(f)$ , notée  $\omega(N(f))$ , est le maximum des abscisses des points de  $N(f)$ . La **hauteur** de  $N(f)$ , notée  $h(N(f))$ , est le maximum des ordonnées des points de  $N(f)$ .*

On note  $S_1, \dots, S_m$  les faces de  $N(f)$ , ordonnées par pentes décroissantes  $-q_1/p_1 > \dots > -q_m/p_m$ , où  $p_i, q_i \in \mathbb{N}$  et  $\text{pgcd}(p_i, q_i) = 1$ . Pour chaque face  $S_i$ , soit  $r_i$  l'entier égal au nombre de points à coordonnées entières sur  $S_i$  moins un. Soit  $q_i a + p_i b = N_i$  l'équation de la droite portant  $S_i$ , avec  $\text{pgcd}(p_i, q_i, N_i) = 1$ . En particulier, si  $f$  est

commode (i.e.  $N(f)$  admet un point sur l'axe des abscisses et un point sur l'axe des ordonnées), on a alors

$$N_i = p_i(r_1q_1 + \cdots + r_iq_i) + q_i(r_{i+1}p_{i+1} + \cdots + r_m p_m).$$



**Définition 1.1.3.** Soit  $S$  une face de  $N(f)$ . On définit le **polynôme face** associé à  $S$  par  $f_S(x, y) := \sum_{(a,b) \in S} A_{a,b} x^a y^b$ .

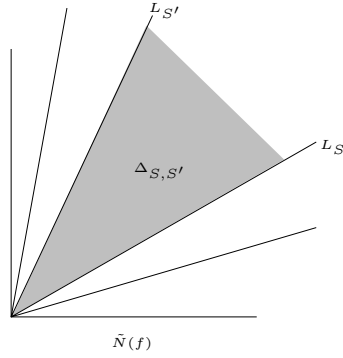
**Définition 1.1.4.** Soit  $S$  une face de  $N(f)$ . Soit  $qx + py = N$ , où  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , l'équation de la droite portant  $S$ . Alors  $S$  est une **face exceptionnelle** de  $N(f)$  si et seulement si  $q = 1$ ,  $S$  est la première face de  $N(f)$  et  $\exists a, C \in K^* / f_S(x, y) = Cx^{l_0}(x^p - ay)^l$  ou bien  $p = 1$ ,  $S$  est la dernière face de  $N(f)$  et  $\exists a, C \in K^* / f_S(x, y) = Cy^{l_r}(x - ay^q)^l$ . On note  $N(f)^*$  le polygone de Newton de  $f$  privé des faces exceptionnelles.

**Définition 1.1.5.** On dit qu'un polygone  $N$  est un polygone de Newton s'il existe  $f \in K\{x, y\}$  tel que  $N = N(f)$  comme défini ci-dessus.

## 1.1.2 Éventail dual.

Soient  $f(x, y) \in K[[x, y]]$  l'équation d'un germe et  $N(f)$  le polygone de Newton de  $f$ . Pour  $S \in N(f)$ , soit  $q_S x + p_S y = N_S$  l'équation de la droite portant  $S$ , avec  $p_S, q_S \in \mathbb{N}$  et  $\text{pgcd}(p_S, q_S) = 1$ .

**Définition 1.1.6.** L'éventail dual de  $f$ , noté  $\tilde{N}(f)$ , est la partition de  $\mathbb{R}_+^2$  induite par les droites  $L_S$  d'équation  $q_S x - p_S y = 0$  pour  $S \in N(f)$  et les cônes ouverts engendrés par ces droites.



### 1.1.3 Notion de poids.

Les notions de poids et de polynômes homogènes sont par exemple abordées dans [A]. Dans [H], R.C.Heitmann utilise ces notions pour faire une approche algébrique de la conjecture du jacobien. Nous allons faire de même notion pour aborder notre problème.

**Définition 1.1.7.** *Un poids  $w$  est une application  $w : K[[x, y]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant la propriété suivante : si  $f = \sum A_{a,b} x^a y^b \in K[[x, y]] \setminus \{0\}$ , alors  $w(f) = \inf\{aw(x) + bw(y), (a, b) \in \text{Supp}(f)\}$ . On définit alors la **partie initiale** de  $f$  par rapport au poids  $w$  par*

$$in_w(f) := \sum_{aw(x)+bw(y)=w(f)} A_{a,b} x^a y^b.$$

**Remarque 1.1.8.** *La donnée de deux entiers  $p, q \in \mathbb{N}^*$  détermine complètement un poids  $w$  en posant  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ .*

On obtient facilement la proposition suivante :

**Proposition 1.1.9.** *Soient  $f$  et  $g$  deux germes, et  $w$  un poids. Alors*

$$in_w(fg) = in_w(f)in_w(g) \text{ et } w(fg) = w(f) + w(g).$$

Nous allons maintenant appliquer la notion de poids au polygone de Newton d'un germe. Ces outils sont par exemple développés dans [LP]. On considère un germe  $f(x, y) \in K[[x, y]] \setminus \{0\}$  et son polygone de Newton  $N(f)$ . À une face  $S$  de  $N(f)$ , on associe le poids  $w_S$  défini par

$$w_S(x) = \frac{|S|_2}{pgcd(|S|_1, |S|_2)} \text{ et } w_S(y) = \frac{|S|_1}{pgcd(|S|_1, |S|_2)}.$$

Alors  $aw_S(x) + bw_S(y) = w_S(f)$  est l'équation de la droite portant la face  $S$ . De la même façon, soit  $L : qx - py = 0$  une droite de  $\tilde{N}(f)$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^2$  et  $pgcd(p, q) = 1$ . Alors on lui associe le poids  $w$  défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ .

On obtient aisément la proposition suivante :

**Proposition 1.1.10.** *(i) Si pour un certain poids  $w$ ,  $in_w(f)$  est constitué d'au moins deux monômes, alors il existe une face  $S$  de  $N(f)$  telle que  $aw(x) + bw(y) = w(f)$  est l'équation de la droite portant  $S$ .*



- (ii)  $\forall S \in N(f), \forall (a, b) \in \text{Supp}(f), \text{ on a } aw_S(x) + bw_S(y) \geq w_S(f).$
- (iii)  $(a, b) \in N(f) \Leftrightarrow \text{ il existe } p, q \in \mathbb{N} \text{ avec } \text{pgcd}(p, q) = 1, \text{ il existe un poids } w \text{ défini par } w(x) = q \text{ et } w(y) = p \text{ tels que } aq + pb = w(f).$

**Remarque 1.1.11.** *Si  $w_S$  est le poids associé à la face  $S$ , les notions de partie initiale et de polynôme face sont identiques, i. e.  $\text{in}_{w_S}(f)(x, y) = f_S(x, y).$*

### 1.1.4 Addition de deux polygones de Newton.

Il existe une addition sur l'ensemble des polygones de Newton qui est par exemple utilisée dans [P].

**Définition 1.1.12.** *Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux polygones de Newton. Alors, on définit le polygone  $N_1 + N_2$  de la manière suivante :  $N_1 + N_2$  est l'unique polygone de Newton vérifiant les deux conditions suivantes :*

1.  $S \in N_1 + N_2$  si et seulement si l'ensemble  $I = \{i \in \{1, 2\} : S \text{ est parallèle à une face de } N_i \text{ notée } S_i\}$  est non vide,
2.  $|S|_1 = \sum_{i \in I} |S_i|_1$  (ce qui équivaut à  $|S|_2 = \sum_{i \in I} |S_i|_2$ ).

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 1.1.13.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$ . On a  $N(fg) = N(f) + N(g)$  pour l'addition définie précédemment.*

**Remarque 1.1.14.** *Cette proposition nous permet d'affirmer que la définition précédente est cohérente : en effet, d'après cette proposition, il est clair que  $N_1 + N_2$  est bien un polygone de Newton.*

*Démonstration.* Soit  $S \in N(fg)$ . On a clairement

$$(1.1) \quad \text{Supp}(fg) \subset \text{Supp}(f) + \text{Supp}(g)$$

au sens  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ . Soient  $(a, b)$  et  $(a', b')$  les extrémités de  $S$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ , afin que  $qa + pb = w(fg)$  soit l'équation de la droite portant  $S$ .

Pour tout  $(x, y) \in \text{Supp}(fg)$ , on a  $qx + py \geq w(fg)$ . De plus,  $qa + pb = w(fg)$  et  $qa' + pb' = w(fg)$ . D'après l'inclusion (1.1), il existe  $(a_1, b_1), (a'_1, b'_1) \in \text{Supp}(f)$  et  $(a_2, b_2), (a'_2, b'_2) \in \text{Supp}(g)$  tels que  $a = a_1 + a_2, a' = a'_1 + a'_2, b = b_1 + b_2$  et  $b' = b'_1 + b'_2$ . Donc  $(qa_1 + pb_1) + (qa_2 + pb_2) = w(fg) = w(f) + w(g)$  et  $(qa'_1 + pb'_1) + (qa'_2 + pb'_2) = w(fg) = w(f) + w(g)$ . Or par définition de  $w$ , on a  $qa_1 + pb_1 \geq w(f), qa'_1 + pb'_1 \geq w(f), qa_2 + pb_2 \geq w(g)$  et  $qa'_2 + pb'_2 \geq w(g)$ . Donc  $qa_1 + pb_1 = w(f), qa'_1 + pb'_1 = w(f), qa_2 + pb_2 = w(g)$  et  $qa'_2 + pb'_2 = w(g)$ . D'autre part, si  $(a_1, b_1) = (a'_1, b'_1)$  et  $(a_2, b_2) = (a'_2, b'_2)$ , alors  $(a, b) = (a', b')$ , ce qui est faux. Nous avons donc exhibé une face  $S_1 = [(a_1, b_1), (a'_1, b'_1)] \in N(f)$  et/ou une face  $S_2 = [(a_2, b_2), (a'_2, b'_2)] \in N(g)$  avec  $S$  parallèle à  $S_1$  et/ou  $S_2$ . De plus,

$$|S|_1 = a - a' = (a_1 + a_2) - (a'_1 + a'_2) = (a_1 - a'_1) + (a_2 - a'_2) = |S_1|_1 + |S_2|_1.$$

Donc  $S \in N(f) + N(g)$ . Finalement,  $N(fg) \subset N(f) + N(g)$ .

Soit maintenant  $S \in N(f) + N(g)$ . Soient  $(a, b)$  et  $(a', b')$  ses extrémités et  $w$  un poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$  de telle sorte que  $qx + py = r(S)$  soit l'équation de la droite portant  $S$  avec  $p, q, r(S) \in \mathbb{N}$  et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . On sait qu'il existe une face  $S_1 \in N(f)$  et/ou une face  $S_2 \in N(g)$  telles que  $S$  soit parallèle à  $S_1$  et/ou  $S_2$  et  $|S|_1 = |S_1|_1 + |S_2|_1$ . On peut supposer qu'il existe au moins  $S_1$ . Soient  $(a_1, b_1)$  et  $(a'_1, b'_1)$  ses extrémités. Soit  $(a_2, b_2) \in \text{Supp}(g)$  tel que  $qa_2 + pb_2 = w(g)$ .

Si  $\text{in}_w(g)$  est monômiale, alors  $|S|_1 = |S_1|_1$ , i.e.  $a - a' = a_1 - a'_1$ . Définissons  $\alpha = a_1 + a_2$ ,  $\alpha' = a'_1 + a_2$ ,  $\beta = b_1 + b_2$  et  $\beta' = b'_1 + b_2$ . On a  $q\alpha + p\beta = w(f) + w(g) = w(fg)$  et  $q\alpha' + p\beta' = w(f) + w(g) = w(fg)$  donc  $S' = [(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')]$  est une face de  $N(fg)$ . De plus,  $|S|_1 = |S'|_1$ . Enfin, on a déjà montré que  $N(fg) \subset N(f) + N(g)$ . Donc  $S' \in N(f) + N(g)$  et  $S'$  a la même pente et la même taille que  $S$ , d'où  $S' = S$ .

Si  $\text{in}_w(g)$  n'est pas monômiale, alors il existe  $S_2 \in N(g)$  telle que  $S$  est parallèle à  $S_2$ . Soient  $(a_2, b_2)$  et  $(a'_2, b'_2)$  ses extrémités. On retrouve le même résultat en posant  $\alpha = a_1 + a_2$ ,  $\alpha' = a'_1 + a'_2$ ,  $\beta = b_1 + b_2$  et  $\beta' = b'_1 + b'_2$ . Finalement,  $N(fg) = N(f) + N(g)$ .  $\square$

### 1.1.5 Multiplicité d'intersection.

**Définition 1.1.15.** Soit  $f \in K[[x, y]]$  un germe à l'origine de  $K^2$ . La **multiplicité** de  $f$ , notée  $m_0(f)$ , est le degré de la partie homogène de plus bas degré de  $f$ .

**Définition 1.1.16.** Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes à l'origine de  $K^2$ . La **multiplicité d'intersection** des deux germes de courbe  $f^{-1}(0)$  et  $g^{-1}(0)$ , notée  $(f, g)_0$ , est égale à

$$\dim_K \frac{K[[x, y]]}{(f, g)},$$

où  $(f, g)$  est l'idéal engendré par  $f$  et  $g$  dans  $K[[x, y]]$ . Si  $f$  et  $g$  ont une branche commune, alors  $(f, g)_0 = +\infty$ .

Grâce à la proposition suivante, on obtient un autre moyen d'évaluer la multiplicité d'intersection de deux germes :

**Proposition 1.1.17.** Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes à l'origine de  $K^2$  sans composante commune, et supposons que  $f$  est irréductible et n'est pas divisible par  $x$ . Soit

$$\begin{cases} x = t^n, n \text{ minimum} \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

une paramétrisation de  $f$  au voisinage de l'origine, où  $n$  "minimum" signifie que le  $\text{pgcd}$  entre  $n$  et les exposants des monômes de  $\phi(t)$  est égal à 1. Alors

$$(f, g)_0 = \text{ord}_t g(t^n, \phi(t)).$$

*Démonstration.* Voir [F], p.74.  $\square$

**Remarque 1.1.18.** Si  $f = \prod_{i=1}^r f_i^{l_i}$  et  $g = \prod_{j=1}^s g_j^{m_j}$ , alors  $(f, g)_0 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s l_i m_j (f_i, g_j)_0$ .

## 1.2 Construction des diagrammes de Newton.

On considère  $f \in K[[x, y]]$  un germe de courbe. Le diagramme de Newton de  $f$  est un arbre décoré qui permet d'étudier ce germe et d'en calculer les invariants. Il existe plusieurs manières de représenter les caractéristiques d'une singularité de courbe plane :

- les diagrammes d'Eggers ([E]),
- les graphes de résolution que nous décrirons plus tard,
- les tables de Hamburger-Noether définies par Russel,
- les diagrammes d'Eisenbud et Neumann...

Nous orientons notre choix vers les diagrammes de Newton car ce sont ceux qui nous paraissent les plus appropriés et les plus efficaces pour effectuer les calculs d'invariants qui nous intéressent. Dans [EN], les auteurs introduisent les diagrammes d'Eisenbud et Neumann sous le nom de "splice diagrams" ; nous les décrirons dans le paragraphe 1.8. Les diagrammes de Newton sont quasiment identiques aux diagrammes d'Eisenbud et Neumann et en sont inspirés, mais ils font appel à une construction différente. Cette construction et les propriétés qui en découlent sont entièrement expliquées dans [CNP].

**Définition 1.2.1.** *Un diagramme de Newton est un arbre composé de sommets, d'arêtes et de flèches, chaque arête se terminant soit par un sommet soit par une flèche. Les arêtes portent des nombres entiers naturels à leurs extrémités appelés décorations. D'autres décorations entières figurent également entre parenthèses à côté de certains sommets.*

De plus, les diagrammes de Newton d'un germe de courbe plane vérifient l'assertion suivante : si l'on considère un sommet et les arêtes reliées à ce sommet, alors parmi les décorations situées sur les extrémités attenantes à ce sommet, au plus deux d'entre elles sont différentes de 1 et sont alors premières entre elles.

Dans la pratique, quand une décoration est égale à 1, on ne la fait pas figurer.

**Définition 1.2.2.** *Si  $v$  est un sommet d'un diagramme, la valence de  $v$ , notée  $\delta_v$ , est le nombre d'arêtes reliées à  $v$ . Un sommet  $v$  est un **sommet de rupture** si  $\delta_v \geq 3$ .*

Le diagramme de Newton de  $f$ , noté  $D(f)$ , se construit à l'aide d'étapes successives. Il y a deux types d'étapes : les étapes correspondant à un polygone de Newton à l'aide duquel on construit un axe vertical de  $D(f)$ , et les étapes où l'on effectue une transformation appelée transformation de Duval-Newton et qui permettent de passer d'un axe vertical à l'autre. La construction est basée sur l'algorithme de Newton-Puiseux dont on trouve une description détaillée dans [BK], p.371.

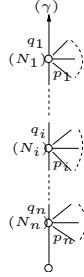
### 1.2.1 Première étape : construction d'un axe correspondant à un polygone de Newton.

On construit le polygone de Newton  $N(f)$  de  $f$ . On note  $S_1, \dots, S_m$  les faces de  $N(f)$  ordonnées par pentes décroissantes  $-q_1/p_1 > \dots > -q_m/p_m$ , où  $\text{pgcd}(p_i, q_i) = 1$ . Soit  $q_i a + p_i b = N_i$  l'équation de la droite portant  $S_i$ .

On trace d'abord une droite verticale. On lit  $N(f)$  de droite à gauche et pour chaque face  $S_i$  de  $N(f)$ , on fait figurer un sommet  $v_i$  sur la droite parcourue de haut en bas.

On fait apparaître  $q_i$  sur l'arête au dessus du sommet,  $p_i$  sur l'arête en dessous et  $(N_i)$  à côté du sommet. On noircit le sommet correspondant à la face de pente  $-1$ . Si cette face n'existe pas, on peut quand même faire figurer ce sommet.

Si  $N(f)$  a un point sur l'axe des abscisses (resp. de ordonnées), le diagramme se termine en haut (resp. en bas) par un sommet blanc. Sinon, on a  $f(x, y) = y^\gamma \bar{f}(x, y)$  (resp.  $f(x, y) = x^\gamma \bar{f}(x, y)$ ) où  $y$  (resp.  $x$ ) ne divise pas  $\bar{f}(x, y)$  : on termine le diagramme par une flèche qui représente la racine  $y = 0$  (resp.  $x = 0$ ) et on fait figurer  $(\gamma)$  à côté de la flèche.



**Définition 1.2.3.** *Le sommet noirci correspondant à la face de pente  $-1$  est la **racine** du diagramme  $D(f)$ .*

*Le sommet blanc ou la flèche située en haut du premier axe vertical est le **point de départ** du diagramme  $D(f)$ .*

Les sommets du premier axe vertical de  $D(f)$  et les faces du polygone de Newton  $N(f)$  sont en bijection. De plus, les décorations attenantes aux sommets correspondent aux pentes des faces de  $N(f)$ . De la même façon, les sommets du premier axe vertical de  $D(f)$  et les droites de l'éventail dual  $\tilde{N}(f)$  sont en bijection et les décorations attenantes aux sommets correspondent aux pentes des droites de  $\tilde{N}(f)$ .

### 1.2.2 Deuxième étape : transformation de Duval-Newton.

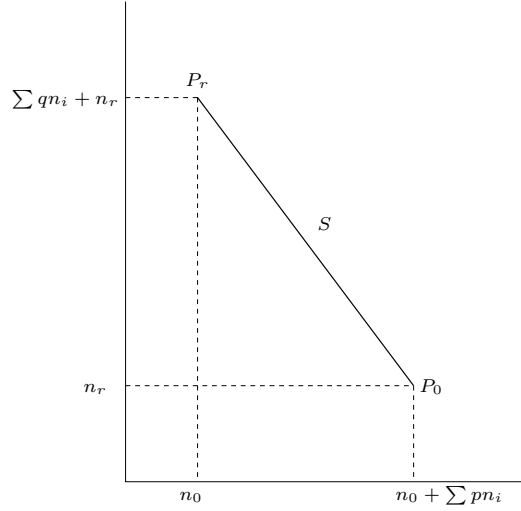
Soit  $S$  une face de  $N(f)$  de pente  $-q/p$  et soit  $qx + py = N$  l'équation de la droite portant  $S$ . On calcule le polynôme face de  $S$  :

$$f_S(x, y) = \sum_{(a,b) \in S} A_{a,b} x^a y^b.$$

Si l'on considère le poids  $w$  associé à la face  $S$ , c'est à dire défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ , le polynôme face de  $S$  est un polynôme quasi-homogène de poids  $w(f)$  que l'on peut donc écrire comme un produit de formes quasi-homogènes :

$$f_S(x, y) = C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i},$$

où  $C \in K$ ,  $a_i \in K^\times$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $a_i \neq a_j$  pour tout  $i \neq j$ . On a  $w(f) = ql_0 + pl_r + \sum_{i=1}^{r-1} pql_i$ . On définit alors le polynôme  $p_S \in K[t]$  par  $p_S(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i}$ .



Sur  $N(f)$ , les deux points extrémités de la face  $S$  sont  $P_0 = (l_0 + \sum_{i=1}^{r-1} pl_i, l_r)$  et  $P_r = (l_0, \sum_{i=1}^{r-1} ql_i + l_r)$ , donc  $N = ql_0 + pl_r + \sum_{i=1}^{r-1} pql_i = w(f)$ .

À partir du sommet  $v$  de  $D(f)$  correspondant à  $S$ , on trace vers la droite  $r - 1$  arêtes correspondant aux  $r - 1$  racines  $a_i$  pour  $i = 1, \dots, r - 1$  de  $p_S(t)$ . Pour chaque  $i_0 \in \{1, \dots, r - 1\}$ , on effectue la transformation de Duval-Newton ([D]) :

$$\Phi^1 : \quad K^2 \quad \longrightarrow \quad K^2 \\ (x_1, y_1) \quad \mapsto \quad (y_1^q (a_{i_0}^{p'} + x_1), a_{i_0}^{q'} y_1^p)$$

où  $p', q' \in \mathbb{N}^2$  sont tels que  $pp' - qq' = 1$ . On a

$$f(x, y) = f_S(x, y) + \sum_{(a,b)/qa+pb>w(f)=N} A_{a,b} x^a y^b.$$

Pour  $i_0$ ,

$$(x^p - a_{i_0} y^q)^{l_{i_0}} \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^{pq l_{i_0}} (p a_{i_0}^{p'(p-1)} x_1 + \text{termes d'ordre supérieur en } x_1)^{l_{i_0}},$$

et pour  $i \neq i_0$ ,

$$(x^p - a_i y^q)^{l_i} \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^{pq l_i} ((a_{i_0}^{pp'} - a_i a_{i_0}^{qq'}) + p a_{i_0}^{p'(p-1)} x_1 + \text{termes d'ordre supérieur en } x_1)^{l_i}.$$

Donc

$$f_S \circ \Phi^1(x_1, y_1) = C y_1^N (x_1^{l_{i_0}} + \text{termes d'ordre supérieur en } x_1).$$

De plus,

$$\left( \sum_{(a,b)/qa+pb>w(f)=N} A_{a,b} x^a y^b \right) \circ \Phi^1(x_1, y_1) = \sum_{(a,b)/qa+pb>N} A_{a,b} a_{i_0}^{qq'} y_1^{qa+pb} (a_{i_0}^{p'} + x_1)^a.$$

Donc

$$f \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^N f^1(x_1, y_1) \text{ où } f^1 \in K\{x, y\}.$$

**Définition 1.2.4.** On dit que  $f$  est **non-dégénéré pour son polygone de Newton** si pour toute face  $S$  de  $N(f)$  et pour toute racine  $a_{i_0}$  de  $p_S(t)$ , après la transformation de Duval-Newton,  $f \circ \Phi^1(x_1, y_1)$  est de la forme

$$f \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^N (ax_1 + \dots)^\gamma (u + \dots), \text{ où } a, u \in K^\times.$$

Si après la transformation de Duval-Newton,  $f \circ \Phi^1(x_1, y_1)$  est de la forme

$$f \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^N (ax_1 + \dots)^\gamma (u + \dots)$$

avec  $a, u \in K^\times$ , alors on termine l'arête correspondant à  $a_{i_0}$  par une flèche et on fait figurer la décoration ( $\gamma$ ) à côté de la flèche.

Si  $f$  est dégénéré pour son polygone de Newton, on obtient un diagramme incomplet, comportant des arêtes qui n'ont ni flèche ni sommet à leur extrémité. Pour toute arête partant d'un sommet  $v_i$  portant les décorations  $p_i$ ,  $q_i$  et  $(N_i)$  du premier axe vertical et ne se terminant pas par une flèche, après avoir effectué la transformation de Duval-Newton expliquée ci-dessus, on a un nouveau germe  $y_1^N f^1(x_1, y_1)$ . À l'extrémité de l'arête considérée, on trace un sommet blanc et un axe vertical qui part de ce sommet blanc vers le bas. On recommence la première étape de l'algorithme pour  $f^1(x_1, y_1)$ , le sommet blanc situé en haut de l'arête considérée jouant le rôle du sommet de rupture le plus haut de l'axe vertical de la première étape. Par construction,  $y_1$  ne divise pas  $f^1(x_1, y_1)$ , donc il n'y a pas de flèche "en haut" de ce nouvel axe vertical. Sur cet axe vertical, les sommets portent les décorations  $p_{i,j}$  (en dessous),  $q_{i,j}$  (au dessus) et  $(N_{i,j})$  à côté. On remplace les  $q_{i,j}$  par  $p_i q_i p_{i,j} + q_{i,j}$  et les  $(N_{i,j})$  par  $(p_{i,j} N_i + N_{i,j})$ . Les décorations  $p_{i,j}$  restent inchangées. Enfin, on dit que  $v_i$  est le **sommet précédant** tous les sommets de ce nouvel axe vertical (tous les sommets d'un axe vertical ont donc le même sommet précédent).

**Remarque 1.2.5.** Pour construire  $D(f)$ , on fait le choix d'un système de coordonnées. Les notions d'axe vertical et celle de sommet précédent ne sont pas intrinsèques, elles dépendent du système de coordonnées choisi.

On obtient un nouveau diagramme complet ou non et on recommence l'algorithme pour chaque arête du nouveau diagramme qui ne se termine ni par un sommet ni par une flèche. L'algorithme est fini quand toutes les arêtes des diagrammes obtenus se terminent par un sommet ou une flèche. On sait que l'algorithme se termine au bout d'un nombre fini d'étapes (c.f. par exemple [BK] p.384).

**Remarque 1.2.6.** D'après ce qui précède, on peut remarquer que si l'on effectue une transformation de Duval-Newton  $\Phi^1$  à  $f$ , où  $\Phi^1$  est associée au poids  $w$  défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$  et à une racine  $a$ , alors que  $f$  n'a pas de branche pour la direction associée au poids  $w$  et à la racine  $a$ , alors

$$f^1(x_1, y_1) = u + \dots \text{ où } u \in K^*.$$

En effet, si  $f$  n'a pas de branche pour cette direction, on a

$$f(x, y) = C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i} + \sum_{(\alpha, \beta) / q\alpha + p\beta > N} A_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$$

avec  $ql_0 + pl_r + \sum pql_i = N$ ,  $C \in K$ ,  $a_i \in K^\times$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $a_i \neq a$  pour tout  $i$ . Alors on effectue la transformation de Duval-Newton :

$$\begin{aligned} \Phi^1 : \quad K^2 &\longrightarrow K^2 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (y_1^q(a^{p'} + x_1), a^{q'}y_1^p) \end{aligned}$$

où  $p', q' \in \mathbb{N}^2$  sont tels que  $pp' - qq' = 1$ . On a

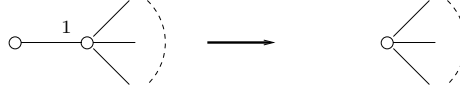
$$\begin{aligned} f \circ \Phi^1(x_1, y_1) &= Cy_1^{ql_0 + pl_r} a^{q'l_r} (a^{p'} + x_1)^{l_0} \prod_{i=1}^{r-1} y_1^{pql_i} ((a^{pp'} - a_i a^{qq'}) + pa^{p'(p-1)}x_1 + \dots)^{l_i} \\ &+ \sum_{q\alpha + p\beta > N} A_{\alpha, \beta} a^{q\alpha} y_1^{q\alpha + p\beta} (a^{p'} + x_1)^\alpha \\ &= y_1^N (Ca^{p'l_0 + q'l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (a^{pp'} - a_i a^{qq'})^{l_i} + \dots) \end{aligned}$$

## 1.3 Diagrammes minimaux, diagrammes maximaux.

### 1.3.1 Diagramme minimal.

On rend un diagramme de Newton  $D(f)$  minimal en faisant les deux opérations suivantes :

1. on supprime les arêtes dont une extrémité est un sommet de valence 1 et l'autre porte la décoration 1, ainsi que le sommet de valence 1 attenant :



2. on supprime les sommets de valence 2

On note  $D_m(f)$  le diagramme minimal de Newton de  $f$ .

**Remarque 1.3.1.** *Le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  est un sous diagramme de  $D(f)$ . On peut noter qu'il y a une correspondance bijective entre les faces de  $N(f)^*$  et les sommets du diagramme minimal de Newton de  $f$  qui sont des sommets du premier axe vertical de  $D(f)$  : en effet, les faces exceptionnelles de  $N(f)$  sont représentées par un sommet  $v$  apparaissant en haut (resp. en bas) du premier axe vertical de  $D(f)$  et portant la décoration 1 au-dessus (resp. en dessous). De plus, une seule arête part de  $v$  vers la droite. D'après la première opération, l'arête portant la décoration 1 disparaît et d'après la seconde opération, le sommet  $v$  disparaît.*

Le théorème suivante sera essentiel :

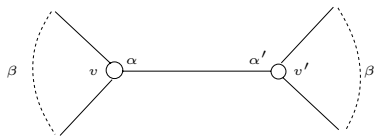
**Théorème 1.3.2.** *Lorsque  $K = \mathbb{C}$  et  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , le diagramme minimal de Newton du germe  $f$  est un invariant topologique de ce germe.*

*Démonstration.* Ce résultat est démontré dans [EN]. □

### 1.3.2 Diagramme maximal.

Nous allons définir la notion de déterminant sur un diagramme de Newton (qui peut être le diagramme de Newton, le diagramme minimal de Newton ou le diagramme maximal de Newton).

**Définition 1.3.3.** *Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets d'un diagramme de Newton reliés par une arête  $[v, v']$ . Soient  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur l'arête  $[v, v']$  et  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ) le produit des décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ) autres que  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ).*





Alors le déterminant de l'arête  $[v, v']$  est noté  $\Delta_{[v, v']}$  et vaut  $\Delta_{[v, v']} = \alpha\alpha' - \beta\beta'$ . Si  $\delta_{v'} = 1$  ou si  $v'$  est une flèche, alors  $\Delta_{[v, v']} = \alpha$ .

Soient maintenant deux sommets  $v$  et  $v'$  d'un diagramme de Newton reliés par une chaîne  $[v, v']$  (i.e. les sommets situés entre  $v$  et  $v'$  sont de valence 2). Les nombres  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  et  $\beta'$  sont définis comme ci-dessus.



Alors le déterminant de la chaîne  $[v, v']$  est noté  $\Delta_{[v, v']}$  et vaut  $\Delta_{[v, v']} = \alpha\alpha' - \beta\beta'$ . Si  $\delta_{v'} = 1$  ou si  $v'$  est une flèche, alors  $\Delta_{[v, v']} = \alpha$ .

On obtient un diagramme maximal  $D_M(f)$  à partir du diagramme de Newton  $D(f)$  en procédant de la façon suivante :

- si  $v$  et  $v'$  sont deux sommets consécutifs de  $D(f)$  tels que  $\Delta_{[v, v']} > 1$ , on rajoute entre  $v$  et  $v'$  autant de sommets  $v_1, \dots, v_n$  de valence 2 qu'il est nécessaire pour que  $\Delta_{[v, v_1]} = \Delta_{[v_1, v_2]} = \dots = \Delta_{[v_n, v']} = 1$ . Plus précisément, soient  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur l'arête  $[v, v']$  et  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ) le produit des décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ) autres que  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ). Pour chaque sommet  $v_i$ , soient  $a_i$  la décoration située sur l'arête  $[v_{i-1}, v_i]$  ( $a_1$  sur l'arête  $[v, v_1]$ ) et  $p_i$  la décoration située sur l'arête  $[v_i, v_{i+1}]$  ( $p_n$  sur l'arête  $[v_n, v']$ ). On rajoute suffisamment de sommets  $v_i$  pour que

$$\alpha a_1 - \beta p_1 = a_2 p_1 - a_1 p_2 = \dots = a_n p_{n-1} - a_{n-1} p_n = \alpha' p_n - a_n \beta' = 1$$

- le diagramme obtenu est minimal pour cette propriété, c'est à dire que si l'on supprime un sommet du diagramme, il existe une arête de déterminant strictement supérieur à 1.
- on supprime les éventuels sommets de valence 1 ne portant pas de décoration, ainsi que les arêtes attenantes à ces sommets.

**Proposition 1.3.4.** Soit  $f$  un germe de courbe et soit  $D_*(f)$  un diagramme de  $f$  ( $D_*(f) = D(f)$ ,  $D_m(f)$  ou  $D_M(f)$ ).

Alors quels que soient  $v, v' \in \{\text{sommets}\} \cup \{\text{flèches de } D_*(f)\}$ , on a  $\Delta_{[v, v']} > 0$ .

*Démonstration.* C'est la construction des diagrammes qui l'impose. □

### 1.3.3 Un exemple.

Pour le germe de courbe

$$f(x, y) = (y^5 + xy^2 + x^4)(y^6 + xy^3 + x^3),$$

on obtient les diagrammes suivants.

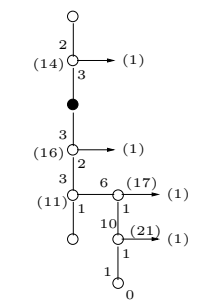


Diagramme de Newton.

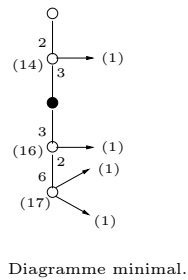


Diagramme minimal.

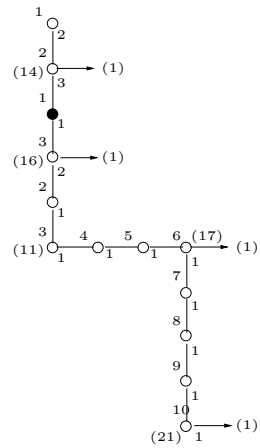


Diagramme maximal.

On constate que chaque branche du germe correspond à une flèche du diagramme et vice et versa.

## 1.4 Définitions.

Dans tout le paragraphe,  $D_*(f)$  désigne l'un des trois diagrammes  $D(f)$ ,  $D_m(f)$  ou  $D_M(f)$ .

**Définition 1.4.1.** Soit  $f$  un germe et  $v$  un sommet d'un diagramme de Newton  $D_*(f)$  de  $f$ . On rajoute à  $D_*(f)$  une arête partant de  $v$  et terminée par une flèche ; cette flèche représente un germe que l'on note  $\rho_v$  et que l'on appelle **curvette**  $\rho_v$  du sommet  $v$ . Le diagramme obtenu est alors celui de  $f\rho_v$ .

**Définition 1.4.2.** Soient  $f$  et  $g$  deux germes et  $D_*(fg)$  un diagramme de Newton de  $fg$ . Soient  $v$  un sommet de  $D_*(fg)$  et  $\rho_v$  une curvette de  $v$ . On appelle **quotient de contact** associé au sommet  $v$  la quantité

$$\mathcal{Q}_v = \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}.$$

La définition est une généralisation de la notion de quotient de contact définie par Hironaka ([Hi] p.5).

**Définition 1.4.3.** Soient  $f$  un germe de courbe et  $D_*(f)$  un diagramme de Newton de  $f$ . On appelle **géodésique** de  $D_*(f)$  toute partie connexe de  $D_*(f)$ .

On peut introduire une relation d'ordre sur l'ensemble des sommets d'une géodésique d'un diagramme :

**Définition 1.4.4.** Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets d'une géodésique d'un diagramme de Newton. On dit que  $v$  est **plus petit que  $v'$  par rapport à la racine du diagramme**, noté  $v < v'$ , si la géodésique allant de la racine à  $v'$  passe par  $v$ .

On dit que  $v$  est **plus petit que  $v'$  par rapport au point de départ du diagramme**, noté  $v \prec v'$ , si la géodésique allant du point de départ du diagramme à  $v'$  passe par  $v$ .

**Remarque 1.4.5.** Le point de départ et la racine du diagramme sont des sommets qui ont été définis sur le diagramme de Newton  $D(f)$  d'un germe tel qu'il est obtenu après la construction décrite dans le paragraphe 1.2. Cependant, le diagramme maximal  $D_M(f)$  contient le diagramme  $D(f)$ . On peut donc définir la notion de point de départ et de racine de façon identique sur  $D_M(f)$ . Enfin, en regardant le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  comme un sous-arbre de  $D(f)$ , on peut aussi définir les notions  $v \prec v'$  et  $v < v'$  sur  $D_m(f)$ .

Soient  $f$  un germe de courbe et  $D_*(f)$  un diagramme de Newton de  $f$ .

On appelle **géodésique de  $f$**  le chemin parcouru pour aller de la racine de  $D_*(f)$  à une flèche représentant une composante irréductible de  $f$ .

On oriente les géodésiques de  $f$  de la façon suivante : la géodésique est parcourue dans le **sens positif** si l'on va de la racine du diagramme vers la flèche.

Soient  $v, v' \in \{\text{sommets de rupture de } D_*(f)\} \cup \{\text{flèches de } D_*(f)\}$ . On note  $G_{[v, v']}$  la géodésique reliant  $v$  à  $v'$ .

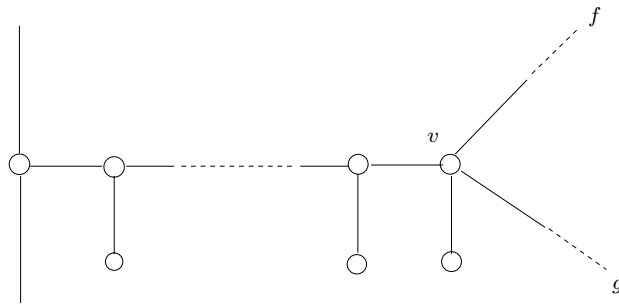
Lorsqu'on considère le produit de deux germes  $f$  et  $g$ , on peut introduire le diagramme de Newton **coloré** de  $fg$  (voir [M2], p.71 pour un arbre de résolution coloré) :

**Définition 1.4.6.** *Le diagramme de Newton **coloré** de  $fg$  est le diagramme de Newton  $D_*(fg)$  dans lequel on trace les géodésiques de  $f$  en rouge et celles de  $g$  en bleu, les branches restantes étant tracées en noir.*

Les géodésiques restant en noir seront appelées **branches mortes** de  $D_*(fg)$ .

Sur le diagramme de  $fg$  coloré, on pourra avoir des portions noires, strictement bleues, strictement rouges ou bicolorées (i.e. rouges et bleues).

**Définition 1.4.7.** *On dira que deux germes irréductibles  $f$  et  $g$  se séparent au sommet  $v$  de  $D_*(fg)$  si la géodésique allant de la racine du diagramme à ce sommet est bicolorée et si la géodésique partant de ce sommet vers la flèche représentant  $f$  est strictement rouge et celle partant de ce sommet vers la flèche représentant  $g$  est strictement bleue.*



## 1.5 Calcul des multiplicités d'intersection.

Un des premiers intérêts des diagrammes de Newton est de pouvoir calculer simplement la multiplicité d'intersection de deux germes. On a la proposition suivante :

**Proposition 1.5.1.** *La multiplicité d'intersection de deux branches est égale au produit des nombres adjacents à la géodésique qui joint les deux flèches représentant ces branches sur un diagramme quelconque où elles sont représentées.*

*Démonstration.* Une preuve topologique est dans [EN], paragraphe III.10 et une preuve algébrique dans [CNP].  $\square$

**Corollaire 1.5.2.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$ . La multiplicité d'intersection de  $f$  et  $g$  est égale à la somme sur toutes les flèches représentant  $f$  et  $g$  du produit des nombres adjacents à la géodésique joignant une flèche représentant  $f$  à une flèche représentant  $g$  sur un diagramme quelconque où  $f$  et  $g$  sont représentés.*

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le fait que si  $f = \prod_{i=1}^r f_i^{l_i}$  et  $g = \prod_{j=1}^s g_j^{m_j}$ , alors  $(f, g)_0 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s l_i m_j (f_i, g_j)_0$ .  $\square$

**Corollaire 1.5.3.** *La multiplicité d'un germe est la somme sur toutes les flèches représentant le germe des produits des nombres adjacents au chemin allant de la racine à chaque flèche représentant ce germe sur un diagramme quelconque où il est représenté.*

*Démonstration.* Soit  $f \in K[[x, y]]$ . Alors  $m_0(f) = (f, t)_0$  où  $t(x, y) = ax + by$  est une droite transverse à  $f$ . Sur  $D(ft)$ , cette droite  $t$  est représentée par une flèche reliée par une arête à la racine. Le corollaire est alors immédiat.  $\square$

Soient  $f \in K[[x, y]]$  l'équation d'un germe et  $D_*(f)$  un diagramme de Newton de  $f$  ( $D_*(f) = D(f)$ ,  $D_m(f)$  ou  $D_M(f)$ ). Soit  $v_k$  un sommet de  $D_*(f)$  obtenu après les  $k$  transformations de Duval-Newton successives : pour  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^i : \quad K^2 &\longrightarrow K^2 \\ (x_i, y_i) &\longmapsto (y_i^{q^{i-1}}(a_i^{p^{i-1}} + x_i), a_i^{q^{i-1}} y_i^{p^{i-1}}) \end{aligned}$$

où  $p^{i-1}, q^{i-1} \in \mathbb{N}$  sont tels que  $p^{i-1}p^{i-1} - q^{i-1}q^{i-1} = 1$ . À chaque transformation de Duval-Newton  $\Phi^i$  correspond une face d'un polygone de Newton d'équation  $q^i x + p^i y = N_i$ . Enfin, soit  $w_i$  le poids défini par  $w_i(x_i) = q^i$  et  $w_i(y_i) = p^i$ .

D'après la construction décrite dans le paragraphe 1.2, on a

$$f \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^{N_0} f^1(x_1, y_1)$$

et on a vu que  $N_0 = w_0(f)$ . Lorsqu'on applique  $\Phi^2$ , on obtient

$$(y_1^{N_0} f^1(x_1, y_1)) \circ \Phi^2(x_2, y_2) = y_2^{N_1} f^2(x_2, y_2),$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} f \circ \Phi^1 \circ \Phi^2(x_2, y_2) &= y_2^{p_1 N_0} f^1 \circ \Phi^2(x_2, y_2) \\ &= y_2^{p_1 N_0} y_2^{w_1(f^1)} f^2(x_2, y_2) \\ &= y_2^{N_1} f^2(x_2, y_2) \end{aligned}$$

donc

$$N_1 = p_1 N_0 + w_1(f^1) = p_1 w_0(f) + w_1(f^1) = w_1(y_1^{N_0} f^1).$$

En itérant ce procédé, on obtient

**Lemme 1.5.4.** *Pour  $1 \leq i \leq k-1$*

$$f \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_{i+1}^{N_i} f^{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$\text{et } N_i = p_i N_{i-1} + w_i(f^i) = w_i(y_i^{N_{i-1}} f^i).$$

La proposition suivante nous sera très utile par la suite :

**Proposition 1.5.5.** *Soient  $f \in K[[x, y]]$  un germe de courbe et  $D_*(f)$  un diagramme de Newton de  $f$ . Soient  $v$  un sommet de  $D_*(f)$ ,  $\rho_v$  une curvette du sommet  $v$  et  $(N_v)$  la décoration figurant à côté de  $v$ . Alors*

$$N_v = (f, \rho_v)_0.$$

**Remarque 1.5.6.** *Sur les diagrammes de Newton, les décorations  $(N_v)$  figurant à côté des sommets de rupture  $v$  sont redondantes par rapport aux décorations  $a$  et  $p$  portées par les arêtes attenantes à ces sommets.*

*Démonstration.* Supposons que  $v$  est obtenu après les  $k$  transformations de Duval-Newton : pour  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^i : \quad K^2 &\longrightarrow K^2 \\ (x_i, y_i) &\longmapsto (y_i^{q^{i-1}}(a_i^{p^{i-1}} + x_i), a_i^{q^{i-1}} y_i^{p^{i-1}}) \end{aligned}$$

où  $p^{i-1}, q^{i-1} \in \mathbb{N}$  sont tels que  $p^{i-1}p^{i-1} - q^{i-1}q^{i-1} = 1$ . Supposons que  $v$  correspond à une face de  $N(y_k^{N_{k-1}} f^k)$  d'équation  $qx + py = N_v$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . On a une paramétrisation de  $\rho_v^k$  :

$$\rho_v^k : \begin{cases} x_k = t^q \\ y_k = At^p + \dots \end{cases}$$

De plus,

$$\rho_v \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(x_k, y_k) = y_k^{N_{k-1}, \rho_v} \rho_v^k(x_k, y_k).$$

Donc  $\Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(t^q, At^p + \dots)$  est une paramétrisation de  $\rho_v$ . Alors d'après la proposition 1.1.17, on a

$$(f, \rho_v)_0 = \text{ord}_t f \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(t^{q^k}, At^{p^k} + \dots) = \text{ord}_t y_k^{N_{k-1}, f} f^k(x_k, y_k) = w_k(y_k^{N_{k-1}, f} f^k) = N_v.$$

□

## 1.6 Graphe dual de la résolution.

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques propriétés des résolutions de courbes planes. Les détails et les preuves se trouvent dans [BK].

Soit  $f = \prod_{i=1}^r f_i^{r_i} : K^2, 0 \longrightarrow K, 0$  un germe de courbe non identiquement nul. Soient  $U$  un voisinage de l'origine dans  $K^2$  et

$$\pi : X \longrightarrow U$$

une suite d'éclatements de points. Soit  $E = \pi^{-1}(0)$  le diviseur exceptionnel de la résolution. La transformée totale de  $f$  est  $\bar{f} = (f \circ \pi)^*(0)$ . La transformée stricte de  $f$  est  $\tilde{f} = \bar{f} - m_0(f)E$ . Un point de contact est un point d'intersection de la transformée stricte avec le diviseur exceptionnel.

La suite d'éclatements  $\pi : X \longrightarrow U$  est une résolution de  $f$  si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i) les points de contact sont des points lisses de  $E$ ,
- (ii) en chaque point de contact il ne passe qu'une seule transformée stricte des branches de  $f = 0$ ,
- (iii) la transformée stricte de chaque branche de  $f = 0$  est lisse, transverse à  $E$  et le coupe en un seul point.

On dispose du théorème suivant :

**Théorème 1.6.1.** *Soit  $f : K^2, 0 \longrightarrow K, 0$  un germe non identiquement nul. Alors il existe une résolution de  $f$ .*

Soient  $E_j$  les composantes irréductibles de  $E$ . L'intersection de deux de ces composantes est soit vide soit égale à un point. Un point lisse de  $E$  est un point qui n'appartient qu'à une seule composante irréductible  $E_j$  de  $E$ . Une curvette  $\rho_j$  de  $E_j$  est un germe de courbe lisse transverse à  $E_j$  en un point lisse. Enfin, la multiplicité  $M_j$  de  $E_j$  est l'ordre de  $(f \circ \pi)(\rho_j)$ .

**Remarque 1.6.2.** *Si  $f : \mathbb{C}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{C}, 0$  est un germe de fonction analytique complexe, les composantes irréductibles de  $E$  sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$  et celles de la transformée stricte à  $\mathcal{U}$  où  $\mathcal{U}$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ .*

Une résolution de  $f$  est dite minimale si aucune contraction de  $\pi$  n'est une résolution de  $f$ .

Pour chaque résolution de  $f$ , on peut construire un graphe appelé graphe dual de la résolution.

**Définition 1.6.3.** *Un graphe dual de la résolution est un arbre composé de sommets, d'arêtes et de flèches, chaque arête se terminant soit par un sommet soit par une flèche. Les sommets et les flèches portent des nombres à leurs côtés appelés décorations.*

On construit le graphe de résolution minimal  $R(f)$  de  $f$  de la manière suivante : si  $\pi : X \longrightarrow U$  est une résolution minimale de  $f$ , on représente chaque composante  $E_j$  du diviseur exceptionnel  $E$  par un sommet, chaque composante de la transformée stricte

$\tilde{f}$  par une flèche. On relie deux sommets ou un sommet et une flèche par une arête si les composantes correspondantes s'intersectent. À côté du sommet  $v_j$  correspondant à  $E_j$ , on fait figurer la décoration  $(M_j)$ . Enfin, à côté de la flèche correspondant à la composante  $f_i$ , on fait figurer la décoration  $(r_i)$ .

Il existe une autre manière de décorer les graphes duaux de la résolution : à côté de chaque sommet  $v_i$  représentant la composante  $E_i$  on fait figurer le nombre  $-\kappa_i$  égal à la self-intersection du diviseur  $E_i$  ( $\kappa_i \in \mathbb{N}$ ). Le lemme suivant ([EN] ou [Loe], lemme II.2) nous permet de retrouver les nombres  $\kappa_i$  à partir des  $(M_j)$ .

**Lemme 1.6.4.** *Soit  $E_i$  une composante irréductible du diviseur exceptionnel  $E$ . Soient  $E_{i,j}$  pour  $j \in \{1, \dots, k\}$  les composantes irréductibles de  $E$  qui s'intersectent avec  $E_i$ . Alors on a*

$$\kappa_i M_i = \sum_{j=1}^k M_{i,j}.$$

Enfin, on donne une dernière définition :

**Définition 1.6.5.** *Soit  $R$  un sous-graphe de  $R(f)$  ne comportant pas de flèches de  $R(f)$ . Soient  $v_1, \dots, v_n$  les sommets de  $R$  et  $E_1, \dots, E_n$  les composantes de  $E$  associées aux  $v_i$ . La **matrice d'intersection** de  $R$  est la matrice carrée  $A(R) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  où  $a_{i,i} = -\kappa_i$  et pour  $i \neq j$ ,  $a_{i,j} = 1$  si  $E_i$  et  $E_j$  s'intersectent et  $a_{i,j} = 0$  sinon. Si  $\tilde{R}$  est exactement égal à  $R(f)$  privé de ses flèches, alors  $A(R) = A(R(f))$  est la matrice d'intersection de  $R(f)$ .*



## 1.7 Relation entre diagramme de Newton et graphe dual de la résolution.

### 1.7.1 Pour obtenir le diagramme minimal de Newton à partir du graphe dual de résolution minimal.

Les résultats suivants sont détaillés dans [EN], chap. 5 ou [N].

On construit le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  du germe  $f$  à partir de son graphe dual de résolution minimal  $R(f)$  de la façon suivante :

- on supprime tous les sommets de valence 2.
- Pour l'extrémité d'une arête de  $R(f)$  donnée, on définit le sous-graphe  $R_1(f)$  de  $R(f)$  comme suit : on coupe l'arête concernée en deux et l'on conserve celui des deux sous-graphes ainsi obtenus ne contenant pas l'extrémité choisie.
- La décoration située à la fin d'une arête de  $D_m(f)$  est alors égale à  $\det(-A(R_1(f)))$ , où  $A(R_1(f))$  est la matrice d'intersection de  $R_1(f)$ .
- La décoration située à côté d'un sommet de  $D_m(f)$  entre parenthèses est celle qui figure à côté de ce sommet sur le graphe dual de la résolution.
- Enfin, les sommets de valence 1 ne portent pas de décoration.

### 1.7.2 Pour obtenir le graphe dual de résolution minimal à partir du diagramme minimal de Newton.

On obtient le graphe dual de résolution minimal  $R(f)$  du germe  $f$  à partir d'un diagramme de Newton minimal  $D_m(f)$  de la manière suivante ([CNP]) : on transforme  $D_m(f)$  en un diagramme maximal  $D_M(f)$ . Puis pour obtenir les décorations de  $R(f)$ , on utilise la propriété suivante :

**Proposition 1.7.1.** *Soient  $E_j$  une composante du diviseur exceptionnel de la résolution, et  $v_j$  le sommet de  $R(f)$  associé à  $E_j$ . Alors  $M_j = N_j$  où  $(N_j)$  est la décoration figurant à côté du sommet  $v_j$  sur le diagramme maximal de Newton de  $f$ .*

En effet, chaque sommet du diagramme maximal de Newton de  $f$  correspond à une composante irréductible du diviseur exceptionnel de la résolution minimale de  $f$ . La notion de curvette est identique pour les diagrammes de Newton et pour la résolution. On a alors clairement  $N_j = (f, \rho_{v_j})_0 = M_j$ .

**Remarque 1.7.2.** *Il y a bijection entre les sommets de rupture d'un diagramme de Newton de  $f$  (en particulier son diagramme minimal de Newton) et ceux du graphe dual de résolution minimal de  $f$ .*

### 1.7.3 Exemple.

Pour le germe de fonction analytique d'équation

$$f(x, y) = ((y^2 - x^3)^2 + y^5)(y^2 + x^5),$$

on obtient les diagrammes suivants :

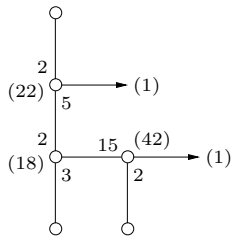


Diagramme minimal de Newton

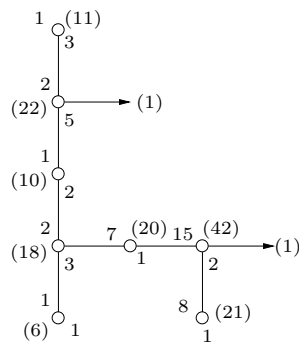
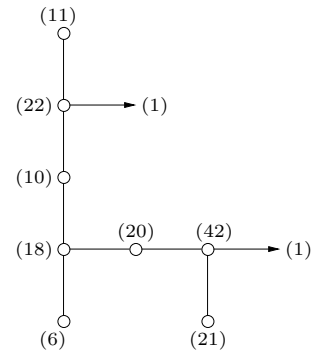


Diagramme maximal de Newton



Graphe dual de resolution minimal avec multiplicites d'intersection.

## 1.8 Diagrammes d'Eisenbud et Neumann.

Dans [EN], les auteurs introduisent les diagrammes d'Eisenbud et Neumann. Ils ne sont pas construits de la même façon que les diagrammes de Newton que nous décrivons ici : dans notre cas, la décomposition est la décomposition de Newton alors que dans le cas des diagrammes d'Eisenbud et Neumann, il s'agit d'une décomposition topologique en variétés de Seifert.

Nous allons expliquer le lien entre le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann  $\tilde{D}(f)$  de  $f$  et le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  de  $f$ . Les deux arbres sont identiques et les décorations portées par les arêtes et les sommets également, à l'exception des sommets de valence 1. Pour  $D_m(f)$ , les sommets de valence 1 ne portent pas de décoration (voir paragraphe 1.2). Pour  $\tilde{D}(f)$ , les sommets de valence 1 sont les sommets de valence 1 du diagramme maximal  $D_M(f)$  de Newton de  $f$ . Ils portent une décoration non nulle sur l'arête et la décoration 1 à l'extérieur. En fait, le sommet de valence 1 apparaissant sur le diagramme d'Eisenbud et Neumann représente le dernier diviseur de la résolution minimale de  $f$  figurant sur cette branche morte. En revanche, le sommet de valence 1 apparaissant sur le diagramme de Newton de  $f$  est un sommet qui ne représente pas de diviseur de la résolution minimale. Cependant, on verra par la suite que l'introduction de ce diviseur artificiel permet d'obtenir des résultats plus harmonieux.

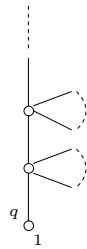


Diagramme d'Eisenbud et Neumann

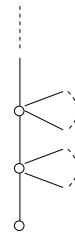


Diagramme de Newton

# Chapitre 2

## Quotients jacobiens.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier un invariant des germes de courbes planes qui est l'ensemble des quotients jacobiens d'un germe d'application.

Soit  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On considère deux germes non identiquement nuls  $f, g \in K[[x, y]]$  admettant une singularité à l'origine. Soit  $\phi$  le germe d'application défini par :

$$\begin{aligned} \phi : K^2, 0 &\longrightarrow K^2, 0 \\ (x, y) &\longrightarrow (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne de  $\phi$  est égal à

$$J(f, g) = (\partial f / \partial x)(\partial g / \partial y) - (\partial f / \partial y)(\partial g / \partial x).$$

On définit le **germe jacobien**  $\mathcal{J}$  du couple  $(f, g)$  comme étant le produit des composantes irréductibles de  $J$  qui ne divisent pas  $fg$ . Enfin, le **lieu jacobien** de  $(f, g)$ , noté  $\tilde{\mathcal{J}}$ , est le lieu réduit des zéros du germe jacobien. La **courbe discriminante** de  $(f, g)$  est définie par  $\Delta = \phi(\mathcal{J})$ . Si  $(u, v)$  sont les coordonnées de  $\phi(K^2)$ , alors par définition,  $\{u = 0\} = \phi(\{f = 0\})$  n'est pas une branche de  $\Delta$ ; donc si  $\delta$  est une branche de  $\Delta$ , on peut trouver une paramétrisation de Puiseux de  $\delta$  de la forme

$$u = v^{q_\delta/p_\delta} \left( a + \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k v^{\frac{k}{m}} \right).$$

**Définition 2.0.1.** *L'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est l'ensemble des nombres rationnels  $\frac{p_\delta}{q_\delta}$  pour les branches  $\delta$  de  $\Delta$ .*

**Remarque 2.0.2.** *Lorsque  $f$  est une forme linéaire, on retrouve la notion de quotient polaire du germe  $g$ .*

Lorsque le corps considéré est  $\mathbb{C}$  et que les germes  $f$  et  $g$  sont réduits et sans composante commune, H. Maugeudre démontre le résultat suivant ([M1] ou [M2]) :

**Théorème 2.0.3.** *L'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est un invariant de type topologique de  $(f, g)$ .*

Elle démontre également un second théorème qui permet d'évaluer les quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  sur le graphe dual de résolution minimal de  $fg$ .

**Théorème 2.0.4.** *L'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est le sous-ensemble des rationnels composé des*

$$\frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}$$

où  $\rho_v$  est une curvette issue du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture du graphe dual de résolution minimal de  $fg$ .

Nous voulons donner une démonstration algébrique du théorème 2.0.4 qui a été démontré avec des outils topologiques (décomposition de Waldhausen en variétés de Seifert) afin, en particulier, de généraliser les résultats d'H. Maugendre à un corps  $K$  algébriquement clos de caractéristique 0 et à des germes non réduits. Pour cela, nous étudions dans ce chapitre le comportement du germe jacobien de l'application  $(f, g)$  en fonction de celui de  $fg$  en utilisant les notions de poids développées au chapitre 1. Grâce à cette étude, nous comparons les diagrammes minimaux de Newton  $D_m(fg)$  et  $D_m(fg\mathcal{J})$  afin de savoir dans quelles "zones" de  $D_m(fg)$  les composantes de  $\mathcal{J}$  apparaissent sur  $D_m(fg\mathcal{J})$ . Soit  $w$  un poids. On dit que l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  si les parties initiales de  $f$  et  $g$  vérifient  $in_w(f)^{w(g)} = in_w(g)^{w(f)}$ . Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$ . Alors  $v$  est obtenu après  $k$  transformations de Newton successives (on peut avoir  $k = 0$  si  $v$  est sur le premier axe vertical). Il existe une face  $S$  du polygone de Newton  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k, y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  correspondant à ce sommet. Soit  $(\alpha, -\beta)$  un vecteur directeur de cette face, avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On dit qu'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au sommet  $v$  si l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(y_k^{N_{k-1,f}} f^k, y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  par rapport au poids  $w$ . Dans cette situation, nous ne savons pas contrôler le comportement de  $\mathcal{J}$ . Dans [KP], les auteurs soulèvent le même problème : ils utilisent un arbre  $T(f, g)$  pour étudier le comportement de  $\mathcal{J}$  et exhibent des points particuliers qu'ils nomment "points colinéaires" (qui correspondent pour notre étude aux sommets pour lesquels on est dans la situation d'Abhyankar). Pour ces points, ils concluent que la façon dont les branches de  $\mathcal{J}$  se séparent de  $T(f, g)$  n'est pas un invariant de l'arbre. Nous démontrons finalement le théorème suivant :

**Théorème 2.0.5.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes non nuls admettant une singularité à l'origine et n'ayant pas de composante commune. Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . On suppose que pour chaque sommet de rupture  $v$  de  $D_m(fg)$ , on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au sommet  $v$ . Alors l'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est le sous-ensemble des rationnels composé des*

$$\frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}$$

où  $\rho_v$  est une curvette issue du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture du diagramme minimal de Newton  $D_m(fg)$ .

En particulier, on retrouve le fait que sous ces hypothèses, si  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est un invariant du type topologique de  $(f, g)$ . On déduit de ce théorème les deux corollaires suivants :

**Corollaire 2.0.6.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes transverses admettant une singularité en  $(0, 0) \in K^2$ . Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . Alors l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est égal au sous-ensemble des rationnels*

$$\left\{ \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} \right\}_v,$$

où  $\rho_v$  est une curvette du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(fg)$ .

**Corollaire 2.0.7.** *Soit  $g \in K[[x, y]]$  un germe admettant une singularité en  $(0, 0) \in K^2$ . Soit  $D_m(g)$  le diagramme minimal de Newton de  $g$ . Alors l'ensemble des quotients polaires de  $g$  est égal au sous-ensemble des rationnels*

$$\left\{ \frac{(g, \rho_v)_0}{\text{mult}(\rho_v)} \right\}_v,$$

où  $\rho_v$  est une curvette du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(g)$ .

Du théorème 2.0.5, on déduit ensuite des résultats sur la croissance des quotients jacobiens.

**Théorème 2.0.8.** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.0.5, si l'on parcourt les géodésiques de  $f$  et de  $g$  sur  $D_m(fg)$  dans le sens positif, il y a*

- a) *décroissance (resp. croissance) stricte des quotients jacobiens de  $D_m(fg)$  le long des géodésiques strictement rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ ,*
- b) *constance des quotients jacobiens de  $(f, g)$  le long des arêtes noires de  $D_m(fg)$ ,*
- c) *décroissance (resp. croissance) non stricte des quotients jacobiens de  $(f, g)$  le long des arêtes par lesquelles passent toutes les géodésiques rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ .*

Enfin, on conclut ce chapitre par des questions concernant le polygone de Newton de la courbe discriminante  $\Delta$  qui pourront faire l'objet d'un futur travail.

## 2.1 Une remarque.

Nous voulons tout d'abord donner une nouvelle caractérisation de l'ensemble des quotients jacobiens.

**Lemme 2.1.1.** *L'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est égal à l'ensemble constitué des*

$$\frac{(g, \gamma)_0}{(f, \gamma)_0}$$

où  $\gamma$  parcourt l'ensemble des composantes irréductibles du lieu jacobien  $\tilde{\mathcal{J}}$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \phi : K^2 &\longrightarrow K^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (f(x, y), g(x, y)) \\ \tilde{\mathcal{J}} &= \{(x, y) \in K^2, \mathcal{J}(x, y) = 0\} \end{aligned}$$

et

$$\Delta = \phi(\tilde{\mathcal{J}}) = \{(f(x, y), g(x, y)) \text{ pour les } (x, y) \text{ tels que } \mathcal{J}(x, y) = 0\}.$$

Soit  $\delta$  une composante irréductible de la courbe discriminante  $\Delta$ . Alors, par définition de  $\Delta$ , il existe une composante irréductible  $\gamma$  du lieu jacobien  $\tilde{\mathcal{J}}$  telle que  $\delta = \phi(\gamma)$ . Soit  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  une paramétrisation injective de  $\gamma$ . On obtient alors

$$\begin{cases} u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = at^{\text{ord}_t f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))} + \dots = at^{(f, \gamma)_0} + \dots \\ v = g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = bt^{\text{ord}_t g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))} + \dots = bt^{(g, \gamma)_0} + \dots \end{cases}$$

où  $a, b \in K^*$ . On a donc pour  $\delta$  une expression de la forme

$$u = cv^{\frac{(f, \gamma)_0}{(g, \gamma)_0}} + \dots,$$

avec  $c \in K^*$ .

Le quotient jacobien de  $(f, g)$  associé à  $\delta$  est donc égal à

$$\frac{(g, \gamma)_0}{(f, \gamma)_0}.$$

□

## 2.2 Zones de stabilité.

Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets de  $D_m(fg)$  reliés entre eux par une arête  $[v, v']$  et tels que  $\Delta_{[v, v']} > 1$ . Soient  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur l'arête  $[v, v']$  et  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ) le produit des décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ) autres que  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ).

**Définition 2.2.1.** *Le sommet  $v''$  est interposable entre  $v$  et  $v'$  s'il existe des décorations  $a'', p'' \in \mathbb{N}$  telles que*

$$\Delta_{[v, v'']} = \alpha a'' - \beta p'' > 0 \text{ et } \Delta_{[v'', v']} = \alpha' p'' - \beta' a'' > 0.$$

Nous allons maintenant définir les zones de stabilité. On utilise la notion de quotients de contact définie au paragraphe 1.4.

**Définition 2.2.2.** *Une zone de stabilité de  $D_m(fg)$  est une partie connexe  $\mathcal{Z}$  de  $D_m(fg)$  contenant au moins un sommet de rupture  $v_{rupt}$  et ayant les propriétés suivantes :*

- (i) *si  $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}} := \{\text{sommets de la zone}\} \cup \{\text{sommets interposables dans la zone}\}$ , alors tous les sommets de  $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}$  ont le même quotient de contact, i.e.*

$$\forall v, v' \in \mathcal{V}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'};$$

- (ii)  *$\mathcal{Z}$  est maximale pour ces propriétés.*

*Si  $v$  est un sommet de rupture de la zone  $\mathcal{Z}$ , on note  $\mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}$ . Si  $v$  et  $v'$  sont deux sommets de rupture de la zone  $\mathcal{Z}$ , on a  $\mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v'}$ .*

**Remarque 2.2.3.** *Par abus de notation, on pourra noter  $v \in \mathcal{Z}$  au lieu de  $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{Z}}$ .*

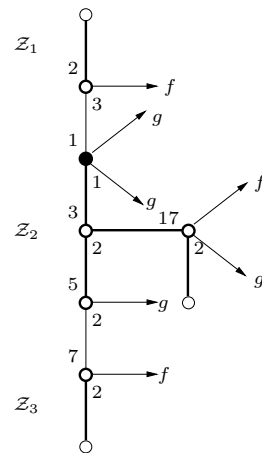
Comme le montre l'exemple suivant, les zones de stabilité ne recouvrent pas, en général, tout le diagramme de  $fg$ .

**Exemple 2.2.4.** *On considère*

$$\begin{cases} f(x, y) = (y^2 - x^3)((y^3 - x^2)^2 + x^5 y)(y^7 + x^2) \\ g(x, y) = (y^2 - x^2)((y^3 - x^2)^2 + 2x^5 y)(y^5 - x^2) \end{cases}$$

*On obtient le diagramme minimal de Newton suivant. Il y a trois zones de stabilité  $\mathcal{Z}_1$ ,  $\mathcal{Z}_2$  et  $\mathcal{Z}_3$  (représentées en gras) qui correspondent aux trois quotients de contact  $\frac{8}{9}$ , 1 et  $\frac{13}{15}$ .*





## 2.3 Notations.

Nous allons ici introduire les notations que nous utiliserons dans l'étude du germe jacobien, et citer des résultats qui nous seront utiles par la suite.

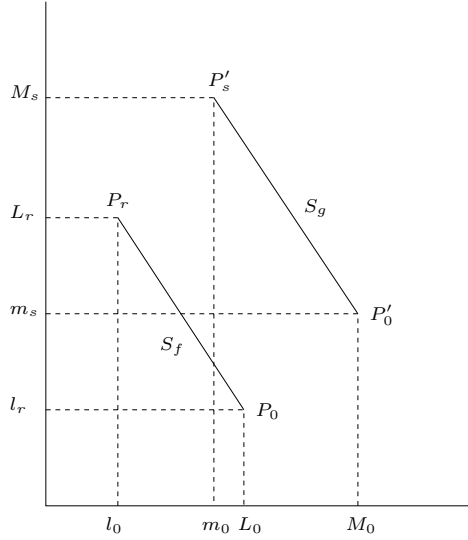
Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  et  $J = f'_x g'_y - f'_y g'_x$ . On construit le polygone de Newton  $N(f)$  de  $f$  et celui de  $g$ ,  $N(g)$ , puis on considère un poids  $w$  donné par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ .

On factorise  $in_w(f)$  et  $in_w(g)$  en produit de formes quasi-homogènes :

$$in_w f(x, y) = C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i} \text{ et } in_w g(x, y) = C' x^{m_0} y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j}.$$

On pose  $\sum_{i=1}^{r-1} l_i \beta = L_r - l_r$ ,  $\sum_{j=1}^{s-1} m_j \beta = M_s - m_s$ ,  $\sum_{i=1}^{r-1} l_i \alpha = L_0 - l_0$  et

$\sum_{j=1}^{s-1} m_j \alpha = M_0 - m_0$ . On définit les points suivants de  $N(f)$  et  $N(g)$  :  $P_0 = (L_0, l_r)$ ,  $P_r = (l_0, L_r)$ ,  $P'_0 = (M_0, m_s)$  et  $P'_s = (m_0, M_s)$ .



On a alors le résultat bien connu ([A], prop. 17.4, p. 122) :

**Proposition 2.3.1.** *Pour un poids  $w$  donné, on a*

$$J(in_w(f), in_w(g)) = 0 \Leftrightarrow in_w(f)^{w(g)} = in_w(g)^{w(f)}.$$

Ceci équivaut au fait que

$$\begin{aligned} in_w f(x, y) &= C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i} \text{ et} \\ in_w g(x, y) &= C' x^{m_0} y^{m_s} \prod_{i=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_i y^\beta)^{m_i} \\ \text{avec } \frac{m_i}{l_i} &= \frac{w(g)}{w(f)} \text{ pour tout } i = 0, \dots, r. \end{aligned}$$

**Définition 2.3.2.** Si pour un poids  $w$  défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ , on a

$$\begin{aligned} in_w f(x, y) &= C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i}, \\ in_w g(x, y) &= C' x^{m_0} y^{m_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{m_i} \\ \text{et } \frac{m_i}{l_i} &= \frac{w(g)}{w(f)} \text{ pour tout } i = 0, \dots, r, \end{aligned}$$

alors on dit qu'on est dans la **situation d'Abhyankar** pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ .

**Définition 2.3.3.** Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$ . Alors  $v$  est obtenu après  $k$  transformations de Newton successives (on peut avoir  $k = 0$  si  $v$  est sur le premier axe vertical). Il existe une face  $S$  du polygone de Newton  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  correspondant à ce sommet. Soit  $(\alpha, -\beta)$  un vecteur directeur de cette face, avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On dit qu'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au sommet  $v$  si l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(y_k^{N_{k-1,f}} f^k, y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  par rapport au poids  $w$ .

**Lemme 2.3.4.** Si l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar, alors

$$in_w J(f, g) = J(in_w(f), in_w(g)).$$

*Démonstration.* On écrit

$$f = in_w(f) + \tilde{f} \text{ et } g = in_w(g) + \tilde{g}$$

avec  $w(f) < w(\tilde{f})$  et  $w(g) < w(\tilde{g})$ .

On a alors

$$J(f, g) = J(in_w(f), in_w(g)) + h$$

avec

$$w(J(in_w(f), in_w(g))) = w(f) + w(g) - w(x) - w(y)$$

et

$$w(h) > w(f) + w(g) - w(x) - w(y).$$

Donc si  $J(in_w(f), in_w(g)) \neq 0$ , on a

$$in_w J(f, g) = J(in_w(f), in_w(g)).$$

□

**Définition 2.3.5.** Si pour un poids  $w$  défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ , on a les deux assertions suivantes :

1. il existe  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$  et  $j_0 \in \{1, \dots, s-1\}$  tels que

$$a_{i_0} = a'_{j_0},$$

- 2.

$$\frac{m_{j_0}}{l_{i_0}} = \frac{w(g)}{w(f)},$$

alors on dit qu'on est dans la **situation d'Abhyankar faible** pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a_{i_0}$ .

## 2.4 Nouvelle formulation du théorème 2.0.5.

Avant de pouvoir reformuler le théorème 2.0.5, on doit démontrer la proposition suivante :

**Proposition 2.4.1.** *Soient  $v$  un sommet de  $D_m(fg\mathcal{J})$  et  $\mathcal{Q}_v$  le quotient de contact du sommet  $v$ . Soit  $\gamma_v$  une branche du germe jacobien  $\mathcal{J}$  se séparant de  $fg$  au sommet  $v$ . Alors on a*

$$\frac{(g, \gamma_v)_0}{(f, \gamma_v)_0} = \mathcal{Q}_v.$$

*Démonstration.* Soit  $\rho_v$  une curvette du sommet  $v$ . On utilise la proposition 1.5.1 pour calculer les multiplicités d'intersection. Soit  $C \in \mathbb{N}^*$  le produit des nombres adjacents à la géodésique joignant la flèche représentant  $\gamma_v$  au sommet  $v$ . Alors on a

$$(f, \gamma_v)_0 = C(f, \rho_v)_0 \text{ et } (g, \gamma_v)_0 = C(g, \rho_v)_0.$$

Donc

$$\frac{(g, \gamma_v)_0}{(f, \gamma_v)_0} = \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} = \mathcal{Q}_v.$$

□

Enfin, on a déjà vu au paragraphe 1.7 la relation existant entre diagramme minimal de Newton et graphe de résolution minimal. En particulier, on sait que les sommets de rupture du diagramme minimal de Newton et ceux du graphe minimal de résolution sont en bijection.

On utilisera par la suite la terminologie suivante :

**Définition 2.4.2.** *On appelle **paquet de  $\mathcal{J}$  issu du sommet  $v$**  le produit des branches de  $\mathcal{J}$  qui se séparent de  $fg$  au sommet  $v$  du diagramme minimal  $D_m(fg\mathcal{J})$  de Newton de  $fg\mathcal{J}$ .*

Evelia García Barroso utilise la même terminologie sur les diagrammes d'Eggers dans [GB].

Le théorème 2.0.5 peut maintenant s'énoncer de la façon qui suit. Il s'agit en fait d'un énoncé légèrement plus fort que le théorème 2.0.5, puisqu'il n'exclut pas les sommets pour lesquels on est dans la situation d'Abhyankar du diagramme, mais dit que l'on ne sait pas conclure pour les zones contenant ces sommets.

**Théorème 2.4.3.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes non nuls admettant une singularité à l'origine et n'ayant pas de composante commune. Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$  : c'est un sous-diagramme de  $D_m(fg\mathcal{J})$ , et les zones de stabilités de  $D_m(fg)$  découpent  $D_m(fg\mathcal{J})$  en plusieurs zones.*

*Il n'y a aucun paquet de  $\mathcal{J}$  sortant sur  $D_m(fg\mathcal{J})$  en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ . De plus, dans chaque zone de stabilité  $\mathcal{Z}$  de  $D_m(fg)$  ne contenant pas de sommet de rupture de  $D_m(fg)$  pour lequel on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$ , on peut trouver un sommet  $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{Z}}$  tel qu'un paquet de  $\mathcal{J}$  se sépare de  $fg$  en ce sommet sur  $D_m(fg\mathcal{J})$ .*

## 2.5 Étude des zones de stabilité.

On considère deux germes  $f, g \in K[[x, y]]$  et le diagramme minimal de Newton  $D_m(fg)$  de  $fg$ . Nous voulons dans ce paragraphe étudier les zones de stabilité de  $D_m(fg)$ . Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$  et soit  $v'$  un sommet de rupture, un sommet de valence 1 ou une flèche connecté à  $v$  par une arête et tel que  $v \prec v'$ . On suppose que le sommet  $v$  est sur un axe vertical obtenu après les  $k$  transformations de Newton suivantes (on peut avoir  $k = 0$  si  $v$  est sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$ ) : pour  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^i : \quad K^2 &\longrightarrow K^2 \\ (x_i, y_i) &\longmapsto (y_i^{q^{i-1}}(a_i^{p^{i-1}} + x_i), a_i^{q^{i-1}}y_i^{p^{i-1}}) \end{aligned}$$

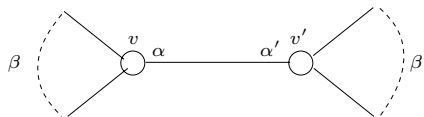
où  $p^{i-1}, q^{i-1} \in \mathbb{N}$  sont tels que  $p^{i-1}p^{i-1} - q^{i-1}q^{i-1} = 1$ . D'après le lemme 1.5.4, on a

$$f \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(x_k, y_k) = y_k^{N_{k-1, f}} f^k(x_k, y_k)$$

$$\text{et } g \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(x_k, y_k) = y_k^{N_{k-1, g}} g^k(x_k, y_k).$$

Si l'arête  $[v, v']$  est horizontale et si  $v'$  est un sommet de rupture,  $v'$  est obtenu après un certain nombre de transformations de Newton  $\Phi^j$ ,  $j = k + 1, \dots, l$ .

Soient  $\alpha$  la décoration proche de  $v$  située sur l'arête  $[v, v']$  et  $\beta$  le produit des décorations proches de  $v$  autres que  $\alpha$ . Si  $v'$  est un sommet de rupture, soient  $\alpha'$  la décoration proche de  $v'$  située sur l'arête  $[v, v']$  et  $\beta'$  le produit des décorations proches de  $v'$  autres que  $\alpha'$ .



**Définition 2.5.1.** Soit  $f_1$  (resp.  $g_1$ ) le produit des branches de  $f$  (resp.  $g$ ) représentées par les flèches telles que la géodésique joignant  $v$  à une de ces flèches ne passe pas par  $v'$ . Soit  $f_2$  (resp.  $g_2$ ) le produit des branches de  $f$  (resp.  $g$ ) représentées par les flèches telles que la géodésique joignant  $v'$  à une de ces flèches ne passe pas par  $v$ . On a  $f = f_1 f_2$  et  $g = g_1 g_2$ .

Puisque  $v$  est un sommet de rupture de  $D_m(fg)$ , il existe une face  $S$  du polygone de Newton  $N(y_k^{N_{k-1, f}} f^k y_k^{N_{k-1, g}} g^k)$  correspondant à ce sommet. Soit  $(p, -q)$  un vecteur directeur de cette face, avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . Alors il existe une face  $S_{f^k}$  de  $N(y_k^{N_{k-1, f}} f^k)$  et/ou une face  $S_{g^k}$  de  $N(y_k^{N_{k-1, g}} g^k)$  de vecteur directeur  $(p, -q)$ . Soit  $w_k$  le poids défini par  $w_k(x_k) = q$  et  $w_k(y_k) = p$ .

Si  $v'$  est un sommet de rupture et si l'arête  $[v, v']$  est verticale, alors il existe une face  $S'_{f^k}$  de  $N(y_k^{N_{k-1, f}} f^k)$  et/ou une face  $S'_{g^k}$  de  $N(y_k^{N_{k-1, g}} g^k)$  de direction  $(p', -q')$  avec  $p', q' \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(p', q') = 1$ , correspondant au sommet  $v'$ . Soit  $w'_k$  le poids défini par  $w'_k(x_k) = q'$  et  $w'_k(y_k) = p'$ . De plus, puisque  $v < v'$ , on a  $q/p < q'/p'$ .

Soient  $D_{f^k}$ ,  $D'_{f^k}$ ,  $D_{g^k}$  et  $D'_{g^k}$  les droites suivantes :

$$\begin{aligned} D_{f^k} &: qx + py = w_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k), \\ D'_{f^k} &: q'x + p'y = w'_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k), \\ D_{g^k} &: qx + py = w_k(y_k^{N_{k-1,g}} g^k), \\ D'_{g^k} &: q'x + p'y = w'_k(y_k^{N_{k-1,g}} g^k). \end{aligned}$$

On remarque que par construction,  $D_{f^k}$  est la droite de direction donnée par  $(p, q)$  qui intersecte  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  soit en un point soit en une face de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ .

Enfin, soient les deux points  $Q$  et  $Q'$  définis par

$$\{Q\} = D_{f^k} \cap D'_{f^k} \text{ et } \{Q'\} = D_{g^k} \cap D'_{g^k}.$$

Si  $v'$  est une flèche ou un sommet de valence 1, soit  $Q$  le point d'ordonnée maximale de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  et soit  $Q'$  le point d'ordonnée maximale de  $N(y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$ .

**Lemme 2.5.2.**  $Q$  est un sommet de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  et  $Q'$  est un sommet de  $N(y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$ .

*Démonstration.* Si  $v'$  est une flèche ou un sommet de valence 1, c'est évident par définition de  $Q$  et  $Q'$ . Supposons donc que  $v'$  est un sommet de rupture. Posons  $Q = (x, y)$ . On a alors  $qx + py = w_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  et  $q'x + p'y = w'_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ .

Si  $in_{w_k}(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  est constitué d'un seul monôme, on définit  $Q_1 = (x_1, y_1)$  par  $\{Q_1\} = D_{f^k} \cap N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ . Considérons la face  $S_{f^k}^1$  de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  de pente  $-q^1/p^1$  telle que  $q^1/p^1 < q/p$  et telle qu'il n'existe pas de face  $S_{f^k}''$  de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  de pente  $-q''/p''$  telle que  $q^1/p^1 < q''/p'' < q/p$ . La face  $S_{f^k}^1$  est portée par la droite  $D_{f^k}^1$  d'équation  $D_{f^k}^1 : q^1x + p^1y = w_k^1(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ , où  $w_k^1$  est le poids donné par  $w_k^1(x) = q^1$  et  $w_k^1(y) = p^1$ . Soit  $Q'' = (x'', y'')$  le point défini par  $\{Q''\} = D_{f^k}^1 \cap D_{f^k}$ . Si  $Q'' \neq Q_1$ , alors on a deux points  $Q_1$  et  $Q''$  vérifiant  $qx_1 + py_1 = w_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  et  $qx'' + py'' = w_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  et  $in_{w_k}(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  admet alors au moins deux monômes, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc  $D_{f^k}^1 \cap D_{f^k} = \{Q_1\}$ . En particulier,  $Q_1 \in S_{f^k}^1 \in N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ .

Si  $in_{w_k}(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  a au moins deux monômes, alors par construction, on a  $D_{f^k} \cap N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k) = S_{f^k}$  et on définit  $Q_1 = (x_1, y_1)$  par l'extrémité de  $S_{f^k}$  d'abscisse minimale. On a  $x_1 \geq x$  car sinon on aurait un point  $Q_1$  de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  en dessous de  $D_{f^k}$ , ce qui est impossible par construction de  $D_{f^k}$ .

De même, si  $in_{w'_k}(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  est constitué d'un seul monôme, on définit  $Q_2 = (x_2, y_2)$  par  $\{Q_2\} = D'_{f^k} \cap N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ . Considérons la face  $S_{f^k}^2$  de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  de pente  $-q^2/p^2$  telle que  $q^2/p^2 > q'/p'$  et telle qu'il n'existe pas de face  $S_{f^k}''$  de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  de pente  $-q''/p''$  telle que  $q^2/p^2 > q''/p'' > q'/p'$ .  $S_{f^k}^2$  est portée par la droite  $D_{f^k}^2$  d'équation  $D_{f^k}^2 : q^2x + p^2y = w_k^2(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ , où  $w_k^2$  est le poids donné par  $w_k^2(x) = q^2$  et  $w_k^2(y) = p^2$ . Alors avec le même raisonnement que ci-dessus,  $D_{f^k}^2 \cap D_{f^k} = \{Q_2\}$ . En particulier,  $Q_2 \in S_{f^k}^2 \in N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ .

Si  $in_{w'_k}(y_k^{N_{k-1},f} f^k)$  a au moins deux monômes, alors par construction, on a  $D'_{fk} \cap N(y_k^{N_{k-1},f} f^k) = S'_{fk}$  et on définit  $Q_2 = (x_2, y_2)$  par l'extrémité de  $S'_{fk}$  d'abscisse maximale. On a  $x_2 \leq x$  car sinon on aurait un point  $Q_2$  de  $N(y_k^{N_{k-1},f} f^k)$  en dessous de  $D_{fk}$ , ce qui est impossible par construction de  $D_{fk}$ .

Enfin, on a  $Q_1 = Q_2 = Q$  car sinon, il existerait une ou plusieurs faces de  $N(y_k^{N_{k-1},f} f^k)$  entre  $Q_1$  et  $Q_2$  de pente  $-q''/p''$  telle que  $q/p < q''/p'' < q'/p'$ , ce qui est impossible car  $v$  et  $v'$  sont consécutifs sur  $D_m(fg)$ .

Dans tous les cas,  $Q$  est l'intersection de deux faces de  $N(y_k^{N_{k-1},f} f^k)$  donc c'est un sommet de  $N(y_k^{N_{k-1},f} f^k)$ .

La démonstration est identique pour  $Q'$ .  $\square$

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 2.5.3.** *Soient  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$  et  $v'$  un sommet de rupture, un sommet de valence 1 ou une flèche connecté à  $v$  par une arête et tel que  $v \prec v'$ . Alors avec les notations précédentes, on a les résultats suivants.*

(1) *Si  $v'$  est un sommet de rupture,*

(i) *si l'arête  $[v, v']$  est verticale,*

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow Q \text{ et } Q' \text{ sont homothétiques par rapport à l'origine,}$$

(ii) *si l'arête  $[v, v']$  est horizontale, alors*

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow \frac{w_k(y_k^{N_{k-1},g} g^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1},f} f^k)} = \frac{w_k(y_k^{N_{k-1},g_2} g_2^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1},f_2} f_2^k)}.$$

(iii) *De plus, si  $\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'}$ , alors*

$$[v, v'] \subset \mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v'}.$$

(iv) *Enfin, si  $\mathcal{Q}_v \neq \mathcal{Q}_{v'}$ , alors l'arête  $]v, v'[$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .*

(2) *Si  $v'$  est un sommet de valence 1, alors  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine et  $[v, v'[ \subset \mathcal{Z}_v$ .*

(3) *Si  $v'$  est une flèche,*

(i) *si l'arête  $[v, v']$  est verticale, si  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine, alors  $[v, v'[ \subset \mathcal{Z}_v$ . Sinon, l'arête  $]v, v'[$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .*

(ii) *si l'arête  $[v, v']$  est horizontale, si*

$$\frac{w_k(y_k^{N_{k-1},g} g^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1},f} f^k)} = \frac{w_k(y_k^{N_{k-1},g_2} g_2^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1},f_2} f_2^k)},$$

*alors  $[v, v'[ \subset \mathcal{Z}_v$ . Sinon, l'arête  $]v, v'[$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .*

On a alors une description exhaustive des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ . En particulier, il est clair que les zones de stabilité ne recouvrent pas tout le diagramme minimal de Newton de  $fg$ .

**Remarque 2.5.4.** *Si le sommet  $v$  est sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  et si l'arête  $[v, v']$  est horizontale et correspond à une racine  $a$ , soient  $p$  la décoration figurant en dessous de  $v$ ,  $q$  celle figurant au dessus et  $w$  le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ . Alors*

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow \text{On est dans la situation d'Abhyankar faible pour } (f, g) \text{ par rapport au poids } w \text{ et à la racine } a.$$

**Remarque 2.5.5.** *Puisque l'on suppose ici que  $f$  et  $g$  n'ont pas de composantes communes, dans les cas (3) (i) et (ii) de la proposition, l'arête  $]v, v'[$  est toujours en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .*

*Démonstration de la proposition 2.5.3.* Soient  $\rho_v$  et  $\rho_{v'}$  des curvettes des sommets  $v$  et  $v'$ . Remarquons que

$$\begin{aligned} (f, \rho_v)_0 &= (f_1, \rho_v)_0 + (f_2, \rho_v)_0 \\ (g, \rho_v)_0 &= (g_1, \rho_v)_0 + (g_2, \rho_v)_0 \\ (f, \rho_{v'})_0 &= (f_1, \rho_{v'})_0 + (f_2, \rho_{v'})_0 = \frac{\beta'}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha'}{\beta}(f_2, \rho_v)_0 \\ (g, \rho_{v'})_0 &= (g_1, \rho_{v'})_0 + (g_2, \rho_{v'})_0 = \frac{\beta'}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha'}{\beta}(g_2, \rho_v)_0 \end{aligned}$$

Donc

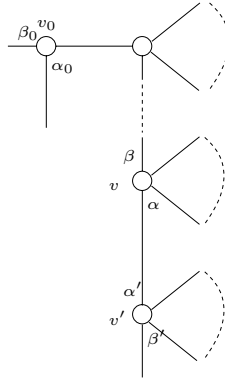
$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} &\Leftrightarrow (f, \rho_v)_0(g, \rho_{v'})_0 = (g, \rho_v)_0(f, \rho_{v'})_0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha\alpha' - \beta\beta')(f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (\alpha\alpha' - \beta\beta')(f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 \end{aligned}$$

Or  $\alpha\alpha' - \beta\beta' = \Delta_{[v, v']} > 0$ , donc

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0.$$

(1) Supposons que  $v'$  est un sommet de rupture.

- (i) Si l'arête  $[v, v']$  est verticale,  $v$  et  $v'$  ont été obtenus après  $k$  transformations de Newton successives. Soit  $v_0$  le sommet précédant  $v$  et  $v'$ , et soient  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  les décorations attenantes à  $v_0$ . Avec les notations précédentes, on a  $\alpha = p$ ,  $\beta = \alpha_0\beta_0p + q$ ,  $\beta' = p'$  et  $\alpha' = \alpha_0\beta_0p' + q'$ .





On a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} D_{f^k} : qx + py &= N_{v,f}, & D'_{f^k} : q'x + p'y &= N_{v',f}, \\ D_{g^k} : qx + py &= N_{v,g}, & D'_{g^k} : q'x + p'y &= N_{v',g}. \end{aligned}$$

où  $N_{v,f} = (f, \rho_v)_0$ ,  $N_{v',f} = (f, \rho_{v'})_0$ ,  $N_{v,g} = (g, \rho_v)_0$  et  $N_{v',g} = (g, \rho_{v'})_0$ .

Posons

$$Q = (x_1, x_2) \text{ et } Q' = (x'_1, x'_2).$$

Par définition de  $Q$  et  $Q'$ , on a  $qx_1 + px_2 = N_{v,f}$ ,  $q'x_1 + p'x_2 = N_{v',f}$ ,  $qx'_1 + px'_2 = N_{v,g}$  et  $q'x'_1 + p'x'_2 = N_{v',g}$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} &\Leftrightarrow \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} = \frac{(g, \rho_{v'})_0}{(f, \rho_{v'})_0} \Leftrightarrow \frac{N_{v,g}}{N_{v,f}} = \frac{N_{v',g}}{N_{v',f}} \\ &\Leftrightarrow \frac{qx_1 + px_2}{q'x_1 + p'x_2} = \frac{qx'_1 + px'_2}{q'x'_1 + p'x'_2} \\ &\Leftrightarrow (qx_1 + px_2)(q'x'_1 + p'x'_2) = (q'x_1 + p'x_2)(qx'_1 + px'_2) \\ &\Leftrightarrow (pq' - qp')(x_1x'_2 - x_2x'_1) = 0 \end{aligned}$$

Or

$$pq' - qp' = \alpha(\alpha' - \alpha_0\beta_0\beta') - (\beta - \alpha_0\beta_0\alpha)\beta' = \alpha\alpha' - \beta\beta' = \Delta_{[v,v']} > 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} &\Leftrightarrow x_1x'_2 = x_2x'_1 \\ &\Leftrightarrow Q \text{ et } Q' \text{ sont homothétiques par rapport à l'origine.} \end{aligned}$$

(ii) Supposons que l'arête  $[v, v']$  est horizontale. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} &\Leftrightarrow (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 \\ &\Leftrightarrow ((f_1, \rho_v)_0 + (f_2, \rho_v)_0)(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0((g_1, \rho_v)_0 + (g_2, \rho_v)_0) \\ &\Leftrightarrow (f, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g, \rho_v)_0 \\ &\Leftrightarrow N_{v,f}N_{v,g_2} = N_{v,f_2}N_{v,g} \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 1.5.4, on a  $N_{v,f} = w_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ . Donc

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow w_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)w_k(y_k^{N_{k-1,g_2}} g_2^k) = w_k(y_k^{N_{k-1,f_2}} f_2^k)w_k(y_k^{N_{k-1,g}} g^k).$$

(iii) On suppose que  $\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'}$ . On doit montrer que pour tout sommet  $v''$  interposable entre  $v$  et  $v'$ , on a  $\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} = \mathcal{Q}_{v''}$ .

Soit  $v''$  un tel sommet. Soient  $\alpha''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v, v'']$  et  $\beta''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v'', v']$ . On a alors

$$\begin{aligned} (f, \rho_{v''})_0 &= \frac{\beta''}{\alpha} (f_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\alpha'} (f_2, \rho_v)_0, \\ (g, \rho_{v''})_0 &= \frac{\beta''}{\alpha} (g_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\alpha'} (g_2, \rho_v)_0. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mathcal{Q}_{v''}}{\mathcal{Q}_v} = \frac{\left(\frac{\beta''}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\alpha'}(g_2, \rho_v)_0\right)\left((f_1, \rho_v)_0 + \beta(f_2, \rho_v)_0\right)}{\left(\frac{\beta''}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\alpha'}(f_2, \rho_v)_0\right)\left((g_1, \rho_v)_0 + \beta(g_2, \rho_v)_0\right)} = 1$$

car

$$(f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0.$$

- (iv) On suppose que  $\mathcal{Q}_v \neq \mathcal{Q}_{v'}$ . Soit  $v'' \in ]v, v'[$  un sommet interposable tel que  $\mathcal{Q}_{v''} = \mathcal{Q}_v$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{v''} = \mathcal{Q}_v &\Leftrightarrow \frac{(g, \rho_{v''})_0}{(f, \rho_{v''})_0} = \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{\beta''}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\alpha'}(g_2, \rho_v)_0}{\frac{\beta''}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\alpha'}(f_2, \rho_v)_0} = \frac{(g_1, \rho_v)_0 + (g_2, \rho_v)_0}{(f_1, \rho_v)_0 + (f_2, \rho_v)_0} \\ &\Leftrightarrow (\alpha\alpha'' - \beta\beta'')(f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (\alpha\alpha'' - \beta\beta'')(f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 \end{aligned}$$

Or  $\alpha\alpha'' - \beta\beta'' = \Delta_{[v, v'']} > 0$ , donc

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v''} \Leftrightarrow (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 \Leftrightarrow \mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. Donc l'arête  $]v, v'[$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .

- (2) Si  $v'$  est un sommet de valence 1, on doit montrer que pour tout sommet  $v''$  interposable entre  $v$  et  $v'$ , on a  $\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v''}$ . Puisque  $v'$  est un sommet de valence 1, on a  $f_2 = g_2 = 1$ . Soient  $\alpha''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v, v'']$  et  $\beta''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v'', v']$ . On a alors

$$(f, \rho_{v''})_0 = \frac{\beta''}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0 \text{ et } (g, \rho_{v''})_0 = \frac{\beta''}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0.$$

Donc

$$\frac{\mathcal{Q}_{v''}}{\mathcal{Q}_v} = \frac{\frac{\beta''}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0(f_1, \rho_v)_0}{\frac{\beta''}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0} = 1.$$

- (3) Supposons que  $v'$  est une flèche.

- (i) Si l'arête  $[v, v']$  est verticale, soit  $v''$  un sommet interposable entre  $v$  et  $v'$ . Alors d'après la démonstration de (1) (i), (iii) et (iv) et la démonstration du lemme 2.5.2, si  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine, alors  $\mathcal{Q}_{v''} = \mathcal{Q}_v$ . Sinon,  $\mathcal{Q}_{v''} \neq \mathcal{Q}_v$ . Donc si  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine,  $[v, v'] \subset \mathcal{Z}_v$ . Sinon, l'arête  $]v, v'[$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .
- (ii) Si l'arête  $[v, v']$  est horizontale, soit  $v''$  un sommet interposable entre  $v$  et  $v'$ . Alors d'après la démonstration de (1) (ii), (iii) et (iv), si

$$\frac{w_k(y_k^{N_{k-1, g}} g^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1, f}} f^k)} = \frac{w_k(y_k^{N_{k-1, g_2}} g_2^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1, f_2}} f_2^k)},$$

alors  $\mathcal{Q}_{v''} = \mathcal{Q}_v$ . Sinon,  $\mathcal{Q}_{v''} \neq \mathcal{Q}_v$ . Donc si

$$\frac{w_k(y_k^{N_{k-1},g} g^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1},f} f^k)} = \frac{w_k(y_k^{N_{k-1},g_2} g_2^k)}{w_k(y_k^{N_{k-1},f_2} f_2^k)},$$

alors  $[v, v'[ \subset \mathcal{Z}_v$ . Sinon, l'arête  $]v, v'[$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .

□

## 2.6 Étude du germe jacobien.

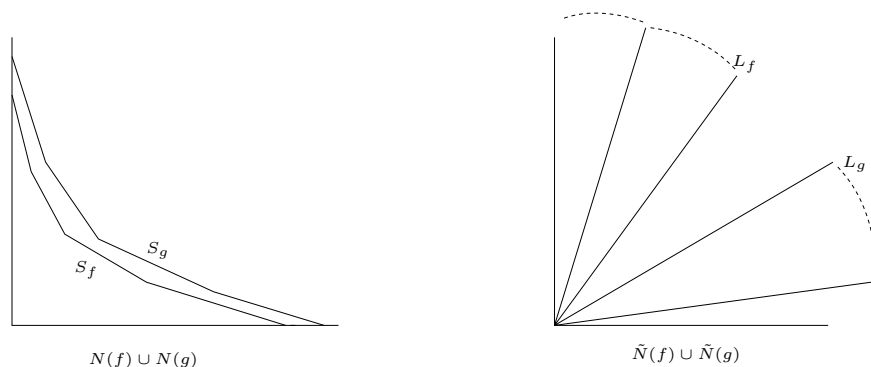
Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  les équations de deux germes non nuls admettant une singularité à l'origine et n'ayant pas de composantes communes. Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . Nous voulons dans cette partie étudier le comportement du germe jacobien  $\mathcal{J}$  de ces deux germes afin de montrer qu'il y a au moins un paquet de  $\mathcal{J}$  qui sort dans chaque zone de stabilité de  $D_m(fg)$  ne contenant pas de sommet de rupture de  $D_m(fg)$  pour lequel on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  et qu'aucun paquet de  $\mathcal{J}$  ne sort en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ . Dans la démonstration, nous allons étudier le déterminant de la matrice jacobienne  $J(f, g)$ . On rappelle que  $\mathcal{J}$  est le produit des composantes de  $J$  qui ne divisent pas  $fg$ . Nous allons d'abord étudier les zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ , puis nous montrerons que les résultats obtenus pour le premier axe vertical peuvent se transmettre aux axes verticaux suivants.

### 2.6.1 Étude du premier axe vertical de $D_m(fg)$ : principe.

Remarquons tout d'abord que la notion de premier axe vertical n'est pas définie sur  $D_m(fg)$  mais sur  $D(fg)$  : en effet, on fait le choix d'un système de coordonnées pour construire  $D(fg)$  et l'on obtient un diagramme admettant plusieurs axes verticaux successifs. La notion d'axe vertical dépend du choix du système de coordonnées que l'on a fait. Le diagramme minimal de Newton  $D_m(fg)$  est un sous-arbre du diagramme de Newton  $D(fg)$ . On définit donc la notion de premier axe vertical sur  $D_m(fg)$  de la façon suivante :

**Définition 2.6.1.** *On dit qu'un sommet  $v$  de  $D_m(fg) \subset D(fg)$  est sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  si c'est un sommet du premier axe vertical de  $D(fg)$ .*

Nous voulons étudier les zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ . Considérons l'union des deux polygones de Newton  $N(f) \cup N(g)$  et l'union des deux éventails duaux  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ .



On considère  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  avec  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ . On leur associe le poids  $w$  défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On définit les droites  $D_f : \beta x + \alpha y = w(f)$  et  $D_g : \beta x + \alpha y = w(g)$ , et la droite  $L$  d'équation  $\beta x - \alpha y = 0$ . Le principe est d'examiner s'il y a des faces de

$N(f) \cup N(g)$  portées par les droites  $D_f$  et  $D_g$  et si la droite  $L$  est ou non une droite de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . On reprend les notations du paragraphe 2.3. Il y a trois cas possibles :

**Cas 1 :**

$$in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_1} \text{ et } in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_1}.$$

Alors l'intersection de  $N(f)$  et  $D_f$  est un point et l'intersection de  $N(g)$  et  $D_g$  est un point. D'autre part, la droite  $L$  n'est pas une droite de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ .

**Cas 2 :**

$$in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i} \text{ et } in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_s},$$

(on a une situation symétrique si  $in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_r}$  et  $in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j}$ ). Alors l'intersection de  $N(f)$  et  $D_f$  est une face  $S_f$  de  $N(f)$  mais l'intersection de  $N(g)$  et  $D_g$  est un point. De plus,  $L$  est une droite de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ .

**Cas 3 :**

$$in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i} \text{ et } in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j}.$$

Alors l'intersection de  $N(f)$  et  $D_f$  est une face  $S_f$  de  $N(f)$  et l'intersection de  $N(g)$  et  $D_g$  est une face  $S_g$  de  $N(g)$ . De plus,  $L$  est une droite de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ .

Grâce à la proposition 2.5.3, nous savons localiser les zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  et les parties du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  situées à l'extérieur des zones de stabilité. Nous les représentons en grisant  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  de la façon suivante :

**Zones de type 1 :** Si  $v_{\alpha,\beta}$  est un sommet de rupture du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus, et tel que  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}} = \{v_{\alpha,\beta}\}$ , alors la droite  $L$  d'équation  $\beta x - \alpha y = 0$  est une droite de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . On la trace normalement et les cônes situés au dessus et en dessous de  $v_{\alpha,\beta}$  sont laissés en blanc. La zone  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  est représentée sur  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  par la droite  $L$ .

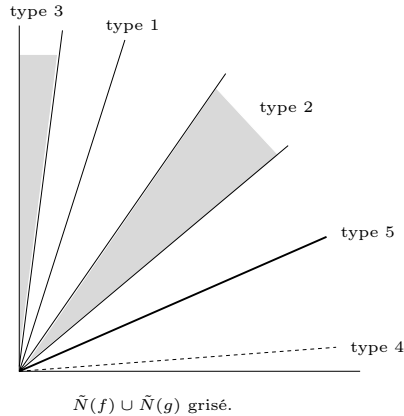
**Zones de type 2 :** Si  $v_{\alpha,\beta}$  et  $v'_{\alpha',\beta'}$  sont deux sommets de rupture du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous,  $\beta$  au dessus,  $\alpha'$  en dessous et  $\beta'$  au dessus, et tels que les deux points  $Q$  et  $Q'$  définis au paragraphe 2.5 sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ , alors  $[v, v'] \subset \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}} = \mathcal{Z}_{v'_{\alpha',\beta'}}$ . Les droites  $L$  d'équation  $\beta x - \alpha y = 0$  et  $L'$  d'équation  $\beta' x - \alpha' y = 0$  sont des droites de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . On les trace normalement et on grise le cône engendré par  $L$  et  $L'$ . La partie de la zone  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}} = \mathcal{Z}_{v'_{\alpha',\beta'}}$  considérée est représentée sur  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  par le cône grisé et les deux droites  $L$  et  $L'$ .

**Zones de type 3 :** Soit  $v_{\alpha,\beta}$  le sommet de rupture le plus bas (resp. haut) du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ . Il est connecté à une flèche ou un sommet de valence 1  $v'$ . Si le

sommet  $v$  porte les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus, et s'il est tel que les deux points  $Q$  et  $Q'$  définis au paragraphe 2.5 sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ , alors  $[v, v'] \subset \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$ . La droite  $L$  d'équation  $\beta x - \alpha y = 0$  est une droite de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . De plus,  $L$  est la droite la plus proche de l'axe des ordonnées (resp. abscisses) de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . Dans ce cas, on grise le cône engendré par  $L$  et l'axe des ordonnées (resp. abscisses). La partie de la zone  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  considérée est représentée par le cône grisé et la droite  $L$ .

**Zones de type 4 :** Soit  $S$  une face exceptionnelle de  $N(fg)$  de pente  $-1/p$  (resp.  $-q$ ). Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = 1$  et  $w(y) = p$  (ou  $w(x) = q$  et  $w(y) = 1$ ). Alors d'après les règles de minimalisation des diagrammes, il n'y a pas de sommet sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la face  $S$ . La droite  $L$  d'équation  $x - py = 0$  (resp.  $qx - y = 0$ ) appartient à  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  et on la représente en pointillés. De plus, on est à l'extérieur des zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ .

**Zones de type 5 :** Si  $v_{\alpha,\beta}$  est un sommet de rupture du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus, et tel que  $v_{\alpha,\beta}$  est l'extrémité d'une ou plusieurs arêtes horizontales pour lesquelles on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$  et à une racine  $a$ , alors la droite  $L$  d'équation  $\beta x - \alpha y = 0$  est une droite de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  et on la trace en gras. La partie de la zone  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  considérée est représentée sur  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  par la droite  $L$  tracée en gras.



Nous allons étudier le déterminant de la matrice jacobienne  $J$  plutôt que le germe jacobien  $\mathcal{J}$ . Lorsque la face  $S$  que l'on étudie est clairement définie, on note  $p_f(t)$ ,  $p_g(t)$  et  $p_J(t)$  pour désigner les polynômes associés à  $S$  et aux germes  $f$ ,  $g$  et  $J$  (paragraphe 1.2). Nous allons étudier les différents types de zones. Dans chaque cas de figure, on veut montrer que  $J$  ne sort pas en dehors des zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ , qu'il y a au moins un paquet de  $J$  qui sort dans chaque zone de stabilité, que  $J$  suit  $f$  et/ou  $g$  le long des arêtes horizontales ne se terminant pas par une flèche et que  $J$  suit  $f$  ou  $g$  le long d'une arête horizontale se terminant par une flèche si et seulement si  $J$  a une composante commune avec  $f$  ou  $g$  représentée par cette flèche.

### 2.6.2 Extérieur des zones du premier axe vertical de $D_m(fg)$ , zones de type 4.

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+2}$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On se place à l'extérieur des zones de stabilité de  $D_m(fg)$  : on est dans un cône blanc  $\Delta$  de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  ou bien sur une droite  $L$  d'équation  $\beta x - \alpha y = 0$  représenté en pointillés et on est dans une zone de type 4.

Soient les trois droites  $D_f : \beta x + \alpha y = w(f)$ ,  $D_g : \beta x + \alpha y = w(g)$  et  $D_J : \beta x + \alpha y = w(J)$ . Alors soit  $D_f \cap N(f) = \{Q\}$  et  $D_g \cap N(g) = \{Q'\}$  (cas du cône blanc), soit il existe une face exceptionnelle  $S \in N(fg)$ , donc  $D_f \cap N(f) = S_f$  et/ou  $D_g \cap N(g) = S_g$  et  $S_f$  et  $S_g$  correspondent à une même racine  $a$  (droite en pointillés).

**Proposition 2.6.2.** *Il n'y a pas de paquet de  $J$  se séparant de  $fg$  en dehors des zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  sur  $D_m(fgJ)$ . De plus, s'il existe une face exceptionnelle  $S_f = N(f) \cap D_f$  et/ou une face exceptionnelle  $S_g = N(g) \cap D_g$  et si l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ , alors  $J$  suit  $f$  et/ou  $g$  le long de l'arête correspondant à la racine  $a$  si elle ne se termine pas par une flèche.*

Démontrons cette proposition.

On remarque d'abord que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport poids  $w$ . Donc d'après la proposition 2.3.1, on a

$$in_w J(f, g) = J(in_w(f), in_w(g)).$$

#### Cône blanc.

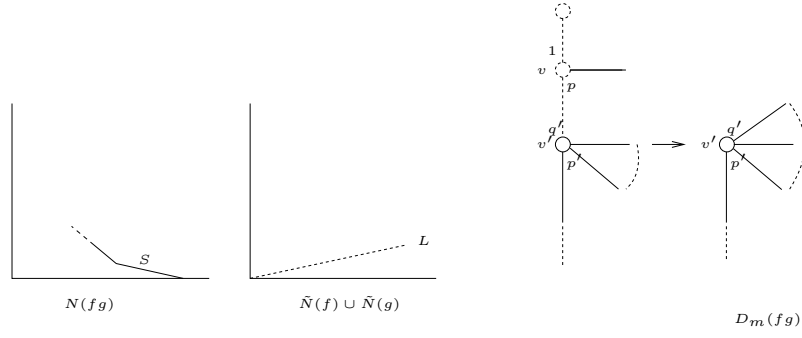
Si l'on est dans un cône blanc  $\Delta$  de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ , on a  $in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_r}$  et  $in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_s}$ . Alors

$$in_w J(f, g)(x, y) = CC'(l_0 m_1 - m_0 l_1) x^{l_0 + m_0 - 1} y^{l_1 + m_1 - 1}$$

et  $l_0 m_1 - m_0 l_1 \neq 0$  car sinon,  $Q$  et  $Q'$  seraient homothétiques par rapport à l'origine et on serait dans un cône grisé. Donc l'intersection de  $N(J)$  et de  $D_J$  est un point. Par conséquent, il n'y a pas de droite  $L$  d'équation  $\beta x - \alpha y = 0$  sur  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g) \cup \tilde{N}(J)$ . En conclusion, aucun paquet de  $J$  ne sort en dehors des zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  pour ce cas de figure sur  $D_m(fgJ)$ .

#### Zones de type 4.

Soit  $S$  une face exceptionnelle de  $N(fg)$  de pente  $-1/p$ . On a  $p_{fg}(t) = (t - a)^n$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = 1$  et  $w(y) = p$ . La droite  $L$  d'équation  $x - py = 0$  appartient à  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  et est représentée en pointillés. Mais d'après les règles de minimalisation des diagrammes, il n'y a pas de sommet sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la face  $S$ . Soit  $v'$  le sommet le plus haut du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ . Soient  $p'$  et  $q'$  les décorations situées en dessous et au dessus de  $v'$ . Alors après minimalisation, l'arête correspondant à la racine  $a$  est reliée à  $v'$ .


**Cas 2.**

Si l'on est dans le cas 2, on a  $in_w(f) = Cx^{l_0}(x^p - ay)^l$  et  $in_w(g) = C'x^{m_0}$ . Alors

$$in_w J(f, g)(x, y) = alm_0 CC' x^{l_0+m_0-1} (x^p - ay)^{l-1}.$$

On a  $p_J(t) = (t - a)^{l-1}$ . La seule racine éventuelle de  $J$  est  $a$ . Si l'arête horizontale correspondant à la racine  $a$  ne se termine pas par une flèche, alors  $l > 1$  donc  $l - 1 > 0$ . Par conséquent,  $a$  est racine de  $p_J$  et  $J$  suit  $f$  le long de cette arête. De plus,  $N(J)$  n'admet ni face pour la direction donnée par  $w$ , ni face de pente  $-\beta/\alpha$  telle que  $\beta/\alpha > q'/p'$ . Donc aucun paquet de  $J$  ne sort à un sommet  $v_{\alpha, \beta}$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus et vérifiant  $\beta/\alpha < q'/p'$ , c'est à dire en dehors des zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  pour ce cas de figure.

**Cas 3.**

Si l'on est dans le cas 3, on a  $in_w(f) = Cx^{l_0}(x^p - ay)^l$  et  $in_w(g) = C'x^{m_0}(x^p - ay)^l$ . Alors on a

$$\begin{aligned} in_w J(f, g)(x, y) &= aCC' x^{l_0+m_0-1} (x^p - ay)^{l+m-2} ((m_0 l - l_0 m)x^p - a(m_0 l - l_0 m)y) \\ &= a(m_0 l - l_0 m) CC' x^{l_0+m_0-1} (x^p - ay)^{l+m-1}. \end{aligned}$$

Donc  $p_J(t) = (t - a)^{l+m-1}$ . Si l'arête horizontale correspondant à la racine  $a$  ne se termine pas par une flèche, alors soit  $l \geq 2$ , soit  $m \geq 2$ , soit  $l = m = 1$ . Dans les trois cas, on a  $l + m - 1 > 0$  donc  $a$  est racine de  $p_J$  et  $J$  suit  $f$  et  $g$  le long de cette arête. De plus,  $N(J)$  n'admet ni face pour la direction donnée par  $w$ , ni face de pente  $-\beta/\alpha$  telle que  $\beta/\alpha > q'/p'$ . Donc aucun paquet de  $J$  ne sort à un sommet  $v_{\alpha, \beta}$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus et vérifiant  $\beta/\alpha < q'/p'$ , c'est à dire en dehors des zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  pour ce cas de figure.

**2.6.3 Zones de type 1.**

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  avec  $pgcd(\alpha, \beta) = 1$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On reprend les notations du paragraphe 2.3. Soient les trois droites  $D_f : \beta x + \alpha y = w(f)$ ,  $D_g : \beta x + \alpha y = w(g)$  et  $D_J : \beta x + \alpha y = w(J)$ . Enfin, soit  $L : \beta x - \alpha y = 0$ . On suppose qu'il existe un sommet de rupture  $v_{\alpha, \beta}$  du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus.

**Proposition 2.6.3.** *Si l'on est sous les hypothèses suivantes :*



1.  $P_0$  et  $P'_0$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine,
2.  $P_r$  et  $P'_s$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine,
3. pour toute arête partant de  $v$  vers la droite, on n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ ,

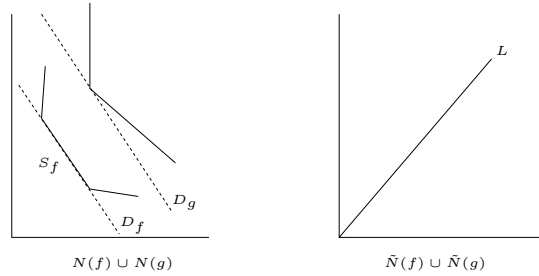
alors on a  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha, \beta}} = \{v_{\alpha, \beta}\}$ . D'autre part, il y a un paquet de  $J$  de multiplicité comprise entre  $\min\{\alpha, \beta\} \max\{r-1, s-1\}$  et  $\min\{\alpha, \beta\}((r-1) + (s-1))$  qui se sépare de  $fg$  au sommet  $v_{\alpha, \beta}$  sur  $D_m(fgJ)$ , et  $J$  suit  $f$  et/ou  $g$  le long des arêtes horizontales partant de ce sommet et dont l'autre extrémité n'est pas une flèche.

*Démonstration.* On suppose que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ . Alors, d'après la proposition 2.3.1, nous avons

$$in_w J(f, g) = J(in_w(f), in_w(g)).$$

## Cas 2.

La droite  $L : \beta x - \alpha y = 0$  appartient à  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . Elle n'est ni frontière d'un cône grisé, ni tracée en gras, ni tracée en pointillés.



On a  $p_f(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i}$  et  $p_g(t) = 1$ . Les  $a_i$ , pour  $i = 1, \dots, r-1$ , sont racines de  $p_f(t)$  d'ordre  $l_i$ , donc il y a un sommet de rupture  $v_{\alpha, \beta}$  sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  duquel partent  $r-1$  arêtes pour  $f$ . On a

$$in_w J(f, g)(x, y) = CC' x^{l_0 + m_0 - 1} y^{l_r + m_1 - 1} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i - 1} \cdot \sum_{i=1}^{r-1} (A_1^i x^\alpha - A_2^i y^\beta) \prod_{k \neq i} (x^\alpha - a_k y^\beta)$$

où

$$\begin{cases} A_1^i = \frac{1}{r-1} (l_0 m_1 - m_0 l_r + m_1 l_i (r-1) \alpha) \\ A_2^i = \frac{1}{r-1} (l_0 m_1 - m_0 l_r - m_0 l_i (r-1) \beta) a_i \end{cases}$$

Le coefficient du terme de plus haut degré en  $x$  dans  $in_w J(f, g)$  est

$$\sum_{i=1}^{r-1} A_1^i = L_0 m_1 - m_0 l_r.$$

Il est non nul car l'extrémité la plus basse  $P_0$  de la face de  $f$  et le point  $P'_0$  de  $g$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine.

Le coefficient du terme de plus haut degré en  $y$  est

$$(-1)^{r-1} \sum_{i=1}^{r-1} A_2^i \prod_{k \neq i} a_k = (-1)^{r-1} (l_0 m_1 - m_0 L_r) \prod_{i=1}^{r-1} a_i.$$

Il est non nul car l'extrémité la plus haute  $P_r$  de la face de  $f$  et le point  $P'_0$  de  $g$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine.

On a donc

$$p_J(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i-1} \cdot \sum_{i=1}^{r-1} (A_1^i t - A_2^i) \prod_{k \neq i} (t - a_k).$$

Posons

$$p_{J,1}(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i-1} \text{ et } p_{J,2}(t) = \sum_{i=1}^{r-1} (A_1^i t - A_2^i) \prod_{k \neq i} (t - a_k).$$

**Lemme 2.6.4.** *Si l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ , alors  $J$  suit  $f$  le long des arêtes horizontales de  $D_m(fgJ)$  partant de  $v_{\alpha,\beta}$  et ne se terminant pas par une flèche.*

*Démonstration.* Soit  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$ . On considère l'arête correspondant à la racine  $a_{i_0}$  : si elle ne se termine pas par une flèche, alors  $l_{i_0} > 1$ . Donc  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J,1}(t)$  d'ordre  $l_{i_0} - 1$  et  $J$  suit l'arête correspondant à la racine  $a_{i_0}$  sur  $D_m(fgJ)$ .  $\square$

**Lemme 2.6.5.** *On suppose que  $P_0$  et  $P'_0$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine et que  $P_r$  et  $P'_s$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine. Alors il y a un paquet de  $J$  de multiplicité  $\min\{\alpha, \beta\}(r-1)$  qui se sépare de  $fg$  au sommet  $v_{\alpha,\beta}$ .*

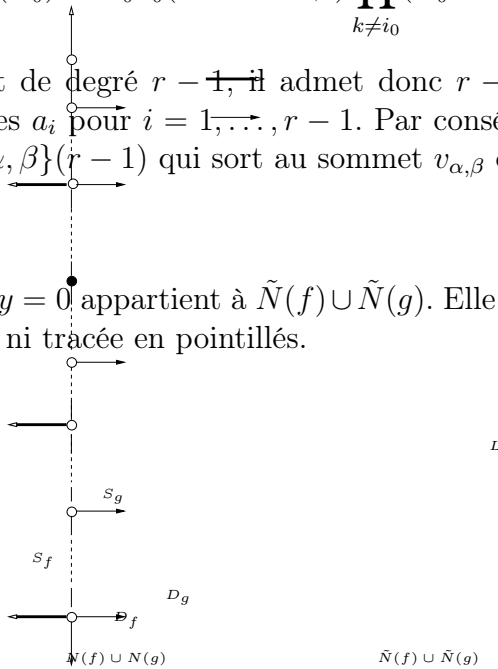
*Démonstration.* Soit  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$ . On a

$$p_{J,2}(a_{i_0}) = a_{i_0} l_{i_0} (m_1 \alpha + m_0 \beta) \prod_{k \neq i_0} (a_{i_0} - a_k) \neq 0.$$

Le polynôme  $p_{J,2}(t)$  est de degré  $r-1$ , il admet donc  $r-1$  racines (éventuellement multiples) différentes des  $a_i$  pour  $i = 1, \dots, r-1$ . Par conséquent, il y a un paquet de  $J$  de multiplicité  $\min\{\alpha, \beta\}(r-1)$  qui sort au sommet  $v_{\alpha,\beta}$  de  $D_m(fgJ)$ .  $\square$

**Cas 3.**

La droite  $L : \beta x - \alpha y = 0$  appartient à  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . Elle n'est ni frontière d'un cône grisé, ni tracée en gras, ni tracée en pointillés.



On a

$$\begin{aligned} in_w J(f, g)(x, y) &= CC' x^{l_0+m_0-1} y^{l_r+m_s-1} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j-1} \\ &\cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2\alpha} + A_2^{i,j} x^\alpha y^\beta + A_3^{i,j} y^{2\beta}) \prod_{k \neq i} (x^\alpha - a_k y^\beta) \prod_{l \neq j} (x^\alpha - a'_l y^\beta) \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (l_0 m_s - m_0 l_r + m_s l_i (r-1)\alpha - l_r m_j \alpha (s-1)) \\ A_2^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (m_0 l_r - l_0 m_s + l_r m_j \alpha (s-1) + m_0 l_i (r-1)\beta \\ \quad + l_i m_j (r-1)(s-1)\alpha\beta) a_i + \frac{1}{(r-1)(s-1)} (m_0 l_r - l_0 m_s \\ \quad - l_0 m_j (s-1)\beta - m_s l_i (r-1)\alpha - l_i m_j (r-1)(s-1)\alpha\beta) a'_j \\ A_3^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (l_0 m_s - m_0 l_r - m_0 l_i (r-1)\beta + n_0 m_j (s-1)\beta a_i a'_j) \end{array} \right.$$

On a

$$p_f(t) = \prod_i (t - a_i)^{l_i} \text{ et } p_g(t) = \prod_j (t - a'_j)^{m_j}.$$

Les  $a_i$  pour  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ , sont racines de  $p_f(t)$  d'ordre  $l_i$ , et les  $a'_j$  pour  $j \in \{1, \dots, s-1\}$ , sont racines de  $p_g(t)$  d'ordre  $m_j$ . Donc sur  $D_m(fg)$ , il y a un sommet de rupture  $v_{\alpha,\beta}$  duquel partent vers la droite des arêtes qui sont chacune de l'un des trois types suivants : pour  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$  et  $j_0 \in \{1, \dots, s-1\}$ ,

- des arêtes correspondant uniquement à une racine  $a_{i_0}$  de  $f$  si pour tout  $j \in \{1, \dots, s-1\}$ ,  $a_{i_0} \neq a'_j$ ,
- des arêtes correspondant uniquement à une racine  $a'_{j_0}$  de  $g$  si pour tout  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ ,  $a_i \neq a'_{j_0}$ ,
- des arêtes correspondant à la fois à une racine  $a_{i_0}$  de  $f$  et une racine  $a'_{j_0}$  de  $g$  si  $a_{i_0} = a'_{j_0}$ .

Dans  $in_w J(f, g)$ , le coefficient du terme de plus haut degré en  $y$  est

$$(-1)^{r-2+s-2} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} A_3^{i,j} \prod_{k \neq i} a_k \prod_{l \neq j} a'_l = (-1)^{r-2+s-2} (l_0 M_s - m_0 L_r) \prod_{i=1}^{r-1} a_i \prod_{j=1}^{s-1} a'_j.$$

Il est non nul car les points  $P_r$  et  $P'_s$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ .

Le coefficient du terme de plus haut degré en  $x$  est

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} A_1^{i,j} = (L_0 m_s - M_0 l_r).$$

Il est également non nul car les points  $P_0$  et  $P'_0$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ . Donc

$$p_J(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (t - a'_j)^{m_j-1} \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} t^2 + A_2^{i,j} t + A_3^{i,j}) \prod_{k \neq i} (t - a_k) \prod_{l \neq j} (t - a'_l).$$

Posons

$$p_{J,1}(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (t - a'_j)^{m_j-1}$$

et

$$p_{J,2}(t) = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} t^2 + A_2^{i,j} t + A_3^{i,j}) \prod_{k \neq i} (t - a_k) \prod_{l \neq j} (t - a'_l).$$

**Lemme 2.6.6.** *On suppose que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ . Alors pour  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$ , on a  $p_{J,2}(a_{i_0}) = 0$  si et seulement s'il existe  $j_0 \in \{1, \dots, s-1\}$  tel que  $a'_{j_0} = a_{i_0}$  (idem pour  $j_0 \in \{1, \dots, s-1\}$ ) et alors  $p'_{J,2}(a_{i_0}) = 0$  si et seulement si l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a_{i_0} = a'_{j_0}$ .*

*Démonstration.* Soit  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$ . On a

$$p_{J,2}(a_{i_0}) = a_{i_0} l_{i_0} (M_0 \beta + m_s \alpha) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{r-1} (a_{i_0} - a_k) \prod_{j=1}^{s-1} (a_{i_0} - a'_j).$$

Si pour tout  $j \in \{1, \dots, s-1\}$ , on a  $a'_j \neq a_{i_0}$ , alors  $a_{i_0}$  n'est pas racine de  $p_{J,2}$ .

En revanche, s'il existe  $j_0 \in \{1, \dots, s-1\}$  tel que  $a'_{j_0} = a_{i_0}$ , alors  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J,2}$  (et de fait,  $a'_{j_0}$  aussi). On a alors

$$p'_{J,2}(a_{i_0}) = a_{i_0} (l_0 m_{j_0} \beta - m_0 l_{i_0} \beta + L_r m_{j_0} \alpha - M_s l_{i_0} \alpha) \prod_{k \neq i_0} (a_{i_0} - a_k) \prod_{l \neq j_0} (a_{i_0} - a'_l)$$

qui s'annule si et seulement si

$$\frac{m_{j_0}}{l_{i_0}} = \frac{m_0 \beta + M_s \alpha}{l_0 \beta + L_r \alpha} = \frac{w(g)}{w(f)},$$

c'est à dire si l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a_{i_0} = a'_{j_0}$ .  $\square$

**Lemme 2.6.7.** *On suppose que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ . Alors  $J$  suit  $f$  et/ou  $g$  le long des arêtes horizontales partant de  $v_{\alpha, \beta}$  et ne se terminant pas par une flèche.*

*Démonstration.* Soit  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$  tel que l'arête correspondant à  $a_{i_0}$  ne se termine pas par une flèche.

Si cette arête est une arête du premier type, c'est à dire si quel que soit  $j \in \{1, \dots, s-1\}$ ,  $a_{i_0} \neq a'_j$ , alors  $l_{i_0} > 1$ .  $a_{i_0}$  est racine d'ordre  $l_{i_0} - 1 > 0$  de  $p_{J,1}(t)$  donc  $J$  suit  $f$  le long de cette arête sur  $D_m(fgJ)$ .

On a le même résultat pour une arête du second type.

Si l'arête correspondant à  $a_{i_0}$  est une arête du troisième type, c'est à dire s'il existe  $j_0 \in \{1, \dots, s-1\}$  tel que  $a_{i_0} = a'_{j_0}$ , alors

– soit  $l_{i_0} > 1$  ou  $m_{j_0} > 1$ , et alors  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J,1}$  et  $J$  suit  $f$  et  $g$  le long de l'arête correspondante sur  $D_m(fgJ)$ ,

- soit  $l_{i_0} = 1$  et  $m_{j_0} = 1$ , et alors d'après le lemme 2.6.6,  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J,2}$  donc  $J$  suit  $f$  et  $g$  le long de l'arête correspondante sur  $D_m(fgJ)$ .  $\square$

**Lemme 2.6.8.** *On suppose que pour toute arête partant de  $v$  vers la droite, on n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ , que  $P_0$  et  $P'_0$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine et que  $P_r$  et  $P'_s$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine. Alors il y a un paquet de  $J$  de multiplicité comprise entre  $\min(\alpha, \beta) \max\{r-1, s-1\}$  et  $\min(\alpha, \beta)((r-1) + (s-1))$  qui se sépare de  $fg$  au sommet  $v_{\alpha, \beta}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 2.6.6, on a au plus  $\min\{r-1, s-1\}$  racines  $a_{i_0} = a'_{j_0}$  de  $p_{J,2}$  parmi les  $\{a_i, i = 1, \dots, r-1, a'_j, j = 1, \dots, s-1\}$  et ces racines sont racines simples. Or

$$\deg p_{J,2} = (r-1) + (s-1) > \min\{r-1, s-1\}.$$

Par conséquent,  $p_{J,2}$  admet au moins une racine distincte des  $a_i$  pour  $i = 1, \dots, r-1$  et des  $a'_j$  pour  $j = 1, \dots, s-1$  et il y a donc un paquet de  $J$  de multiplicité comprise entre  $\min\{\alpha, \beta\} \max\{r-1, s-1\}$  et  $\min\{\alpha, \beta\} \deg p_{J,2} = \min\{\alpha, \beta\}((r-1) + (s-1))$  qui sort au sommet  $v_{\alpha, \beta}$  de  $D_m(fgJ)$ .  $\square$

$\square$

## 2.6.4 Zones de type 2.

Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets de rupture consécutifs du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  formant l'arête  $[v, v']$  et tels que  $v \prec v'$ . On suppose que  $[v, v'] \subset \mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v'}$ . Soit  $p$  (resp.  $p'$ ) la décoration figurant en dessous de  $v$  (resp.  $v'$ ). Soit  $q$  (resp.  $q'$ ) la décoration figurant au dessus de  $v$  (resp.  $v'$ ). On définit les poids  $w$  et  $w'$  par  $w(x) = q$ ,  $w(y) = p$ ,  $w'(x) = q'$  et  $w'(y) = p'$ . Soient

$$in_w f(x, y) = C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i}, \quad in_w g(x, y) = C' x^{m_0} y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - b_j y^q)^{m_j},$$

$$in_{w'} f(x, y) = C x^{l'_0} y^{l'_{r'}} \prod_{i=1}^{r'-1} (x^{p'} - a'_i y^{q'})^{l'_i}, \quad in_{w'} g(x, y) = C' x^{m'_0} y^{m'_{s'}} \prod_{j=1}^{s'-1} (x^{p'} - b'_j y^{q'})^{m'_j}.$$

**Proposition 2.6.9.** *On suppose que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ , et que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w'$ .*

*Alors d'une part, il existe un paquet de  $J$  qui suit  $f$  (resp.  $f$  et  $g$ ) dans le cas 2 (resp. cas 3) le long des arêtes horizontales partant de  $v$  et  $v'$  et ne se terminant pas par des flèches. D'autre part, il existe un ou plusieurs paquets de  $J$  de multiplicité totale comprise entre  $\min\{(r-1+s-1)p + (r'-1+s'-1)p', (r-1+s-1)q + (r'-1+s'-1)q'\}$  et  $\min\{p + p', q + q'\}$  qui se séparent de  $fg$  à des sommet  $v_{\alpha, \beta}$  de  $\mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v'}$ .*

*Démonstration.* Soient les droites  $D_f, D'_f, D_g$  et  $D'_g$  définies par

$$D_f : qx + py = w(f), D'_f : q'x + p'y = w'(f),$$

$$D_g : qx + py = w(g), D'_g : q'x + p'y = w'(g).$$

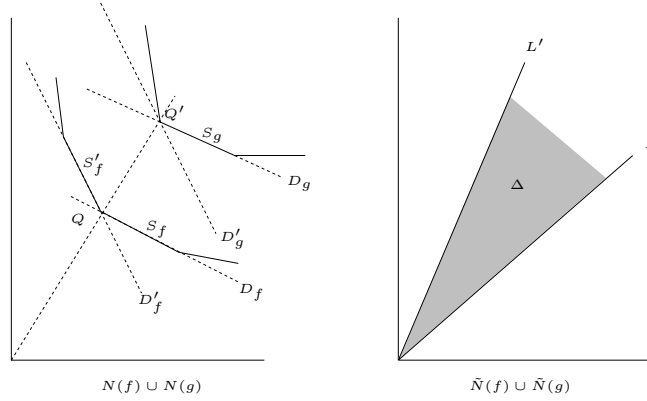
et soient les points  $Q$  et  $Q'$  définis par

$$\{Q\} = D_f \cap D'_f \text{ et } \{Q'\} = D_g \cap D'_g.$$

D'après la proposition 2.5.3,  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ . Les droites  $L : qx - py = 0$  et  $L' : q'x - p'y = 0$  appartiennent à  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  et le cône  $\Delta$  engendré par  $L$  et  $L'$  est grisé. D'après le lemme 2.5.2, on sait qu'il existe des faces  $S_i, S_{i+1} \in N(f)$  de pente  $-q_i/p_i$  et  $-q_{i+1}/p_{i+1}$  avec  $\text{pgcd}(p_i, q_i) = \text{pgcd}(p_{i+1}, q_{i+1}) = 1$  et  $q_i/p_i < q_{i+1}/p_{i+1}$  et des faces  $S'_j, S'_{j+1} \in N(g)$  de pente  $-q'_j/p'_j$  et  $-q'_{j+1}/p'_{j+1}$  avec  $\text{pgcd}(p'_j, q'_j) = \text{pgcd}(p'_{j+1}, q'_{j+1}) = 1$  et  $q'_j/p'_j < q'_{j+1}/p'_{j+1}$  telles que  $\{Q\} = S_i \cap S_{i+1}$  et  $\{Q'\} = S'_j \cap S'_{j+1}$ . De plus, on a  $q_i/p_i = q/p$  et/ou  $q'_j/p'_j = q/p$  et  $q_{i+1}/p_{i+1} = q'/p'$  et/ou  $q'_{j+1}/p'_{j+1} = q'/p'$ . On suppose par exemple que

$$\frac{q}{p} = \frac{q_i}{p_i} = \frac{q'_j}{p'_j} < \frac{q'}{p'} = \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}} < \frac{q'_{j+1}}{p'_{j+1}}$$

(les autres cas se traitent de façon similaire).



On suppose ici que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$  et  $w'$ . On a donc

$$\text{in}_w J(f, g) = J(\text{in}_w f, \text{in}_w g) \text{ et } \text{in}_{w'} J(f, g) = J(\text{in}_{w'} f, \text{in}_{w'} g).$$

De plus, on est sous les hypothèses des lemmes 2.6.4 et 2.6.7. Par conséquent,  $J$  suit  $f$  et  $g$  le long des arêtes horizontales partant de  $v$  et de  $v'$  et ne se terminant pas par des flèches.

On est dans le cas 3 pour  $w$ , donc

$$\begin{aligned} \text{in}_w(J)(f, g)(x, y) = & CC' x^{l_0+m_0-1} y^{l_r+m_s-1} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j-1} \\ & \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2p} + A_2^{i,j} x^p y^q + A_3^{i,j} y^{2q}) \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q) \prod_{l \neq j} (x^p - a'_l y^q) \end{aligned}$$

Posons

$$J_2(x, y) = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2p} + A_2^{i,j} x^p y^q + A_3^{i,j} y^{2q}) \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q) \prod_{l \neq j} (x^p - a'_l y^q).$$

Écrivons-le sous la forme

$$J_2(x, y) = C_0 x^{(s-1+r-1)p} + C_1 x^{(s-1+r-2)p} y^q + \dots + C_{r-1+s-1} y^{(s-1+r-1)q}.$$

Puisque  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine, on a  $C_{r-1+s-1} = 0$ . Mais on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$ , donc d'après la proposition 2.3.1, il existe un  $k$  avec  $0 \leq k < r-1+s-1$  tel que  $C_k \neq 0$ . On définit

$$k_0 := \max\{k/C_k \neq 0\}.$$

Le point le plus haut (c'est à dire d'ordonnée maximale) de  $N(J) \cap D_J$ , où  $D_J$  est la droite d'équation  $qx + py = w(J)$ , est alors

$$D_1 = (l_0 + m_0 - 1 + (s-1+r-1-k_0)p, L_r + M_s - 1 - (s-1+r-1-k_0)q).$$

De même, on regarde maintenant la direction donnée par  $w'$ . On est dans le cas 2, et avec le même raisonnement, en posant  $k'_0 := \min\{k/C'_k \neq 0\}$ , on a  $0 < k'_0 \leq s'-1$  et le point le plus bas (c'est à dire d'ordonnée minimale) de  $N(J) \cap D'_J$ , où  $D'_J$  est la droite d'équation  $q'x + p'y = w'(J)$ , est

$$D_2 = (L'_0 + m_0 - 1 - k'_0 p', l'_r + m'_s - 1 + k'_0 q').$$

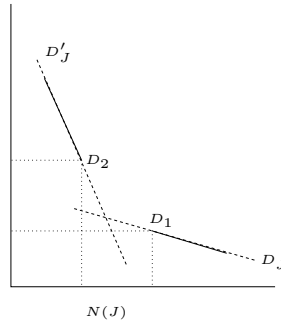
On a par construction  $l_0 = L'_0$ ,  $L_r = l'_r$  et  $M_s = m'_s$ , donc

$$l_0 + m_0 - 1 + (s-1+r-1-k_0)p > L'_0 + m_0 - 1 - k'_0 p'$$

et

$$L_r + M_s - 1 - (s-1+r-1-k_0)q < l'_r + m'_s - 1 + k'_0 q'.$$

Il existe donc au moins une face de  $N(J)$  de pente  $-\beta/\alpha$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$  et  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$  reliant  $D_1$  à  $D_2$  et vérifiant  $q/p < \beta/\alpha < q'/p'$ .



Par conséquent, il y a au moins un sommet  $v_{\alpha, \beta} \in ]v, v'[ \subset \mathcal{Z}_v$  tel qu'un paquet de  $J$  sorte en  $v_{\alpha, \beta}$  sur  $D_m(fgJ)$ . En particulier, il existe une droite  $L : \beta x - \alpha y = 0 \in \tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g) \cup \tilde{N}(J)$  situé dans le cône grisé  $\Delta$  de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$ . De plus, on a

$$l_0 + m_0 - 1 + (s-1+r-1-k_0)p - (l_0 + m_0 - 1 - k'_0 p') = (s-1+r-1-k_0)p + k'_0 p'$$

et  $L_r + M_s - 1 + k'_0 q' - (L_r + M_s - 1 - (s - 1 + r - 1 - k_0)q) = (s - 1 + r - 1 - k_0)q + k'_0 q'$ .

La multiplicité du ou des paquets de  $J$  qui se séparent de  $fg$  est égale au minimum de ces deux quantités. On a  $0 \leq k_0 < r - 1 + s - 1$  et  $0 < k'_0 \leq s' - 1$ . Donc elle est maximale pour  $k_0 = 0$  et  $k'_0 = s - 1$  et minimale pour  $k_0 = r - 1 + s - 2$  et  $k'_0 = 1$ .  $\square$

### 2.6.5 Zones de type 3.

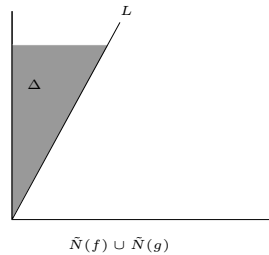
Soit  $v$  le sommet de rupture le plus bas du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ . Il est connecté à un sommet de valence 1 ou une flèche  $v'$ . Soient  $Q$  le point d'ordonnée maximale de  $N(f)$  et  $Q'$  le point d'ordonnée maximale de  $N(g)$ . On suppose que  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ . Alors d'après la proposition 2.5.3, on a  $[v, v'] \in \mathcal{Z}_v$ .

**Remarque 2.6.10.** *Puisque  $f$  et  $g$  n'ont pas de composantes communes, le sommet  $v'$  est alors un sommet de valence 1 : en effet, si  $f$  a une composante en  $x$ , alors  $g$  n'en a pas et  $Q$  et  $Q'$  ne sont alors pas homothétiques par rapport à l'origine.*

Soient  $p$  la décoration située en dessous de  $v$  et  $q$  la décoration située au dessus de  $v$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ .

**Proposition 2.6.11.** *On suppose que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ . Alors d'une part, il existe un paquet de  $J$  qui suit  $f$  ou  $g$  le long des arêtes horizontales partant de  $v$  et ne se terminant pas par une flèche (selon que l'on est dans le cas 2 ou 3). D'autre part, il existe un ou plusieurs paquets de  $J$  de multiplicité totale comprise entre  $p - 1$  et  $(r - 1 + s - 1)p - 1$  qui se séparent de  $fg$  à des sommets  $v_{\alpha, \beta} \in \mathcal{Z}_v$ .*

*Démonstration.* On a  $L : qx - py = 0 \in \tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  et le cône engendré par  $L$  et l'axe des ordonnées de  $\tilde{N}(f) \cup \tilde{N}(g)$  est grisé.



Puisqu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport poids  $w$ , les lemmes 2.6.4 et 2.6.7 sont valides. Par conséquent,  $J$  suit  $f$  et/ou  $g$  le long des arêtes horizontales partant de  $v$  et ne se terminant pas par des flèches. De plus,

$$in_w J(f, g) = J(in_w f, in_w g).$$



**Cas 2.**

Si l'on est dans le cas 2, on a

$$in_w(f)(x, y) = Cy^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i} \text{ et } in_w(g)(x, y) = C'y^{m_1}.$$

Alors

$$in_w J(f, g)(x, y) = CC'y^{l_r+m_1-1} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i-1} \cdot \sum_{i=1}^{r-1} A_1^i x^{p-1} \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q)$$

où  $A_1^i = \frac{1}{r-1} (m_1 l_i (r-1)p)$ . En effet, comme  $l_0 = m_0 = 0$ , on a  $A_2^i = 0$ .

Posons  $J_2(x, y) = \sum_{i=1}^{r-1} A_1^i x^{p-1} \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q)$ . On a

$$J_2(x, y) = C_0 x^{(r-1)p-1} + \dots + C_k x^{(r-1-k)p-1} y^{kq} + \dots + C_{r-2} x^{p-1} y^{(r-2)q}.$$

Puisqu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ , il existe au moins un  $k \in \{0, \dots, r-2\}$  tel que  $C_k \neq 0$ . Soit

$$k_0 := \max\{k \in \{0, \dots, r-2\} / C_k \neq 0\}.$$

Le point d'ordonnée maximale de  $N(J) \cap D_J$  où  $D_J$  est la droite d'équation  $qx + py = w(J)$  est alors

$$D = ((r-1-k_0)p-1, L_r + m_1 - 1 - (r-1-k_0)q).$$

On a  $p > 1$  car sinon  $v'$  disparaîtrait. Donc  $(r-1-k_0)p-1 \geq 1$ . Par conséquent, il y a au moins une face de  $N(J)$  de pente  $-\beta/\alpha$  telle que  $\beta/\alpha > q/p$  et il y a un paquet de  $J$  sortant à un sommet  $v_{\alpha, \beta}$  du premier axe vertical de  $D_m(fgJ)$  avec  $\beta/\alpha > q/p$ . De plus,  $v_{\alpha, \beta} \in \mathcal{Z}_v$ .

**Cas 3.**

Si l'on est dans le cas 3, on a

$$in_w(f)(x, y) = Cy^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i} \text{ et } in_w(g)(x, y) = C'y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j}.$$

Alors

$$in_w J(f, g)(x, y) = CC'x^{l_0+m_0-1} y^{l_r+m_s-1} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j-1} \\ \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2p-1} + A_2^{i,j} x^{p-1} y^q) \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q) \prod_{l \neq j} (x^p - a'_l y^q)$$

où

$$\begin{cases} A_1^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (l_0 m_s - m_0 l_r + m_s l_i (r-1)p - l_r m_j p (s-1)) \\ A_2^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (m_0 l_r - l_0 m_s + l_r m_j p (s-1) + m_0 l_i (r-1)q \\ + l_i m_j (r-1)(s-1)pq) a_i + \frac{1}{(r-1)(s-1)} (m_0 l_r - l_0 m_s \end{cases}$$

En effet, puisque les points  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ , on a  $l_0 = m_0 = 0$ , et donc  $A_3^{i,j} = 0$ . Posons  $J_2(x, y) = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2p-1} + A_2^{i,j} x^{p-1} y^q) \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q) \prod_{l \neq j} (x^p - a'_l y^q)$ . Écrivons-le sous la forme

$$J_2(x, y) = C_0 x^{(s-1+r-1)p} + \dots + C_k x^{(s+r-2-k)p} y^{kq} + \dots + C_{r+s-3} x^p y^{(r+s-3)q}.$$

Puisqu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$ , il existe au moins un  $k \in \{0, \dots, r+s-3\}$  tel que  $C_k \neq 0$ . Soit

$$k'_0 := \max\{k \in \{0, \dots, r+s-3\} / C_k \neq 0\}.$$

Alors le point d'ordonnée maximale de  $N(J) \cap D_J$  où  $D_J$  est la droite d'équation  $qx + py = w(J)$  est

$$D' = ((r+s-2-k'_0)p - 1, L_r + M_s - 1 - (r+s-2-k'_0)q).$$

On a  $p > 1$  car sinon  $v'$  disparaîtrait. Donc  $(r+s-2-k'_0)p - 1 \geq 1$ . Il y a donc au moins une face de  $N(J)$  de pente  $-\beta/\alpha$  telle que  $\beta/\alpha > q/p$ . Par conséquent, il y a un paquet de  $J$  sortant à un sommet  $v_{\alpha,\beta}$  du premier axe vertical de  $D_m(fgJ)$ . Puisque  $\beta/\alpha > q/p$ ,  $v_{\alpha,\beta}$  appartient à l'arête  $]v, v'[$  donc  $v_{\alpha,\beta} \in \mathcal{Z}_v$ . □

### 2.6.6 Étude des flèches.

**Lemme 2.6.12 (Règles de calcul).** (i) Soit  $f \in K[[x, y]]$ . Alors  $J(f, f) = 0$ .

(ii) Soient  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in K[[x, y]]$ . Alors

$$J(f_1 f_2, g_1 g_2) = J(f_1, g_1) f_2 g_2 + J(f_2, g_1) f_1 g_2 + J(f_1, g_2) f_2 g_1 + J(f_2, g_2) f_1 g_1.$$

(iii) Soient  $f, g, h \in K[[x, y]]$ . Alors

$$J(h^\alpha f, g) = h^{\alpha-1} (\alpha J(h, g) f + J(f, g) h).$$

*Démonstration.* Pour  $f, g \in K[[x, y]]$ , on a  $J(f, g) := f'_x g'_y - f'_y g'_x$ . La démonstration du lemme est évidente, il suffit de développer les expressions. □

**Proposition 2.6.13.** Soit  $v$  un sommet de rupture du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $p$  en dessous et  $q$  au dessus, et relié par une arête horizontale à une flèche. Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ . Alors  $J$  suit  $f$  ou  $g$  le long de cette arête si et seulement si  $J$  a une composante commune avec  $f$  ou  $g$  représentée par cette flèche, et c'est seulement cette composante commune qui suit  $f$  ou  $g$  le long de cette arête. En particulier, aucune composante de  $J$  ne sort en dehors de  $\mathcal{Z}_v$  sur cette arête.

*Démonstration.* Puisque  $f$  et  $g$  n'ont pas de composantes communes, on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ . Donc d'après la proposition 2.3.1,

$$in_w J(f, g) = J(in_w(f), in_w(g)).$$

Soit  $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$  tel que  $a_{i_0}$  soit la racine correspondant à l'arête horizontale reliant  $v$  à la flèche considérée. On a

$$in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i} \text{ et } in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j}.$$

D'après les résultats du paragraphe 2.6.3, on a alors

$$\begin{aligned} in_w J(f, g)(x, y) &= CC'x^{l_0+m_0-1}y^{l_r+m_s-1} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j-1} \\ &\cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2p} + A_2^{i,j} x^p y^q + A_3^{i,j} y^{2q}) \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q) \prod_{l \neq j} (x^p - a'_l y^q) \end{aligned}$$

Donc

$$p_{J(f,g)}(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (t - a'_j)^{m_j-1} \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} t^2 + A_2^{i,j} t + A_3^{i,j}) \prod_{k \neq i} (t - a_k) \prod_{l \neq j} (t - a'_l).$$

Posons  $p_{J(f,g),1}(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (t - a'_j)^{m_j-1}$  et  $p_{J(f,g),2}(t) = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} t^2 + A_2^{i,j} t + A_3^{i,j}) \prod_{k \neq i} (t - a_k) \prod_{l \neq j} (t - a'_l)$ .

Supposons que la flèche considérée représente une composante  $f_{i_0}$  de  $f$  mais pas de  $g$ . On a alors  $a'_j \neq a_{i_0}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, s-1\}$ . On constate que  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J(f,g),1}$  d'ordre  $l_{i_0} - 1$ . De plus, d'après le lemme 2.6.6, on a  $p_{J(f,g),2}(a_{i_0}) \neq 0$  car  $a'_j \neq a_{i_0}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, s-1\}$ . Donc  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J(f,g)}$  d'ordre exactement  $l_{i_0} - 1$ . Or on a

$$J(f, g) = J(f_{i_0}^{l_{i_0}} \bar{f}, g) = f_{i_0}^{l_{i_0}-1} (l_{i_0} J(f_{i_0}, g) \bar{f} + J(\bar{f}, g) f_{i_0}).$$

Donc la composante  $f_{i_0}$  est commune à  $f$  et  $J$ . D'après l'égalité précédente, elle est au moins de multiplicité  $l_{i_0} - 1$ . Mais on a vu que  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J(f,g)}$  d'ordre exactement  $l_{i_0} - 1$ . Finalement,  $J$  suit  $f$  le long de l'arête correspondant à  $a_{i_0}$  si  $l_{i_0} > 1$  et alors c'est car  $J$  a une composante commune avec  $f$ . En dehors de cette composante commune,  $J$  ne suit pas  $f$  le long de cette arête. □

### 2.6.7 Un résultat pour le cas non-dégénéré.

À ce stade de la démonstration, nous pouvons énoncer un théorème pour le cas non-dégénéré.

**Théorème 2.6.14.** *Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes admettant une singularité en  $(0, 0) \in K^2$ . On suppose que  $fg$  est non dégénéré pour son polygone de Newton au sens de Kouchnirenko. Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . Alors l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est égal au sous-ensemble des rationnels*

$$\left\{ \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} \right\}_v,$$

où  $\rho_v$  est une curvette du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(fg)$ .

*Démonstration.* Si  $fg$  est non dégénéré pour son polygone de Newton au sens de Kouchnirenko, cela signifie que pour toute face  $S$  de  $N(fg)$ , on a  $p_S(t) = \prod_i (t - a_i)$ . En particulier, le diagramme minimal de Newton de  $fg$  ne comporte alors qu'un seul axe vertical et on n'est dans la situation d'Abhyankar ou d'Abhyankar faible à aucun des sommets du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ . Le théorème découle donc des résultats précédemment obtenus.  $\square$

**Remarque 2.6.15.** On retrouve ainsi le fait que si  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  et si  $fg$  est non dégénéré pour son polygone de Newton au sens de Kouchnirenko, alors l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est un invariant du type topologique de  $(f, g)$ .

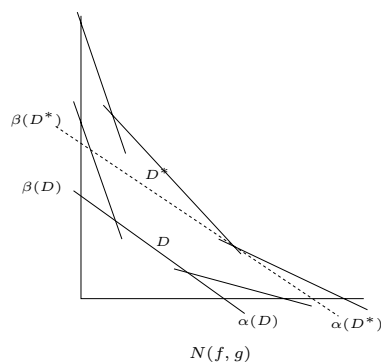
### 2.6.8 Application : $N(f, g)$ .

**Remarque 2.6.16.** On a défini les quotients jacobiens  $\frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}$ . Par raison de symétrie, nous pouvons étudier les paires jacobiennes  $\left( \frac{(f, \rho_v)_0}{\text{mult}(\rho_v)}, \frac{(g, \rho_v)_0}{\text{mult}(\rho_v)} \right)$ .

Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes non identiquement nuls admettant une singularité à l'origine. Soient  $S_1, \dots, S_m$  les faces du polygone de Newton de  $f$  ordonnées par pentes décroissantes  $-q_1/p_1 > \dots > -q_m/p_m$ . Pour  $i = 1, \dots, r-1$ , soit  $D_i$  la droite portant  $S_i$  et soit  $r_i$  l'entier égal au nombre de points à coordonnées entières sur  $S_i$  moins un. Soient  $S'_1, \dots, S'_n$  les faces du polygone de Newton de  $g$  ordonnées par pentes décroissantes  $-q'_1/p'_1 > \dots > -q'_n/p'_n$ . On définit de la même façon les entiers  $s_j$  et les droites  $D'_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ . On notera  $\alpha(D)$  l'abscisse à l'origine et  $\beta(D)$  l'ordonnée à l'origine d'une droite  $D$ .

**Définition 2.6.17.** On définit les droites  $D_i^*$  et  $D'_j^*$  de la manière suivante : pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $D_i^*$  est la droite parallèle à  $D_i$  telle que  $D_i^* \cap N(g) \neq \emptyset$  et  $\alpha(D_i^*)$  (ou  $\beta(D_i^*)$ ) est minimale. De même, pour  $j = 1, \dots, n$ ,  $D'_j^*$  est la droite parallèle à  $D'_j$  telle que  $D'_j^* \cap N(f) \neq \emptyset$  et  $\alpha(D'_j^*)$  (ou  $\beta(D'_j^*)$ ) est minimale.

**Définition 2.6.18.** On définit  $N(f, g)$  par l'ensemble constitué des droites  $D_i$ ,  $D'_j$ ,  $D_i^*$  et  $D'_j^*$  pour  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ .



On a les équations suivantes :

$$D_i : q_i x + p_i y = p_i(r_1 q_1 + \cdots + r_i q_i) + q_i(r_{i+1} p_{i+1} + \cdots + r_m p_m)$$

$$\alpha(D_i) = \frac{p_i}{q_i}(r_1 q_1 + \cdots + r_i q_i) + r_{i+1} p_{i+1} + \cdots + r_m p_m$$

$$\beta(D_i) = r_1 q_1 + \cdots + r_i q_i + \frac{q_i}{p_i}(r_{i+1} p_{i+1} + \cdots + r_m p_m)$$

$D_i^*$  : si  $j \in \{1, \dots, n\}$  est tel que  $\frac{q'_j}{p'_j} < \frac{q_i}{p_i} < \frac{q'_{j+1}}{p'_{j+1}}$ ,

$$q_i x + p_i y = p_i(s_1 q'_1 + \cdots + s_j q'_j) + q_i(s_{j+1} p'_{j+1} + \cdots + s_m p'_m)$$

$$\alpha(D_i^*) = \frac{p_i}{q_i}(s_1 q'_1 + \cdots + s_j q'_j) + s_{j+1} p'_{j+1} + \cdots + s_m p'_m$$

$$\beta(D_i^*) = s_1 q'_1 + \cdots + s_j q'_j + \frac{q_i}{p_i}(s_{j+1} p'_{j+1} + \cdots + s_m p'_m)$$

et des équations similaires pour  $D'_j$  et  $D_j^*$ .

**Notation 2.6.19.** On note  $N(f, g)^*$  l'ensemble  $N(f, g)$  privé des droites  $D$  et  $D^*$  telles que la face  $S$  associée est une face exceptionnelle de  $N(fg)$ .

**Cas non dégénéré.**

**Proposition 2.6.20.** Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes non identiquement nuls admettant une singularité à l'origine. On suppose que  $fg$  est non-dégénéré pour son polygone de Newton au sens de Kouchnirenko. Alors l'ensemble des paires jacobienues de  $(f, g)$  est égal à

$$\{(\max\{\alpha(D), \beta(D)\}, \max\{\alpha(D^*), \beta(D^*)\}), (\max\{\alpha(D'^*), \beta(D'^*)\}, \max\{\alpha(D'), \beta(D')\})\}$$

pour  $D, D' \in N(f, g)^*$ .

**Remarque 2.6.21.** L'ensemble des paires jacobienues du couple  $(f, g)$  est égal à

$$\{(w(f), w(g))\}_w$$

où  $w$  est le poids défini par  $w(x) = |S|_2$  et  $w(y) = |S|_1$  et  $S$  parcourt l'ensemble des faces de  $N(f, g)^*$ .

**Remarque 2.6.22.** Dans le cas particulier où  $f$  est une forme linéaire, on retrouve une partie du résultat du théorème 1.1, de [LP].

*Démonstration.* Puisque  $fg$  est non-dégénéré pour son polygone de Newton au sens de Kouchnirenko,  $D_m(fg)$  n'a qu'un axe vertical. Soit  $v_i$  (resp.  $v'_j$ ) le sommet de  $D_m(fg)$  issu de la face  $S_i$  de  $N(f)$  (resp.  $S'_j$  de  $N(g)$ ). D'après la remarque 1.3.1, il y a une correspondance bijective entre les sommets de rupture du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  et les faces de  $N(fg)^*$ . On utilise le théorème 2.6.14 pour calculer les paires jacobienues

du couple  $(f, g)$ . Pour les sommets  $v_i$  issus de  $N(f)$  : si  $i < k$ , on considère  $\rho_{v_i}$  une courvette du sommet  $v_i$  et on a

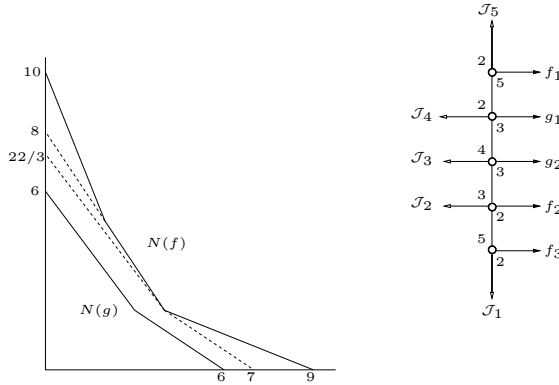
$$\begin{aligned} \frac{(f, \rho_{v_i})_0}{\text{mult}(\rho_{v_i})} &= \frac{1}{q_i} (\sum_{j=1}^i r_j \cdot q_j \cdot p_i + \sum_{j=i+1}^m r_j \cdot q_i \cdot p_j) \\ &= p_i/q_i (r_1 q_1 + \dots + r_i q_i) + r_{i+1} p_{i+1} + \dots + r_m p_m \\ &= \alpha(D_i) \end{aligned}$$

Soit  $l$  l'entier tel que  $q'_l/p'_l < q_i/p_i < q'_{l+1}/p'_{l+1}$ .

$$\begin{aligned} \frac{(g, \rho_{v_i})_0}{\text{mult}(\rho_{v_i})} &= \frac{1}{q_i} (\sum_{j=1}^l p_i \cdot s_j \cdot q'_j + \sum_{j=l+1}^n q_i \cdot s_j \cdot p'_j) \\ &= p_i/q_i (s_1 q'_1 + \dots + s_l q'_l) + s_{l+1} p'_{l+1} + \dots + s_n p'_n \\ &= \alpha(D_i^*) \end{aligned}$$

Donc la paire jacobienne associée au sommet  $v_i$  est  $(\alpha(D_i), \alpha(D_i^*))$ . De la même façon, pour  $i \geq k$ , on obtient  $(\beta(D_i), \beta(D_i^*))$  et pour les sommets  $v'_j$  issus de  $N(g)$ , des calculs similaires donnent  $(\alpha(D'_j), \alpha(D'_j))$  si  $j < k$  et  $(\beta(D'_j), \beta(D'_j))$  si  $j \geq k$ . □

**Exemple 2.6.23.** On considère  
 $f(x, y) = x^9 + 3x^4y^2 + 2x^2y^5 + y^{10}$   
 $g(x, y) = x^6 - x^3y^2 + 5y^6$



Le germe  $fg$  est non-dégénéré pour son polygone de Newton au sens de Kouchnirenko. Donc d'après la proposition 2.6.20, on obtient les paires jacobiennes

$$\{(8, 6), (9, 6), (10, 6), (22/3, 6), (7, 6)\}$$

On constate sur  $D_m(fg\mathcal{J})$  qu'un paquet de  $\mathcal{J}$  sort dans chaque zone de stabilité de  $D_m(fg)$ .

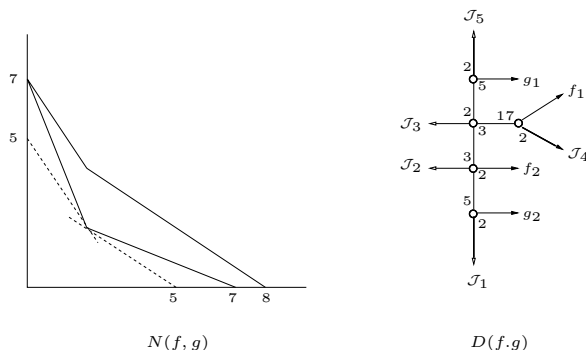
**Cas général.**

Nous allons voir sur les deux exemples suivants que dans le cas général, nous ne pouvons pas énoncer de résultat avec la seule donnée de  $N(f, g)$ .

**Exemple 2.6.24.** On considère

$$f(x, y) = x^2(x^3 - y^2)^2 + y^7$$

$$g(x, y) = x^7 + x^2y^2 + y^7$$



Dans cet exemple, on voit qu'une face de  $N(f)$  est dégénérée. On a les paires jacobiniennes suivantes :

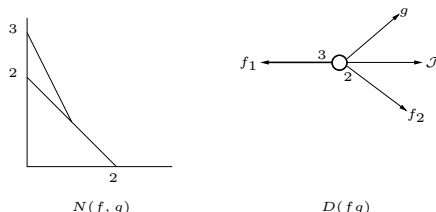
$$\{(7, 5), (7, 7), (8, 5), (8, 7), (21/2, 5)\}.$$

Sur  $N(f, g)$ , on peut trouver les paires  $(5, 7), (7, 7), (5, 8)$  et  $(7, 8)$ . Cependant, rien ne permet de conclure qu'il y a une autre paire  $(5, 21/2)$ .

**Exemple 2.6.25.** Je remercie Janusz Gwozdziwicz qui m'a fourni cet exemple. On considère

$$f(x, y) = (y - x)(y^2 - x)$$

$$g(x, y) = (y - x)^2 + x^3$$



Dans cet exemple, on a un seul sommet de rupture sur  $D_m(fg)$ . La seule paire jacobienne est  $(5/2, 3)$ , alors que sur le polygone de Newton, on pourrait penser que  $(2, 2)$  est une paire jacobienne.

### 2.6.9 Étude de certaines composantes communes.

Nous allons dans ce paragraphe énoncer un résultat sur le comportement de  $J(f, g)$  quand  $f$  et  $g$  ont une éventuelle composante commune en  $y$ . Ce résultat sera utile pour pouvoir appliquer la récurrence permettant de passer d'un axe vertical à un autre sur  $D_m(fg)$ . On suppose ici que  $f$  et  $g$  ont une composante commune en  $y$  de multiplicité  $l_r$  pour  $f$  et  $m_s$  pour  $g$ , c'est à dire

$$f = y^{l_r} \bar{f} \text{ et } g = y^{m_s} \bar{g} \text{ où } y \text{ ne divise ni } \bar{f} \text{ ni } \bar{g}.$$

Soit  $v$  le sommet de rupture le plus haut du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ . Il est connecté à la flèche  $v'$  représentant la composante en  $y$  commune à  $f$  et  $g$ . Soient  $Q$  le point d'ordonnée minimale de  $N(f)$  et  $Q'$  le point d'ordonnée minimale de  $N(g)$ . Si  $Q$  et  $Q'$  ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ , alors d'après la proposition 2.5.3, l'arête  $]v, v'[_$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$  et on a déjà traité ce cas.

On suppose maintenant que  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ . Alors d'après la proposition 2.5.3, on a  $[v, v'[_ \in \mathcal{Z}_v$ . Soient  $p$  la décoration située en dessous de  $v$  et  $q$  la décoration située au dessus de  $v$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ . Enfin soient

$$in_w(f)(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i} \text{ et } in_w(g)(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j}.$$

Posons

$$\bar{f}(x, y) = \sum_{i \geq 0} a_i(x)y^i \text{ et } \bar{g}(x, y) = \sum_{i \geq 0} b_i(x)y^i, \text{ où } a_i(x), b_i(x) \in K\{x\}.$$

**Proposition 2.6.26.** *On suppose que l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ , et que  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ . Alors si  $a_0(x)^{m_s} \neq kb_0(x)^{l_r}$  avec  $k \in K^\times$ ,  $J$  suit  $f$  et/ou  $g$  le long des arêtes partant de  $v$  vers la droite et ne se terminant pas par des flèches, et il existe un ou plusieurs paquets de  $J$  qui se séparent de  $fg$  à des sommets  $v_{\alpha, \beta} \in \mathcal{Z}_v$ .*

*Démonstration.* Puisqu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport poids  $w$ , les lemmes 2.6.4 et 2.6.7 sont valides. Par conséquent,  $J$  suit  $f$  et/ou  $g$  le long des arêtes horizontales partant de  $v$  et ne se terminant pas par des flèches. De plus,

$$in_w J(f, g) = J(in_w f, in_w g).$$

On a alors

$$in_w J(f, g)(x, y) = CC'x^{l_0+m_0-1}y^{l_r+m_s-1} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j-1} \\ \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2p} + A_2^{i,j} x^p y^q + A_3^{i,j} y^{2q}) \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q) \prod_{l \neq j} (x^p - a'_l y^q)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (l_0 m_s - m_0 l_r + m_s l_i (r-1)p - l_r m_j p (s-1)) \\ A_2^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (m_0 l_r - l_0 m_s + l_r m_j p (s-1) + m_0 l_i (r-1)q \\ \quad + l_i m_j (r-1)(s-1)pq) a_i + \frac{1}{(r-1)(s-1)} (m_0 l_r - l_0 m_s \\ \quad - l_0 m_j (s-1)q - m_s l_i (r-1)p - l_i m_j (r-1)(s-1)pq) a'_j \\ A_3^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)} (l_0 m_s - m_0 l_r - m_0 l_i (r-1)q + n_0 m_j (s-1)q a_i a'_j) \end{array} \right.$$



Dans  $in_w J(f, g)$ , le coefficient du terme de plus haut degré en  $x$  est  $\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} A_1^{i,j}$ . Il est nul car les points  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ . Posons  $J_2(x, y) = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_2^{i,j} x^p y^q + A_3^{i,j} y^{2q}) \prod_{k \neq i} (x^p - a_k y^q) \prod_{l \neq j} (x^p - a'_l y^q)$ . Écrivons-le sous la forme

$$J_2(x, y) = C_0 y^{(r-1+s-1)q} + \dots + C_k x^{kp} y^{(r+s-2-k)q} + \dots + C_{r+s-3} x^{(r+s-3)p} y^q.$$

Puisqu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$ , il existe au moins un  $k \in \{0, \dots, r+s-3\}$  tel que  $C_k \neq 0$ . Soit

$$k_0 := \max\{k \in \{0, \dots, r+s-3\} / C_k \neq 0\}.$$

Alors le point d'ordonnée minimale de  $N(J) \cap D_J$  où  $D_J$  est la droite d'équation  $qx+py = w(J)$  est

$$D = (L_0 + M_0 - 1 - (r+s-2-k_0)p, l_r + m_s - 1 + (r+s-2-k_0)q).$$

D'autre part, on a

$$J(f, g) = J(y^{l_r} \bar{f}, y^{m_s} \bar{g}) = y^{l_r+m_s-1} (l_r J(y, \bar{g}) \bar{f} + m_s J(\bar{f}, y) \bar{g} + J(\bar{f}, \bar{g}) y).$$

On a  $\bar{f}(x, y) = \sum_{i \geq 0} a_i(x) y^i$  et  $\bar{g}(x, y) = \sum_{i \geq 0} b_i(x) y^i$  où  $a_i(x), b_i(x) \in K\{x\}$ . Alors un calcul simple donne

$$(l_r J(y, \bar{g}) \bar{f} + m_s J(\bar{f}, y) \bar{g}) (x, 0) = m_s a'_0(x) b_0(x) - l_r a_0(x) b'_0(x).$$

Cette quantité est identiquement nulle si et seulement si

$$a_0(x)^{m_s} = k b_0(x)^{l_r} \text{ où } k \in K^\times,$$

ce qui est contraire aux hypothèses. Donc  $y$  ne divise pas

$$(l_r J(y, \bar{g}) \bar{f} + m_s J(\bar{f}, y) \bar{g} + J(\bar{f}, \bar{g}) y).$$

Par conséquent, la multiplicité de la composante en  $y$  pour  $J$  est exactement  $l_r + m_s - 1$ . Or

$$l_r + m_s - 1 + (r+s-2-k_0)q > l_r + m_s - 1.$$

Il y a donc au moins une face de  $N(J)$  de pente  $-\beta/\alpha$  telle que  $0 < \beta/\alpha < q/p$ . Par conséquent, il y a un paquet de  $J$  se séparant de  $fg$  à un sommet  $v_{\alpha,\beta}$  du premier axe vertical de  $D_m(fgJ)$ . Puisque  $0 < \beta/\alpha < q/p$ ,  $v_{\alpha,\beta}$  appartient à l'arête  $]v, v'[$  donc  $v_{\alpha,\beta} \in \mathcal{Z}_v$ . □

### 2.6.10 Étude des axes verticaux suivants.

**Proposition 2.6.27.** *Tous les résultats du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  précédemment obtenus s'appliquent aux axes verticaux suivants, et par itération à tous les axes verticaux de  $D_m(fg)$ .*

*Démonstration.* Soit  $S$  une face de  $N(fg)$  de pente  $-q/p$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ . Il existe un sommet  $v_0$  du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  (qui peut éventuellement disparaître au cours de la minimalisation) portant les décorations  $p$  en dessous et  $q$  au dessus. On suppose qu'une arête correspondant à la racine  $a$  part de  $v_0$  vers la droite. On applique les méthodes du paragraphe 1.2 : on effectue la transformation de Duval-Newton suivante :

$$\begin{aligned} \Phi^1 : \quad K^2 &\longrightarrow K^2 \\ (x_1, y_1) &\longmapsto (y_1^q(a^{p'} + x_1), a^{q'} y_1^p) \end{aligned}$$

où  $p', q' \in \mathbb{N}$  sont tels que  $pp' - qq' = 1$ . On a

$$f \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1) \text{ et } g \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} J(y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1), y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)) &= J(f \circ \Phi^1(x_1, y_1), g \circ \Phi^1(x_1, y_1)) \\ &= J(\Phi^1(x_1, y_1)) \cdot J(f, g) \circ \Phi^1(x_1, y_1) \\ &= p y_1^{p+q-1} J(f, g)(\Phi^1(x_1, y_1)) \\ &= p y_1^{p+q-1} y_1^{N_{v_0, J}} J^1(f, g)(x_1, y_1) \end{aligned}$$

On veut appliquer les résultats que l'on a obtenu pour le premier axe vertical à

$$(y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1), y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)).$$

On doit donc vérifier que l'on est sous les mêmes hypothèses, c'est à dire :

- $y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1)$  et  $y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)$  n'ont pas de composante commune autre que  $y_1$ ,
- puisque  $y_1$  est une composante commune, est-on sous les hypothèses de la proposition 2.6.26 ?

Si  $y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1)$  et  $y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)$  avaient une composante commune autre que  $y_1$ , alors d'après l'algorithme de construction de  $D_m(fg)$  (paragraphe 1.2),  $f$  et  $g$  auraient une composante commune, ce qui est contraire aux hypothèses.

D'autre part, regardons si l'on est sous les hypothèses de la proposition 2.6.26 :  $y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1)$  et  $y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)$  ont une composante commune en  $y_1$ .

Elle est de multiplicité  $N_{v_0, f} = w(f)$  pour  $y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1)$  et de multiplicité  $N_{v_0, g} = w(g)$  pour  $y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)$ . Posons  $f^1(x_1, y_1) = \sum_{i \geq 0} a_i(x_1) y_1^i$  et  $g^1(x_1, y_1) = \sum_{i \geq 0} b_i(x_1) y_1^i$ , où  $a_i(x), b_i(x) \in K\{x\}$ . D'après ce qu'on a vu au paragraphe 1.2, si

$$f(x, y) = \text{in}_w(f)(x, y) + \sum_{(a,b)/qa+pb > w(f)=N} A_{a,b} x^a y^b,$$

avec

$$\text{in}_w(f)(x, y) = C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i},$$

alors

$$\text{in}_w(f) \circ \Phi^1(x_1, y_1) = C y_1^{w(f)} \left( (a_{i_0}^{p'} + x_1)^{l_0} \prod_{i=1}^{r-1} ((a_{i_0}^{p'} + x_1)^p - a_i a_{i_0}^{q q'})^{l_i} \right)$$

et

$$\left( \sum_{(a,b)/qa+pb > w(f)} A_{a,b} x^a y^b \right) \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^{w(f)} \left( \sum_{(a,b)/qa+pb > w(f)} A_{a,b} a_{i_0}^{qq'} y_1^{qa+pb-w(f)} (a_{i_0}^{p'} + x_1)^a \right).$$

Donc  $y_1^{w(f)} a_0(x_1) = in_w(f) \circ \Phi^1(x_1, y_1)$  et  $y_1^{w(g)} b_0(x_1) = in_w(g) \circ \Phi^1(x_1, y_1)$ . Alors on a  $a_0(x_1)^{w(g)} = kb_0(x_1)^{w(f)}$  si et seulement si

$$in_w(f)^{w(g)} \circ \Phi^1(x_1, y_1) = in_w(g)^{w(f)} \circ \Phi^1(x_1, y_1).$$

Avec

$$in_w(f)(x, y) = C x^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i} \text{ et } in_w(g)(x, y) = C' x^{m_0} y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^p - a'_j y^q)^{m_j},$$

On obtient

$$C (a_{i_0}^{p'} + x_1)^{w(g)l_0} \prod_{i=1}^{r-1} ((a_{i_0}^{p'} + x_1)^p - a_i a_{i_0}^{qq'})^{w(g)l_i} = k C' (a_{i_0}^{p'} + x_1)^{w(f)m_0} \prod_{j=1}^{s-1} ((a_{i_0}^{p'} + x_1)^p - a'_j a_{i_0}^{qq'})^{w(f)m_j},$$

et par identification des racines,

$$in_w(f)^{w(g)}(x, y) = in_w(g)^{w(f)}(x, y).$$

On a donc  $a_0(x_1)^{w(g)} = kb_0(x_1)^{w(f)}$  si et seulement si  $in_w(f)^{w(g)}(x, y) = in_w(g)^{w(f)}(x, y)$ , c'est à dire si l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  au sommet  $v_0$  par rapport au poids  $w$ . Alors, soit  $v$  est le sommet le plus haut de l'axe vertical obtenu après la transformation de Newton  $\Phi_1$ . Ce sommet est connecté à  $v_0$  par une arête et d'après la proposition 2.5.3, on a  $v \in \mathcal{Z}_{v_0}$ . Si l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  au sommet  $v_0$  par rapport au poids  $w$ , on ne sait pas si un paquet de  $J(y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1), y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1))$  se sépare de  $y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1)$  et  $y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1)$  dans  $\mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v_0}$ , mais il s'agit des zones exclues par hypothèse. Sinon, on est sous les hypothèses de la proposition 2.6.26

Par conséquent, on peut appliquer les résultats obtenus pour le premier axe vertical à l'application  $(y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1), y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1))$ . Alors on saura dans quelles zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1) y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1))$  des paquets de  $J(y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1), y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1))$  se séparent de  $y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1) y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1)$ . D'après l'égalité

$$J(y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1), y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1)) = p y_1^{p+q-1} y_1^{N_{v_0,J}} J^1(f, g)(x_1, y_1),$$

on saura donc dans quelles zones du premier axe vertical de

$$D_m(y_1^{N_{v_0,f}} f^1(x_1, y_1) y_1^{N_{v_0,g}} g^1(x_1, y_1))$$

des paquets de  $J^1(f, g)(x_1, y_1)$  se séparent de  $y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1) y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)$ . D'après la proposition 1.1.13, on a

$$N(y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1) y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)) = N(y_1^{N_{v_0, f} + N_{v_0, g}}) + N(f^1(x_1, y_1) g^1(x_1, y_1)).$$

Donc  $N(y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1) y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1))$  et  $N(f^1(x_1, y_1) g^1(x_1, y_1))$  sont identiques à une translation près vers le haut. Par conséquent, les sommets de rupture du premier axe vertical de  $D_m(y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1) y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1))$  sont exactement les sommets de rupture du second axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la racine  $a$ . De plus, on a les deux lemmes suivants :

**Lemme 2.6.28.** *Les zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(y_1^{N_{v_0, f}} f^1 y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  sont exactement les zones de stabilité du second axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la racine  $a$ .*

*Démonstration.* Soient  $v$  un sommet de rupture du premier axe vertical de  $D_m(y_1^{N_{v_0, f}} f^1 y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  et  $v'$  un sommet relié à  $v$  par une arête. On suppose que  $v$  correspond à une face  $S^1 \in N(y_1^{N_{v_0, f}} f^1 y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  de pente  $-q_1/p_1$  avec  $\text{pgcd}(p_1, q_1) = 1$ . Soit  $w_1$  le poids défini par  $w_1(x_1) = q_1$  et  $w_1(y_1) = p_1$ . Enfin, soit  $\bar{f}$  (resp.  $\bar{g}$ ) le produit des branches de  $y_1^{N_{v_0, f}} f^1$  (resp.  $y_1^{N_{v_0, g}} g^1$ ) telles que les chemins joignant  $v'$  à ces flèches ne passent pas par  $v$ . Alors d'après la proposition 2.5.3, on a

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour une arête verticale, } Q \text{ et } Q' \text{ sont homothétiques par rapport} \\ \text{à l'origine sur } N(y_1^{N_{v_0, f}} f^1) \cup N(y_1^{N_{v_0, g}} g^1) \\ \text{pour une arête horizontale, } \frac{w_1(y_1^{N_{v_0, g}} g^1)}{w_1(y_1^{N_{v_0, f}} f^1)} = \frac{w_1(\bar{g})}{w_1(\bar{f})} \end{cases}$$

Soit  $C$  (resp.  $C'$ ) la somme sur toutes les géodésiques joignant  $v'$  à une flèche représentant  $\bar{f}$  (resp.  $\bar{g}$ ) du produit des nombres adjacents à ces géodésiques. Alors

$$\frac{w_1(\bar{g})}{w_1(\bar{f})} = \frac{(\bar{g}, \rho_v)_0}{(\bar{f}, \rho_v)_0} = \frac{q_1 p_1 C'}{q_1 p_1 C} = \frac{C'}{C}.$$

Regardons maintenant  $v$  comme un sommet du second axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la racine  $a$  ( $v'$  est un sommet relié à  $v$  par une arête). Soit  $v_0$  le sommet précédant  $v$ , et soient  $p_0$  et  $q_0$  les décorations portées par  $v_0$ . Le sommet  $v$  porte les décorations  $p_1$  en dessous et  $a_1$  au dessus, avec  $a_1 = p_0 q_0 p_1 + q_1$ . Soit  $w_1$  le poids défini par  $w_1(x_1) = q_1$  et  $w_1(y_1) = p_1$ . Enfin, soit  $f_2$  (resp.  $g_2$ ) le produit des branches de  $f$  (resp.  $g$ ) telles que les géodésiques joignant  $v'$  à ces flèches ne passent pas par  $v$ . D'après la proposition 2.5.3, on a

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour une arête verticale, } Q \text{ et } Q' \text{ sont homothétiques par rapport} \\ \text{à l'origine sur } N(y_1^{N_{v_0, f}} f^1) \cup N(y_1^{N_{v_0, g}} g^1) \\ \text{pour une arête horizontale, } \frac{w_1(y_1^{N_{v_0, g}} g^1)}{w_1(y_1^{N_{v_0, f}} f^1)} = \frac{w_1(y_1^{N_{v_0, g_2}} g_2^1)}{w_1(y_1^{N_{v_0, f_2}} f_2^1)} \end{cases}$$

La somme sur toutes les géodésiques joignant  $v'$  à une flèche représentant  $f_2$  (resp.  $g_2$ ) du produit des nombres adjacents à ces géodésiques est égale à  $C$  (resp.  $C'$ ) défini ci-dessus. Or on a

$$\frac{w_1(y_1^{N_{v_0, g_2}} g_2^1)}{w_1(y_1^{N_{v_0, f_2}} f_2^1)} = \frac{(g_2, \rho_v)_0}{(f_2, \rho_v)_0} = \frac{a_1 p_1 C'}{a_1 p_1 C} = \frac{C'}{C}.$$

Donc  $\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'}$  où  $v$  est un sommet du premier axe vertical de  $D(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  et  $v'$  un sommet relié à  $v$  par une arête est équivalent à  $\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'}$  où  $v$  est un sommet du second axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la racine  $a$  et  $v'$  est un sommet relié à  $v$  par une arête.  $\square$

**Lemme 2.6.29.** *Les quotients jacobiens provenant de composantes de  $J(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  se séparant de  $y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1$  sur le premier axe vertical de  $D_m(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  sont exactement les quotients jacobiens provenant de composantes de  $J(f, g)$  se séparant de  $fg$  sur le second axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la racine  $a$ .*

*Démonstration.* Les quotients jacobiens provenant de composantes de  $J(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  se séparant de  $y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1$  sur le premier axe vertical de  $D_m(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  sont les  $\frac{(y_1^{N_{v_0, g}} g^1, \rho_v)_0}{(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, \rho_v)_0}$  où  $v$  parcourt les sommets du premier axe vertical de  $D_m(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$  desquels sortent des composantes de  $J(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, y_1^{N_{v_0, g}} g^1)$ . Puisque

$$J(y_1^{N_{v_0, f}} f^1(x_1, y_1), y_1^{N_{v_0, g}} g^1(x_1, y_1)) = p y_1^{p+q-1} y_1^{N_{v_0, J}} J^1(f, g)(x_1, y_1),$$

ces sommets sont exactement les sommets du second axe vertical de  $D_m(fg)$  desquels sortent des composantes de  $J(f, g)$ . De plus,

$$\frac{(y_1^{N_{v_0, g}} g^1, \rho_v)_0}{(y_1^{N_{v_0, f}} f^1, \rho_v)_0} = \frac{w_1(y_1^{N_{v_0, g}} g^1)}{w_1(y_1^{N_{v_0, f}} f^1)} = \frac{p_1 N_{v_0, g} + w_1(g^1)}{p_1 N_{v_0, f} + w_1(f^1)} = \frac{N_{v, g}}{N_{v, f}} = \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}.$$

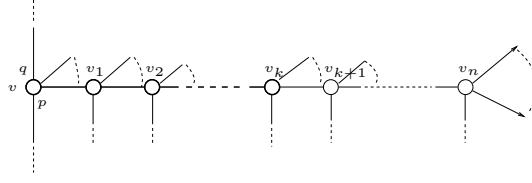
Donc on obtient les quotients jacobiens provenant de composantes de  $J(f, g)$  se séparant de  $fg$  sur le second axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la racine  $a$ .  $\square$

$\square$

### 2.6.11 Zones de type 5 : situation d'Abhyankar faible.

**Proposition 2.6.30.** *Soit  $v$  un sommet de rupture du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $p$  en dessous et  $q$  au dessus. Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ . On considère une arête horizontale partant de  $v$  correspondant à une racine  $a$  et on suppose qu'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$  et  $a$ . Alors il existe au moins un sommet  $v' \in \mathcal{Z}_v$  auquel un paquet de  $J$  se sépare de  $fg$ .*

*Démonstration.* On considère une géodésique de  $D_m(fg)$  partant de  $v$  en suivant l'arête horizontale considérée dans la proposition et allant jusqu'à une flèche du diagramme. Soient  $v, v_1, \dots, v_n$  les sommets de cette géodésique.



Il existe un de ces sommets pour lequel on n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$ , car sinon,  $f$  et  $g$  auraient une composante commune. Soit  $v_k$  le sommet de  $\{v_1, \dots, v_n\}$  le plus proche de  $v$  pour lequel on n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$ . Puisqu'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  pour les arêtes  $[v, v_1], \dots, [v_{k-1}, v_k]$ , d'après la proposition 2.5.3, on a

$$\mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v_1} = \dots = \mathcal{Z}_{v_k} \text{ et } [v, v_1], \dots, [v_{k-1}, v_k] \subset \mathcal{Z}_v = \dots = \mathcal{Z}_{v_k}.$$

Il suffit donc de montrer qu'au moins une composante de  $J$  suit  $f$  et  $g$  le long de la chaîne  $[v, v_k]$  : alors, puisqu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  en  $v_k$ , on peut appliquer les propositions 2.6.3, 2.6.9, 2.6.11 et 2.6.27 : il y existe donc un sommet  $\tilde{v} \in \mathcal{Z}_{v_k} = \mathcal{Z}_v$  auquel un paquet de  $J$  se sépare de  $fg$ .

Le sommet  $v_k$  est obtenu après  $l$  transformations de Duval-Newton successives (on a  $l \geq k$  car certains sommets entre  $v$  et  $v_k$  peuvent avoir disparu au cours de la minimalisation) : pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^i : \quad K^2 &\longrightarrow K^2 \\ (x_i, y_i) &\longmapsto (y_i^{q^i} (a_i^{p^i} + x_i), a_i^{q^i} y_i^{p^i}) \end{aligned}$$

où  $p^i, q^i \in \mathbb{N}$  sont tels que  $p^i p^{i-1} - q^i q^{i-1} = 1$ . Soit  $\Psi(x_l, y_l) := \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^l(x_l, y_l)$ . On a  $f \circ \Psi(x_l, y_l) = y_l^{N_{l-1}, f} f^l(x_l, y_l)$ ,  $g \circ \Psi(x_l, y_l) = y_l^{N_{l-1}, g} g^l(x_l, y_l)$  et  $J \circ \Psi(x_l, y_l) = y_l^{N_{l-1}, J} J^l(x_l, y_l)$ . De plus,

$$\begin{aligned} J(f \circ \Psi(x_l, y_l), g \circ \Psi(x_l, y_l)) &= J(\Psi(x_l, y_l)) J(f, g) \circ \Psi(x_l, y_l) \\ &= J(\Psi(x_l, y_l)) y_l^{N_{l-1}, J} J^l(x_l, y_l). \end{aligned}$$

Un calcul simple donne  $J(\Psi(x_l, y_l)) = p_1 \cdots p_l y_l^{q_1 p_2 \cdots p_l + \dots + q_l + p_1 \cdots p_l - 1}$ . Donc

$$J(f \circ \Psi(x_l, y_l), g \circ \Psi(x_l, y_l)) = p_1 \cdots p_l y_l^{q_1 p_2 \cdots p_l + \dots + q_l + p_1 \cdots p_l - 1 + N_{l-1}, J} J^l(x_l, y_l).$$

Si  $J$  ne suit pas  $f$  et  $g$  le long de la chaîne  $[v, v_k]$ , d'après la remarque 1.2.6, on a

$$J \circ \Psi(x_l, y_l) = y_l^{N_{l-1}, J} J^l(x_l, y_l) = y_l^{N_{l-1}, J} (u + \dots) \text{ où } u \in K^\times.$$

Si l'on construit le premier axe vertical de  $D_m(y_l^{N_{l-1}, f} f^l y_l^{N_{l-1}, g} g^l)$ , on a une flèche en haut qui représente la composante  $y_l^{N_{l-1}, f + N_{l-1}, g}$  et au moins un sommet de rupture

$v_k$  (en effet, puisqu'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  jusqu'à  $v_k$ , on a  $f \circ \Psi(x_l, y_l) = y_l^{N_l-1, f}(x_l^A + \dots)$  et  $g \circ \Psi(x_l, y_l) = y_l^{N_l-1, g}(x_l^B + \dots)$ ). On n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f \circ \Psi(x_l, y_l), g \circ \Psi(x_l, y_l))$  au sommet  $v_k$  donc d'après les résultats obtenus pour le premier axe vertical de  $D_m(fg)$ , on sait qu'un paquet de  $J(f \circ \Psi(x_l, y_l), g \circ \Psi(x_l, y_l))$  se sépare de  $y_l^{N_l-1, f} f^l y_l^{N_l-1, g} g^l$  en un sommet  $v_{\alpha, \beta}$  de  $\mathcal{Z}_{v_k}$ . D'après la proposition 2.6.26, le paquet de  $J(f \circ \Psi(x_l, y_l), g \circ \Psi(x_l, y_l))$  qui se sépare de  $y_l^{N_l-1, f} f^l y_l^{N_l-1, g} g^l$  en un sommet  $v_{\alpha, \beta}$  de  $\mathcal{Z}_{v_k}$  est de la forme  $J_{\alpha, \beta}(x_l, y_l) = x_l^\alpha + a_l y_l^\beta + \dots$  avec  $\alpha \neq 0$ . Donc  $J \circ \Psi(x_l, y_l) \neq (u + \dots)$  avec  $u \in K^\times$ . Finalement, au moins une composante de  $J$  suit  $f$  et  $g$  le long de la chaîne  $[v, v_k]$  et se sépare de  $fg$  dans la zone de stabilité de  $v_k$ .

□

On retrouve donc le théorème 2.4.3. En particulier, d'après le théorème 1.3.2, si  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , on retrouve le fait que sous nos hypothèses, l'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est un invariant du type topologique de  $(f, g)$ .

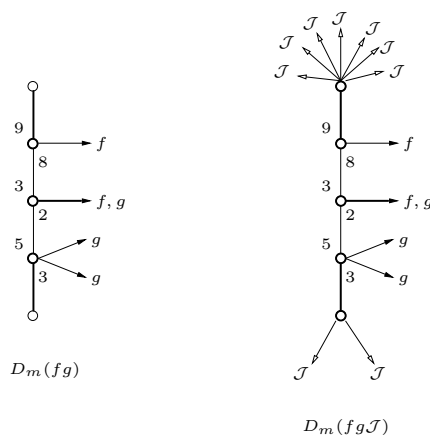
## 2.7 Quelques commentaires.

On peut remarquer que dans le théorème 2.0.5, l'hypothèse "n'ayant pas de composante commune" est indispensable. En effet, comme le montre l'exemple suivant, il existe des germes admettant des composantes communes pour lesquels le théorème n'est plus vérifié.

**Exemple 2.7.1.** *On considère*

$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 - y^3)(x^8 + y^9 + y^{10}) \\ g(x, y) = (x^2 - y^3)(x^6 + x^8 + y^{10}) \end{cases}$$

*On obtient les diagramme minimaux de Newton suivants :*



*Il y a trois zones de stabilité sur  $D_m(fg)$  correspondant aux trois quotients de contact  $\frac{4}{5}$ , 1 et  $\frac{12}{13}$ . En revanche, l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est  $\left\{ \frac{4}{5}, \frac{12}{13} \right\}$ .*

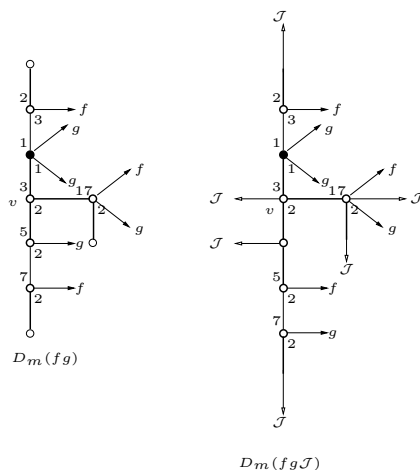
Reprenons maintenant l'exemple du paragraphe 2.2.

**Exemple 2.7.2.** *On considère*

$$\begin{cases} f(x, y) = (y^2 - x^3)((y^3 - x^2)^2 + x^5y)(y^7 + x^2) \\ g(x, y) = (y^2 - x^2)((y^3 - x^2)^2 + 2x^5y)(y^5 - x^2) \end{cases}$$

*On obtient les diagrammes minimaux de Newton suivant.*





Au sommet  $v$ , on est dans la situation d'Abhyankar pour  $f$  et  $g$ . On constate sur le diagramme minimal de Newton de  $fg\mathcal{J}$  que plusieurs paquets de  $\mathcal{J}$  sortent dans la zone de stabilité de  $v$ .

Le comportement de  $\mathcal{J}$  dans les zones de stabilité des sommets pour lesquels on est dans la situation d'Abhyankar reste à étudier. Cependant, les raisonnements précédents ne peuvent pas s'appliquer puisque dans cette situation, nous ne savons pas, pour le moment, évaluer la partie initiale de  $J(f, g)$  par rapport au poids associé à ce sommet.

Nous pouvons en revanche, sous nos hypothèses, énoncer le résultat suivant :

**Théorème 2.7.3.** Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes transverses admettant une singularité en  $(0, 0) \in K^2$ . Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton de  $fg$ . Alors l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est égal au sous-ensemble des rationnels

$$\left\{ \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} \right\}_v,$$

où  $\rho_v$  est une curvette du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(fg)$ .

*Démonstration.* En effet, si les deux germes considérés sont transverses, on n'est dans la situation d'Abhyankar à aucun sommet de  $D_m(fg)$ .  $\square$

Enfin, on peut énoncer un résultat sur les quotients polaires. On rappelle que l'ensemble des quotients polaires de  $g$  est l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  quand  $f$  est une forme linéaire.

**Théorème 2.7.4.** Soit  $g \in K[[x, y]]$  un germe de fonction analytique admettant une singularité en  $(0, 0) \in K^2$ . Soit  $D_m(g)$  le diagramme minimal de Newton de  $g$ . Alors l'ensemble des quotients polaires de  $g$  est égal au sous-ensemble des rationnels

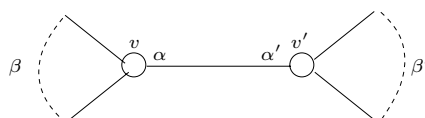
$$\left\{ \frac{(g, \rho_v)_0}{\text{mult}(\rho_v)} \right\}_v,$$

où  $\rho_v$  est une curvette du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(g)$ .

*Démonstration.* C'est immédiat d'après le théorème 2.0.5 avec  $f(x, y) = ax + by$ . De plus, on n'est jamais dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$ . En effet, la seule possibilité est s'il n'y a qu'un sommet de rupture sur le premier axe vertical de  $D_m(g)$  portant les décorations 1 au dessus et 1 en dessous et une seule arête partant de  $v$  vers la droite. Alors par minimalisation, les sommets de valence 1 et les arêtes connectées à ces sommets disparaissent, et sur l'axe vertical suivant, on n'est plus dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$ .  $\square$

## 2.8 Application : croissance des quotients jacobiens.

On considère deux germes non identiquement nuls  $f, g \in K[[x, y]]$  admettant une singularité à l'origine. Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal de Newton coloré de  $fg$ . **On suppose dans ce paragraphe que pour tout sommet  $v$  de  $D_m(fg)$ , on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  en ce sommet.** Nous voulons ici étudier la croissance ou la décroissance des quotients jacobiens de  $(f, g)$  le long des géodésiques du diagramme minimal de Newton  $D_m(fg)$ . On considère deux sommets  $v$  et  $v'$  consécutifs de  $D_m(fg)$  et on suppose que  $v < v'$  au sens défini dans le paragraphe 1.4. Soit  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur l'arête  $[v, v']$ . Soit  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ) le produit des décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ) autres que  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ).



On définit  $f_1, g_1, f_2$  et  $g_2$  comme dans la définition 2.5.1. On a

$$\begin{aligned} (f, \rho_v)_0 &= (f_1, \rho_v)_0 + (f_2, \rho_v)_0 \\ (g, \rho_v)_0 &= (g_1, \rho_v)_0 + (g_2, \rho_v)_0 \\ (f, \rho_{v'})_0 &= (f_1, \rho_{v'})_0 + (f_2, \rho_{v'})_0 = \frac{\beta'}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha'}{\beta}(f_2, \rho_v)_0 \\ (g, \rho_{v'})_0 &= (g_1, \rho_{v'})_0 + (g_2, \rho_{v'})_0 = \frac{\beta'}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha'}{\beta}(g_2, \rho_v)_0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_v < \mathcal{Q}_{v'} &\Leftrightarrow (g, \rho_v)_0(f, \rho_{v'})_0 < (f, \rho_v)_0(g, \rho_{v'})_0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha\alpha' - \beta\beta')(g_1, \rho_v)_0(f_2, \rho_v)_0 < (\alpha\alpha' - \beta\beta')(f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 \end{aligned}$$

Or  $\alpha\alpha' - \beta\beta' = \Delta_{[v, v']} > 0$ , donc

$$\mathcal{Q}_v < \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 < (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0$$

et de même,

$$\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 = (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0,$$

$$\mathcal{Q}_v > \mathcal{Q}_{v'} \Leftrightarrow (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 > (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0.$$

On utilise les notions de diagramme coloré et de géodésiques de  $f$  ou  $g$  définies au paragraphe 1.4.

**Théorème 2.8.1.** *Si l'on parcourt les géodésiques de  $f$  et de  $g$  dans le sens positif sur  $D_m(fg)$ , il y a*

- décroissance (resp. croissance) stricte des quotients de contact de  $D_m(fg)$  le long des arêtes strictement rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ ,
- constance des quotients de contact de  $(f, g)$  le long des arêtes noires de  $D_m(fg)$ ,
- décroissance (resp. croissance) non stricte des quotients de contact de  $(f, g)$  le long des arêtes par lesquelles passent toutes les géodésiques rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ .

*Démonstration.* a) Si l'arête  $[v, v']$  est strictement rouge, alors  $(g_2, \rho_v)_0 = 0$  et  $(f_2, \rho_v)_0 \neq 0$ . De plus, on a forcément  $(g_1, \rho_v)_0 \neq 0$  car  $g$  est supposé non-trivial. Donc

$$(f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 > (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = 0$$

ce qui implique  $Q_v > Q_{v'}$ .

La démonstration est identique pour une arête strictement bleue.

b) Si l'arête  $[v, v']$  est noire, alors  $(f_2, \rho_v)_0 = (g_2, \rho_v)_0 = 0$ . Donc

$$(f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 = 0,$$

ce qui implique  $Q_v = Q_{v'}$ .

c) Si toutes les géodésiques rouges de  $D_m(fg)$  passent par l'arête  $[v, v']$ , alors  $(f_1, \rho_v)_0 = 0$  et  $(f_2, \rho_v)_0 \neq 0$ . Donc si  $(g_1, \rho_v)_0 = 0$ , on a

$$(f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 = 0,$$

ce qui est équivalent à  $Q_v = Q_{v'}$ . En revanche, si  $(g_1, \rho_v)_0 \neq 0$ , alors

$$(f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 > (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = 0$$

ce qui implique  $Q_v > Q_{v'}$ .

□

D'après le théorème 2.0.5, on a alors facilement le résultat suivant :

**Théorème 2.8.2.** *Si l'on parcourt les géodésiques de  $f$  et de  $g$  sur  $D_m(fg)$  dans le sens positif, il y a*

- a) *décroissance (resp. croissance) stricte des quotients jacobiens de  $D_m(fg)$  le long des géodésiques strictement rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ ,*
- b) *constance des quotients jacobiens de  $(f, g)$  le long des arêtes noires de  $D_m(fg)$ ,*
- c) *décroissance (resp. croissance) non stricte des quotients jacobiens de  $(f, g)$  le long des arêtes par lesquelles passent toutes les géodésiques rouges (resp. bleues) de  $D_m(fg)$ .*

Des résultats identiques sont obtenus par Hélène Maugendre dans [M1] sur le graphe dual de la résolution de  $fg$  avec des outils topologiques et sans hypothèse restrictive sur la situation d'Abhyankar. On constate qu'en utilisant les diagrammes de Newton, la démonstration de ce théorème est élémentaire.

Il est clair d'après le théorème 2.0.5 qu'à chaque zone de stabilité de  $D_m(fg)$  est associé un quotient jacobien de  $(f, g)$ . En revanche, on n'a pas

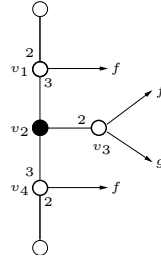
$$\#\{\text{zones de stabilité de } D_m(fg)\} = \#\{\text{quotients jacobiens de } (f, g)\}.$$

En effet, à deux zones de stabilité différentes peut être associé le même quotient jacobien.

**Exemple 2.8.3.** Voici un exemple illustrant la remarque précédente. Soient

$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 - y^3)(x - y)(x^3 - y^2) + x^7 \\ g(x, y) = x - y + x^2 \end{cases}$$

Le diagramme minimal de Newton de  $fg$  est



Les quotients jacobiens obtenus sont :  $1/6$  (en  $v_1$  et  $v_4$ ),  $1/5$  (en  $v_2$ ) et  $1/3$  (en  $v_3$ ). On a quatre zones de stabilité différentes mais le quotient jacobien associé à la zone contenant  $v_1$  est le même que celui associé à la zone contenant  $v_4$ .

**Remarque 2.8.4.** D'après l'exemple 2.8.3, on constate qu'on ne peut pas énoncer de résultats de croissance stricte ou non stricte le long d'un axe vertical. En effet, dans cet exemple, on a trois quotients jacobiens le long du premier axe vertical qui valent dans l'ordre

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{5} \text{ et } \frac{1}{6}.$$

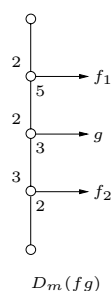
## 2.9 Polygone de Newton de la courbe discriminante $\Delta$ .

Les paires jacobienes du couple  $(f, g)$  nous donnent les pentes du polygone de Newton de la courbe discriminante  $\Delta$ . On sait de plus que la hauteur de ce polygone est égale à  $(f, \mathcal{J})_0$  et la largeur à  $(g, \mathcal{J})_0$  (utiliser le paragraphe 2.1).

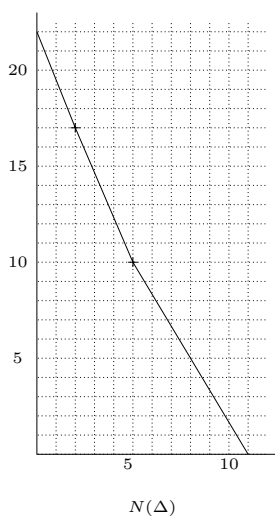
Nous allons maintenant exhiber deux exemples, un premier dans lequel on peut déterminer de façon unique le polygone de Newton de  $\Delta$  avec la seule donnée de  $D_m(fg)$ , et un second pour lequel il reste plusieurs possibilités.

### Premier exemple.

On considère le diagramme minimal de Newton du produit de deux germes  $f = f_1 f_2$  et  $g$  suivant :

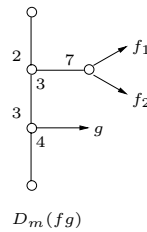


Grâce au théorème 2.0.5, on obtient les trois quotients jacobiens  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{5}{2}$ . De plus, on a  $(f, \mathcal{J})_0 = (f, g)_0 + \mu_0(f) - 1$ , où  $\mu_0(f)$  est le nombre de Milnor de  $f$  en 0. On obtient  $(f, \mathcal{J})_0 = 22$  et  $(g, \mathcal{J})_0 = 11$ . Puisque les extrémités des faces de  $N(\Delta)$  doivent passer par des points entiers, le polygone  $N(\Delta)$  est dans ce cas déterminé.

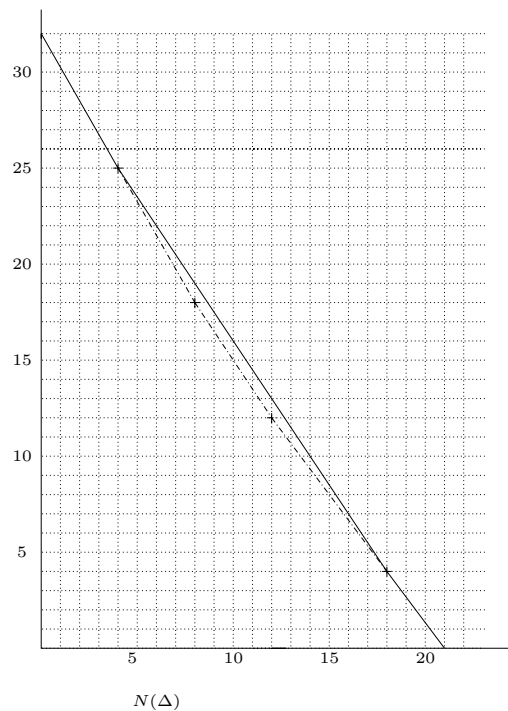


**Second exemple.**

On considère le diagramme minimal de Newton du produit de deux germes  $f = f_1 f_2$  et  $g$  suivant :



Grâce au théorème 2.0.5, on obtient les trois quotients jacobiens  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{7}$  et  $\frac{3}{4}$ . De plus, on a  $(f, \mathcal{J})_0 = 32$  et  $(g, \mathcal{J})_0 = 21$ . En tenant compte du fait que les extrémités des faces de  $N(\Delta)$  doivent passer par des points entiers, on constate que les données dont nous disposons ne permettent pas, ici, de déterminer le le polygone  $N(\Delta)$ .



Cependant, dans cet exemple, nous n'avons pas réussi à exhiber deux couples de germes  $(f, g)$  et  $(\bar{f}, \bar{g})$  donnant deux polygones de Newton différents pour  $\Delta$ . Ceci peut faire l'objet d'un futur travail : peut-on exhiber deux couples de germes  $(f_1, g_1)$  et  $(f_2, g_2)$  tels que  $D_m(f_1 g_1) = D_m(f_2 g_2)$  mais  $N(\Delta_1) \neq N(\Delta_2)$ ? Peut-on décrire une classe de germes  $(f, g)$  pour lesquels le polygone de Newton de  $\Delta$  est un invariant du type topologique de  $fg$ ?

# Chapitre 3

## Fonction zêta-topologique locale multi-variables d'un germe de fonction.

Dans ce chapitre, nous étudions un autre invariant topologique des germes de courbes planes qui est la fonction zêta-topologique locale. Cette fonction est définie pour un germe  $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$  de fonction analytique de la façon suivante : soit  $h : X \rightarrow \mathbb{C}^n$  une résolution de  $f^{-1}\{0\}$ . Notons  $E_i, i \in T$  les composantes irréductibles de  $h^{-1}(f^{-1}\{0\})$ , et  $N_i$  et  $\nu_i - 1$  les multiplicités de  $E_i$  dans le diviseur de respectivement  $f \circ h$  et  $h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ . Pour  $I \subset T$ , notons enfin  $E_I := \bigcap_{i \in I} E_i$  et  $E_I^\circ := E_I \setminus \bigcup_{j \notin I} E_j$ .

**Définition 3.0.1.** *La fonction zêta-topologique locale associée à  $f$  est définie par*

$$Z_{top,0}(f, s) = \sum_{I \subset T} \chi_{top}(E_I^\circ) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + N_i s}$$

où  $\chi_{top}(\cdot)$  est la caractéristique complexe d'Euler-Poincaré.

Cette fonction zêta a été introduite par Denef et Loeser [DL1], et ils démontrent qu'elle ne dépend pas de la résolution choisie. D'autre part, dans le cas des courbes, c'est un invariant topologique du germe, ce qui est faux pour les dimensions supérieures [ACLM].

Une conjecture importante concernant la fonction zêta topologique locale est la conjecture de la monodromie : elle a été énoncée par Denef et Loeser ([DL1], (3.3.2)) et établit un lien entre  $Z_{top,0}(f)$  et les valeurs propres de la monodromie de  $f$  :

**Conjecture 3.0.2.** *Si  $s_0$  est un pôle de  $Z_{top,0}(f, s)$ , alors  $e^{2i\pi s_0}$  est une valeur propre de la monodromie locale de  $f$  à un point de  $f^{-1}\{0\}$ .*

F. Loeser [Loe] et W. Veys [V3] ont montré que cette conjecture était vraie pour  $n = 2$ .

Pour notre étude, nous nous plaçons dans le cas de la dimension 2. La fonction zêta topologique locale d'un germe est, comme nous l'avons précisé ci-dessus, un invariant topologique de ce germe. Cependant, elle ne détermine pas la topologie du germe. Nous nous proposons donc d'étudier une fonction zêta-topologique locale à plusieurs variables qui contient plus d'informations que la fonction zêta-topologique locale classique. On



procède de la façon suivante : soit  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un germe de fonction analytique tel que  $f(0, 0) = 0$ . On décompose  $f$  en produit de  $r$  paquets, pas forcément irréductibles

$$f = f_1 \cdots f_r = \prod_{j=1}^r f_j.$$

Pour  $i \in T$ , soit  $\nu_i - 1$  la multiplicité de  $E_i$  sur le diviseur de  $h^*(dx \wedge dy)$  et pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $N_{i,j}$  la multiplicité de  $E_i$  dans le diviseur de  $f_j \circ \pi$ . On appelle les  $(\nu_i, N_{i,1}, \dots, N_{i,r})_{i \in T}$  les **données numériques de la résolution**.

Dans son exposé au séminaire Bourbaki ([Loo] prop.4.2 et cor.4.3), E. Looijenga définit une fonction zêta-topologique locale à  $r$  variables associée au germe  $f$  décomposé en  $r$  paquets :

**Définition 3.0.3.** *La fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à un décomposition  $f_1 \cdots f_r$  de  $f$  en  $r$  paquets est définie par*

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \sum_{ICT} \chi_{top}(E_I^\circ) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + N_{i,1}s_1 + \dots + N_{i,r}s_r}$$

où  $\chi_{top}(\cdot)$  est la caractéristique complexe d'Euler-Poincaré.

On a  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Q}(s_1, \dots, s_r)$ .

Dans ce chapitre, en utilisant le lien existant entre le diagramme minimal de Newton et le graphe dual de la résolution minimale d'un germe, nous montrons comment calculer la fonction zêta-topologique multi-variables locale d'un germe en utilisant seulement les décorations de son diagramme minimal de Newton.

Il est alors aisé de démontrer que  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = 1$ .

Nous étudions ensuite les "pôles" de la fonction zêta-topologique locale multi-variables d'un germe, c'est à dire les hyperplans au voisinage desquels  $Z_{top,0}(f)$  n'est pas holomorphe.

Nous nous posons alors la question suivante : la fonction zêta-topologique locale détermine-t-elle la topologie du germe auquel elle est associée ? Pour cela, on utilise le résultat suivant :

**Théorème 3.0.4.** *Soient  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  deux germes de courbes planes. Alors  $f$  et  $g$  ont la même topologie si et seulement si  $D_m(f) = D_m(g)$ .*

Nous montrons sur un exemple qu'il existe des germes de courbe admettant la même fonction zêta-topologique locale à une variable mais n'admettant pas le même diagramme minimal de Newton. Ainsi, la fonction zêta-topologique locale à une variable ne détermine pas, en général, la topologie d'un germe. En revanche, nous démontrons le théorème suivant.

**Théorème 3.0.5.** *Soient  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  deux germes de courbes planes. Soient  $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$  et  $g = \prod_{j=1}^t g_j^{m_j}$  les décompositions de  $f$  et  $g$  en produit de composantes irréductibles. Enfin, soit  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  (resp.  $Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t)$ ) la fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à  $f$  (resp.  $g$ ) pour la décomposition de  $f$  (resp.  $g$ ) en les  $r$  (resp.  $s$ ) paquets  $f_1^{n_1}, \dots, f_r^{n_r}$  (resp.  $g_1^{m_1}, \dots, g_t^{m_t}$ ). Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t)$ ,
- (ii)  $D_m(f) = D_m(g)$ .

On déduit donc de ce théorème que la fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à un germe pour sa décomposition en composantes irréductibles avec multiplicités détermine la topologie de ce germe.

En faisant appel à la notion de polynôme d'Alexander multivariable d'un germe, nous donnons un premier "théorème généralisé de la monodromie" pour la fonction zêta-topologique multi-variables locale.

Dans [Li], l'auteur introduit une procédure algébrique permettant de calculer le *polytope de quasiadjonction* d'un germe. Les polytopes de quasiadjonction servent à calculer les variétés caractéristiques qui généralisent les polynômes d'Alexander au cas  $r > 1$ . Nous donnons une nouvelle caractérisation des polytopes de quasiadjonction, et nous obtenons, grâce à cette notion, un autre "théorème généralisé de la monodromie" pour la fonction zêta-topologique locale multi-variables.

Dans tout le chapitre, si  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ ,  $D(f)$  désigne le diagramme de Newton de  $f$  obtenu par la construction décrite au paragraphe 1.2,  $D_m(f)$  son diagramme minimal de Newton et  $D_M(f)$  son diagramme maximal de Newton. Enfin, soient

$$\mathcal{F} := \{ \text{flèches de } D_m(f) \} \text{ et } \mathcal{R} := \{ \text{sommets de rupture de } D_m(f) \}.$$

### 3.1 Calcul des données numériques.

Soit  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  l'équation d'un germe de fonction analytique tel que  $f(0, 0) = 0$ . Nous allons montrer dans les deux propositions suivantes comment calculer les données numériques de la résolution sur les trois diagrammes de Newton  $D(f)$ ,  $D_m(f)$  et  $D_M(f)$  de ce germe. On note  $D_*(f)$  pour désigner l'un de ces trois diagrammes. Soit  $v_i$  un sommet de rupture ou de valence 2 de  $D_*(f)$ . On note  $E_i$  le diviseur qui lui est associé dans la résolution. Soient  $(\nu_{v_i}, N_{v_i,1}, \dots, N_{v_i,r})$  ses données numériques.

**Proposition 3.1.1.** *Pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , le nombre  $N_{v_i,j}$  est égal à la somme, sur toutes les flèches représentant  $f_j$ , du produit des nombres adjacents au chemin joignant  $v_i$  à une de ces flèches.*

*Démonstration.* En utilisant la proposition 1.5.1, la proposition est immédiate.  $\square$

On a défini au paragraphe 1.2 la notion de sommet précédent pour les sommets de  $D(f)$ . On souhaite définir cette notion pour les sommets de  $D_m(f)$ , puis pour ceux de  $D_M(f)$ .

Le diagramme  $D_m(f)$  est un sous-arbre de  $D(f)$ . Pour définir la notion de sommet précédant un sommet de rupture de  $D_m(f)$ , on procède de la façon suivante :

**Définition 3.1.2.** *Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$ . C'est aussi un sommet de rupture de  $D(f)$ . Soit  $v_1$  son sommet précédent sur  $D(f)$ . Si c'est aussi un sommet de  $D_m(f)$ , on dit que  $v_1$  est le **sommet précédant**  $v$  sur  $D_m(f)$ . Sinon, soit  $v_2$  le sommet précédant  $v_1$  sur  $D(f)$ . Si c'est aussi un sommet de  $D_m(f)$ , on dit que  $v_2$  est le sommet précédant  $v$  sur  $D_m(f)$ . Sinon, on répète l'opération jusqu'à ce que  $v_k$  soit un sommet de  $D_m(f)$ . Si un tel sommet  $v_k$  n'existe pas, alors  $v$  n'a pas de sommet précédent sur  $D_m(f)$ .*

**Remarque 3.1.3.** *On a vu dans le paragraphe 1.2 que les notions d'axe vertical et de sommet précédent sur  $D(f)$  dépendent du choix du système de coordonnées. La notion du sommet précédent sur  $D_m(f)$  dépend donc également du choix du système de coordonnées que l'on a fait pour construire  $D(f)$ .*

Le diagramme  $D_M(f)$  est construit à partir de  $D(f)$  en rajoutant des sommets entre deux sommets consécutifs  $v$  et  $v'$  de  $D(f)$  de telle sorte que sur  $D_M(f)$ , toutes les arêtes de la géodésique reliant  $v$  à  $v'$  sont de déterminant 1.

Soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets de  $D_M(f)$  n'étant pas des sommets de  $D(f)$ . Pour  $v \in \mathcal{V}$ , soit  $\rho_v$  une curvette du sommet  $v$ . Alors les sommets de  $D(f \prod_{v \in \mathcal{V}} \rho_v)$  sont exactement les sommets de  $D_M(f)$ .

**Définition 3.1.4.** *Soit  $v$  un sommet de  $D_M(f)$ . Alors son **sommet précédant** sur  $D_M(f)$  est le sommet précédant  $v$  sur  $D(f \prod_{v \in \mathcal{V}} \rho_v)$ .*

**Proposition 3.1.5.** *Soit  $v_i$  un sommet de rupture ou de valence 2 de  $D_*(f)$ . Soit  $v$  le sommet précédant  $v_i$  sur  $D_*(f)$ . Soient  $a_i$  la décoration proche de  $v_i$  située sur la géodésique  $G_{[v,v_i]}$  et  $p_i$  le produit des décorations proches de  $v_i$  autres que  $a_i$ . Enfin, soit  $q_i = \Delta_{[v,v_i]}$ . Alors on a  $\nu_{v_i} = p_i \nu_v + q_i$ .*

*Si  $v_i$  n'admet pas de sommet précédent, soient  $p_i$  et  $q_i$  les deux décorations proches de  $v_i$  supérieures ou égales à 1. Alors  $\nu_{v_i} = p_i + q_i$ .*

*Démonstration.* Montrons le dans un premier temps si  $v_i$  est un sommet de  $D(f)$ . Si  $v_i$  est un sommet du premier axe vertical, il correspond à une face  $S_i$  de pente  $-q_i/p_i$  du polygone de Newton de  $f$  avec  $\text{pgcd}(p_i, q_i) = 1$ . Les transformations de Duval-Newton correspondant à une face du premier polygone de Newton sont de la forme :

$$\begin{cases} x = y_1^{q_i}(a^{p_i} + x_1) \\ y = a^{q_i}y_1^{p_i} \end{cases}$$

où  $p'_i, q'_i \in \mathbb{N}^*$  sont tels que  $p_i p'_i - q_i q'_i = 1$ . On a

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= d(y_1^{q_i}(a^{p_i} + x_1)) \wedge d(a^{q_i}y_1^{p_i}) \\ &= a^{q_i} p_i y_1^{p_i + q_i - 1} dx_1 \wedge dy_1 \end{aligned}$$

Donc on a bien  $\nu_{v_i} = p_i + q_i$ .

Si  $v_i$  est sur un axe vertical suivant, puisque  $\nu - 1$  est par définition égal à la multiplicité de  $E_i$  sur le diviseur de  $\pi^*$ , on a

$$\pi^*(dx_k \wedge dy_k) = C_k y_k^{\nu-1} dx_k \wedge dy_k$$

où  $C_k$  est une constante non nulle. On applique la transformation de Duval-Newton :

$$\begin{cases} x_k = y_{k+1}^{q_i}(a^{p_i} + x_{k+1}) \\ y_k = a^{q_i}y_{k+1}^{p_i} \end{cases}$$

où  $p'_i, q'_i \in \mathbb{N}^*$  sont tels que  $p_i p'_i - q_i q'_i = 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} \pi^*(dx_{k+1} \wedge dy_{k+1}) &= C_k y_{k+1}^{p_i(\nu-1)} d(y_{k+1}^{q_i}(a^{p_i} + x_{k+1})) \wedge d(a^{q_i}y_{k+1}^{p_i}) \\ &= C_k a^{q_i} y_{k+1}^{p_i(\nu-1) + p_i + q_i - 1} dx_{k+1} \wedge dy_{k+1} \end{aligned}$$

d'où  $\nu_{v_i} = p_i \nu + q_i$ .

Pour le diagramme  $D_m(f)$ , soit  $v_i$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$ . C'est aussi un sommet de  $D(f)$ . Soit  $v$  le sommet précédant  $v_i$  sur  $D_m(f)$ . Si  $v$  est le sommet précédant  $v_i$  sur  $D(f)$ , on peut appliquer la démonstration faite pour  $D(f)$ . Sinon, il existe des sommets  $v_1, \dots, v_{i-1}$  de  $D(f)$  tels que sur  $D(f)$ ,  $v$  est le sommet précédant  $v_1$ ,  $v_1$  est le sommet précédant  $v_2$ ,  $\dots$ ,  $v_{i-1}$  est le sommet précédant  $v_i$ . De plus, si pour  $k \in \{1, \dots, i-1\}$ ,  $p_k$  est le produit des décorations proches de  $v_k$  adjacentes à la géodésique reliant  $v$  à  $v_i$ , alors  $p_k = 1$  pour tout  $k \in \{1, \dots, i-1\}$ . En effet, ces sommets ne sont pas sur  $D_m(f)$ , donc ils ont disparu par minimalisation. Soit  $a_p$  le produit des décorations proches de  $v$  adjacentes à la géodésique reliant  $v$  à  $v_i$ . Pour  $k \in \{1, \dots, i-1\}$ , soit  $a_k$  la décoration proche de  $v_k$  située sur l'arête  $[v_{k-1}, v_k]$ . D'après les résultats obtenus pour  $D(f)$ , on a

$$\begin{aligned} \nu_{v_i} &= p_i \nu_{v_{i-1}} + q_i \\ &= p_i \nu_{v_{i-1}} + a_i - a_{i-1} p_{i-1} p_i \\ &= p_i (\nu_{v_{i-1}} - a_{i-1}) + a_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{v_{i-1}} &= p_{i-1} \nu_{v_{i-2}} + a_{i-1} - a_{i-2} p_{i-2} p_{i-1} \\ &= \nu_{v_{i-2}} + a_{i-1} - a_{i-2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \nu_{v_{i-1}} - a_{i-1} &= \nu_{v_{i-2}} - a_{i-2} \\ &\vdots \\ \nu_{v_1} - a_1 &= \nu_v - ap \end{aligned}$$

donc  $\nu_{v_i} = p_i(\nu_v - ap) + a_i = p_i\nu_v + a_i - ap = p_i\nu_v + q_i$ .

Pour le diagramme  $D_M(f)$ , si  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des sommets de  $D_M(f)$  n'étant pas des sommets de  $D(f)$ , les sommets de  $D_M(f)$  sont exactement les sommets de  $D(f \prod_{v \in \mathcal{V}} \rho_v)$ . Or la quantité  $\nu_v$  ne dépend pas du germe considéré. Elle est intrinsèque au diviseur  $E$  de la résolution qui est associée au sommet  $v$ . Par conséquent, on peut appliquer la démonstration faite pour  $D(f)$  à ces sommets en considérant  $D(f \prod_{v \in \mathcal{V}} \rho_v)$ .

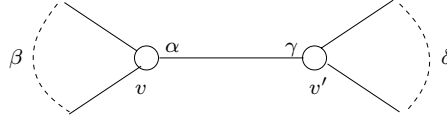
□

### 3.2 Plusieurs résultats sur les données numériques.

Dans tout le paragraphe,  $D(f)$  désigne le diagramme de Newton de  $f$ ,  $D_m(f)$  son diagramme minimal et  $D_M(f)$  son diagramme maximal. Nous allons énoncer des résultats sur les données numériques des sommets de ces diagramme dans trois situations particulières.

#### 3.2.1 Résultats sur les données numériques de deux sommets de rupture ou de valence 2 consécutifs quelconques.

Ici,  $D_*(f)$  désigne l'un des trois diagrammes  $D(f)$ ,  $D_m(f)$  ou  $D_M(f)$ . On considère deux sommets de rupture ou de valence 2  $v$  et  $v'$  consécutifs de  $D_*(f)$ . On suppose que  $v \prec v'$  au sens défini dans le paragraphe 1.4. Soit  $\alpha$  (resp.  $\gamma$ ) la décoration située sur l'arête  $[v, v']$  et proche de  $v$  (resp. de  $v'$ ). Enfin, soit  $\beta$  (resp.  $\delta$ ) le produit des décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ) autres que  $\alpha$  (resp.  $\gamma$ ).



L'arête  $[v, v']$  peut être indifféremment horizontale ou verticale. Le déterminant de l'arête  $[v, v']$  vaut  $\Delta_{[v, v']} = \gamma\alpha - \beta\delta$  (c.f. définition 1.3.3).

**Proposition 3.2.1.** *Si  $v$  et  $v'$  sont deux sommets de rupture ou de valence 2 consécutifs, on a  $\alpha\nu_{v'} - \delta\nu_v = \Delta_{[v, v']}$ .*

*Démonstration.* C'est une propriété des diagrammes de Newton des germes de courbes planes qu'au plus deux décorations autour d'un sommet peuvent être différentes de 1. Soient  $a, p$  (resp.  $a', p'$ ) les deux décorations introduites dans la construction des diagrammes figurant autour de  $v$  (resp.  $v'$ ).

1. Si l'arête  $[v, v']$  est horizontale, on a  $\alpha = 1$ ,  $\beta = ap$ ,  $\gamma = a'$  et  $\delta = p'$ . D'après la proposition 3.1.5,  $\nu_{v'} = p'\nu_v + \Delta_{[v, v']}$ . Donc on a bien  $\alpha\nu_{v'} - \delta\nu_v = \Delta_{[v, v']}$ .
2. Si l'arête  $[v, v']$  est verticale, soient  $v_0$  le sommet précédant  $v$  et  $v'$  et  $a_0$  et  $p_0$  ses décorations. Dans ce cas,  $a = \beta$ ,  $p = \alpha$ ,  $a' = \gamma$  et  $p' = \delta$ . D'après la proposition 3.1.5, on a alors

$$\nu_v = p\nu_{v_0} + a - a_0p_0p$$

$$\nu_{v'} = p'\nu_{v_0} + a' - a_0p_0p'$$

donc

$$p\nu_{v'} - p'\nu_v = \Delta_{[v, v]},$$

c'est à dire  $\alpha\nu_{v'} - \delta\nu_v = \Delta_{[v, v]}$ .

□

**Définition 3.2.2.** Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets de rupture de  $D_*(f)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $A_j$  (resp.  $B_j$ ) la somme sur tous les chemins joignant  $v'$  (resp.  $v$ ) à une flèche représentant  $f_j$  et ne passant pas par  $v$  (resp.  $v'$ ) du produit des nombres adjacents à ce chemin, divisée par  $\gamma$  (resp.  $\alpha$ ).

**Proposition 3.2.3.** Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets de rupture ou de valence 2. Quel que soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on a

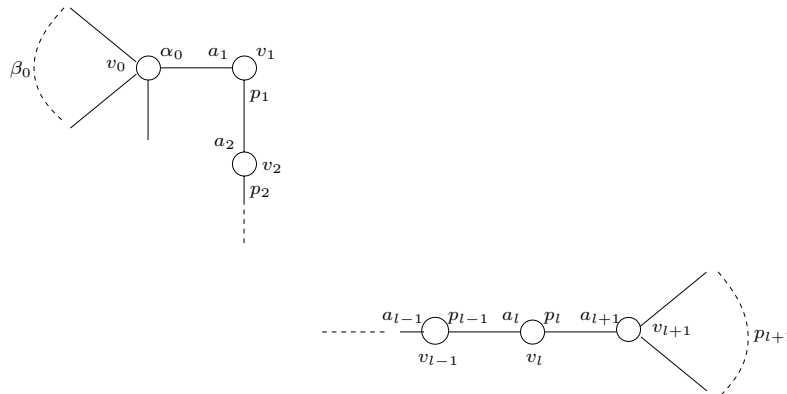
$$N_{v,j} = \beta A_j + \alpha B_j,$$

$$N_{v',j} = \gamma A_j + \delta B_j.$$

*Démonstration.* C'est évident d'après la proposition 3.1.1. □

### 3.2.2 Résultats sur les données numériques d'une chaîne.

On trouve des résultats du même type utilisant le graphe dual de la résolution minimale de  $f$  dans [V1]. On s'intéresse ici au diagramme maximal de Newton  $D_M(f)$  (c'est le seul pouvant contenir des sommets de valence 2). On considère une chaîne  $[v_0, \dots, v_{l+1}]$  de  $D_M(f)$ , ce qui signifie que les sommets  $v_i$  pour  $i = 1, \dots, l$  sont de valence 2 et que les sommets  $v_0$  et  $v_{l+1}$  sont des sommets de rupture. Soient  $\alpha_0$  la décoration proche de  $v_0$  située sur la géodésique reliant  $v_0$  à  $v_{l+1}$ , et  $\beta_0$  le produit des autres décorations proches de  $v_0$ . Pour  $k \in \{1, \dots, l+1\}$ , soient  $a_k$  la décoration proche de  $v_k$  située sur  $[v_{k-1}, v_k]$ , et  $p_k$  la décoration proche de  $v_k$  adjacente à la géodésique reliant  $v_0$  à  $v_k$ .



**Lemme 3.2.4.**  $\forall k \in \{1, \dots, l+1\}$ , on a

$$\alpha_0 \nu_{v_k} - p_k \nu_{v_0} = \Delta_{[v_0, v_k]}.$$

*Démonstration.* Montrons le par récurrence. Pour  $k = 1$ , c'est la proposition 3.2.1. On suppose par hypothèse de récurrence que

$$\alpha_0 \nu_{v_k} - p_k \nu_{v_0} = \Delta_{[v_0, v_k]}.$$

Appliquons la proposition 3.2.1 entre  $v_k$  et  $v_{k+1}$  :

$$p_k \nu_{v_{k+1}} - p_{k+1} \nu_{v_k} = \Delta_{[v_k, v_{k+1}]}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} p_k(\alpha_0\nu_{v_{k+1}} - p_{k+1}\nu_{v_0}) &= p_{k+1}(\alpha_0\nu_{v_k} - p_k\nu_{v_0}) + \alpha_0(p_k\nu_{v_{k+1}} - p_{k+1}\nu_{v_k}) \\ &= p_{k+1}\Delta_{[v_0, v_k]} + \alpha_0\Delta_{[v_k, v_{k+1}]} \\ &= p_k\Delta_{[v_0, v_{k+1}]} \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.5.**  $\forall k \in \{1, \dots, l\}$ , on a

$$\Delta_{[v_0, v_k]}\nu_{v_{k+1}} + \Delta_{[v_k, v_{k+1}]} \nu_{v_0} = \Delta_{[v_0, v_{k+1}]} \nu_{v_k}.$$

*Démonstration.* En appliquant le lemme précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_{[v_0, v_k]}\nu_{v_{k+1}} + \Delta_{[v_k, v_{k+1}]} \nu_{v_0} &= (\alpha_0\nu_{v_k} - p_k\nu_{v_0})\nu_{v_{k+1}} + (p_k\nu_{v_{k+1}} - p_{k+1}\nu_{v_k})\nu_{v_0} \\ &= (\alpha_0\nu_{v_{k+1}} - p_{k+1}\nu_{v_0})\nu_{v_k} \\ &= \Delta_{[v_0, v_{k+1}]} \nu_{v_k}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.2.6.**  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\exists A_j, B_j \in \mathbb{N}$  tels que

$$\begin{cases} N_{v_0, j} = \beta_0 A_j + \alpha_0 B_j \\ N_{v_k, j} = a_k A_j + p_k B_j \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, l+1\} \end{cases}$$

*Démonstration.*  $A_j$  et  $B_j$  sont définis comme dans la définition 3.2.2 en prenant  $v_0$  pour  $v$  et  $v_{l+1}$  pour  $v'$ . Le résultat provient du fait que les sommets  $v_1, \dots, v_l$  sont de valence 2, donc le produit des décorations adjacentes aux géodésiques reliant deux d'entre eux est égal à 1. □

**Proposition 3.2.7.**  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, l\}$ , on a

$$\Delta_{[v_0, v_k]} N_{v_{k+1}, j} + \Delta_{[v_k, v_{k+1}]} N_{v_0, j} = \Delta_{[v_0, v_{k+1}]} N_{v_k, j}.$$

*Démonstration.* En appliquant le lemme précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_{[v_0, v_k]} N_{v_{k+1}, j} + \Delta_{[v_k, v_{k+1}]} N_{v_0, j} &= (\alpha_0 a_k - p_k \beta_0)(a_{k+1} A_j + p_{k+1} B_j) + \\ &\quad b(a_{k+1} p_k - a_k p_{k+1})(\beta_0 A_j + \alpha_0 B_j) \\ &= a_k(\alpha_0 a_{k+1} - \beta_0 p_{k+1}) A_j \\ &\quad + p_k(\alpha_0 a_{k+1} - \beta_0 p_{k+1}) B_j \\ &= \Delta_{[v_0, v_{k+1}]} N_{v_k, j}. \end{aligned}$$

□

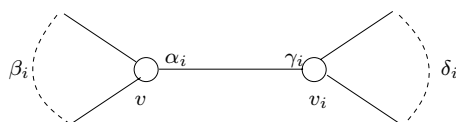
### 3.2.3 Résultats sur les données numériques de sommets adjacents.

Nous allons dans ce paragraphe énoncer plusieurs résultats remarquables sur les données numériques d'un sommet de rupture d'un diagramme de  $f$  en fonction des données numériques des sommets et des flèches reliés à lui par une arête. On trouve des

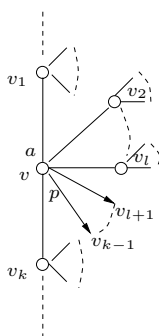


résultats sur le même type de situation utilisant le graphe dual de la résolution minimale de  $f$  dans [V4].

Ici,  $D_*(f)$  désigne l'un des trois diagrammes  $D(f)$ ,  $D_m(f)$  ou  $D_M(f)$ . Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_*(f)$ . Soit  $v_1$  le sommet voisin de  $v$  tel que  $v_1 \prec v$  ( $v_1$  peut être un sommet de rupture, un sommet de valence 1 ou une flèche. Si  $v_1$  est un sommet de valence 1 ou une flèche, il n'admet pas de sommet précédent). Soit  $v_k$  le sommet situé en dessous de  $v$  ( $v_k$  peut être un sommet de rupture, un sommet de valence 1 ou une flèche). Enfin, Soient  $v_2, \dots, v_l$  les autres sommets de rupture voisins de  $v$  et soient  $v_{l+1}, \dots, v_{k-1}$  les autres flèches voisines de  $v$ . Pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$ , on a donc  $v \prec v_i$ . Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ , soient  $\alpha_i$  la décoration située sur l'arête  $[v, v_i]$  et proche de  $v$  et  $\beta_i$  le produit des décorations proches de  $v$  autres que  $\alpha_i$ . Si  $v_i$  est un sommet de rupture, soient  $\gamma_i$  la décoration située sur l'arête  $[v, v_i]$  et proche de  $v_i$  et  $\delta_i$  le produit des décorations proches de  $v_i$  autres que  $\gamma_i$ .



C'est une propriété des diagrammes de Newton que deux au plus des décorations proches de  $v$ , disons  $a$  et  $p$ , sont différentes de 1. D'après la définition des  $v_i$ , posons donc  $\alpha_1 = a$ ,  $\alpha_i = 1$  pour  $i \in \{2, \dots, k-1\}$  et  $\alpha_k = p$ .



Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  et  $j \in \{1, \dots, r\}$ , si  $v_i$  est un sommet de rupture, on désigne par  $\nu_i$  et  $N_{i,j}$  les données numériques de  $v_i$  et  $\nu$  et  $N_j$  celles de  $v$ .

**Notation 3.2.8.** Si  $v_i$  est une flèche représentant la composante  $f_{j_0}^{n_{j_0}}$ , on pose par convention  $\nu_i = 1$ ,  $N_{i,j} = 0$  si  $j \neq j_0$  et  $N_{i,j_0} = n_{j_0}$ .

Si  $v_i$  est un sommet de valence 1, on pose par convention  $\nu_i = 1$  et  $N_{i,j} = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

**Définition 3.2.9.** Soient  $i \in \{1, \dots, k\}$  et  $j \in \{2, \dots, r\}$ .

Soit  $B_{i,j}$  la somme sur tous les chemins joignant  $v$  à une flèche représentant  $f_j$  et ne passant pas par  $v_i$  du produit des nombres adjacents à ce chemin, divisée par  $\alpha_i$ .

Si  $v_i$  est un sommet de rupture, soit  $A_{i,j}$  la somme sur tous les chemins joignant  $v_i$  à une flèche représentant  $f_j$  et ne passant pas par  $v$  du produit des nombres adjacents à ce chemin, divisée par  $\gamma_i$ .

Si  $v_i$  est un sommet de valence 1, on pose  $A_{i,j} = 0$ .

Si  $v_i$  est une flèche représentant la composante  $f_{j_0}^{n_{j_0}}$ , on définit  $A_{i,j} = 0$  si  $j \neq j_0$  et  $A_{i,j_0} = n_{j_0}$ .

On rappelle que le déterminant d'une arête est défini dans la définition 1.3.3.

On considère un germe de courbe  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  non identiquement nul. Par conséquent, il existe  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $N_j \neq 0$ . On suppose ici pour simplifier que

$$N_1 \neq 0.$$

**Définition 3.2.10.** Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on définit

$$\tilde{\alpha}_i := \frac{N_1 \nu_i - N_{i,1} \nu}{N_1 \Delta_{[v, v_i]}}.$$

La quantité  $\tilde{\alpha}_i$  est bien définie car on a  $N_1 \neq 0$ . Si l'on n'avait pas  $N_1 \neq 0$  mais  $N_j \neq 0$  pour un  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on définirait  $\tilde{\alpha}_i := \frac{N_j \nu_i - N_{i,j} \nu}{N_j \Delta_{[v, v_i]}}$ . Enfin, remarquons que si  $v_i$  est un sommet de valence 1, on a  $\tilde{\alpha}_i := \frac{1}{\Delta_{[v, v_i]}}$ .

**Proposition 3.2.11.** Si  $N_1 \neq 0$ , on a

$$\sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i = k - 2.$$

*Démonstration.* Pour les  $i \in \{2, \dots, k\}$  tels que  $v_i$  est un sommet de rupture, d'après les propositions 3.2.1 et 3.2.3, on a

$$\alpha_i \nu_i - \delta_i \nu = \Delta_{[v, v_i]}$$

et

$$\begin{cases} N_1 = \beta_i A_{i,1} + \alpha_i B_{i,1} \\ N_{i,1} = \gamma_i A_{i,1} + \delta_i B_{i,1} \end{cases}$$

On obtient alors

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{\alpha_i} \left( 1 - \frac{\nu A_{i,1}}{N_1} \right).$$

Si  $v_i$  est un sommet de valence 1, on a

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i} \left( 1 - \frac{\nu A_{i,1}}{N_1} \right).$$

Si  $v_i$  est une flèche représentant la composante  $f_{j_0}^{n_{j_0}}$ , on a

$$\tilde{\alpha}_i := \frac{N_1 - N_{i,1} \nu}{N_1 \alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i} \left( 1 - \frac{\nu N_{i,1}}{N_1} \right).$$

Si  $j_0 \neq 1$ , on a  $N_{i,1} = A_{i,1} = 0$  et si  $j_0 = 1$ , alors  $N_{i,1} = A_{i,1} = n_{j_0}$ . On a donc

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{\alpha_i} \left( 1 - \frac{\nu A_{i,1}}{N_1} \right).$$

Par conséquent, pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$ , on a

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{\alpha_i} \left( 1 - \frac{\nu A_{i,1}}{N_1} \right).$$

Pour  $i = 1$ , le résultat est différent car  $v_1 \prec v$  au sens défini au paragraphe 1.4. Si  $v_1$  est un sommet de rupture, on a

$$\gamma_1 \nu - \beta_1 \nu_1 = \Delta_{[v, v_1]}$$

et

$$\begin{cases} N_1 = \beta_1 A_{1,1} + \alpha_1 B_{1,1} \\ N_{1,1} = \gamma_1 A_{1,1} + \delta_1 B_{1,1} \end{cases}$$

On obtient

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{\beta_1} \left( -1 + \frac{\nu B_{1,1}}{N_1} \right).$$

Si  $v_1$  est un sommet de valence 1, alors  $v$  n'admet pas de sommet précédent. On a  $\nu = \alpha_1 + \beta_1$  et  $N_1 = \alpha_1 B_{1,1}$ . Alors

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\beta_1} \left( -1 + \frac{\nu B_{1,1}}{N_1} \right).$$

Si  $v_1$  est une flèche représentant la composante  $f_{j_0}^{n_{j_0}}$ , alors  $v$  n'admet pas de sommet précédent. On a  $\nu = \alpha_1 + \beta_1$ . Alors

$$\tilde{\alpha}_1 := \frac{N_1 - N_{1,1} \nu}{N_1 \alpha_1}.$$

Si  $j_0 \neq 1$ , on a  $N_1 = \alpha_1 B_{1,1}$ . Alors

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{\beta_1} \left( -1 + \frac{\nu B_{1,1}}{N_1} \right).$$

Si  $j_0 = 1$ , alors  $B_{1,1} = 0$  et  $N_1 = \beta_1 n_1$ . On a alors

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{N_1 - n_1 \nu}{N_1 \alpha_1} = \frac{-1}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_1} \left( -1 + \frac{\nu B_{1,1}}{N_1} \right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i &= -\frac{1}{p} + \frac{\nu B_{1,1}}{p N_1} + k - 2 - \sum_{i=2}^l \frac{\nu A_{i,1}}{N_1} + \frac{1}{p} - \frac{\nu A_{k,1}}{p N_1} \\ &= k - 2 + \frac{\nu}{p N_1} (B_{1,1} - p \sum_{i=2}^l A_{i,1} - A_{k,1}) \end{aligned}$$

Or par définition des  $A_{i,1}$  et des  $B_{i,1}$ , on a

$$B_{1,1} = p \sum_{i=2}^l A_{i,1} + A_{k,1}$$

d'où le résultat. □

On suppose toujours que  $N_1 \neq 0$ .

**Définition 3.2.12.**  $\forall i = 1, \dots, k$  et  $\forall j = 2, \dots, r$ , on définit

$$K_{i,j} := \frac{N_1 N_{i,j} - N_j N_{i,1}}{N_1 \Delta_{[v, v_i]}}.$$

**Proposition 3.2.13.** Si  $N_1 \neq 0$ , on a

$$\sum_{i=1}^k K_{i,j} = 0.$$

*Démonstration.* Si  $v_i$  est un sommet de rupture, avec la proposition 3.2.3, on obtient

$$K_{i,j} := \frac{A_{i,j} B_{i,1} - A_{i,1} B_{i,j}}{N_1}.$$

D'après la définition des  $A_{i,j}$  et des  $B_{i,j}$ , c'est aussi valable si  $v_i$  est un sommet de valence 1 ou une flèche. On a alors

$$\sum_{i=1}^k K_{i,j} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^k (A_{i,j} B_{i,1} - A_{i,1} B_{i,j}),$$

et on doit donc montrer que

$$\sum_{i=1}^k A_{i,j} B_{i,1} = \sum_{i=1}^k A_{i,1} B_{i,j}.$$

Par définition des  $A_{i,j}$  et des  $B_{i,j}$ , on a

$$B_{1,j} = p \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j} + A_{k,j},$$

pour  $i = 2, \dots, k-1$ ,

$$B_{i,j} = p A_{1,j} + ap \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j} - ap A_{i,j} + a A_{k,j}$$

et

$$B_{k,j} = A_{1,j} + a \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k A_{i,j} B_{i,1} &= A_{1,j} B_{1,1} + \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j} B_{i,1} + A_{k,j} B_{k,1} \\
&= A_{1,j} (p \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,1} + A_{k,1}) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j} (p A_{1,1} + ap \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,1} - ap A_{i,1} + a A_{k,1}) \\
&\quad + A_{k,j} (A_{1,1} + a \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,1}) \\
&= A_{1,1} (p \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j} + A_{k,j}) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,1} (p A_{1,j} + ap \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j} - ap A_{i,j} + a A_{k,j}) \\
&\quad + A_{k,1} (A_{1,j} + a \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,j}) \\
&= A_{1,1} B_{1,j} + \sum_{i=2}^{k-1} A_{i,1} B_{i,j} + A_{k,1} B_{k,j} \\
&= \sum_{i=1}^k A_{i,1} B_{i,j}.
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.2.14.** *Supposons que  $N_1 \neq 0$ . Alors quels que soient  $s_2, \dots, s_r \in \mathbb{C}$ , on a*

$$\sum_{i=1}^k (\tilde{\alpha}_i + K_{i,2} s_2 + \dots + K_{i,r} s_r) = k - 2.$$

*Démonstration.* Il suffit de développer la somme et d'utiliser les propositions 3.2.11 et 3.2.13. □

### 3.3 Calcul de $Z_{top,0}(f)$ à l'aide du diagramme minimal de Newton de $f$ .

#### 3.3.1 La nouvelle expression.

Soit  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un germe de fonction analytique tel que  $f(0, 0) = 0$ . On décompose  $f$  en produit de  $r$  paquets :

$$f = f_1 \cdots f_r = \prod_{j=1}^r f_j.$$

Nous allons donner dans ce paragraphe une nouvelle expression de  $Z_{top,0}(f)$  qui n'utilise que les décorations du diagramme minimal de Newton de  $f$ .

Par définition, nous avons l'expression suivante pour  $Z_{top,0}(f)$  : soit  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$  une résolution plongée de  $f^{-1}\{0\}$ . Notons  $E_i, i \in T$  les composantes irréductibles de  $\pi^{-1}(f^{-1}\{0\})$ . Pour  $i \in T$ , soit  $\nu_i$  la multiplicité de  $E_i$  sur le diviseur de  $h^*(dx \wedge dy)$  et pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $N_{i,j}$  la multiplicité de  $E_i$  sur le diviseur de  $f_j \circ \pi$ . Pour  $I \subset T$ , notons enfin  $E_I := \bigcap_{i \in I} E_i$  et  $E_I^\circ := E_I \setminus \bigcup_{j \notin I} E_j$ . On a alors

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \sum_{I \subset T} \chi_{top}(E_I^\circ \cap h^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + N_{i,1}s_1 + \dots + N_{i,r}s_r}$$

où  $\chi_{top}(\cdot)$  est la caractéristique complexe d'Euler-Poincaré. Soit  $R(f)$  le graphe dual de résolution minimale de  $f$ . Notons  $v_i$  le sommet ou la flèche de  $R(f)$  associé à la composante irréductible  $E_i$ . Enfin, soient  $\mathcal{S}_R$  l'ensemble des sommets de  $R(f)$  et  $\mathcal{F}_R$  l'ensemble des flèches de  $R(f)$ . On a vu dans le paragraphe 1.6 que l'intersection de deux composantes  $E_i$  et  $E_j$  pour  $i \neq j$  est soit vide soit réduite à un point, et que les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$  et celles de la transformée stricte à  $\mathbb{C}$ . On aboutit donc à l'expression :

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \sum_{v_i \in \mathcal{S}_R} \frac{2 - \delta_{v_i}}{P_i} + \sum_{\substack{v_i, v_j \in \mathcal{S}_R \cup \mathcal{F}_R, \\ v_i \text{ relié à } v_j \text{ par une arête}}} \frac{1}{P_i P_j}$$

où  $P_i = \nu_i + N_{i,1}s_1 + \dots + N_{i,r}s_r$ .

On peut maintenant énoncer le théorème donnant la nouvelle expression de  $Z_{top,0}(f)$  n'utilisant que le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  de  $f$  :

**Théorème 3.3.1.** *On a*

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \sum_{E=[v,v']} \frac{\Delta_{[v,v']}}{P_v P_{v'}} + \sum_{v/\delta_v \geq 3} \frac{2 - \delta_v}{P_v}$$

où  $v$  parcourt l'ensemble des sommets et des flèches du diagramme minimal de Newton de  $f$ ,  $E$  celui des arêtes reliant deux sommets ou un sommet et une flèche,  $\delta_v$  est la valence du sommet  $v$ ,

$$P_v = \begin{cases} \nu_v + N_{v,1}s_1 + \dots + N_{v,r}s_r & \text{si } v \text{ est un sommet de rupture} \\ 1 + n_{v,1}s_1 + \dots + n_{v,r}s_r & \text{si } v \text{ est une flèche} \\ 1 & \text{si } v \text{ est un sommet de valence 1} \end{cases},$$

$\Delta_{[v,v']}$  est le déterminant de l'arête  $[v, v']$ , et pour  $j \in \{1, \dots, r\}$  et si  $v$  est une flèche,  $n_{v,j}$  est la multiplicité de la composante  $f_j$  de  $f$  représentée par  $v$ .

**Remarque 3.3.2.** Dans le paragraphe 1.8, on a expliqué la différence entre diagrammes de Newton et d'Eisenbud et Neumann. Cette différence concerne les sommets de valence 1. On note ici la cohérence du choix que nous faisons pour les sommets de valence 1 : dans le théorème, on a  $P_v = 1$  pour les sommets de valence 1, ce qui est équivalent à considérer que les sommets de valence 1 de  $D_m(f)$  portent les décorations "virtuelles" 1 sur l'arête et 0 à l'extérieur. On a alors  $\nu_v = 1$  et  $N_{v,j} = 0$ . On a déjà adopté une convention (3.2.8) qui revient à considérer que les flèches et les sommets de valence 1 de  $D_m(f)$  portent les décorations "virtuelles" 1 sur l'arête et 0 à l'extérieur.

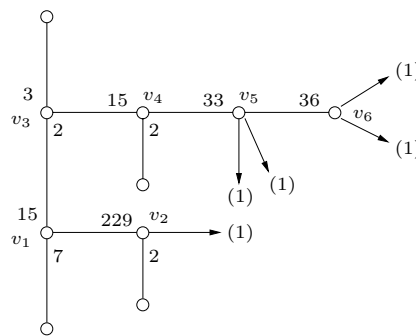
**Remarque 3.3.3.** D'après la définition de la fonction zêta-topologique multivariable locale, si  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  est un germe de fonction analytique décomposé en produit de  $r$  paquets  $f = f_1 \cdots f_r = \prod_{j=1}^r f_j$ , alors la fonction zêta-topologique multivariable locale  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  associée à cette décomposition est un invariant topologique de  $f = f_1 \cdots f_r$ .

### 3.3.2 Un exemple.

Soit  $f = f_1 f_2 f_3 \in \mathbb{C}\{x, y\}$  où

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^8 - 4x^6y^3 + 6x^4y^6 - 2x^9 - 4x^2y^9 + 4x^7y^3 + y^{12} - 2x^5y^6 + x^{10} + x^{11} \\ f_2(x, y) = x^8 - 4x^6y^3 + 6x^4y^6 - 2x^9 - 4x^2y^9 + 4x^7y^3 + y^{12} - 2x^5y^6 + x^{10} + x^8y^6 \\ \quad + x^{11}y^7 + x^{12}y^9 \\ f_3(x, y) = x^{14} - 2x^7y^{15} + y^{30} + x^{12}y^7 + x^{15}y^9 \end{cases}$$

On obtient le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  suivant :



Il y a 6 sommets de rupture  $v_1, \dots, v_6$  sur  $D_m(f)$  dont on peut calculer les données numériques :

$$v_1 : (22, 42, 42, 42, 42, 210), v_2 : (63, 84, 84, 84, 84, 458), v_3 : (5, 12, 12, 12, 12, 42),$$

$$v_4 : (13, 30, 30, 30, 30, 84), v_5 : (16, 33, 33, 33, 33, 84), v_6 : (19, 33, 33, 36, 36, 84).$$

En utilisant le théorème 3.3.1, on obtient

$$Z_{top,0}(f)(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = \frac{19}{P_1 P_2} + \frac{9}{P_1 P_3} + \frac{3}{P_3 P_4} + \frac{3}{P_4 P_5} + \frac{3}{P_5 P_6} + \frac{1}{P_5 P_7} + \frac{1}{P_5 P_8} \\ + \frac{1}{P_6 P_9} + \frac{1}{P_6 P_{10}} + \frac{1}{P_2 P_{11}} - \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_3} - \frac{1}{P_4} - \frac{1}{P_5} - \frac{1}{P_6}$$

où  $P_1 = 22 + 42s_1 + 42s_2 + 42s_3 + 42s_4 + 210s_5$ ,  $P_2 = 63 + 84s_1 + 84s_2 + 84s_3 + 84s_4 + 458s_5$ ,  
 $P_3 = 5 + 12s_1 + 12s_2 + 12s_3 + 12s_4 + 42s_5$ ,  $P_4 = 13 + 30s_1 + 30s_2 + 30s_3 + 30s_4 + 84s_5$ ,  
 $P_5 = 16 + 33s_1 + 33s_2 + 33s_3 + 33s_4 + 84s_5$ ,  $P_6 = 19 + 33s_1 + 33s_2 + 36s_3 + 36s_4 + 84s_5$ ,  
 $P_7 = 1 + s_1$ ,  $P_8 = 1 + s_2$ ,  $P_9 = 1 + s_3$ ,  $P_{10} = 1 + s_4$ ,  $P_{11} = 1 + s_5$ .

### 3.3.3 Démonstration du théorème 3.3.1.

On applique ici le raisonnement de [V1] aux diagrammes de Newton. La démonstration du théorème 3.3.1 découle directement du lemme suivant :

**Lemme 3.3.4.** 1. La contribution de  $\cup_{k=0}^{l+1} E_k$  à  $Z_{top,0}(f)$ , où les sommets  $v_0, \dots, v_{l+1}$  de  $R(f)$  représentant  $E_0, \dots, E_{l+1}$  forment une chaîne de la forme



est égale à  $\frac{\Delta_{[v_0, v_{l+1}]}}{P_{v_0} P_{v_{l+1}}}$ .

2. La contribution de  $\cup_{k=0}^{l+1} E_k$  à  $Z_{top,0}(f)$ , où les sommets  $v_0, \dots, v_l$  représentant  $E_0, \dots, E_l$  et la flèche  $v_{l+1}$  de  $R(f)$  forment une chaîne de la forme



est égale à  $\frac{\alpha_0}{P_{v_0} P_{v_{l+1}}} = \frac{\Delta_{[v_0, v_{l+1}]}}{P_{v_0} P_{v_{l+1}}}$ .

3. La contribution de  $\cup_{k=0}^{l+1} E_k$  à  $Z_{top,0}(f)$ , où les sommets  $v_0, \dots, v_{l+1}$  de  $R(f)$  représentant  $E_0, \dots, E_{l+1}$  forment une chaîne de la forme



est égale à  $\frac{\alpha_0}{P_{v_0}} = \frac{\Delta_{[v_0, v_{l+1}]}}{P_{v_0} P_{v_{l+1}}}$ .

*Démonstration.* On considère le diagramme de Newton maximal de  $f$ ,  $D_M(f)$ , pour obtenir exactement les sommets du graphe dual de résolution minimal de  $f$ .



1. Montrons la première partie du lemme. On veut montrer par récurrence que

$$\frac{1}{P_{v_0}P_{v_1}} + \cdots + \frac{1}{P_{v_l}P_{v_{l+1}}} = \frac{\Delta_{[v_0, v_{l+1}]}}{P_{v_0}P_{v_{l+1}}}.$$

Pour  $k = 1$ , on a clairement

$$\frac{1}{P_{v_0}P_{v_1}} = \frac{\Delta_{[v_0, v_1]}}{P_{v_0}P_{v_1}}.$$

Supposons que la propriété est vraie au rang  $k$ . Alors

$$\frac{1}{P_{v_0}P_{v_1}} + \cdots + \frac{1}{P_{v_k}P_{v_{k+1}}} = \frac{\Delta_{[v_0, v_k]}}{P_{v_0}P_{v_k}} + \frac{1}{P_{v_k}P_{v_{k+1}}} = \frac{1}{P_{v_k}} \frac{\Delta_{[v_0, v_k]}P_{v_{k+1}} + P_{v_0}}{P_{v_0}P_{v_{k+1}}}.$$

Il faut donc montrer que

$$\Delta_{[v_0, v_k]} \cdot \nu_{v_{k+1}} + \nu_{v_0} = \Delta_{[v_0, v_{k+1}]} \cdot \nu_{v_k}$$

et que pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$\Delta_{[v_0, v_k]} \cdot N_{v_{k+1}, j} + N_{v_0, j} = \Delta_{[v_0, v_{k+1}]} \cdot N_{v_k, j}.$$

Cela découle immédiatement des propositions 3.2.5 et 3.2.7, puisque comme on considère  $D_M(f)$ , on a  $\Delta_{[v_k, v_{k+1}]} = 1$ .

2. Pour la seconde partie du lemme, on adopte à nouveau la convention 3.2.8. Avec les notations du paragraphe 3.2.2, si l'on pose formellement  $\nu_{v_{l+1}} = 1$ ,  $p_{l+1} = 0$ ,  $N_{v_{l+1}, j} = 0$  si la flèche  $v_{l+1}$  ne représente pas la composante  $f_j$  et  $N_{v_{l+1}, j} = n_j$  si la flèche  $v_{l+1}$  représente la composante  $f_j$  de multiplicité  $n_j$ , alors les résultats du paragraphe 3.2.2 s'appliquent et le raisonnement précédent est valide.
3. Pour la troisième partie du lemme, on adopte les notations du paragraphe 3.2.2 pour les décorations de la chaîne. Il suffit de poser formellement  $p_{l+1} = 1$  (c.f. paragraphe 1.7 pour les sommets de valence 1) et  $A_j = 0$  pour  $j = 1, \dots, r$  dans le cas que l'on vient de traiter.

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{v_0}P_{v_1}} + \cdots + \frac{1}{P_{v_l}P_{v_{l+1}}} + \frac{1}{P_{v_{l+1}}} &= \frac{\Delta_{[v_0, v_{l+1}]}}{P_{v_0}P_{v_{l+1}}} + \frac{1}{P_{v_{l+1}}} \\ &= \frac{\Delta_{[v_0, v_{l+1}]} + P_{v_0}}{P_{v_0}P_{v_{l+1}}} \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 3.2.4, on a  $\alpha_0 \nu_{v_{l+1}} - p_{l+1} \nu_{v_0} = \Delta_{[v_0, v_{l+1}]}$ , ce qui donne  $\nu_{v_0} + \Delta_{[v_0, v_{l+1}]} = \alpha_0 \nu_{v_{l+1}}$ .

Enfin, d'après le lemme 3.2.6, on a pour  $j = 1, \dots, r$ ,  $N_{v_0, j} = \alpha_0 B_j$  et  $N_{v_{l+1}, j} = p_{l+1} B_j = B_j$ . Donc pour  $j = 1, \dots, r$ ,  $N_{v_0, j} = \alpha_0 N_{v_{l+1}, j}$ .

Finalement,

$$\frac{1}{P_{v_0}P_{v_1}} + \cdots + \frac{1}{P_{v_l}P_{v_{l+1}}} + \frac{1}{P_{v_{l+1}}} = \frac{\alpha_0}{P_{v_0}}.$$

□

Le théorème 3.3.1 est alors immédiat.

### 3.4 Calcul de $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)$ .

Dans [DL1], les auteurs prouvent que pour la fonction zêta-topologique locale classique,  $Z_{top,0}(f)(0) = 1$  en toutes dimensions, en utilisant des procédés d'intégration p-adique et la formule de la trace de Grothendieck-Lefschetz. Pour le cas des courbes et de la fonction zêta-topologique locale multi-variable, nous pouvons, à l'aide des diagrammes de Newton, donner une preuve simple du fait que

$$Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = 1.$$

D'après le théorème 3.3.1, on a

$$Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = \sum_{v/\delta_v \geq 3} \frac{2 - \delta_v}{\nu_v} + \sum_{[v,v']} \frac{\Delta_{[v,v']}}{\nu_v \nu_{v'}}.$$

On va calculer la participation de chaque sommet de  $D_m(f)$  à  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)$ , mais afin de ne pas compter certains termes plusieurs fois, on parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D(f)$  en prenant des géodésiques partant du point de départ de  $D_m(f)$  et telles que si  $v$  et  $v'$  sont rencontrés dans cette ordre sur une géodésique, alors  $v \prec v'$ .

Soient  $\hat{v}$  le point de départ de  $D_m(f)$  et  $\tilde{v}$  le sommet de rupture relié à  $\hat{v}$ . Soient  $\tilde{a}$  et  $\tilde{p}$  les décorations figurant respectivement au dessus et en dessous de  $\tilde{v}$ .

Alors la participation de  $\hat{v}$  à  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)$  vaut

$$Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)_{\hat{v}} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{p}}.$$

Pour chaque sommet de rupture  $v$  rencontré en parcourant  $D_m(f)$ , on reprend les notations du paragraphe 3.2.3.

Alors la participation de  $v$  à  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)$  vaut

$$Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)_v = \frac{1}{\nu} \left( 2 - k + \sum_{i=2}^k \frac{\Delta_{[v,v_i]}}{\nu_i} \right)$$

(on ne prend pas  $v_1$  en compte pour ne pas compter plusieurs fois les mêmes termes).

1. Pour  $i = 2, \dots, l$ , on a  $\nu_i = p_i \nu + \Delta_{[v,v_i]}$ , donc

$$\frac{\Delta_{[v,v_i]}}{\nu_i} = \frac{\Delta_{[v,v_i]}}{p_i \nu + \Delta_{[v,v_i]}} = 1 - p_i \frac{\nu}{\nu_i}.$$

2. Pour  $i = l + 1, \dots, k - 1$ , on a

$$\frac{\Delta_{[v,v_i]}}{\nu_i} = 1.$$

3. Enfin, pour  $i = k$ , on a  $\nu_k = \frac{p_k}{p} \nu + \frac{\Delta_{[v,v_k]}}{p}$ , donc

$$\frac{\Delta_{[v,v_k]}}{\nu_k} = \frac{p \Delta_{[v,v_k]}}{p_k \nu + \Delta_{[v,v_k]}} = p - p_k \frac{\nu}{\nu_k},$$

avec  $p_k = 0$  si  $v_k$  est une flèche ou un sommet de valence 1.

La participation de  $v$  à  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)$  vaut donc

$$Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0)_v = \frac{p}{\nu} - \sum_{i=2}^l \frac{p_i}{\nu_i} - \frac{p_k}{\nu_k}.$$

Maintenant, en sommant sur l'ensemble des sommets de  $D_m(f)$  selon le parcours indiqué ci-dessus et après simplification, on obtient

$$Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = \frac{\tilde{a}}{\tilde{\nu}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\nu}} = \frac{\tilde{a} + \tilde{p}}{\tilde{\nu}} = 1$$

car  $\tilde{\nu}$  est sur le premier axe vertical de  $D_m(f)$  donc  $\tilde{\nu} = \tilde{a} + \tilde{p}$ .

**Remarque 3.4.1.** *Il existe une preuve élémentaire. Je remercie M. Artal Bartolo de me l'avoir indiquée. Pour  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , on a*

$$Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = \sum_{v/\delta_v \geq 3} \frac{2 - \delta_v}{\nu_v} + \sum_{[v, v']} \frac{\Delta_{[v, v']}}{\nu_v \nu_{v'}}.$$

Or la quantité  $\nu_v$  ne dépend pas du germe considéré. Elle est intrinsèque au diviseur  $E$  de la résolution qui est associé au sommet  $v$ . Par conséquent,  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_r)$  où  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  est le germe défini par  $g = 1$ . Or par définition de  $Z_{top,0}$ , on a  $Z_{top,0}(g) = 1$ . Donc on obtient trivialement que pour tout  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ ,  $Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0) = 1$ .

## 3.5 Les pôles de la fonction zêta sont effectifs.

### 3.5.1 Énoncé du problème.

Pour la notion de fonction holomorphe de plusieurs variables, on peut consulter [GH], chapitre 1.

Dans le théorème 3.3.1, nous avons exprimé la fonction  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  comme une fraction rationnelle de  $\mathbb{Q}(s_1, \dots, s_r)$ . Les dénominateurs sont des produits d'applications affines  $h_v(s_1, \dots, s_r) = \nu_v + N_{v,1}s_1 + \dots + N_{v,r}s_r$  telles que les constantes  $(\nu_v, N_{v,1}, \dots, N_{v,r})$  sont les données numériques des sommets de rupture ou des flèches  $v$  du diagramme minimal de Newton de  $f$ . À chacune de ces applications, on associe l'hyperplan  $H_v$  défini par

$$H_v : \nu_v + N_{v,1}s_1 + \dots + N_{v,r}s_r = 0.$$

**Définition 3.5.1.** *On dit que l'hyperplan  $H_v$  est **pôle** de la fonction  $Z_{top,0}(f)$  si  $Z_{top,0}(f)$  n'est pas holomorphe au voisinage de  $H_v$ . L'hyperplan  $H_v$  est dit **pôle d'ordre  $n$**  si  $h_v^k Z_{top,0}(f)$  n'est pas holomorphe au voisinage de  $H_v$  pour  $0 \leq k < n$  mais  $h_v^n Z_{top,0}(f)$  l'est.*

D'après de théorème 3.3.1, nous savons déjà que les hyperplans  $H_v$  sont au plus pôles d'ordre 1 ou 2 de  $Z_{top,0}(f)$  et qu'ils sont les seuls pôles possibles de  $Z_{top,0}(f)$ . Cependant, rien ne permet d'affirmer que les applications linéaires  $h_v$  ne disparaissent pas au cours de simplifications. Nous voulons montrer que les hyperplans  $H_v$  sont des **pôles effectifs** de  $Z_{top,0}(f)$ .

**Théorème 3.5.2.** *Pour tout sommet de rupture et toute flèche  $v \in D_m(f)$  de données numériques  $(\nu_v, N_{v,1}, \dots, N_{v,r})$ , l'hyperplan  $H_v$  d'équation*

$$\nu_v + N_{v,1}s_1 + \dots + N_{v,r}s_r = 0$$

*est pôle d'ordre 1 ou 2 de la fonction  $Z_{top,0}(f)$ . De plus, il existe au plus un hyperplan  $H_{v_0}$  pôle d'ordre 2 de  $Z_{top,0}(f)$ . Enfin, il n'existe pas d'autre pôle de  $Z_{top,0}(f)$ .*

### 3.5.2 Structure de la démonstration.

Nous nous inspirons du travail que W.Veys ([V2]) a effectué pour la fonction zêta à une variable en l'adaptant à plusieurs variables.

Dans tout le chapitre, nous adoptons la notation 3.2.8.

D'après le théorème 3.3.1, on a

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \sum_{v/\delta_v \geq 3} \frac{2 - \delta_v}{P_v} + \sum_{[v,v']} \frac{\Delta_{[v,v']}}{P_v P_{v'}}.$$

Soit

$$H = \{(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r / a_0 + a_1 s_1 + \dots + a_r s_r = 0\}$$

un hyperplan tel que l'application affine  $h(s_1, \dots, s_r) = a_0 + a_1 s_1 + \dots + a_r s_r$  apparaisse au dénominateur de  $Z_{top,0}(f)$ .

Soit  $v \in \mathcal{R}$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$  tel que les données numériques de  $v$  définissent  $H$ . Soient  $v_i, i \in \{1, \dots, k\}$  les sommets et les flèches reliés à  $v$  par une arête, et  $(\nu_i, N_{i,1}, \dots, N_{i,r})$  leurs données numériques. La partie de  $Z_{top,0}(f)$  où  $P_v$  apparait est égale à

$$Z_{top,0}(f)_v = \frac{2 - \delta_v}{P_v} + \sum_{i=1}^k \frac{\Delta_{[v,v_i]}}{P_v P_{v_i}}.$$

On suppose que  $f$  admet une singularité en 0. Par conséquent, il existe  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $N_j \neq 0$ . Pour simplifier les notations, nous supposons ici que

$$N_1 \neq 0.$$

S'il existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $P_v = qP_{v_i}$  avec  $q \in \mathbb{C}^*$ , alors  $H$  est un éventuel pôle double. Sinon, on a  $P_v \neq qP_{v_i}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  et tout  $q \in \mathbb{C}^*$ , et  $H$  est un éventuel pôle simple. On peut alors décomposer la fraction  $\frac{\Delta_{[v,v_i]}}{P_v P_{v_i}}$  en éléments simples dans  $\mathbb{Q}(s_2, \dots, s_r)(s_1)$  :

$$\frac{\Delta_{[v,v_i]}}{P_v P_{v_i}} = \frac{a_i(s_2, \dots, s_r)}{\nu + N_1 s_1 + \dots + N_r s_r} + \frac{b_i(s_2, \dots, s_r)}{\nu_i + N_{i,1} s_1 + \dots + N_{i,r} s_r}$$

où  $a_i(s_2, \dots, s_r), b_i(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{Q}(s_2, \dots, s_r)$ . On a donc

$$a_i(s_2, \dots, s_r) = \frac{\Delta_{[v,v_i]}}{(\nu_i + \sum_{j=2}^r N_{i,j} s_j) - (\nu + \sum_{j=2}^r N_j s_j) \frac{N_{i,1}}{N_1}}.$$

Avec les notations du paragraphe 3.2.3, on a

$$a_i(s_2, \dots, s_r) = \frac{1}{\alpha_i(s_2, \dots, s_r)}.$$

Posons

$$(3.1) \quad \mathcal{A}_v(s_2, \dots, s_r) := 2 - k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i(s_2, \dots, s_r)}.$$

où

$$\alpha_i(s_2, \dots, s_r) = \tilde{\alpha}_i + \sum_{j=2}^r K_{i,j} s_j, \text{ avec } \tilde{\alpha}_i \in \mathbb{Q}.$$

Maintenant, supposons que  $v$  est une flèche de  $D_m(f)$  telle que ses données numériques définissent l'hyperplan  $H$ . Soit  $v'$  l'unique sommet de rupture relié à  $v$  par une arête et soient  $(\nu', N'_1, \dots, N'_r)$  ses données numériques. La partie de  $Z_{top,0}(f)$  où  $P_v$  apparait est égale à

$$Z_{top,0}(f)_v = \frac{1}{(\nu + N_1 s_1 + \dots + N_r s_r)(\nu' + N'_1 s_1 + \dots + N'_r s_r)}.$$

Ici aussi, supposons pour simplifier que  $N_1 \neq 0$ . Si  $P_v = qP_{v'}$  avec  $q \in \mathbb{C}^*$ , alors  $H$  est un éventuel pôle double. Sinon, on a  $P_v \neq qP_{v_i}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  et tout  $q \in \mathbb{C}^*$ , et  $H$  est un éventuel pôle simple. De même que précédemment, on a

$$\frac{1}{P_v P_{v'}} = \frac{a(s_2, \dots, s_r)}{\nu + N_1 s_1 + \dots + N_r s_r} + \frac{b(s_2, \dots, s_r)}{\nu' + N'_1 s_1 + \dots + N'_r s_r}$$

où  $a(s_2, \dots, s_r), b(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{Q}(s_2, \dots, s_r)$  et on pose

$$\mathcal{A}_v(s_2, \dots, s_r) := a(s_2, \dots, s_r) = \frac{1}{(\nu' + \sum_{j=2}^r N'_j s_j) - (\nu + \sum_{j=2}^r N_j s_j) \frac{N'_1}{N_1}}.$$

Soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets de rupture et des flèches de  $D_m(f)$  dont les données numériques définissent le même hyperplan  $H$ . Si  $H$  est un éventuel pôle simple, c'est à dire si  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, v_i \notin \mathcal{V}$ , on a alors

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \frac{\sum_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{A}_v(s_2, \dots, s_r)}{P_v} + \frac{B(s_1, \dots, s_r)}{C(s_1, \dots, s_r)}$$

où  $C(s_1, \dots, s_r)$  est un produit de polynômes de degré 1 non multiples de  $P_v$ . Si c'est un éventuel pôle double, c'est à dire si  $\exists i \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $v_i \in \mathcal{V}$ , on a

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \frac{\sum_{v \in \mathcal{V}} \Delta_{[v, v_i]}^2}{P_v^2} + \frac{B(s_1, \dots, s_r)}{C(s_1, \dots, s_r)}$$

où  $C(s_1, \dots, s_r)$  est un produit de polynômes de degré 1.

**Définition 3.5.3.** Soit  $v \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ . Soient  $(\nu_v, N_{v,1}, \dots, N_{v,r})$  ses données numériques. On définit

$$\beta_v(s_2, \dots, s_r) := \frac{\nu_v}{N_{v,1}} + \sum_{j=2}^r \frac{N_{v,j}}{N_{v,1}} s_j$$

si  $N_{v,1} \neq 0$  et  $\beta_v(s_2, \dots, s_r) = +\infty$  si  $N_{v,1} = 0$ .

Considérons  $v, v' \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ .

Soient  $(\nu, N_1, \dots, N_r)$  et  $(\nu', N'_1, \dots, N'_r)$  leurs données numériques respectives. Si les hyperplans  $H_v$  et  $H_{v'}$  d'équations respectives  $\nu + N_1 s_1 + \dots + N_r s_r = 0$  et  $\nu' + N'_1 s_1 + \dots + N'_r s_r = 0$  sont confondus, alors  $\beta_v(s_2, \dots, s_r) = \beta_{v'}(s_2, \dots, s_r)$  pour tout  $(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^{r-1}$ .

Nous allons étudier les fractions rationnelles  $\mathcal{A}_v(s_2, \dots, s_r)$  et montrer qu'il existe un élément

$$(c_2, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$$

pour lequel on pourra établir une structure ordonnée sur les  $\beta_v(c_2, \dots, c_r)$  pour  $v \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ . À l'aide de cette structure ordonnée, nous allons montrer d'une part qu'il y a au plus un hyperplan  $H$  pôle d'ordre 2, et d'autre part que pour tout hyperplan  $H$  qui est un éventuel pôle simple, on a

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) \neq 0,$$

ce qui permet de conclure que  $H$  est un pôle effectif d'ordre 1 de  $Z_{top,0}(f)$ .

### 3.5.3 Étude des $\mathcal{A}_v$ pour les sommets de rupture.

#### Résultats.

Nous voulons dans ce paragraphe montrer qu'il existe un point  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$  pour lequel on pourra établir une structure ordonnée sur les  $\beta_v(c_2, \dots, c_r)$  pour  $v \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ . Nous allons choisir ce point de façon à ce que pour  $v \in \mathcal{R}$ , le signe des  $\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r)$  vérifie certaines propriétés.

On suppose ici que  $v$  est un sommet de rupture, et que pour  $i = 1, \dots, k$ , les  $v_i$  sont les sommets et les flèches reliés à lui par une arête. On reprend les notations du paragraphe 3.2.3.

Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on a

$$\alpha_i(s_2, \dots, s_r) = \frac{N_1 \nu_i - \nu N_{i,1}}{N_1 \Delta_{[v, v_i]}} + \sum_{j=2}^r \frac{N_1 N_{i,j} - N_j N_{i,1}}{N_1 \Delta_{[v, v_i]}} s_j,$$

c'est à dire

$$\alpha_i(s_2, \dots, s_r) = \tilde{\alpha}_i + \sum_{j=2}^r K_{i,j} s_j, \text{ avec } \tilde{\alpha}_i \in \mathbb{Q}.$$

**Proposition 3.5.4.** *Il existe  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$  tel que pour tout sommet de rupture  $v \in D(f)$ ,*

$$\alpha_i(c_2, \dots, c_r) < 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

De plus,

(1) *pour chaque sommet de rupture  $v$ , il existe au plus un  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  tel que*

$$\alpha_{i_0}(c_2, \dots, c_r) \leq 0.$$

(2) *supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on ait  $\alpha_i(c_2, \dots, c_r) \neq 0$ . Alors*

(i) *soit  $\alpha_i(c_2, \dots, c_r) > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  et  $\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) > 0$ ,*

(ii) *soit il existe un unique  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $\alpha_{i_0}(c_2, \dots, c_r) < 0$  et alors  $\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) < 0$ .*

#### Démonstration de la première partie de la proposition 3.5.4.

On utilise les lemmes suivants :

**Lemme 3.5.5.** *Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$ . Alors on a  $\nu < 2ap$  sauf si  $v$  n'admet pas de sommet précédent et si  $a = p = 1$ , et alors  $\nu = 2ap = 2$ .*

*Démonstration.* Montrons le par récurrence : si  $v$  n'admet pas de sommet précédent, alors  $\nu = a + p$ . Or

$$2\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(p - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

avec égalité si et seulement si  $a = p = 1$ . Donc  $2ap \geq a + p = \nu$ . Si  $v$  admet un sommet précédent, soient  $v_0$  le sommet précédant  $v$  et  $\nu_0$  associé à  $v_0$ . On a

$$\begin{aligned} \nu &= p\nu_0 + q \\ &= p\nu_0 + a - a_0p_0p \\ &\leq p(2a_0p_0) + a - a_0p_0p \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leq p + a \\ &< 2ap. \end{aligned}$$

Ici l'inégalité est stricte car  $a > 1$  si  $v$  admet un sommet précédent.  $\square$

**Lemme 3.5.6.** *Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$ . Alors on a  $\nu < a(p+1)$  sauf si  $v$  n'admet pas de sommet précédent et si  $a = 1$ , et alors  $\nu = a(p+1)$ .*

*Démonstration.* Montrons le par récurrence : si  $v$  n'admet pas de sommet précédent, alors  $\nu = a + p$ . Or  $a + p \leq a + ap = a(p+1)$ , avec égalité si et seulement si  $a = 1$ .

Sinon, soient  $v_0$  le sommet précédant  $v$  et  $\nu_0$  associé à  $v_0$ . On a

$$\begin{aligned} \nu &= p\nu_0 + q \\ &= p\nu_0 + a - a_0p_0p \\ &\leq p((p_0 + 1)a_0) + a - a_0p_0p \\ &\leq a_0p + a \\ &< ap + a \text{ car } a = a_0p_0p + q > a_0 \\ &< a(p+1) \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 3.5.7.** *Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on a  $\tilde{\alpha}_i \leq 1$ .*

*Démonstration.* On utilise les résultats obtenus dans la démonstration de la proposition 3.2.11. Pour  $i = 1$ , on a

$$\tilde{\alpha}_1 = -\frac{1}{p} + \frac{\nu B_{1,1}}{pN_1},$$

d'où

$$1 - \tilde{\alpha}_1 = \frac{p(p+1)A_{1,1} + (a(p+1) - \nu)B_{1,1}}{pN_1}.$$

Donc d'après le lemme 3.5.6, on a  $\tilde{\alpha}_1 < 1$  sauf si  $A_{1,1} = 0$ ,  $a = 1$  et  $v$  n'admet pas de sommet précédent, et alors,  $\tilde{\alpha}_1 = 1$ . Si  $v_1$  est de valence 1, d'après le lemme 3.5.6, on remarque que  $\tilde{\alpha}_1 = \frac{\nu - a}{ap} < 1$  car  $a > 1$  (sinon,  $v_1$  n'existerait pas).

Pour  $i \in \{2, \dots, k-1\}$ , on a

$$\tilde{\alpha}_i = 1 - \frac{\nu A_{i,1}}{N_1}$$

donc  $\tilde{\alpha}_i < 1$  sauf si  $A_{i,1} = 0$  et alors  $\tilde{\alpha}_i = 1$ .

Enfin, si  $i = k$ , on a

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\nu A_{k,1}}{N_1} \right),$$

donc  $\tilde{\alpha}_k < 1$  sauf si  $p = 1$  et  $A_{k,1} = 0$  et alors  $\tilde{\alpha}_k = 1$ . Si  $v_k$  est un sommet de valence 1, on remarque que  $\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{p} < 1$  car  $p > 1$  (sinon,  $v_k$  n'existerait pas).  $\square$



Soient les deux ensembles  $I_1 := \{i \in \{1, \dots, k\} / \tilde{\alpha}_i < 1\}$  et  $I_2 := \{i \in \{1, \dots, k\} / \tilde{\alpha}_i = 1\}$ . On a

$$\alpha_i(s_2, \dots, s_r) = \tilde{\alpha}_i + \sum_{j=2}^r K_{i,j} s_j.$$

Puisque  $\sum_{j=2}^r K_{i,j} s_j$  est une forme linéaire en  $s_2, \dots, s_r$ , il existe  $(\epsilon_2^v, \dots, \epsilon_r^v) \in \mathbb{R}^{r-1}$  tel que si  $\mathcal{U}_v^1 = \{(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^{r-1} / |s_2| < \epsilon_2^v, \dots, |s_r| < \epsilon_r^v\}$ , alors

$$\forall (s_2, \dots, s_r) \in \mathcal{U}_v^1, \alpha_i(s_2, \dots, s_r) < 1 \quad \forall i \in I_1.$$

Pour  $i \in I_2$ , d'après ce qui précède et en utilisant la démonstration de la proposition 3.2.13, on obtient :

– si  $i = 1$ , comme  $A_{i,1} = 0$  et  $a = 1$ ,

$$K_{1,j} = \frac{A_{1,j} B_{1,1}}{B_{1,1}} = A_{1,j},$$

– si  $i = 2, \dots, k-1$ , comme  $A_{i,1} = 0$ ,

$$K_{i,j} = \frac{A_{i,j} B_{i,1}}{B_{i,1}} = A_{i,j},$$

– enfin, si  $i = k$ , comme  $A_{k,1} = 0$  et  $p = 1$ ,

$$K_{k,j} = \frac{A_{k,j} B_{k,1}}{B_{k,1}} = A_{k,j}.$$

Dans tous les cas, on a

$$\alpha_i(s_2, \dots, s_r) = 1 + \sum_{j=2}^r A_{i,j} s_j$$

avec  $A_{i,j} \geq 0$  pour tout  $j$  et  $A_{i,j} \neq 0$  pour au moins un  $j$  (puisque l'on a vu que le cas  $\tilde{\alpha}_i = 1$  n'arrive pas pour les sommets de valence 1).

On considère donc

$$\mathcal{U}_v = \{(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r / \epsilon_2^v < s_2 < 0, \dots, \epsilon_r^v < s_r < 0\},$$

et si  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathcal{U}_v$ , alors  $\alpha_i(c_2, \dots, c_r) < 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Enfin, puisque les sommets de rupture de  $D_m(f)$  sont en nombre fini, on pose pour  $j = 2, \dots, r$ ,  $\epsilon_j = \min_v \epsilon_j^v$ , et pour

$$\mathcal{U} = \{(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r / \epsilon_2 < s_2 < 0, \dots, \epsilon_r < s_r < 0\},$$

et pour tout  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathcal{U}$ , la première partie de la proposition 3.5.4 est vérifiée.

**Démonstration de (1).**

Soit  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathcal{U}$ . D'après la proposition 3.2.14, on a

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i(c_2, \dots, c_r) = k - 2.$$

S'il existe  $i_0$  et  $j_0$  dans  $\{1, \dots, k\}$  tels que  $\alpha_{i_0}(c_2, \dots, c_r) \leq 0$  et  $\alpha_{j_0}(c_2, \dots, c_r) \leq 0$ , alors d'après la proposition 3.5.4

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_i(c_2, \dots, c_r) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0, j_0}}^k \alpha_i(c_2, \dots, c_r) + \alpha_{i_0}(c_2, \dots, c_r) + \alpha_{j_0}(c_2, \dots, c_r) \\ &< k - 2 + \alpha_{i_0}(c_2, \dots, c_r) + \alpha_{j_0}(c_2, \dots, c_r) \\ &< k - 2 \end{aligned}$$

ce qui contredit  $\sum_{i=1}^k \alpha_i(c_2, \dots, c_r) = k - 2$ .

**Démonstration de (2).**

Soit  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathcal{U}$ . On rappelle que

$$\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) = 2 - k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i(c_2, \dots, c_r)}.$$

(i) Dans ce cas, on a  $0 < \alpha_i(c_2, \dots, c_r) < 1 \quad \forall i = 1, \dots, k$  donc

$$\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) > 2 > 0.$$

(ii) On suppose que  $\alpha_{i_0}(c_2, \dots, c_r) < 0$ . On a alors

$$-\alpha_{i_0}(c_2, \dots, c_r) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \alpha_i(c_2, \dots, c_r) + 2 - k$$

et donc

$$\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) = 2 - k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \frac{1}{\alpha_i(c_2, \dots, c_r)} - \frac{1}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \alpha_i(c_2, \dots, c_r) + 2 - k}.$$

On a alors  $\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) < 0$  d'après le lemme suivant :

**Lemme 3.5.8.** Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ , et  $0 < \alpha_i < 1$  pour  $i = 1, \dots, k-1$  tels que  $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i + 2 - k > 0$ . Alors

$$2 - k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \alpha_i + 2 - k} < 0.$$

*Démonstration.* C'est le lemme 2.9 de [V2]. □

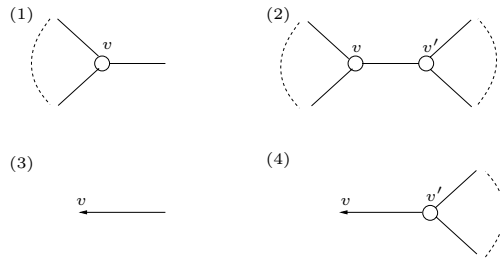
### 3.5.4 Structure ordonnée de $\mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ .

Pour les sommets  $v \in \mathcal{R}$ , nous avons exhibé un point  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$  et obtenu des résultats sur le signe des  $\mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r)$ , mais pour le moment, rien ne nous permet d'affirmer que ces quantités ne vont pas s'annuler entre elles s'il existe plusieurs  $v \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$  dont les données numériques définissent le même hyperplan  $H$ . Nous allons dans ce paragraphe définir une structure ordonnée sur les  $\beta_v(c_2, \dots, c_r)$  pour  $v \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$  qui nous permettra d'affirmer que cette situation ne peut pas arriver. On s'inspire ici du paragraphe 3 de [V2] que l'on généralise à notre situation.

Les  $\beta_v(s_2, \dots, s_r)$  ont été définis au paragraphe 3.5.2. Le lien avec ce qui a été fait précédemment est le suivant : si pour  $i = 1, \dots, k$ , les  $v_i$  sont les sommets et les flèches adjacents à un sommet de rupture  $v$  et  $\alpha_i(s_2, \dots, s_r)$  la quantité définie au paragraphe précédent, on a

$$\begin{aligned} \alpha_i(c_2, \dots, c_r) > 0 &\Leftrightarrow \beta_{v_i}(c_2, \dots, c_r) > \beta_v(c_2, \dots, c_r) \\ \alpha_i(c_2, \dots, c_r) = 0 &\Leftrightarrow \beta_{v_i}(c_2, \dots, c_r) = \beta_v(c_2, \dots, c_r) \\ \alpha_i(c_2, \dots, c_r) < 0 &\Leftrightarrow \beta_{v_i}(c_2, \dots, c_r) < \beta_v(c_2, \dots, c_r) \end{aligned}$$

**Théorème 3.5.9.** (i) Les  $v \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$  pour lesquels  $\beta_v(c_2, \dots, c_r)$  est minimum et les arêtes qui leur sont liées forment une partie connexe  $\mathcal{M}$  de  $D_m(f)$  qui a l'une des quatre formes suivantes :



(ii) En partant d'un sommet ou d'une flèche extrémité de  $\mathcal{M}$ , les  $\beta_v(c_2, \dots, c_r)$  augmentent strictement le long de n'importe quelle géodésique de  $D_m(f)$ .

Par la suite, on notera  $\beta_v$  pour  $\beta_v(c_2, \dots, c_r)$  et  $\alpha_i$  pour  $\alpha_i(c_2, \dots, c_r)$ .

*Démonstration.* Si l'on a deux sommets  $v$  et  $v_{i_0}$  reliés entre eux par une arête avec  $\beta_v > \beta_{v_{i_0}}$ , alors  $\alpha_{i_0} < 0$ . Donc d'après la proposition 3.5.4, on a  $\alpha_i > 0$  pour tous les autres sommets  $v_i$  reliés à  $v$  donc  $\beta_v < \beta_{v_i}$  pour tous les autres sommets  $v_i$  reliés à  $v$ . Par conséquent, on a clairement (ii) et la connexité de  $\mathcal{M}$ .

D'autre part, toujours d'après la proposition 3.5.4, il existe au plus un  $\alpha_{i_0} \leq 0$  donc au plus un  $\alpha_{i_0} = 0$ . Donc  $\mathcal{M}$  contient au maximum deux sommets de rupture ou un sommet de rupture et une flèche (le cas de deux flèches n'arrive jamais dans la construction des diagrammes). □

Le théorème 3.5.2 est alors clair : considérons d'abord un sommet de rupture  $v$  de  $D_m(f)$  de données numériques  $(\nu, N_1, \dots, N_r)$ . Soit  $H$  l'hyperplan d'équation  $\nu + N_1 s_1 + \dots + N_r s_r = 0$  et soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets de rupture et des flèches de  $D_m(f)$  dont les données numériques définissent le même hyperplan  $H$ . On rappelle que si  $v, v' \in \mathcal{V}$ , alors  $\beta_v(c_2, \dots, c_r) = \beta_{v'}(c_2, \dots, c_r)$ .

– si  $v \in \mathcal{M}$  :

– si  $\text{card}\mathcal{M} = 1$ , alors  $\beta_v < \beta_{v_i}$  pour tout  $v_i$  relié à  $v$ , donc  $\alpha_i > 0$  pour tout  $i$ . Donc d'après la proposition 3.5.4,  $\mathcal{A}_v > 0$ . De plus, puisque  $\text{card}\mathcal{M} = 1$ , il n'existe pas d'autre  $v'$  tel que  $\beta_v = \beta_{v'}$ . Donc  $\mathcal{V} = \{v\}$  et

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) = \mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) > 0.$$

– si  $\text{card}\mathcal{M} = 2$ , soient  $v$  et  $\tilde{v}$  les deux éléments de  $\mathcal{M}$ . On a  $\beta_v = \beta_{\tilde{v}}$  donc  $\tilde{\alpha} = 0$ , et pour tous les autres sommets  $v_i$  reliés à  $v$ , on a  $\beta_{v_i} > \beta_v$  donc  $\alpha_i > 0$ . De plus, par définition de  $\mathcal{M}$ , il n'existe pas d'autre  $v'$  tel que  $\beta_v = \beta_{\tilde{v}} = \beta_{v'}$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{V} = \{v, \tilde{v}\}$  et  $H$  est un pôle double.

– si  $v \notin \mathcal{M}$ , alors comme les  $\beta_v$  augmentent strictement le long de tout chemin partant d'une extrémité de  $\mathcal{M}$ , on a  $\beta_{v_i} > \beta_v$  pour tous les sommets reliés à  $v$  sauf un pour lequel  $\beta_{v_{i_0}} < \beta_v$ . Donc  $\alpha_i > 0$  pour tous les  $i$  sauf un  $i_0$  pour lequel  $\alpha_{i_0} < 0$ . D'après la proposition 3.5.4, on a donc  $\mathcal{A}_v < 0$ . D'autre part, si  $v' \in \mathcal{V}$ , alors  $\beta_v = \beta_{v'}$  et  $v' \notin \mathcal{M}$  puisque  $v \notin \mathcal{M}$ . Donc avec le même raisonnement,  $\mathcal{A}_{v'} < 0$ . Par conséquent,

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) < 0.$$

Maintenant, soit  $v$  une flèche de  $D_m(f)$ , et soit  $v'$  le sommet de rupture relié à elle par une arête.

– si  $v \in \mathcal{M}$ , on est soit dans le cas (3) soit dans le cas (4) du théorème 3.5.9. Dans le cas (3), on a  $\beta_v < \beta_{v'}$  donc  $\alpha > 0$  et  $\mathcal{A}_v > 0$  d'après la proposition 3.5.4. De plus, il n'y a pas d'autre  $\tilde{v}$  dans  $\mathcal{R} \cup \mathcal{F}$  tel que  $\beta_v = \beta_{\tilde{v}}$ . Donc  $\mathcal{V} = \{v\}$  et

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) = \mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) > 0.$$

Dans le cas (4), il n'y a que  $v$  et  $v'$  tels que  $\beta_v = \beta_{v'}$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{V} = \{v, \tilde{v}\}$  et  $H$  est un pôle double.

- si  $v \notin \mathcal{M}$ , alors  $v$  est forcément à l'extrémité d'une géodésique partant de  $\mathcal{M}$  donc  $\beta_v > \beta_{v'}$  c'est à dire  $\alpha < 0$  et  $\mathcal{A}_v < 0$  d'après la proposition 3.5.4. Si un autre  $\tilde{v}$  de  $D(f)$  est tel que  $\beta_v = \beta_{\tilde{v}}$ , avec le même raisonnement, on aura  $\mathcal{A}_{\tilde{v}} < 0$ . Donc

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{A}_v(c_2, \dots, c_r) < 0.$$

Plus précisément, on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.5.10.** *La fonction  $Z_{top,0}(f)$  admet au plus un hyperplan  $H$  pôle d'ordre 2. De plus, les deux  $v, v' \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$  qui lui sont associés sont les deux  $v, v'$  pour lesquels  $\beta_v(c_2, \dots, c_r)$  (resp.  $\beta_{v'}(c_2, \dots, c_r)$ ) est minimum.*

*D'autre part, on a équivalence entre les deux propositions suivantes :*

- (i)  *$v$  est un sommet de rupture ou une flèche de  $D_m(f)$  dont les données numériques sont  $(\nu_v, N_{v,1}, \dots, N_{v,r})$ ,*
- (ii)  *$Z_{top,0}(f)$  n'est pas holomorphe au voisinage de l'hyperplan  $H$  d'équation*

$$\nu_v + N_{v,1}s_1 + \dots + N_{v,r}s_r = 0.$$

**Remarque 3.5.11.** *Le résultat final ne dépend plus du point  $(c_2, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$ .*

### 3.5.5 Un rapport avec les quotients jacobiens.

Nous énonçons ici une proposition qui établit un lien entre la fonction zêta topologique locale multi-variables et les quotients jacobiens d'un couple de germes.

**Proposition 3.5.12.** *Soient  $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$  deux germes réduits de fonction analytique en 0 et  $f = f_1^{n_1} f_2^{n_2}$  où  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $D_m(f)$  le diagramme minimal de Newton de  $f$ . Alors le dénominateur de  $Z_{top,0}(f)$  est le produit de  $(1 + n_1 s_1)$ ,  $(1 + n_2 s_2)$  et des  $(a_0^i + a_1^i s_1 + a_2^i s_2)$  pour  $i \in I$  où*

$$\left\{ \frac{a_2^i}{a_1^i} \right\}_{i \in I}$$

*est l'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f_1, f_2)$ . En conclusion, la fonction  $Z_{top,0}(f_1 f_2)$  contient la donnée des quotients jacobiens du couple  $(f_1, f_2)$ .*

*Démonstration.* Cela découle directement du théorème 3.3.1 et du théorème 2.4.3.  $\square$

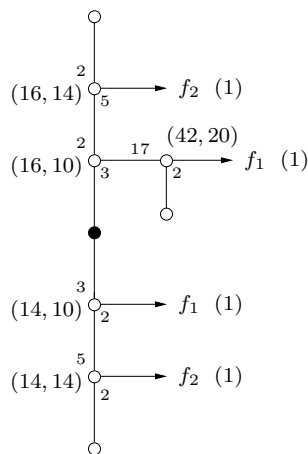
### 3.5.6 Un exemple.

On considère  $f = f_1 f_2$  où

$$f_1(x, y) = x^2(x^3 - y^2)^2 + y^7$$

$$f_2(x, y) = x^7 + x^2 y^2 + y^7$$

Le diagramme minimal de Newton de  $f$  est



$D_m(f)$

Les quotients jacobiens du couple  $(f_1, f_2)$  sont  $\{5/7, 1, 5/8, 7/8, 10/21\}$ . D'autre part, si l'on pose

$$\begin{cases} P_1 = 7 + 16s_1 + 14s_2 \\ P_2 = 5 + 16s_1 + 10s_2 \\ P_3 = 15 + 42s_1 + 20s_2 \\ P_4 = 5 + 14s_1 + 10s_2 \\ P_5 = 7 + 14s_1 + 14s_2 \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} Z_{top,0}(f_1, f_2)(s_1, s_2) &= \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_1(1+s_2)} + \frac{4}{P_1P_2} - \frac{1}{P_2} + \frac{11}{P_2P_3} + \frac{5}{P_2P_4} \\ &+ \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_3(1+s_1)} - \frac{1}{P_4} + \frac{1}{P_4(1+s_1)} + \frac{4}{P_4P_5} + \frac{1}{P_5} + \frac{1}{P_5(1+s_2)}. \end{aligned}$$

### 3.6 La fonction zêta détermine la topologie.

**Définition 3.6.1.** Soient  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  deux germes de fonctions analytiques en 0. On dit que  $f$  et  $g$  ont la même topologie si et seulement s'il existe un homéomorphisme  $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tel que  $f = g \circ \phi$ .

Nous savons que le diagramme minimal de Newton détermine la topologie d'un germe, c'est à dire que  $f$  et  $g$  ont même topologie si et seulement si  $D_m(f) = D_m(g)$  (voir [EN]). Nous voulons montrer que pour une décomposition bien choisie de  $f$ , la fonction  $Z_{top,0}(f)$  détermine la topologie de  $f$ , ce qui n'est pas vrai en général pour la fonction zêta-topologique locale à une variable.

**Définition 3.6.2.** On considère un germe  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Soit

$$f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$$

la décomposition de  $f$  en produit de composantes irréductibles. On appelle  $\mathcal{D}$  la décomposition de  $f$  en les  $r$  paquets  $f_i^{n_i}$  pour  $i = 1, \dots, r$  et on considère la fonction zêta-topologique locale multi-variables  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  associée à cette décomposition.

#### 3.6.1 Un exemple.

Nous allons montrer sur un exemple qu'il existe des germes n'ayant pas la même topologie mais admettant la même fonction zêta-topologique locale à une variable.

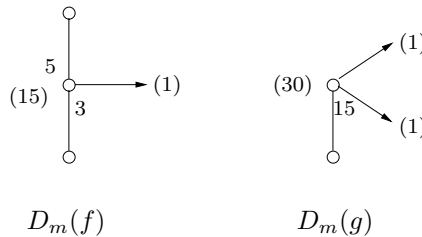
On considère

$$f(x, y) = y^5 - x^3$$

et

$$g(x, y) = (y - x^{15})(y - 2x^{15}).$$

$f$  et  $g$  n'ont pas la même topologie. En effet, leurs diagrammes minimaux de Newton  $D_m(f)$  et  $D_m(g)$ , qui sont des invariants topologiques, sont différents.



Pourtant, en utilisant le théorème 3.3.1, on obtient

$$Z_{top,0}(f)(s) = Z_{top,0}(g)(s) = \frac{8 + 7s}{(8 + 15s)(1 + s)}.$$

**Proposition 3.6.3.** La fonction zêta-topologique locale classique ne détermine pas, en général, la topologie d'un germe.

Ici, la fonction zêta-topologique locale à deux variables permet de différencier ces deux germes. En effet, si l'on considère  $f = f_1 f_2$  avec

$$f_1(x, y) = y^5 - x^3 \text{ et } f_2(x, y) = 1$$

et  $g = g_1 g_2$  avec

$$g_1(x, y) = y - x^{15} \text{ et } g_2(x, y) = y - 2x^{15},$$

on obtient

$$Z_{top,0}(f)(s_1, s_2) = \frac{8 + 7s_1}{(8 + 15s_1)(1 + s_1)}$$

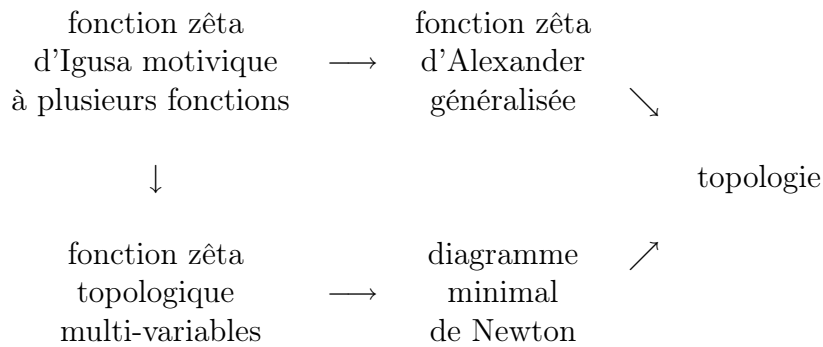
et

$$Z_{top,0}(g)(s_1, s_2) = \frac{16 + 14s_1 + 14s_2 + 15s_1 s_2}{(16 + 15s_1 + 15s_2)(1 + s_1)(1 + s_2)}.$$

### 3.6.2 La fonction zêta-topologique locale multi-variables détermine la topologie d'un germe.

Dans [G], G. Guibert s'intéresse à une généralisation de la fonction zêta d'Igusa motivique à plusieurs fonctions  $f_1, \dots, f_r$ . En utilisant la fonction zêta d'Alexander généralisée à plusieurs fonctions  $f_1, \dots, f_r$  introduite par C. Sabbah ([S]), il donne un énoncé (thm. 4.4.1) qui montre que la seconde fonction se déduit de la première. En particulier, il montre donc que la fonction zêta d'Igusa motivique généralisée d'un germe détermine sa topologie.

Nous montrons ici que la fonction zêta-topologique locale multi-variables d'un germe associée à la décomposition  $\mathcal{D}$  détermine la topologie de ce germe. Nous n'utilisons pas de fonction intermédiaire : nous donnons un algorithme permettant de reconstruire le diagramme minimal de Newton du germe à partir de sa fonction zêta-topologique locale multi-variables.



**Théorème 3.6.4.** *Soient  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Soit  $D_m(f)$  (resp.  $D_m(g)$ ) le diagramme minimal de Newton de  $f$  (resp.  $g$ ). On considère les fonctions zêta-topologiques locales multi-variables  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  et  $Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t)$  associées à la décomposition  $\mathcal{D}$  pour  $f$  et  $g$ . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t)$ ,
- (ii)  $D_m(f) = D_m(g)$ .



**Corollaire 3.6.5.** *Si  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t)$ , alors  $f$  et  $g$  ont la même topologie.*

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) du théorème est évidente : en effet, si  $D_m(f) = D_m(g)$ , en utilisant le théorème 3.3.1, on a clairement

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = Z_{top,0}(g)(s_1, \dots, s_t).$$

Pour montrer l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii), nous procédons en plusieurs étapes. On considère un germe de courbe  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  et la fonction  $Z_{top,0}(f)$  associée à la décomposition  $\mathcal{D}$ . Nous voulons donner un algorithme permettant de reconstruire le diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  à partir de  $Z_{top,0}(f)$ . Nous donnons dans un premier temps des résultats préliminaires auxquels nous feront appel par la suite. Nous montrons ensuite que pour la décomposition  $\mathcal{D}$ , les hyperplans dont les équations apparaissent au dénominateur de  $Z_{top,0}(f)$  sont tous différents, ce qui permet d'après les théorèmes 3.3.1 et 3.5.2 de compter les sommets de rupture et les flèches de  $D_m(f)$ . Puis nous démontrons le théorème 3.6.4 dans le cas d'une branche irréductible. Nous définissons alors le squelette  $S(f)$  de  $D_m(f)$  et donnons l'algorithme de construction de ce squelette. Nous donnons ensuite les propriétés et l'algorithme permettant d'obtenir l'arbre  $T(f)$  égal au diagramme  $D_m(f)$  non décoré à partir de  $S(f)$ . Puis nous donnons les résultats permettant de décorer  $T(f)$  afin de reconstruire complètement  $D_m(f)$ .

### 3.6.3 Résultats préliminaires.

**Définition 3.6.6.** *Soient  $v, v' \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ . On note  $G_{[v,v']}$  la géodésique de  $D_m(f)$  reliant  $v$  à  $v'$ .*

On rappelle que l'on a défini au paragraphe 3.1 la notion de sommet précédent sur  $D_m(f) \subset D(f)$ .

**Définition 3.6.7.** *Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . On considère la flèche  $v_j$  de  $D_m(f)$  représentant la composante  $f_j$  de  $f$ . On définit la géodésique  $G_j$  de la manière suivante :*

- soit  $v_m$  le sommet de rupture relié à la flèche  $v_j$ . Alors  $G_{[v_m, v_j]} \subset G_j$ ,
- pour tout sommet de rupture  $v_k$  de  $G_j$ , si  $v_k$  admet un sommet précédent  $v_{k-1}$ , alors  $G_{[v_{k-1}, v_j]} \subset G_j$ . Sinon,  $G_{[v_k, v_j]} = G_j$ .

**Remarque 3.6.8.** *Comme on l'a remarqué pour la notion de sommet précédent, les géodésiques  $G_j$  ne sont pas intrinsèques au diagramme : elles dépendent du choix du système de coordonnées que l'on a fait pour construire  $D(f)$ .*

On nomme les sommets de rupture de  $G_j$  de la façon suivante :

- Si  $G_j$  ne comporte qu'un sommet de rupture, ce sommet est  $V_{0,1}$  si la décoration portée par l'arête reliant ce sommet à la flèche  $v_j$  est strictement supérieure à 1, et  $W_0$  sinon.
- Si  $G_j$  comporte plusieurs sommets de rupture,
  - (i) le sommet de  $G_j$  n'ayant pas de sommet précédent est  $W_0$ .

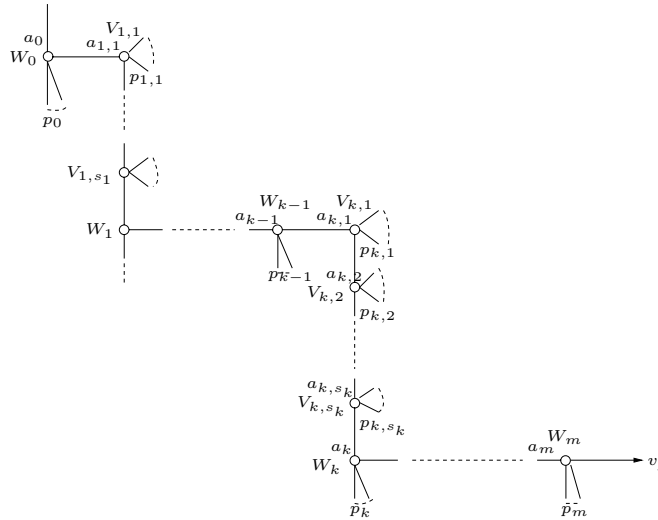
- (ii) Alors  $W_0$  est le sommet précédant un certain nombre de sommets de rupture de  $G_j$ . On note  $V_{1,1}, \dots, V_{1,s_1}$ ,  $W_1$  ces sommets rencontrés dans cet ordre sur  $G_{[W_0, W_1]}$  parcourue de  $W_0$  vers  $W_1$ .
- (iii) Pour chaque sommet  $W_k$ , si  $W_k$  est le sommet précédant un certain nombre de sommets de rupture de  $G_j$ , on note  $V_{k+1,1}, \dots, V_{k+1,s_{k+1}}$ ,  $W_{k+1}$  ces sommets rencontrés dans cet ordre sur  $G_{[W_k, W_{k+1}]}$  parcourue de  $W_k$  vers  $W_{k+1}$ .
- (iv) On termine  $G_j$  par le sommet  $W_m$  si la décoration portée par l'arête reliant le dernier sommet de  $G_j$  à  $v_j$  est 1 et par le sommet  $V_{m,s_m}$  sinon.

On nomme les décorations proches des sommets de rupture de  $G_j$  de la façon suivante : pour le sommet  $W_0$ , soient  $a_0$  la décoration située sur l'arête verticale au dessus de  $W_0$ ,  $b_0$  celle située sur  $G_{[W_0, W_1]}$  et  $p_0$  le produit des autres décorations proches de  $W_0$ . Pour le sommet  $V_{0,1}$  s'il existe, soient  $a_{0,1}$  la décoration située sur l'arête verticale au dessus de  $V_{0,1}$ ,  $p_{0,1}$  la décoration située sur  $G_{[V_{0,1}, v_j]}$  et  $b_{0,1}$  le produit des autres décorations proches de  $V_{0,1}$ .

Pour un sommet  $W_k$ ,  $k = 1, \dots, m-1$ , soient  $a_k$  la décoration située sur  $G_{[W_{k-1}, W_k]}$ ,  $b_k$  celle située sur  $G_{[W_k, W_{k+1}]}$  et  $p_k$  le produit des autres décorations proches de  $W_k$ . Enfin, pour un sommet  $V_{k,l}$ , soient  $a_{k,l}$  la décoration située sur  $G_{[W_{k-1}, V_{k,l}]}$ ,  $p_{k,l}$  celle située sur  $G_{[V_{k,l}, W_k]}$  et  $b_{k,l}$  le produit des autres décorations proches de  $V_{k,l}$ .

Pour le sommet de rupture  $v$  relié à  $v_j$ , si  $v = W_m$ , soient  $a_m$  la décoration située sur  $G_{[W_{m-1}, W_m]}$ ,  $b_m$  celle située sur  $G_{[W_m, v_j]}$  et  $p_m$  le produit des autres décorations proches de  $W_m$ . Si  $v = V_{m,s_m}$ , soient  $a_{m,s_m}$  la décoration située sur  $G_{[W_{m-1}, V_{m,s_m}]}$ ,  $p_{m,s_m}$  celle située sur  $G_{[V_{m,s_m}, v_j]}$  et  $b_{m,s_m}$  le produit des autres décorations proches de  $V_{m,s_m}$ .

**Remarque 3.6.9.** *D'après la construction des diagrammes, on a  $b_k = b_{k,l} = 1$  pour tous  $k \in \{0, \dots, m\}$  et  $l \in \{1, \dots, s_k\}$ .*



**Définition 3.6.10.** *Soient  $v \in \mathcal{R}$  et  $j \in \{1, \dots, r\}$ . On définit*

$$\gamma_j^v := \frac{\nu_v}{N_{v,j}} \text{ et } \gamma_j^{\min} := \min_{v \in \mathcal{R}} \gamma_j^v.$$

**Lemme 3.6.11.** *Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Soient  $v \in G_j$  et  $v' \in \mathcal{R}$ . Alors les  $\gamma_j^v$  croissent strictement le long de toute géodésique  $G_{[v,v']}$  de  $D_m(f)$  parcourue de  $v$  vers  $v'$  et telle que  $G_{[v,v']} \cap G_j = \{v\}$ . En particulier,  $\gamma_j^{\min}$  est atteint sur  $G_j$ .*

*Démonstration.* Soient  $v_1, v_2 \in G_{[v,v']}$  deux sommets consécutifs tels que la géodésique joignant  $v_2$  à  $v'$  ne passe pas par  $v_1$ . Soient  $\alpha$  (resp.  $\gamma$ ) la décoration proche de  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) située sur  $G_{[v_1,v_2]}$  et  $\beta$  (resp.  $\delta$ ) le produit des autres décorations proches de  $v_1$  (resp.  $v_2$ ). Alors d'après la proposition 3.2.1, on a

$$\alpha\nu_{v_2} - \delta\nu_{v_1} = \Delta_{[v_1,v_2]},$$

et d'après la proposition 3.2.3, on a

$$N_{v_1,j} = \beta A_j + \alpha B_j \text{ et } N_{v_2,j} = \gamma A_j + \delta B_j.$$

Or  $f_j$  est une composante irréductible de  $f$ . D'après la position de  $v_1$  et  $v_2$ , on a alors  $A_j = 0$ . Donc  $N_{v_2,j} = \frac{\delta}{\alpha} N_{v_1,j}$ . Finalement,

$$\frac{\gamma_j^{v_2}}{\gamma_j^{v_1}} = \frac{\alpha\nu_{v_2}}{\delta\nu_{v_1}} = 1 + \frac{\Delta_{[v_1,v_2]}}{\delta\nu_{v_1}} > 1.$$

□

**Définition 3.6.12.** *Pour  $k \in \{0, \dots, m\}$ , on définit*

$$T_k := a_k p_k - \nu_{W_k},$$

*et pour  $l \in \{1, \dots, s_k\}$ ,*

$$T_{k,l} := a_{k,l} - \nu_{V_{k,l}}.$$

**Définition 3.6.13.** *Pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on note  $v_{\min,j}$  le sommet de rupture de  $D_m(f)$  pour lequel  $\gamma_j^{\min}$  est atteint.*

**Lemme 3.6.14.** *Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Soit  $v$  le sommet de  $G_j$  relié à la flèche représentant  $f_j$ . On a  $v = W_m$  ou  $v = V_{m,s_m}$ . Le sommet  $v_{\min,j}$  de  $G_j$  pour lequel  $\gamma_j^{\min}$  est atteint est le sommet vérifiant*

$$\begin{cases} v_{\min,j} = V_{0,1} \text{ si } G_j = G_{[V_{0,1},v_j]}, \\ v_{\min,j} = W_0 \text{ si } a_0 \geq 2 \text{ et } p_0 \geq 2 \\ v_{\min,j} = W_{k_0} \text{ où } k_0 := \min\{k \in \{1, \dots, m\} / p_k > 1\} \text{ si } a_0 \text{ ou } p_0 = 1 \text{ et si } \exists k / p_k > 1, \\ v_{\min,j} = v \text{ si } a_0 = 1 \text{ ou } p_0 = 1 \text{ et si } p_k = 1 \quad \forall k. \end{cases}$$

Alors on a

$$\gamma_j^{W_0} > \gamma_j^{V_{1,1}} > \dots > \gamma_j^{W_{k_0}} = \gamma_j^{\min} < \dots < \gamma_j^{W_m}.$$

En particulier, le sommet  $v_{\min,j}$  est unique.

*Démonstration.* Si  $G_j = G_{[V_{0,1}, v_j]}$ , d'après le lemme précédent, il est clair que  $\nu_{\min, j} = V_{0,1}$ .

Sinon, soient  $v$  et  $v'$  deux sommets consécutifs de  $G_j$  avec  $v < v'$ . Soient  $\alpha$  (resp.  $\gamma$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur  $G_{[v, v']}$  et  $\beta$  (resp.  $\gamma$ ) le produit des autres décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ). Alors d'après la proposition 3.2.1, on a

$$\alpha\nu_{v'} - \delta\nu_v = \Delta_{[v, v']},$$

et d'après la proposition 3.2.3, on a

$$N_{v, j} = \beta A_j + \alpha B_j \text{ et } N_{v', j} = \gamma A_j + \delta B_j.$$

Or  $f_j$  est une composante irréductible de  $f$ . D'après la position de  $v$  et  $v'$ , on a alors  $B_j = 0$ . Donc  $N_{v', j} = \frac{\gamma}{\beta} N_{v, j}$ . Finalement,

$$\frac{\gamma_j^{v'}}{\gamma_j^v} = 1 + \frac{(\beta - \nu_v)\Delta_{[v, v']}}{\alpha\gamma\nu_v}.$$

Or  $\beta - \nu_v = T_k$  si  $v = W_k$  et  $\beta - \nu_v = T_{k, l}$  si  $v = V_{k, l}$ . Donc la croissance des  $\gamma_j^v$  dépend du signe des  $T_k$  et des  $T_{k, l}$ .

Pour deux sommets  $W_{k-1}$  et  $V_{k, 1}$  consécutifs, on a

$$\begin{aligned} T_{k-1} &= a_{k-1}p_{k-1} - \nu_{W_{k-1}} \\ T_{k, 1} &= a_{k, 1} - \nu_{V_{k, 1}} \\ &= a_{k, 1} - (p_{k, 1}\nu_{W_{k-1}} + a_{k, 1} - a_{k-1}p_{k-1}p_{k, 1}) \\ &= p_{k, 1}T_{k-1} \end{aligned}$$

Pour deux sommets  $V_{k, l}$  et  $V_{k, l+1}$  consécutifs, on a

$$\begin{aligned} T_{k, l} &= a_{k, l} - \nu_{V_{k, l}} \\ T_{k, l+1} &= a_{k, l+1} - \nu_{V_{k, l+1}} \\ &= a_{k, l+1} - \frac{1}{p_{k, l}}(p_{k, l+1}\nu_{V_{k, l}} + a_{k, l+1}p_{k, l} - a_{k, l}p_{k, l+1}) \\ &= \frac{p_{k, l+1}}{p_{k, l}}T_{k, l} \end{aligned}$$

Pour deux sommets  $V_{k, s_k}$  et  $W_k$  consécutifs, on a

$$\begin{aligned} T_{k, s_k} &= a_{k, s_k} - \nu_{V_{k, s_k}} \\ T_k &= a_k p_k - \nu_{W_k} \\ &= a_k p_k - \frac{1}{p_{k, s_k}}(p_k \nu_{V_{k, s_k}} + a_k p_{k, s_k} - a_{k, s_k} p_k) \\ &= a_k (p_k - 1) + \frac{p_k}{p_{k, s_k}} T_{k, s_k} \end{aligned}$$

Il est clair que s'il existe  $k$  tel que  $T_k > 0$ , alors  $T_{k+n, l} > 0$  et  $T_{k+n} > 0 \forall n > 0$  et  $\forall l \in \{1, s_{k+n}\}$ , donc

$$\gamma_j^{W_k} < \gamma_j^{V_{k+1, 1}} < \dots < \gamma_j^{W_m} \text{ ou } \gamma_j^{V_{m, s_m}}.$$

D'autre part,

$$T_0 = a_0 p_0 - \nu_{W_0} = (a_0 - 1)(p_0 - 1) - 1.$$

Donc  $T_0 > 0$  si et seulement si  $a_0 \geq 2$  et  $p_0 \geq 2$ ,  $T_0 = 0$  est impossible car  $(a_0, p_0) = 1$  et  $T_0 < 0$  si et seulement si  $a_0 = 1$  ou  $p_0 = 1$  et alors  $T_0 = -1$ .

Si  $T_0 = -1$ , on a  $T_{1,1} = -p_{1,1} < 0, \dots, T_{1,s_1} = -p_{1,s_1} < 0$  et  $T_1 = (a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1$ . Par récurrence, si  $T_0 = T_1 = \dots = T_k = -1$ , alors  $T_{k+1,1} = -p_{k+1,1} < 0, \dots, T_{k+1,s_{k+1}} = -p_{k+1,s_{k+1}} < 0$  et  $T_{k+1} = (a_{k+1} - 1)(p_{k+1} - 1) - 1$ . Alors  $T_{k+1} > 0$  si et seulement si  $a_{k+1} \geq 2$  et  $p_{k+1} \geq 2$ ,  $T_{k+1} = 0$  est impossible car  $(a_{k+1}, p_{k+1}) = 1$  et  $T_{k+1} < 0$  si et seulement si  $p_{k+1} = 1$  (car  $a_{k+1} > 1$ ), et alors  $T_{k+1} = -1$ .  $\square$

**Remarque 3.6.15.** *Pour les deux lemmes précédents, les démonstrations sont valables pour les sommets de rupture de  $D_m(f)$ , mais ne le sont pas pour les sommets de valence 1 ou les flèches.*

### 3.6.4 Les hyperplans sont différents.

**Proposition 3.6.16.** *Pour tout  $v \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ , soient  $P_v = \nu_v + N_{v,1}s_1 + \dots + N_{v,r}s_r$  et  $H_v : P_v = 0$ . Alors quels que soient  $v, v' \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ , on a*

$$H_v \neq H_{v'}.$$

**Remarque 3.6.17.** *En particulier, pour la décomposition  $\mathcal{D}$ , la fonction  $Z_{top,0}(f)$  n'admet pas de pôle double alors que c'est possible pour une décomposition quelconque (c.f. théorème 3.5.10).*

Le choix de la décomposition  $\mathcal{D}$  pour  $f$  implique que pour tout sommet de rupture  $v \in \mathcal{R}$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on a

$$N_{v,j} \neq 0.$$

De plus, d'après les théorèmes 3.3.1 et 3.5.2 et le choix de la décomposition  $\mathcal{D}$ , on voit apparaître au dénominateur de  $Z_{top,0}(f)$  deux types de facteurs : d'une part des facteurs de la forme  $\nu + N_1s_1 + \dots + N_rs_r$  avec  $N_j \neq 0$  pour tout  $j$  qui correspondent aux sommets de rupture de  $D_m(f)$  et d'autre part les facteurs suivants :

$$1 + n_j s_j \text{ pour } j = 1, \dots, r,$$

qui correspondent aux  $r$  flèches de  $D_m(f)$ . On connaît donc le nombre  $r$  de flèches de  $D_m(f)$  et la multiplicité  $n_j$  pour  $j = 1, \dots, r$  de chacune de ces flèches.

Il est clair que si  $v, v' \in \mathcal{F}$ , ou si  $v \in \mathcal{R}$  et  $v' \in \mathcal{F}$ , alors  $H_v \neq H_{v'}$ . Il faut donc montrer que pour tous  $v, v' \in \mathcal{R}$ , on a  $H_v \neq H_{v'}$ . Remarquons que

$$H_v = H_{v'} \Leftrightarrow \gamma_j^v = \gamma_j^{v'} \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}.$$

Soient  $v, v' \in \mathcal{R}$ . Alors soit il existe  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $v, v' \in G_j$ , soit ce n'est pas le cas, et alors il existe  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  avec  $i \neq j$  tels que  $v \in G_j, v' \in G_i$  et  $v, v' \notin G_i \cap G_j$ . La démonstration découle alors des deux lemmes suivants.

**Lemme 3.6.18.** *Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Si  $v, v' \in G_j$ , alors  $H_v \neq H_{v'}$ .*

*Démonstration.* On reprend les résultats du lemme 3.6.14.

Si  $a_0 \geq 2$  et  $p_0 \geq 2$ , alors

$$\gamma_j^{W_0} < \gamma_j^{V_{1,1}} < \dots < \gamma_j^{W_m},$$

donc  $\gamma_j^v \neq \gamma_j^{v'}$  pour tous  $v, v' \in G_j$  et par conséquent,  $H_v \neq H_{v'}$  pour tous  $v, v' \in G_j$ .

Sinon,  $a_0 = 1$  ou  $p_0 = 1$ . Alors il existe  $G_i$  avec  $i \neq j$  telle que  $G_i \cap G_j = \emptyset$  ou  $G_i \cap G_j = \{W_0\}$  (sinon, le sommet  $W_0$  disparaîtrait). Alors d'après le lemme 3.6.11, on a

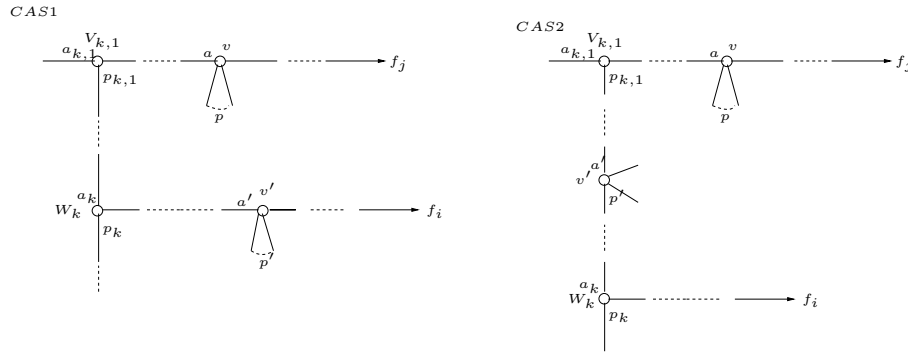
$$\gamma_i^{W_0} < \gamma_i^{V_{1,1}} < \dots < \gamma_i^{W_m},$$

donc  $\gamma_i^v \neq \gamma_i^{v'}$  pour tous  $v, v' \in G_j$  et par conséquent,  $H_v \neq H_{v'}$  pour tous  $v, v' \in G_j$ .  $\square$

**Lemme 3.6.19.** Soient  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  avec  $i \neq j$ . Si  $v \in G_j$  et  $v' \in G_i$  mais  $v, v' \notin G_i \cap G_j$ , alors  $H_v \neq H_{v'}$ .

*Démonstration.* Les géodésiques  $G_i$  et  $G_j$  se séparent l'une de l'autre à partir d'un certain axe vertical (qui n'est pas forcément le premier). Soient  $V_{k,1}$  le sommet de cet axe vertical appartenant à  $G_j$  et  $V_{k,1}, \dots, W_k$  ceux de cet axe vertical appartenant à  $G_i$ . On peut éventuellement avoir  $V_{k,1} = \dots = W_k$ . Il y a deux cas possibles :

CAS 1 :  $v' \in G_{[W_k, f_i]}$ , CAS 2 :  $v' \in G_{[V_{k,1}, W_k]}$ .



On va montrer que dans les deux cas,  $\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} \neq \frac{N_{v',j}}{N_{v',i}}$ . Par conséquent, on aura  $H_v \neq H_{v'}$ .

CAS 1 : Soit  $\tilde{v}$  (resp.  $\tilde{v}'$ ) le sommet précédant  $v$  (resp.  $v'$ ). Soit  $A$  (resp.  $A'$ ) le produit des nombres adjacents à  $G_{[v, f_j]}$  (resp.  $G_{[v', f_i]}$ ). Soit  $P$  (resp.  $P'$ ) le produit des nombres adjacents à  $G_{[V_{k,1}, \tilde{v}]}$  (resp.  $G_{[W_k, \tilde{v}']}$ ). Enfin, soient  $a$  (resp.  $a'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur  $G_{[V_{k,1}, v]}$  (resp.  $G_{[W_k, v']}$ ) et  $p$  (resp.  $p'$ ) le produit des décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ) situées ni sur  $G_{[V_{k,1}, v]}$  ni sur  $G_{[v, f_j]}$  (resp. ni sur  $G_{[W_k, v']}$  ni sur  $G_{[v', f_i]}$ .

On a  $N_{v,j} = A$ ,  $N_{v',i} = A'$ ,  $N_{v,i} = p \frac{P}{p_{k,1}} \frac{P'}{a_k} \frac{A'}{a'}$  et  $N_{v',j} = p' \frac{P'}{a_k} \frac{P}{p_{k,1}} \frac{A}{a}$ . Alors,

$$\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} \cdot \frac{N_{v',i}}{N_{v',j}} = \frac{aa' a_k^2 p_{k,1}^2}{pp' P^2 P'^2}.$$

Or par définition de  $a$  et  $a'$ , on a

$$a > \frac{P^2}{a_{k,1}p_{k,1}}p \text{ et } a' > \frac{P'^2}{a_k p_k}p',$$

donc

$$\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} \cdot \frac{N_{v',i}}{N_{v',j}} > \frac{a_k p_{k,1}}{a_{k,1} p_k} = 1 + \frac{\Delta_{[V_{k,1}, W_k]}}{a_{k,1} p_k} > 1.$$

Donc  $\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} > \frac{N_{v',j}}{N_{v',i}}$  et  $H_v \neq H_{v'}$ .

CAS 2 : Avec les mêmes notations que pour le cas 1, on a  $N_{v,j} = A$ ,  $N_{v',i} = A'$ ,  $N_{v,i} = p \frac{P}{p_{k,1}} \frac{A'}{a'}$  et  $N_{v',j} = p' \frac{P}{p_{k,1}} \frac{A}{a}$ . Alors,

$$\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} \cdot \frac{N_{v',i}}{N_{v',j}} = \frac{aa' p_{k,1}^2}{pp' P^2}.$$

Or par définition de  $a$ , on a

$$a > \frac{P^2}{a_{k,1} p_{k,1}}p,$$

donc

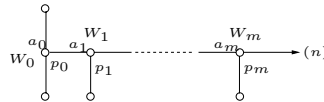
$$\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} \cdot \frac{N_{v',i}}{N_{v',j}} > \frac{a' p_{k,1}}{a_{k,1} p'} = 1 + \frac{\Delta_{[V_{k,1}, v']}}{a_{k,1} p'} > 1.$$

Donc  $\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} > \frac{N_{v',j}}{N_{v',i}}$  et  $H_v \neq H_{v'}$ . □

### 3.6.5 Démonstration du théorème 3.6.4 dans le cas d'une branche irréductible.

**Proposition 3.6.20.** *Soit  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un germe de courbe irréductible. Alors la fonction zêta-topologique à une variable  $Z_{top,0}(f)(s)$  détermine la topologie de  $f$ .*

*Démonstration.* Avec les notations du paragraphe 3.6.3, puisque  $f$  est irréductible, il n'y a qu'une géodésique sur  $D_m(f)$  et elle ne comporte que des sommets  $W_k$ . Le diagramme minimal de Newton de  $f$  est le suivant :



D'après la proposition 3.6.16 et le théorème 3.5.2, on lit au dénominateur de  $Z_{top,0}(f)$  le nombre de sommets de rupture  $m$  de  $D_m(f)$ . On a  $a_0 \geq 2$  et  $p_0 \geq 2$  car sinon,  $W_0$  disparaîtrait. Donc d'après le lemme 3.6.14, on a

$$\gamma^{W_0} < \gamma^{W_1} < \dots < \gamma^{W_m}$$

et

$$T_k = a_k p_k - \nu_{W_k} > 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, m\}.$$

De plus, si  $v_s$  désigne la flèche de  $D_m(f)$ , on a  $\frac{\gamma^{v_s}}{\gamma^{W_m}} = \frac{a_m p_m n}{\nu_{W_m} n} = 1 + \frac{T_m}{\nu_{W_m}} > 1$ . On peut donc d'une part ordonner les sommets  $W_0, \dots, W_m$  et d'autre part retrouver la multiplicité  $n$  de la flèche  $v_s$  ( $\gamma^{v_s} = 1/n$ ). On a donc reconstitué le squelette de  $D_m(f)$ , chaque sommet de rupture  $W_k$  étant étiqueté par l'équation  $\nu_{W_k} + N_{W_k} s = 0$  de l'hyperplan qui lui est associé. Il reste à calculer les décorations attenantes aux  $W_k$ .

Pour chaque sommet  $W_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ , la fonction  $Z_{top,0}(f)(s)$  permet de calculer les quantités

$$B_k := \frac{\mathcal{A}_{W_k}}{\nu_{W_k}} \text{ et } \gamma^{W_k} = \frac{\nu_{W_k}}{N_{W_k}}.$$

D'après la formule 3.1 (paragraphe 3.5.2) et les propositions 3.2.1 et 3.2.3, on a d'une part  $B_0 = \frac{T_0 + 1}{T_0}$ . Or  $B_0 - 1 = \frac{1}{T_0} > 0$ , donc on en déduit  $T_0 = \frac{1}{B_0 - 1}$ . D'autre part,

$$B_k = \frac{(p_k - 1)(a_k p_k + a_k - \nu_{W_k})}{(a_k p_k - \nu_{W_k})(\nu_{W_k} - a_k)} = \frac{(p_k - 1)(a_k + T_k)}{(-p_k T_{k-1} T_k)},$$

et  $-p_k T_{k-1} T_k \neq 0$ . On obtient finalement le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 p_0 - a_0 - p_0 = T_0 \\ \frac{a_0 + p_0}{a_0 p_0 p_1 \cdots p_m} = \gamma^{W_0} \\ \forall k \in \{1, \dots, m\} : \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{(p_k - 1)(a_k p_k + a_k - \nu_{W_k})}{(a_k p_k - \nu_{W_k})(\nu_{W_k} - a_k)} = B_k \quad (E_k) \\ \frac{\nu_{W_k}}{a_k p_k \cdots p_m} = \gamma^{W_k} \quad (E'_k) \end{array}$$

où  $T_0$ ,  $\gamma^{W_0}$ ,  $B_k$  et  $\gamma^{W_k}$  sont connus.

**Lemme 3.6.21.** *Pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ , on a*

$$T_k = \frac{T_{k-1}}{T_{k-1} B_k + 1}.$$

*Démonstration.* On a

$$B_k = \frac{(p_k - 1)(a_k + T_k)}{-p_k T_{k-1} T_k},$$

donc

$$B_k T_{k-1} + 1 = 1 - \frac{(p_k - 1)(a_k + T_k)}{p_k T_k} = \frac{T_{k-1}}{T_k} \neq 0,$$

d'où le résultat. □

On sait donc calculer  $T_k$  pour  $k = 0, \dots, m$ .

Pour le sommet  $W_m$ , on a les deux équations  $(E_m)$  et  $(E'_m)$  :

$$(E'_m) : \frac{\nu_{W_m}}{a_m p_m} = \gamma^{W_m} \Leftrightarrow \frac{a_m - p_m T_{m-1}}{a_m p_m} = \gamma^{W_m} \Leftrightarrow a_m(1 - p_m \gamma^{W_m}) = p_m T_{m-1}.$$



Or  $1 - p_m \gamma^{W_m} = \frac{p_m T_{m-1}}{a_m} \neq 0$ . Donc

$$(E'_m) : a_m = \frac{p_m T_{m-1}}{1 - p_m \gamma^{W_m}}.$$

On injecte cette quantité dans  $(E_m)$  et on obtient l'équation suivante :

$$(F_m) : (\gamma^{W_m} - 1)(T_{m-1} B_m + 1) p_m^2 - \gamma^{W_m} p_m + 1 = 0.$$

C'est une équation de degré 2 en  $p_m$  et le signe du produit des racines de cette équation est le signe de  $(\gamma^{W_m} - 1)(T_{m-1} B_m + 1)$ . Or

$$(\gamma^{W_m} - 1)(T_{m-1} B_m + 1) = \frac{-T_m}{a_m p_m} \frac{T_{m-1}}{T_m} = \frac{-T_{m-1}}{a_m p_m} < 0.$$

On trouve donc une unique solution positive à  $(F_m)$  qui est  $p_m$  et  $(E'_m)$  donne  $a_m$ .

On remonte alors les équations  $(E_k)$  et  $(E'_k)$  pour  $k$  allant de  $m-1$  à 1 : on suppose que l'on a calculé  $(a_i, p_i)$  pour  $i = k+1, \dots, m$ . On a les équations  $(E_k)$  et  $(E'_k)$ . On en déduit

$$(F_k) : (p_{k+1} \dots p_m \gamma^{W_k} - 1)(T_{k-1} B_k + 1) p_k^2 - \gamma^{W_k} p_k + 1 = 0.$$

On a  $(p_{k+1} \dots p_m \gamma^{W_k} - 1)(T_{k-1} B_k + 1) = \frac{-T_{k-1}}{a_k p_k} < 0$ , d'où  $p_k$  puis  $a_k$ .

Enfin, pour  $W_0$ , on a  $a_0 p_0 - a_0 - p_0 = T_0$  et  $\frac{a_0 + p_0}{a_0 p_0} = p_1 \dots p_m \gamma^{W_0}$  dont on déduit  $a_0$  et  $p_0$ . □

### Algorithme de construction de $D_m(f)$ pour un germe $f$ irréductible.

1. Grâce à la proposition 3.6.16 et au théorème 3.5.2, la lecture du dénominateur de  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  permet d'énumérer les sommets de rupture  $W_0, \dots, W_M$  et la flèche  $v_s$  de  $D_m(f)$ . Chaque sommet  $W_i$  est étiqueté par l'équation de l'hyperplan qui lui est associé

$$W_i ; \nu_{W_i} + N_{W_i} s = 0.$$

La flèche  $v_s$  est étiquetée par l'équation de l'hyperplan qui lui est associée

$$v_s ; 1 + n s = 0.$$

2. Grâce au lemme 3.6.14, on connecte les sommets et la flèche de  $D_m(f)$ . À chaque sommet  $W_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ , on connecte un sommet de valence 1 ; au sommet  $W_0$ , on connecte deux sommets de valence 1.
3. Il reste à calculer les décorations. Pour chaque sommet  $W_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ , la fonction  $Z_{top,0}(f)(s)$  permet de calculer les quantités

$$B_k := \frac{A_{W_k}}{\nu_{W_k}} \text{ et } \gamma^{W_k} = \frac{\nu_{W_k}}{N_{W_k}}.$$

4. Grâce au lemme 3.6.21, on calcule  $T_k$  pour  $k = 0, \dots, m$ .
5. Pour  $k = m, \dots, 0$ , on résout l'équation

$$(F_k) : (p_{k+1} \dots, p_m \gamma^{W_k} - 1)(T_{k-1} B_k + 1) p_k^2 - \gamma^{W_k} p_k + 1 = 0.$$

La solution positive donne  $p_k$ . De l'équation

$$(E'_k) : a_k = \frac{p_k T_{k-1}}{1 - p_k \dots p_m \gamma^{W_k}},$$

on déduit  $a_k$ .

### 3.6.6 Squelette du diagramme.

Nous allons définir dans ce paragraphe un squelette  $S(f)$  de  $D_m(f)$  et montrer que la lecture de  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  permet de reconstituer le squelette  $S(f)$  de  $D_m(f)$ .

#### Partition associée à un sommet de rupture.

Soit  $v \in \mathcal{R}$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$ . Soient  $v_i, i = 1, \dots, k$  les sommets et les flèches adjacents à  $v$ . On utilise les résultats des paragraphes 3.2.3 et 3.5.2. On a

$$\mathcal{A}_v(s_2, \dots, s_r) = 2 - k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i(s_2, \dots, s_r)},$$

où

$$\alpha_i(s_2, \dots, s_r) = \tilde{\alpha}_i + \sum_{j=2}^r K_{i,j} s_j.$$

Puisqu'on a choisi la décomposition  $\mathcal{D}$  de  $f$  en produit de branches irréductibles, on a les faits suivants pour les sommets de rupture et les flèches adjacents à  $v$  :

$$\exists! i_1 \in \{1, \dots, k\} \text{ tel que } A_{i_1,1} \neq 0 \text{ et } B_{i_1,1} = 0.$$

$$\forall i \neq i_1, \text{ on a } A_{i,1} = 0 \text{ et } B_{i,1} \neq 0.$$

Cela signifie que l'unique géodésique reliant  $v$  à la flèche représentant  $f_1$  passe par le sommet  $v_{i_1}$ . Avec les notations du paragraphe 3.2.3, on a alors

$$\forall j \in \{2, \dots, r\}, K_{i_1,j} = -\frac{B_{i_1,j}}{\beta_{i_1}} \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, k\}, i \neq i_1, K_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{\alpha_i}.$$

**Définition 3.6.22.** Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on définit

$$\text{si } i \neq i_1, \mathcal{F}_i^v := \{j \in \{2, \dots, r\} / G_{[v_i, f_j]} \text{ ne passe pas par } v\},$$

$$\mathcal{F}_{i_1}^v := \{1, \dots, r\} \setminus \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^k \mathcal{F}_i^v.$$

**Remarque 3.6.23.** Si  $v_i$  est la flèche représentant  $f_j$ , on a  $G_{[v_i, f_j]} = \{v_i\}$ .

On a alors

$$(3.2) \quad \alpha_{i_1}(s_2, \dots, s_r) = \tilde{\alpha}_{i_1} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^k \sum_{j \in \mathcal{F}_i^v} \frac{B_{i_1, j}}{\beta_{i_1}} s_j$$

et pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \neq i_1$ ,

$$(3.3) \quad \alpha_i(s_2, \dots, s_r) = \tilde{\alpha}_i + \sum_{j \in \mathcal{F}_i^v} \frac{A_{i, j}}{\alpha_i} s_j.$$

Soit  $R = \{1, \dots, r\}$ . Alors on a

$$R = \mathcal{F}_1^v \amalg \dots \amalg \mathcal{F}_k^v,$$

c'est à dire que les  $\mathcal{F}_i^v$  pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  forment une partition de  $R$  (en particulier,  $\mathcal{F}_i^v \cap \mathcal{F}_j^v = \emptyset$  si  $i \neq j$ ).

**Définition 3.6.24.** Soit  $v \in \mathcal{R}$ . On note  $\mathcal{P}_v$  la partition de  $R$  associée à  $v$ .

$$\mathcal{P}_v : R = \mathcal{F}_1^v \amalg \dots \amalg \mathcal{F}_k^v.$$

On définit

$$I_v := \text{card}\{\mathcal{F}_i^v \in \mathcal{P}_v / \mathcal{F}_i^v \neq \emptyset\}.$$

**Lemme 3.6.25.** Si l'on exprime  $\mathcal{A}_v$  comme fraction irréductible de  $\mathbb{Q}(s_2, \dots, s_r)$ , alors le dénominateur de cette fraction est égal à  $\prod_{i=1}^k \alpha_i(s_2, \dots, s_r)$ .

*Démonstration.* On a

$$\mathcal{A}_v(s_2, \dots, s_r) = \frac{(2-k) \prod_{i=1}^k \alpha_i(s_2, \dots, s_r) + \sum_{i=1}^k \prod_{i' \neq i} \alpha_{i'}(s_2, \dots, s_r)}{\prod_{i=1}^k \alpha_i(s_2, \dots, s_r)}.$$

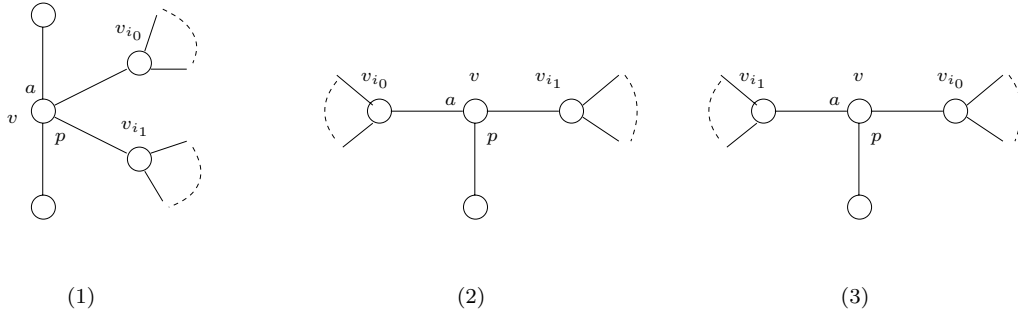
Supposons que  $\mathcal{A}_v$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{Q}(s_2, \dots, s_r)$ . Alors il existe  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $\alpha_{i_0}(s_2, \dots, s_r)$  divise le numérateur de  $\mathcal{A}_v$ . Donc  $\alpha_{i_0}(s_2, \dots, s_r)$  divise  $\prod_{i \neq i_0} \alpha_i(s_2, \dots, s_r)$ . Or les  $\alpha_i(s_2, \dots, s_r)$  sont des éléments irréductibles de  $\mathbb{Q}[s_2, \dots, s_r]$ . Donc il existe  $i \neq i_0$  et  $k \in \mathbb{Q}^*$  tels que

$$\alpha_{i_0}(s_2, \dots, s_r) = k \alpha_i(s_2, \dots, s_r).$$

On a vu que  $\mathcal{F}_i^v \cap \mathcal{F}_j^v = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$ . D'après (3.2) et (3.3), on a alors

$$\alpha_{i_0}(s_2, \dots, s_r) = k \alpha_{i_1}(s_2, \dots, s_r).$$

S'il existe  $j_2 \in \{2, \dots, r\}$  et  $i_2 \neq i_0, i_1$  tels que  $A_{i_2, j_2} \neq 0$ , alors  $A_{i_0, j_2} = 0$  mais  $B_{i_1, j_2} \neq 0$ , ce qui est contradictoire. Donc les seules possibilités sont



Dans les trois cas, on a

$$(a) \quad \forall j = 2, \dots, r, \frac{A_{i_0,j}}{\alpha_{i_0}} = k \frac{-B_{i_1,j}}{\beta_{i_1}},$$

$$(b) \quad \tilde{\alpha}_{i_0} = k \tilde{\alpha}_{i_1}.$$

Dans le cas (1), l'égalité (a) donne  $k = -1$  et l'égalité (b) donne  $k = \frac{ap}{ap - \nu}$ , donc  $\nu = 2ap$ , ce qui implique  $a = p = 1$  d'après le lemme 3.5.5. Mais alors  $\delta_v = 2$ , ce qui est impossible.

Dans le cas (2), l'égalité (a) donne  $k = -1$  et l'égalité (b) donne  $\frac{\nu - a}{ap} = k \frac{ap - \nu}{ap}$ , ce qui implique  $p = 1$ . Mais alors  $\delta_v = 2$ , ce qui est impossible.

Enfin, dans le cas (3), l'égalité (a) donne  $k = -1$  et l'égalité (b) donne  $1 = \frac{-k}{p}$ , ce qui implique  $p = 1$ . Mais alors  $\delta_v = 2$ , ce qui est impossible. □

La donnée de  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  permet donc d'obtenir la partition  $\mathcal{P}_v$  de  $R$  associée à tout sommet de rupture  $v \in \mathcal{R}$ .

### Définition et propriétés du squelette $S(f)$ de $D_m(f)$ .

Tout diagramme minimal de Newton  $D_m(f)$  vérifie les propriétés suivantes :

- c'est un arbre (en particulier, il ne comporte pas de cycle),
- chaque sommet de rupture peut être connecté à au plus deux sommets de valence 1 et il existe au plus un sommet de rupture de  $D_m(f)$  connecté à deux sommets de valence 1.

Nous allons définir un squelette  $S(f)$  étiqueté de  $D_m(f)$ . C'est un arbre dont les sommets sont des ensembles de sommets de rupture et de flèches de  $D_m(f)$ . Dans un premier temps, nous définissons les éléments de  $S(f)$ .

**Définition 3.6.26.** *Le sous-ensemble trivial  $E_{trivial}$  est l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(f)$  tels que  $I_v = 1$ .*

**Lemme 3.6.27.** *Si  $v \in E_{trivial}$ , alors  $v$  a exactement 3 sommets voisins dont au plus deux sommets de rupture ou un sommet de rupture et une flèche.*

*Démonstration.* Soit  $v \in E_{trivial}$ , et soient  $w_1, \dots, w_k$  les sommets voisins de  $v$ . Puisque  $v \in E_{trivial}$ , toutes les géodésiques qui joignent  $v$  aux flèches de  $D_m(f)$  passent par un unique sommet voisin, disons  $w_1$ .

Supposons que  $v$  soit relié à un sommet de rupture  $w \neq w_1$ . Puisque  $v \in E_{trivial}$ , toutes les géodésiques qui joignent  $w$  aux flèches de  $D_m(f)$  passent par  $v$ , donc  $w \in E_{trivial}$ . Si  $w$  est relié à un sommet de rupture autre que  $v$ , ce nouveau sommet est dans  $E_{trivial}$  par le même raisonnement. Puisqu'il n'existe pas de chaîne infinie, ce processus s'arrête par un sommet de rupture relié à deux sommets de valence 1.

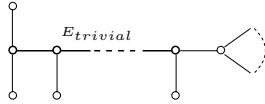
Donc si  $v$  est relié à un sommet de rupture autre que  $w_1$ , il est relié au plus à un sommet de valence 1, et s'il est relié à deux sommets de valence 1, il n'est relié à aucun autre sommet de rupture que  $w_1$ .  $\square$

**Lemme 3.6.28.** *L'ensemble  $E_{trivial}$  est connexe.*

*Démonstration.* Soient  $v, v' \in E_{trivial}$ . Soient  $w_i, i = 1, \dots, k$ , les sommets voisins de  $v$  et soit  $w_1$  l'unique sommet voisin par lequel passent toutes les géodésiques qui joignent  $v$  aux flèches de  $D_m(f)$ . Il y a deux cas à considérer :  $w_1 \in G_{[v,v']}$  et  $w_1 \notin G_{[v,v']}$ .

Si  $w_1 \notin G_{[v,v']}$ , il existe un sommet de rupture  $w' \neq w_1$  voisin de  $v$  sur  $G_{[v,v']}$ . D'après la preuve du lemme précédent,  $w' \in E_{trivial}$ . On continue ce procédé le long de  $G_{[v,v']}$  jusqu'à  $v'$ .

Si  $w_1 \in G_{[v,v']}$ , supposons par l'absurde qu'il existe un sommet de rupture  $w \in G_{[v,v']}$  tel que  $w \notin E_{trivial}$ . Puisque  $v' \in E_{trivial}$  et  $w \notin E_{trivial}$ , l'unique sommet  $w'_1$  par lequel passent toutes les géodésiques qui joignent  $v'$  aux flèches de  $D_m(f)$  est sur  $G_{[v,v']}$ . D'après la démonstration du lemme précédent, il existe une géodésique  $G_{[v_0,v]}$  telle que  $G_{[v_0,v]} \cap G_{[v,v']} = \{v\}$ , dont tous les sommets de rupture appartiennent à  $E_{trivial}$  et dont le dernier sommet  $v_0$  est relié à deux sommets de valence 1. De même, il existe une géodésique  $G_{[v'_0,v']}$  telle que  $G_{[v'_0,v']} \cap G_{[v,v']} = \{v'\}$ , dont tous les sommets de rupture appartiennent à  $E_{trivial}$  et dont le dernier sommet  $v'_0$  est relié à deux sommets de valence 1. Or on a vu qu'au plus un sommet de rupture de  $D_m(f)$  peut être relié à deux sommets de valence 1. Donc il n'existe pas de sommet  $w \in G_{[v,v']}$  tel que  $w \notin E_{trivial}$ .  $\square$



**Définition 3.6.29.** *Un sous-ensemble stable  $E$  est un sous-ensemble connexe de sommets de rupture de  $D_m(f)$  tel que*

- pour tout  $v \in E$ ,  $I_v = 2$ ,
- $E$  est maximal pour cette propriété.

**Lemme 3.6.30.** *Soient  $E$  un sous-ensemble stable et  $v \in E$ . Alors  $v$  admet exactement deux sommets voisins qui ne sont pas de valence 1 et qui ne sont pas dans  $E_{trivial}$ . En outre,  $v$  admet soit un sommet voisin de valence 1, soit deux sommets voisins de valence 1, soit un sommet voisin dans  $E_{trivial}$ , soit un sommet voisin dans  $E_{trivial}$  et un sommet voisin de valence 1.*

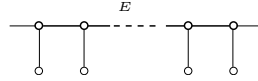
*Démonstration.* Soient  $w_i, i = 1, \dots, k$ , les sommets voisins de  $v$ . Il existe exactement deux sommets  $w_1$  et  $w_2$  tels que les géodésiques qui joignent  $w_1$  et  $w_2$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $v$ . Pour  $i = 3, \dots, k$ , les géodésiques qui joignent  $w_i$  aux

flèches de  $D_m(f)$  passent par  $v$ . Donc si  $v$  n'est pas connecté à  $E_{trivial}$ ,  $\delta_{w_i} = 1$  et  $k = 3$  ou  $4$  (on a vu que c'est une propriété des diagrammes qu'au plus un sommet de valence 1 est connecté à chaque sommet de rupture sauf peut être un sommet de rupture qui est connecté à deux sommets de valence 1). Si  $v$  est connecté à  $E_{trivial}$ , il existe un unique  $i_0 \in \{3, \dots, k\}$  tel que  $w_{i_0} \in E_{trivial}$  et  $\delta_{w_i} = 1$  pour  $i \in \{3, \dots, k\}$  et  $i \neq i_0$ . En particulier, on a  $k = 3$  ou  $4$  (on a vu qu'au plus un sommet de  $D_m(f)$  était connecté à deux sommets de valence 1 et que si  $E_{trivial} \neq \emptyset$ , c'était un sommet de  $E_{trivial}$ ).  $\square$

**Lemme 3.6.31.** *Soient  $E$  un sous-ensemble stable et  $v, v' \in E$ . Alors  $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}_{v'}$ .*

**Notation 3.6.32.** *On dit que  $\mathcal{P}_v$  est la partition associée à  $E$ . On la note  $\mathcal{P}_E$ .*

*Démonstration.* On peut supposer que  $v$  et  $v'$  sont voisins. On a vu dans le lemme précédent que  $v$  était connecté à exactement 2 sommets de rupture  $w_1$  et  $w_2$  qui ne sont pas dans  $E_{trivial}$  et tels que les géodésiques qui joignent  $w_1$  et  $w_2$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $v$ . Le résultat est alors clair.  $\square$



**Définition 3.6.33.** *Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$ . On dit que  $v$  est un **sommet de bifurcation** si  $I_v \geq 3$ .*

Nous avons défini tous les éléments qui constitueront  $S(f)$ , c'est à dire  $E_{trivial}$ , les sous-ensembles stables  $E$ , les sommets de bifurcation et les flèches de  $D_m(f)$ . Nous donnons maintenant des propriétés de ces sous-ensembles qui permettent de les connecter les uns aux autres.

**Proposition 3.6.34.** *Soient  $v, v'$  deux sommets de rupture de  $D_m(f)$  qui ne sont pas des sommets de bifurcation. Alors  $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}_{v'}$  si et seulement si  $v, v' \in E_{trivial}$  ou bien  $v$  et  $v'$  appartiennent au même sous-ensemble stable.*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}_{v'}$  est la partition triviale, il est clair que  $v, v' \in E_{trivial}$ . Supposons que  $I_v = I_{v'} = 2$  et  $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}_{v'}$ . Si  $v$  et  $v'$  n'appartiennent pas au même sous-ensemble stable, alors il existe un sommet  $w \in G_{[v, v']}$  tel que  $I_w \neq 2$ .

Il existe au moins un sommet de rupture  $w_1$  voisin de  $v$  et n'appartenant pas à  $G_{[v, v']}$  tel que les géodésiques qui joignent  $w_1$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $v$ . Soit  $\mathcal{F}_1$  le sous-ensemble de  $R$  associé à ce sommet et soit  $\mathcal{F}_2$  l'autre sous-ensemble de  $\mathcal{P}_v$ . De même, il existe au moins un sommet de rupture  $w'_1$  voisin de  $v'$  et n'appartenant pas à  $G_{[v, v']}$  tel que les géodésiques qui joignent  $w'_1$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $v'$ . Soit  $\mathcal{F}'_1$  le sous-ensemble de  $R$  associé à ce sommet et soit  $\mathcal{F}'_2$  l'autre sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{v'}$ . Les géodésiques qui joignent  $w_1$  aux flèches de  $D(f)$  et  $w'_1$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $w$ . Donc  $I_w \geq 2$ .

Or  $I_w \neq 2$ , donc  $I_w \geq 3$ . Alors il existe au moins un sommet  $w_3$  voisin de  $w$  et n'appartenant pas à  $G_{[v, v']}$  tel que tels que les géodésiques qui joignent  $w_3$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $w$ . Soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $R$  associé à ce sommet. Alors on a  $(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'_1) \subset \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ , ce qui contredit le fait que  $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}_{v'}$ .  $\square$

**Proposition 3.6.35.** *Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets de bifurcation de  $D_m(f)$ . Alors  $\mathcal{P}_v \neq \mathcal{P}_{v'}$ .*

*Démonstration.* Soit  $w$  le sommet adjacent à  $v$  sur  $G_{[v,v']}$ . Le sommet  $w$  n'est pas de valence 1 et il n'appartient pas à  $E_{trivial}$  car sinon, on aurait  $v' \in E_{trivial}$ . Soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $R$  associé à ce sommet. Puisque  $v'$  est un sommet de bifurcation, il existe au moins deux sommets de rupture  $w'_1$  et  $w'_2$  voisins de  $v'$  tels que les géodésiques qui joignent  $w'_1$  et  $w'_2$  aux flèches de  $D(f)$  ne passent pas par  $v'$ . Soient  $\mathcal{F}'_1$  et  $\mathcal{F}'_2$  les sous-ensembles de  $R$  associé à ces sommets. Alors on a  $(\mathcal{F}'_1 \cup \mathcal{F}'_2) \subset \mathcal{F}$ , donc  $\mathcal{P}_v \neq \mathcal{P}_{v'}$ .  $\square$

**Proposition 3.6.36.** *Soient  $v$  un sommet de bifurcation de  $D_m(f)$  et  $E$  un sous-ensemble stable. Soit  $\mathcal{F}$  un sous-ensemble non vide de  $R$ . Alors  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_v$  et  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_E$  si et seulement si  $v$  est connecté à un sommet de  $E$ .*

*Démonstration.* Si  $v$  est connecté à un sommet de  $E$ , soit  $v'$  ce sommet. Puisque  $v' \in E$ , il n'existe qu'un sommet de rupture  $w_1$  connecté à  $v'$  autre que  $v$ . Soit  $\mathcal{F}_1$  le sous-ensemble de  $R$  associé à ce sommet. Alors  $\mathcal{F}_1$  est aussi le sous-ensemble de  $R$  associé au sommet  $v'$  dans la partition de  $v$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{F} \amalg \mathcal{F}'$  la partition  $\mathcal{P}_E$  et soit  $\mathcal{F}'_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{F}'_l$  la partition  $\mathcal{P}_v$ . Si  $v$  n'est pas connecté à un sommet de  $E$ , alors il existe un sommet  $w \notin E$  appartenant à  $G_{[v,v']}$  où  $v'$  est une extrémité de  $E$ . Considérons le sommet  $w$  voisin de  $v'$ . Le sommet  $w$  n'est pas de valence 1 et il ne peut pas être dans  $E_{trivial}$  car sinon, on aurait  $v \in E_{trivial}$ . Donc  $w$  est un sommet de bifurcation et il existe au moins un sommet de rupture  $w_1$  voisin de  $w$  et n'appartenant pas à  $G_{[v,v']}$  tel que les géodésiques qui joignent  $w_1$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $w$ . Soit  $\mathcal{F}_1$  le sous-ensembles de  $R$  associé à ce sommet. D'autre part, soit  $w'_1$  le sommet de rupture voisin de  $v$  situé sur  $G_{[v,v']}$  et soit  $\mathcal{F}'_1$  le sous-ensembles de  $R$  associé à ce sommet. Alors on a  $(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}'_2 \amalg \dots \amalg \mathcal{F}'_l) \subset \mathcal{F}$  et  $(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}') \subset \mathcal{F}'_1$ . En particulier,  $\mathcal{F} \notin \mathcal{P}_v$  et  $\mathcal{F}' \notin \mathcal{P}_v$ .  $\square$

**Proposition 3.6.37.** *Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets de bifurcation de  $D_m(f)$ . Soient  $\mathcal{P}_v : R = \mathcal{F}_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{F}_m$  et  $\mathcal{P}_{v'} : R = \mathcal{F}'_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{F}'_n$ . Alors  $v$  et  $v'$  sont connectés par une arête ou bien sont connectés aux deux extrémités d'un même sous-ensemble stable si et seulement s'il existe  $k \in \{1, \dots, m\}$  et  $l \in \{1, \dots, n\}$  tels que*

$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{i \neq l}^n \mathcal{F}'_i \text{ et } \mathcal{F}'_l = \bigcup_{j \neq k}^m \mathcal{F}_j.$$

*Démonstration.* Si  $v$  et  $v'$  sont connectés par une arête ou bien sont connectés aux deux extrémités d'un même sous-ensemble stable, c'est clair.

Réciproquement, supposons qu'il existe un sommet de rupture  $w \in G_{[v,v']}$  n'appartenant pas à un sous-ensemble stable. Alors  $I_w \geq 2$  donc  $w \notin E_{trivial}$ . Donc  $w$  est un sommet de bifurcation. Il existe au moins un sommet de rupture  $w_1$  voisin de  $w$  et n'appartenant pas à  $G_{[v,v']}$  tel que les géodésiques qui joignent  $w_1$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $w$ . Soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble non vide de  $R$  associé à ce sommet. D'autre part, soit  $w_1$  (resp.  $w'_1$ ) le sommet de rupture voisin de  $v$  (resp.  $v'$ ) situé sur  $G_{[v,v']}$  et soit  $\mathcal{F}_1$  (resp.  $\mathcal{F}'_1$ ) le sous-ensembles de  $R$  associé à ce sommet. Alors on a

$$(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}'_n) \subset \mathcal{F}_1$$

et

$$(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_m) \subset \mathcal{F}'_1.$$

Pour tout  $i \in \{2, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{F}_i \subsetneq \mathcal{F}'_1$  donc  $\mathcal{F}_i \not\subset \mathcal{F}'_1$ , et  $\mathcal{F}'_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}'_n \subset \mathcal{F}_m$  et  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_m = \emptyset$  donc  $\mathcal{F}_i \not\subset \mathcal{F}'_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}'_n$ . De plus,  $\mathcal{F}_m \neq \cup_{j=2}^n \mathcal{F}_j$  car  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  et  $\mathcal{F}_m \not\subset \mathcal{F}'_1$  car  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}'_1$  et  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_m = \emptyset$ . Donc  $\exists k \in \{1, \dots, m\}, l \in \{1, \dots, n\} / \mathcal{F}_k = \cup_{i \neq l}^n \mathcal{F}'_i$ .  $\square$

**Proposition 3.6.38.** *Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . L'ensemble des sommets de rupture  $v$  pour lesquels  $\{j\} \in \mathcal{P}_v$  est constitué soit d'un sommet de bifurcation  $w$ , soit d'un sous-ensemble stable  $E$ , soit d'un sommet de bifurcation  $w$  et d'un sous-ensemble stable  $E$  connectés par une arête, soit du sous-ensemble trivial  $E_{trivial}$ . Alors la flèche représentant  $f_j$  est connectée à  $w$  dans le premier cas, une extrémité de  $E$  dans le second, l'extrémité de  $E$  à laquelle n'est pas connecté  $w$  dans le troisième et l'extrémité de  $E_{trivial}$  qui n'a pas deux sommets de valence 1 dans le quatrième.*

*Démonstration.* Si  $w$  est le sommet de rupture de  $D_m(f)$  relié à la flèche représentant  $f_j$ , alors il est clair que  $\{j\} \in \mathcal{P}_w$ . De plus,  $w$  peut être l'extrémité de  $E_{trivial}$  qui n'a pas deux sommets de valence 1, un sommet de bifurcation ou bien l'extrémité d'un sous-ensemble stable  $E$ . Dans ce dernier cas, si l'autre extrémité de  $E$  est reliée à un sommet de bifurcation  $w'$ , alors on a aussi  $\{j\} \in \mathcal{P}_{w'}$ .

D'autre part, soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(f)$  différent de  $w$  et n'appartenant pas à  $E$  ou  $E_{trivial}$  selon le cas. Alors  $G_{[v, f_j]}$  passe par  $w$ . Puisque  $w$  est un sommet de bifurcation, il existe au moins un sommet de rupture  $w_1$  voisin de  $w$  et n'appartenant pas à  $G_{[v, w]}$  tel que les géodésiques qui joignent  $w_1$  aux flèches de  $D_m(f)$  ne passent pas par  $w$ . Soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble non vide de  $R$  associé à ce sommet. Alors le sous-ensemble de la partition de  $v$  contenant  $j$  contient  $\mathcal{F} \cup \{j\}$ .  $\square$

**Proposition 3.6.39.** *Supposons que  $E_{trivial} \neq \emptyset$ . Soient  $v_0, \dots, v_n$  les sommets de  $E_{trivial}$  avec  $v_0 \prec \dots \prec v_n$ ,  $v_0$  est connecté à deux sommets de valence 1 et les  $v_i$  sont connectés à un sommet de valence 1 pour  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $v$  le sommet de rupture de  $D_m(f)$  relié à l'extrémité  $v_n$  de  $E_{trivial}$ . Alors*

$$v_0 = v_{min, j} \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, r\}.$$

De plus, pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$\gamma_j^{v_0} < \dots < \gamma_j^{v_n} < \gamma_j^v < \gamma_j^{v'}$$

pour tout sommet de rupture  $v' \in D_m(f)$  différent de  $v_0, \dots, v_n$  et  $v$ .

*Démonstration.* On a déjà vu que  $E_{trivial}$  est un ensemble connexe (lemme 3.6.28), et que tous les sommets de  $E_{trivial}$  admettent comme partition associée la partition triviale. De plus, chaque sommet de  $E_{trivial}$  admet exactement deux sommets de rupture voisins et un sommet voisin de valence 1, sauf un sommet  $v_0$  qui admet un sommet de rupture voisin et deux sommets voisins de valence 1 ; donc chaque sommet de  $E_{trivial}$  admet un sommet précédent, sauf  $v_0$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on a alors  $G_{[v_0, f_j]} = G_j$  et  $E_{trivial} \subset G_j$ . En particulier, avec les notations du paragraphe 3.6.3, on a  $E_{trivial} = \{W_0, \dots, W_n\}$  où  $W_i = v_i$ . Cela signifie que si  $E_{trivial}$  est non vide, il est par construction constitué des premiers sommets de toutes les géodésiques  $G_j$  de  $D_m(f)$ .



Soient  $a_0$  et  $p_0$  les décorations proches de  $v_0$  situées sur les arêtes reliant  $v_0$  aux deux sommets de valence 1. Alors on a  $a_0 \geq 2$  et  $p_0 \geq 2$  (car sinon,  $v_0$  disparaîtrait). Donc d'après le lemme 3.6.14, on a d'une part,

$$v_0 = v_{\min,j} \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, r\},$$

et d'autre part,

$$\gamma_j^{v_0} < \dots < \gamma_j^{v_n} < \gamma_j^v < \gamma_j^{v'}$$

pour tout sommet de rupture  $v' \in \mathcal{R}$  différent de  $v_0, \dots, v_n$  et  $v$ .  $\square$

En particulier, cette proposition permet d'identifier le sommet de rupture  $v$  de  $D_m(f)$  auquel est connecté  $E_{trivial}$ .

**Définition 3.6.40.** *Le squelette  $S(f)$  de  $D_m(f)$  est l'ensemble constitué du sous-ensemble trivial  $E_{trivial}$ , des sous-ensembles stables, des singletons contenant les sommets de bifurcation et des singletons contenant les flèches de  $D_m(f)$ , ces sous ensembles étant connectés les uns aux autres selon les propriétés énumérées dans les propositions 3.6.36, 3.6.37, 3.6.38 et 3.6.39, et chaque sommet et chaque flèche contenu dans les différents sous-ensembles étant étiqueté par l'équation de l'hyperplan qui lui est associé.*

**Algorithme de construction du squelette étiqueté  $S(f)$  de  $D_m(f)$ .**

1. Grâce à la proposition 3.6.16, la lecture du dénominateur de  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  permet d'énumérer les sommets de rupture  $v_1, \dots, v_M$  et les flèches  $a_1, \dots, a_r$  de  $D_m(f)$ . Chaque sommet  $v_i$  est étiqueté par l'équation de l'hyperplan qui lui est associé

$$v_i ; \nu_{v_i} + N_{v_i,1}s_1 + \dots + N_{v_i,r}s_r = 0.$$

Chaque flèche  $a_i$  est étiquetée par l'équation de l'hyperplan qui lui est associée

$$a_i ; 1 + n_i s_i = 0.$$

En particulier, on obtient les multiplicités  $(n_i)$  des flèches  $a_i$ .

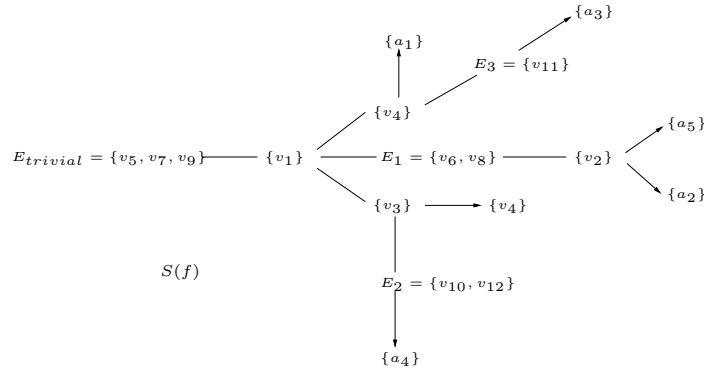
2. Pour tout sommet de rupture  $v_i$ , on calcule

$$\mathcal{A}_{v_i}(s_2, \dots, s_r) := \left( (\nu_{v_i} + \sum_{j=1}^r N_{v_i,j} s_j) Z_{top,0}(f) \right) \left( -\frac{\nu_{v_i}}{N_{v_i,1}} - \sum_{j=2}^r \frac{N_{v_i,j}}{N_{v_i,1}} s_j, s_2, \dots, s_r \right)$$

et on en déduit la partition  $\mathcal{P}_{v_i}$  de  $R$  associée à  $v_i$ .

3. À l'aide des lemmes 3.6.28 et 3.6.31 et des propositions 3.6.34 et 3.6.35, on trie les sommets  $v_1, \dots, v_M$  et les flèches  $a_1, \dots, a_r$  en quatre types de sous-ensembles :
  - le sous-ensemble trivial,
  - les sous-ensembles stables,
  - des singletons contenant les sommets de bifurcation,
  - des singletons contenant les flèches.
4. À l'aide des propositions 3.6.36, 3.6.37, 3.6.38 et 3.6.39, on relie ces différents types de sous-ensembles par des arêtes.

On obtient un squelette étiqueté  $S(f)$  des sommets de rupture et des flèches de  $D_m(f)$ .



### 3.6.7 Connexion des sommets des sous-ensembles de $S(f)$ .

On a vu dans le paragraphe précédent comment étiqueter chaque sommet de rupture et chaque flèche de  $D_m(f)$  en lisant le dénominateur de  $Z_{top,0}(f)$ . Cela revient à se donner pour chaque sommet de rupture  $v$  l'ensemble  $\{\gamma_j^v, j = 1, \dots, r\}$  et pour chaque flèche sa multiplicité. La partition  $\mathcal{P}_v$  associée à chaque sommet permet de partitionner l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(f)$  en sous-ensembles qui sont le sous-ensemble trivial, les sous-ensembles stables et les sous-ensembles constitués d'un sommet de bifurcation. On a vu comment ces partitions permettaient de connecter entre eux ces différents sous-ensembles et de connecter ces sous-ensembles aux flèches de  $D_m(f)$ .

Nous allons maintenant étudier comment, à l'intérieur de chaque sous-ensemble, les sommets sont reliés par des arêtes en étudiant chaque  $\{\gamma_j^v, j = 1, \dots, r\}$ . Nous donnons d'abord des résultats préliminaires que seront utiles à notre étude.

#### Résultats préliminaires.

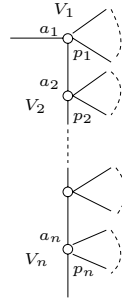
On a  $f = \prod_{j=1}^r f_j^{n_j}$ . Alors pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  avec  $i \neq j$ , les diagrammes minimaux de Newton  $D_m(f_j^{n_j})$  et  $D_m(f_i^{n_i} f_j^{n_j})$  sont des sous-diagrammes de  $D_m(f)$ . Nous voulons dans un premier temps identifier les portions de  $D_m(f)$  qui correspondent à  $D_m(f_j^{n_j})$  et  $D_m(f_i^{n_i} f_j^{n_j})$ . On renvoie aux définitions et aux notations du paragraphe 3.6.3.

**Définition 3.6.41.** Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Le sommet  $v_{min,j}$  est l'unique sommet vérifiant  $\gamma_j^{v_{min,j}} = \min_{v \in \mathcal{R}} \gamma_j^v$ . On note  $\overline{G}_j$  la géodésique de  $D_m(f)$  reliant  $v_{min,j}$  à la flèche représentant  $f_j$ . On a  $\overline{G}_j \subset G_j$ .

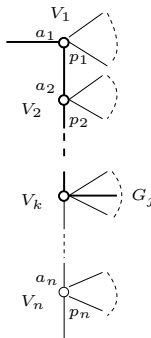
**Proposition 3.6.42.** Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Les sommets de rupture de  $D_m(f_j^{n_j})$  sont exactement les sommets de rupture de  $\overline{G}_j$  pour lesquels la décoration proche adjacente à  $\overline{G}_j$  est strictement supérieure à 1 rencontrés dans le même ordre.

*Démonstration.* Pour obtenir  $D_m(f_j^{n_j})$  à partir de  $D_m(f)$ , on supprime toutes les flèches de  $D_m(f)$  ne représentant pas  $f_j$  et on minimalise ce nouveau diagramme. On reprend

la construction des diagrammes décrite au paragraphe 1.2. Le diagramme  $D_m(f)$  est un sous diagramme de  $D(f)$  qui est constitué de plusieurs axe verticaux construits successivement. Le diagramme est complet quand toutes les arêtes se terminent par un sommet ou une flèche. Considérons un axe vertical de  $D_m(f)$  ne contenant aucun sommet de  $G_j$ . En partant des derniers axes construits et en remontant vers le premier axe vertical, une fois toutes les arêtes ne représentant pas  $f_j$  supprimées, on obtient une portion de diagramme du type :



Les arêtes situées à droite des  $V_i$  portent la décoration 1 donc disparaissent par minimalisation. Alors il ne reste que des sommets de valence 2 qui disparaissent également par minimalisation. Si un axe vertical contient  $k$  sommets de  $G_j$ ,



alors avec le même raisonnement, tous les sommets et arêtes n'étant pas sur  $G_j$  disparaissent par minimalisation. Il ne reste donc que  $G_j$ . Or d'après le lemme 3.6.14, tous les sommets de  $G_j$  situés sur  $G_{[W_0, v_{min}, j]}$  vérifient  $a_0$  ou  $p_0 = 1$  et  $p_i = 1$ . Ces sommets disparaissent par minimalisation. Enfin, les sommets de  $\overline{G_j}$  dont la décoration adjacente à  $\overline{G_j}$  est égale à 1 disparaissent également par minimalisation. Les sommets restants sont des sommets de rupture dont la décoration adjacente à  $\overline{G_j}$  est strictement supérieure à 1 donc ne disparaissent pas.  $\square$

**Proposition 3.6.43.** Soient  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  avec  $i \neq j$ . Les sommets de rupture de  $D_m(f_i^{n_i} f_j^{n_j})$  sont exactement les sommets de rupture de  $D_m(f)$  situés sur  $G_{[f_i, f_j]}$  pour lesquels la décoration proche adjacente à  $G_{[f_i, f_j]}$  est strictement supérieure à 1 rencontrés dans le même ordre.

*Démonstration.* C'est le même raisonnement que la preuve précédente.  $\square$

**Proposition 3.6.44.** Soient  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  avec  $i \neq j$ . Alors on a

$$Z_{top,0}(f_i^{n_i} f_j^{n_j})(s_i, s_j) = Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0, s_j, 0, \dots, 0),$$

$$Z_{top,0}(f_j^{n_j})(s_j) = Z_{top,0}(f)(0, \dots, 0, s_j, 0, \dots, 0).$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la définition de  $Z_{top,0}(f)$  :

$$Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r) = \sum_{ICT} \chi_{top}(E_I^\circ) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + N_{i,1}s_1 + \dots + N_{i,r}s_r}$$

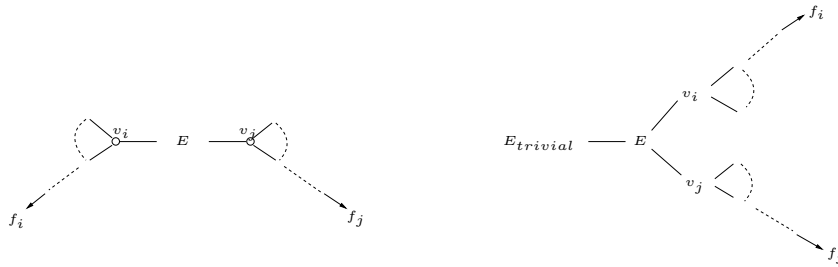
et de remarquer que si  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$  est une résolution de  $f = \prod_{j=1}^r f_j^{n_j}$ , alors  $\pi$  est une résolution de  $f_i^{n_i} f_j^{n_j}$  et de  $f_j^{n_j}$ .  $\square$

**Remarque 3.6.45.** Afin de reconstruire le diagramme minimal de Newton de  $f$ , nous allons utiliser successivement la donnée de  $Z_{top,0}(f_j^{n_j})(s_j)$  pour  $j \in \{1, \dots, r\}$  et de  $Z_{top,0}(f_i^{n_i} f_j^{n_j})(s_i, s_j)$  pour  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  et  $i \neq j$ . Ceci n'est pas surprenant. En effet, d'après M. Lejeune-Jalabert, on dispose du résultat suivant ([Le]) :

**Proposition 3.6.46.** Soit  $f = \prod_{i=1}^r f_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$  la décomposition en composantes irréductibles d'un germe de courbe plane. Alors la donnée de la topologie de chaque composante  $f_i$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et de  $(f_i, f_j)_0$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  avec  $i \neq j$  détermine la topologie de  $f$ .

**Résultats sur les sommets des sous-ensembles stables.**

Soit  $E$  un sous-ensemble stable de  $S(f)$ . Soit  $\mathcal{P}_E$  la partition associée à  $E$ . On a  $\mathcal{P}_E = \mathcal{F}_1 \amalg \mathcal{F}_2$ . Soient  $i \in \mathcal{F}_1$  et  $j \in \mathcal{F}_2$ . D'après le lemme 3.6.30,  $E$  est connecté à deux sommets de bifurcation ou flèches et éventuellement à un sommet de  $E_{trivial}$ . Sur  $D_m(f)$ , soient  $v_i, v_j \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$  les sommets ou les flèches connectés à  $E$  tels que  $E \cap G_{[v_i, f_i]} = \emptyset$  et  $E \cap G_{[v_j, f_j]} = \emptyset$ .



En calculant  $\gamma_i^v$  et  $\gamma_j^v$  pour tout  $v \in \mathcal{R}$ , on identifie  $v_{min,i}$  et  $v_{min,j}$  sur  $D_m(f)$  et on trace  $\overline{G_i}$  et  $\overline{G_j}$ .

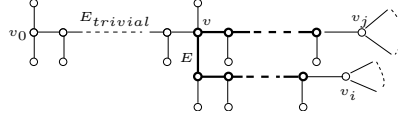
**Lemme 3.6.47.** Si  $E \subset \overline{G_i}$  (resp.  $E \subset \overline{G_j}$ ) et si  $V_1, \dots, V_l$  sont les sommets de  $E$  rencontrés dans cet ordre sur  $D_m(f)$  quand on parcourt  $\overline{G_i}$  (resp.  $\overline{G_j}$ ) de  $v_{min,i}$  (resp.  $v_{min,j}$ ) vers  $f_i$  (resp.  $f_j$ ), alors on a

$$\gamma_i^{V_1} < \dots < \gamma_i^{V_l} \quad (\text{resp. } \gamma_j^{V_1} < \dots < \gamma_j^{V_l}).$$

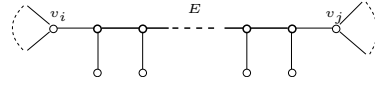
*Démonstration.* C'est évident d'après le lemme 3.6.14.  $\square$

**Lemme 3.6.48.** *Il y a deux cas où  $E \not\subset \overline{G_i}$  et  $E \not\subset \overline{G_j}$  :*

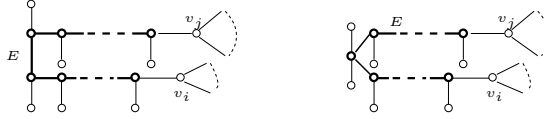
(1)  $E_{trivial} \neq \emptyset$  et le sommet  $v$  auquel est connecté  $E_{trivial}$  appartient à  $E$ ,



(2)  $E_{trivial} = \emptyset$ ,  $v_{min,j} \in E$  et  $v_{min,i} \notin E$  (resp.  $v_{min,i} \in E$  et  $v_{min,j} \notin E$ ) et il existe au moins un sommet de  $E$  n'appartenant pas à  $\overline{G_j}$  (resp.  $\overline{G_i}$ ). Alors il existe un seul sommet  $v$  de  $E$  vérifiant  $v \notin \overline{G_j}$  (resp.  $\overline{G_i}$ ).



(3)  $E_{trivial} = \emptyset$ ,  $v_{min,i} \in E$  et  $v_{min,j} \in E$ . Alors si  $v_{min,i} \neq v_{min,j}$ , il existe au plus un sommet  $v \in G_{[v_{min,i}, v_{min,j}]}$  différent de  $v_{min,i}$  et  $v_{min,j}$ .



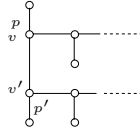
**Remarque 3.6.49.** *Il existe au plus un sous-ensembles stable qui vérifie l'une ou l'autre de ces propriétés.*

*Démonstration.* (1) Si  $E_{trivial} \neq \emptyset$ , on a vu dans la proposition 3.6.39 que le sommet  $v_0$  de  $E_{trivial}$  qui est connecté à deux sommets de valence 1 vérifie  $v_0 = v_{min,j}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Donc  $v_0 = v_{min,i} = v_{min,j}$ . Si  $E_{trivial}$  est connecté à un sommet  $v$  de  $E$ , alors une partie des sommets de  $E$  sera incluse dans  $\overline{G_i}$  et une autre dans  $\overline{G_j}$ . Il existe au plus un sous-ensemble stable connecté à  $E_{trivial}$  donc au plus un sous-ensemble stable qui vérifie cette propriété.

(2),(3) Si  $E_{trivial} = \emptyset$ , puisque  $E \not\subset \overline{G_i}$  et  $E \not\subset \overline{G_j}$ , alors  $v_{min,i} \in E$  ou  $v_{min,j} \in E$ . De plus, si  $v_{min,i} \in E$  (resp.  $v_{min,j} \in E$ ), d'après le lemme 3.6.14, on a  $v_{min,i} = v_{min,i'}$  (resp.  $v_{min,j} = v_{min,j'}$ ) pour tout  $i' \in \mathcal{F}_1$  (resp.  $j' \in \mathcal{F}_2$ ).

Si  $v_{min,i} \neq v_{min,j}$  et s'il existe un sommet  $v$  de  $E$  n'appartenant ni à  $\overline{G_i}$  ni à  $\overline{G_j}$ , alors d'après le lemme 3.6.14, au plus une des décorations proches de ce sommet est différente de 1. C'est la décoration située sur l'arête reliant  $v$  à un sommet de valence 1 car sinon,  $v$  disparaîtrait par minimalisation. Alors  $v$  n'admet pas de sommet précédent car sinon, une des autres décorations proches de  $v$  serait strictement supérieure à 1. Au plus deux sommets de  $E$  n'admettent pas de sommet précédent (car on sait que les sommets de  $E$  sont connectés à exactement deux sommets de rupture et un sommet de valence 1). S'il en existe deux, soient  $v$  et  $v'$  ces deux

sommets et soient  $p$  et  $p'$  les décorations situées sur l'arête reliant  $v$  et  $v'$  à des sommets de valence 1. On a  $p > 1$  (resp.  $p' > 1$ ) car sinon,  $v$  (resp.  $v'$ ) disparaîtrait.



Si toutes les autres décorations proches de ces deux sommets sont égales à 1, on a  $\Delta_{[v,v']} = 1 - pp' < 0$ , ce qui est impossible. Donc il existe au plus un sommet de  $E$  n'appartenant ni à  $\overline{G_i}$  ni à  $\overline{G_j}$ .

Enfin, un seul sous-ensemble stable de  $S(f)$  peut admettre des sommets n'ayant pas de sommet précédent, donc au plus un sous-ensemble stable vérifie la propriété (2) ou (3). □

On note  $V_1 = V_2 = v$  dans le cas (1),  $V_1 = v_{\min,j}$  dans le cas (2) et  $V_1 = v_{\min,i}$ ,  $V_2 = v_{\min,j}$  dans le cas (3) (on peut avoir  $V_1 = V_2$ ). On a

$$\gamma_i^{V_1} = \min\{\gamma_i^V, V \in E\} \text{ et } \gamma_j^{V_2} = \min\{\gamma_j^V, V \in E\}.$$

Il faut noter que d'après la proposition 3.6.42, dans le cas (2),  $V_1 = v_{\min,j}$  est un sommet de rupture de  $D_m(f_j^{n_j})$  mais qu'il existe un sommet  $V \in E$  qui n'est pas un sommet de rupture de  $D_m(f_j^{n_j})$ . Dans le cas (3),  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) est un sommet de rupture de  $D_m(f_i^{n_i})$  (resp.  $D_m(f_j^{n_j})$ ) mais il peut exister un sommet  $V \in G_{[V_1, V_2]}$  différent de  $V_1$  et  $V_2$  qui n'est ni un sommet de rupture de  $D_m(f_i^{n_i})$  ni un sommet de rupture de  $D_m(f_j^{n_j})$ . En revanche, dans le cas (1),  $V_1 = V_2$  peut ne pas être un sommet de rupture de  $D_m(f_i^{n_i})$  et de  $D_m(f_j^{n_j})$ . Soient

$$r := \text{card}\{w, w \in G_{[V_1, v_i]}, w \neq V_1, v_i\},$$

$$s := \text{card}\{w, w \in G_{[V_2, v_j]}, w \neq V_2, v_j\}.$$

**Lemme 3.6.50.** *La donnée de  $\{\gamma_i^V, V \in E\}$  (resp.  $\{\gamma_j^V, V \in E\}$ ) et de  $Z_{\text{top},0}(f)$  permet de calculer  $r$  (resp.  $s$ ).*

*Démonstration.* D'après la proposition 3.6.44, on calcule  $Z_{\text{top},0}(f_i^{n_i})$ . D'après la proposition 3.6.42, les sommets de rupture de  $D_m(f_i^{n_i})$  qui sont des sommets de  $E$  sont exactement les sommets  $\{w, w \in G_{[V_1, v_i]}, w \neq v_i\}$  (les décorations proches des sommets  $w \in G_{[V_1, v_i]}$  adjacentes à  $G_{[V_1, v_i]}$  sont supérieures à 1 car sinon, ces sommets disparaîtraient). D'après les théorèmes 3.3.1 et 3.5.2, le dénominateur de  $Z_{\text{top},0}(f_i^{n_i})$  est constitué des  $\nu_v + N_{v,i}s_i$  où  $v$  décrit les sommets de rupture et la flèche de  $D_m(f_i^{n_i})$ . Soient

$$\Gamma_i := \{\gamma_i^v / (\nu_v + N_{v,i}s_i) \text{ est au dénominateur de } Z_{\text{top},0}(f_i^{n_i})\},$$

$$\Gamma_j := \{\gamma_j^v / (\nu_v + N_{v,j}s_j) \text{ est au dénominateur de } Z_{\text{top},0}(f_j^{n_j})\}.$$

On a  $\gamma_i^{V_1} = \min\{\gamma_i^V, V \in E\}$ . Puisqu'on a identifié  $V_1$  et  $v_i$ , on calcule  $\gamma_i^{V_1}$  et  $\gamma_i^{v_i}$ . Alors

$$\text{card}\{v, \gamma_i^v \in \Gamma_i \text{ et } \gamma_i^{V_1} < \gamma_i^v < \gamma_i^{v_i}\} = r.$$

On fait le même raisonnement avec  $j$  et  $V_2$ . □

Soient  $w_1, \dots, w_r$  les sommets de  $G_{[V_1, v_i]}$  différents de  $V_1$  et  $v_i$  rencontrés dans cet ordre sur  $D_m(f)$  quand on parcourt  $G_{[V_1, v_i]}$  de  $V_1$  vers  $v_i$ . Soient  $w'_1, \dots, w'_s$  les sommets de  $G_{[V_2, v_j]}$  différents de  $V_2$  et  $v_j$  rencontrés dans cet ordre sur  $D_m(f)$  quand on parcourt  $G_{[V_2, v_j]}$  de  $V_2$  vers  $v_j$ .

**Lemme 3.6.51.** *La donnée de  $\{V \in E\}$ ,  $\{\gamma_i^V, V \in E\}$ ,  $\{\gamma_j^V, V \in E\}$ ,  $Z_{top,0}(f_i^{n_i})$  et  $Z_{top,0}(f_j^{n_j})$  permet d'identifier  $w_1, \dots, w_r$  et  $w'_1, \dots, w'_s$  dans  $\{V \in E\}$ .*

*Démonstration.* S'il existe, on note  $V_0$  le sommet de  $E$  appartenant à  $G_{[V_1, V_2]}$  différent de  $V_1$  et  $V_2$ . D'après ce qui précède, on a

$$(3.4) \quad \gamma_i^{w'_s} > \dots > \gamma_i^{w'_1} > \gamma_i^{V_2} > \gamma_i^{V_0} < \gamma_i^{V_1} < \gamma_i^{w_1} < \dots < \gamma_i^{w_r},$$

$$(3.5) \quad \gamma_j^{w_r} > \dots > \gamma_j^{w_1} > \gamma_j^{V_1} > \gamma_j^{V_0} < \gamma_j^{V_2} < \gamma_j^{w'_1} < \dots < \gamma_j^{w'_s}.$$

(dans ces inégalités,  $V_0$  peut ne pas exister, et si  $V_1 = V_2$ , on suppose que  $V_2$  n'existe pas)

D'après la proposition 3.6.44, on calcule  $Z_{top,0}(f_i^{n_i})$  et  $Z_{top,0}(f_j^{n_j})$ . Notons à nouveau

$$\Gamma_i := \{\gamma_i^v / (\nu_v + N_{v,i} s_i) \text{ est au dénominateur de } Z_{top,0}(f_i^{n_i})\},$$

$$\Gamma_j := \{\gamma_j^v / (\nu_v + N_{v,j} s_j) \text{ est au dénominateur de } Z_{top,0}(f_j^{n_j})\}.$$

D'après les théorèmes 3.3.1 et 3.5.2,

$$\{\gamma_i^v / \gamma_i^v \in \Gamma_i \text{ et } \gamma_i^{V_1} < \gamma_i^v < \gamma_i^{v_i}\} = \{\gamma_i^{w_1}, \dots, \gamma_i^{w_r}\}.$$

De plus, on a  $\gamma_i^{w_1} < \dots < \gamma_i^{w_r}$ . De même,

$$\{\gamma_j^v / \gamma_j^v \in \Gamma_j \text{ et } \gamma_j^{V_2} < \gamma_j^v < \gamma_j^{v_j}\} = \{\gamma_j^{w'_1}, \dots, \gamma_j^{w'_s}\}.$$

De plus, on a  $\gamma_j^{w'_1} < \dots < \gamma_j^{w'_s}$ .

Notons que l'on a démontré dans la preuve de la proposition 3.6.19 que si  $v \in G_i$ ,  $v' \in G_j$  et  $v, v' \notin G_i \cap G_j$ , alors

$$\frac{N_{v,j}}{N_{v,i}} < \frac{N_{v',j}}{N_{v',i}},$$

c'est à dire

$$(3.6) \quad \frac{\gamma_i^v}{\gamma_j^v} < \frac{\gamma_i^{v'}}{\gamma_j^{v'}}.$$

Puisqu'on connaît  $V_1, V_2, v_i$  et  $v_j$ , on connaît

$$\{\gamma_i^v / \gamma_i^v \in \Gamma_i \text{ et } \gamma_i^{V_1} < \gamma_i^v < \gamma_i^{v_i}\}$$

et

$$\{\gamma_j^v / \gamma_j^v \in \Gamma_j \text{ et } \gamma_j^{V_2} < \gamma_j^v < \gamma_j^{v_j}\}.$$

Soit

$$\gamma_j^V := \max\{\gamma_j^v/\gamma_j^v \in \Gamma_j \text{ et } \gamma_j^{V_2} < \gamma_j^v < \gamma_j^{v_j}\}.$$

Alors on a  $\gamma_j^V = \gamma_j^{w'_s}$ . Si  $w'_s$  est l'unique sommet de  $E$  vérifiant  $\gamma_j^V = \gamma_j^{w'_s}$ , on a identifié  $w'_s$ . Sinon, d'après (3.5), il existe au plus un autre sommet  $V' \in E$  tel que  $\gamma_j^V = \gamma_j^{V'}$ , et s'il existe,  $V' = w_k$  où  $w_k \in \{V_0, V_1, w_1, \dots, w_r\}$ . Si  $\gamma_j^{w_k} = \gamma_j^{w'_s}$ , on veut différencier  $w'_s$  de  $w_k$ . Si  $\gamma_i^{w'_s} \notin \Gamma_i$ , alors on sait que  $w'_s \notin G_{[V_1, v_i]}$  donc  $w'_s \in G_{[V_2, v_j]}$  et on identifie  $w'_s$ . En revanche, si  $\gamma_i^{w'_s} \in \Gamma_i$ , alors d'après (3.4), il existe un unique  $w_l \in \{w_1, \dots, w_r\}$  tel que  $\gamma_i^{w'_s} = \gamma_i^{w_l}$ . Alors d'après (3.6),  $\gamma_j^{w'_s} < \gamma_j^{w_l}$ . Mais alors,  $w_l$  est forcément sur  $G_{[V_1, v_i]}$  puisque  $\gamma_j^{w'_s}$  est par définition le maximum des  $\gamma_j^v$  pour lesquels  $v$  est sur  $G_{[V_2, v_j]}$ . Donc on identifie également  $w'_s$ .

Maintenant, supposons que l'on a identifié les sommets  $w'_{k+1}, \dots, w'_s$ . Soit

$$\gamma_j^V := \max\{\gamma_j^v/\gamma_j^v \in \Gamma_j \text{ et } \gamma_j^{V_2} < \gamma_j^v < \gamma_j^{w'_{k+1}}\}.$$

On a  $\gamma_j^V = \gamma_j^{w'_k}$ . Si  $w'_k$  est l'unique sommet de  $E$  vérifiant  $\gamma_j^V = \gamma_j^{w'_k}$ , on a identifié  $w'_k$ . Sinon, d'après (3.5), il existe au plus un autre sommet  $V' \in E$  tel que  $\gamma_j^V = \gamma_j^{V'}$ , et s'il existe,  $V' = w_l$  où  $w_l \in \{V_0, V_1, w_1, \dots, w_r\}$ . Si  $\gamma_j^{w_l} = \gamma_j^{w'_k}$ , on veut différencier  $w'_k$  de  $w_l$ . Si  $\gamma_i^{w'_k} \notin \Gamma_i$ , alors on sait que  $w'_k \notin G_{[V_1, v_i]}$  donc  $w'_k \in G_{[V_2, v_j]}$  et on identifie  $w'_k$ . En revanche, si  $\gamma_i^{w'_k} \in \Gamma_i$ , alors d'après (3.4), il existe un unique  $w_m \in \{w_1, \dots, w_r\}$  tel que  $\gamma_i^{w'_k} = \gamma_i^{w_m}$ . Alors d'après (3.6),  $\gamma_j^{w'_k} < \gamma_j^{w_m}$ . Mais alors,  $w_m$  est forcément sur  $G_{[V_1, v_i]}$  puisqu'on a déjà identifié tous les sommets  $v$  de  $G_{[V_2, v_j]}$  tels que  $\gamma_j^v > \gamma_j^{w'_k}$ . Donc  $w'_k$  est sur  $G_{[V_2, v_j]}$  et on identifie également  $w'_k$ .  $\square$

### Algorithme de connexion des sommets des sous-ensembles de $S(f)$ .

Maintenant que nous avons énoncé toutes les propriétés nécessaires, nous décrivons l'algorithme permettant de connecter entre eux les sommets d'un sous-ensemble de  $S(f)$ .

1. D'après le paragraphe précédent, on connaît les sommets  $v_0, \dots, v_n$  de  $E_{trivial}$  et leurs étiquettes. Pour un  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on calcule  $\gamma_j^{v_i}$  pour tous les sommets  $v_i \in E_{trivial}$  et la proposition 3.6.39 permet alors de connecter ces sommets les uns aux autres.
2. Soit  $E$  un sous-ensemble stable. D'après le paragraphe précédent, on connaît les sommets de  $E$  et leurs étiquettes. On calcule la partition  $\mathcal{P}_E$  associée à  $E$ . On a  $\mathcal{P}_E = \mathcal{F}_1 \amalg \mathcal{F}_2$ . Soient  $i \in \mathcal{F}_1$  et  $j \in \mathcal{F}_2$ . D'après le lemme 3.6.30,  $E$  est connecté à deux sommets de bifurcation ou flèches et éventuellement à un sommet de  $E_{trivial}$ . Sur  $S(f)$ , soient  $v_i, v_j \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$  les sommets ou les flèches connectés à  $E$  tels que  $E \cap G_{[v_i, f_i]} = \emptyset$  et  $E \cap G_{[v_j, f_j]} = \emptyset$  (puisque  $v_i$  et  $v_j$  sont des sommets de bifurcation ou des flèches, il sont dans des sous-ensembles de  $S(f)$  qui sont des singletons, donc on sait les identifier).

Avec la donnée de  $S(f)$ , on connaît l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(f)$  et leur étiquette. On calcule  $\gamma_i^v$  (resp.  $\gamma_j^v$ ) pour tout sommet de rupture  $v$  et on



identifie  $v_{min,i}$  (resp.  $v_{min,j}$ ) sur  $S(f)$ . Le sommet  $v_{min,i}$  (resp.  $v_{min,j}$ ) appartient soit à  $E_{trivial}$ , soit à un sous-ensemble stable qui peut être  $E$ , soit à un singleton qui contient un unique sommet de bifurcation. Enfin, on trace sur  $S(f)$  la géodésique  $\mathcal{G}^i$  (resp.  $\mathcal{G}^j$ ) reliant le sous-ensemble de  $S(f)$  qui contient  $v_{min,i}$  (resp.  $v_{min,j}$ ) à  $f_i$  (resp.  $f_j$ ).

D'après la proposition 3.6.44, on calcule  $Z_{top,0}(f_i^{n_i})$  et  $Z_{top,0}(f_j^{n_j})$ . On calcule alors

$$\Gamma_i = \{\gamma_i^v / (\nu_v + N_{v,i}s_i) \text{ est au dénominateur de } Z_{top,0}(f_i^{n_i})\},$$

$$\Gamma_j = \{\gamma_j^v / (\nu_v + N_{v,j}s_j) \text{ est au dénominateur de } Z_{top,0}(f_j^{n_j})\}.$$

Si  $E$  est complètement inclus dans  $\mathcal{G}^i$  (resp.  $\mathcal{G}^j$ ), et si pour tout sommet  $v \in E$ ,  $\gamma_i^v \in \Gamma_i$  (resp.  $\gamma_j^v \in \Gamma_j$ ), alors d'après le lemme 3.6.47, on ordonne les sommets de  $E$ .

Sinon, on est dans le cas (1) (2) ou (3) du lemme 3.6.48. Alors les lemmes 3.6.50 et 3.6.51 permettent d'ordonner les sommets de  $E$ .

On obtient un arbre identique à  $D_m(f)$  sans les sommets de valence 1 de  $D_m(f)$  et les arêtes connectées à ces sommets et sans les décorations de  $D_m(f)$ . Soit  $T(f)$  cet arbre.

### 3.6.8 Décoration de l'arbre $T(f)$ .

À présent, on a connecté tous les sommets des sous-ensembles de  $S(f)$  les uns aux autres et on a ainsi obtenu l'arbre  $T(f)$ . Il reste à décorer chaque arête de cet arbre. Nous allons exhiber des propriétés concernant les décorations proches des différents sommets du diagramme, puis nous donnerons un algorithme de décoration de  $T(f)$ .

**Lemme 3.6.52.** *Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Si  $v \notin \overline{G_j}$ , alors au plus une décoration proche de  $v$  adjacente à  $G_{[v,f_j]}$  est différente de 1.*

*Démonstration.* On reprend les notations du paragraphe 3.6.3. Si  $v \notin \overline{G_j}$  et  $v \in G_j$ , alors soit il existe  $k, s$  tels que  $v = V_{k,s}$  et la seule décoration proche de  $v$  adjacente à  $G_{[v,f_j]}$  et supérieure à 1 est  $a_{k,s}$ , soit il existe  $k$  tel que  $v = W_k$  et d'après le lemme 3.6.14, puisque  $v \notin \overline{G_j}$ , on a  $p_k = 1$  donc la seule décoration proche de  $v$  adjacente à  $G_{[v,f_j]}$  et supérieure à 1 est  $a_k$ .

Si  $v \notin \overline{G_j}$  et  $v \notin G_j$ , alors il existe  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $i \neq j$  tel que  $v \in G_i$ . On reprend les notations du paragraphe 3.6.3 pour nommer les sommets de  $G_i$ . S'il existe  $k \geq 1$  tel que  $v = W_k$ , alors  $G_{[W_k,f_j]}$  passe par le sommet  $V_{k,s_k}$  de  $G_i$  car sinon,  $v$  appartiendrait à  $G_j$ . Donc la seule décoration proche de  $v$  adjacente à  $G_{[v,f_j]}$  et supérieure à 1 est  $p_k$ . Le raisonnement est le même si  $v = V_{k,s_k}$  ou  $v = V_{k,1}$ . Enfin, si  $v = W_0$ ,  $G_{[W_0,f_j]}$  passe soit par l'arête portant la décoration  $a_0$  soit par celle portant la décoration  $p_0$  (car sinon, on aurait  $v = W_0$  pour  $G_j$  donc  $v \in G_j$ ). Donc la seule décoration proche de  $v$  adjacente à  $G_{[v,f_j]}$  et supérieure à 1 est  $a_0$  ou  $p_0$ .  $\square$

**Propriétés des décoration proches des sommets  $v \in \overline{G_j}$  pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ .**

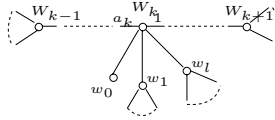
Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . On considère la géodésique  $\overline{G_j}$ . On reprend les notations du paragraphe 3.6.3 : on suppose que  $G_j \neq G_{[V_{0,1}, f_j]}$ . Les sommets de  $\overline{G_j}$  sont les sommets de  $G_j$  compris entre  $v_{\min, j}$  et  $f_j$ . Il y a quatre types de sommets sur  $\overline{G_j}$  :

- (i) les sommets  $W_k$  de  $G_j$  compris entre  $v_{\min, j}$  et  $f_j$  pour lesquels  $p_k > 1$ ,
- (ii) les sommets  $V_{k,s}$  de  $G_j$  compris entre  $v_{\min, j}$  et  $f_j$ ,
- (iii) les sommets  $W_k$  de  $G_j$  compris entre  $v_{\min, j}$  et  $f_j$  pour lesquels  $p_k = 1$ ,
- (iv) le sommet  $v_{\min, j}$ .

**Lemme 3.6.53.** *La donnée de  $Z_{\text{top},0}(f)$  permet d'identifier les sommets du type (i) et de calculer la décoration proche située sur chaque arête reliée à ces sommets.*

*Démonstration.* Les sommets du type (i) sont les sommets  $W_k$  de  $G_j$  compris entre  $v_{\min, j}$  et  $f_j$  pour lesquels  $p_k > 1$ . D'après la proposition 3.6.42, ce sont donc les sommets de rupture de  $D_m(f_j^{n_j})$ . On calcule  $Z_{\text{top},0}(f_j^{n_j})$  grâce à la proposition 3.6.44. La proposition 3.6.20 permet alors de calculer les décorations  $a_k$  et  $p_k$ .

La décoration  $a_k$  est sur  $G_{[W_{k-1}, W_k]}$ , et la décoration située sur  $G_{[W_k, W_{k+1}]}$  est 1, mais il reste à positionner  $p_k$ . Soient  $w_1, \dots, w_l$  les sommets de rupture ou les flèches adjacents à  $W_k$  n'étant ni sur  $G_{[W_{k-1}, W_k]}$  ni sur  $G_{[W_k, W_{k+1}]}$ . Enfin, soit  $w_0$  le sommet de valence 1 connecté à  $W_k$  (les sommets du type (i) sont connectés à au plus un sommet de valence 1 : en effet, seul un sommet de  $D_m(f)$  peut être connecté à deux sommets de valence 1 et ce sommet n'a pas de sommet précédent).



Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , soient  $\mathcal{F}^i$  le sous ensemble de  $\mathcal{P}_v$  associé au sommet  $w_i$  et  $j_i \in \mathcal{F}^i$ . On calcule  $v_{\min, j_i}$  et  $Z_{\text{top},0}(f_{j_i}^{n_{j_i}})$ . Alors d'après les lemmes 3.6.14 et 3.6.52, si  $(\nu_{W_k} + N_{W_k, j_i} s_{j_i})$  apparaît au dénominateur de  $Z_{\text{top},0}(f_{j_i}^{n_{j_i}})$ , alors il existe deux décorations proches de  $W_k$  adjacentes à  $G_{[W_k, f_{j_i}]}$  différentes de 1 qui sont  $a_k$  et  $p_k$ , et donc l'arête  $[W_k, w_i]$  porte la décoration 1. En revanche, si  $(\nu_{W_k} + N_{W_k, j_i} s_{j_i})$  n'apparaît pas au dénominateur de  $Z_{\text{top},0}(f_{j_i}^{n_{j_i}})$ , alors il existe au plus une décoration proche de  $W_k$  adjacente à  $G_{[W_k, f_{j_i}]}$  différente de 1, et on a déjà  $a_k$ . Donc l'arête  $[W_k, w_i]$  porte la décoration  $p_k$ . Si pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ ,  $(\nu_{W_k} + N_{W_k, j_i} s_{j_i})$  apparaît au dénominateur de  $Z_{\text{top},0}(f_{j_i}^{n_{j_i}})$ , alors  $p_k$  est sur l'arête  $[W_k, w_0]$ . □

**Lemme 3.6.54.** *Si  $v$  est un sommet du type (ii) pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , alors il existe  $j' \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $v$  est un sommet du type (i) ou du type (iii) pour  $j'$ .*

*Démonstration.* Les sommets du type (ii) pour  $j$  sont les sommets  $V_{k,s}$  de  $G_j$  compris entre  $v_{\min, j}$  et  $f_j$ . Le sommet  $V_{k,s}$  est un sommet de rupture donc il existe au moins un sommet de rupture ou une flèche  $w$  voisin de  $V_{k,s}$  n'appartenant pas à  $G_j$ . Soient  $\mathcal{F}$  le

sous ensemble de  $\mathcal{P}_{V_{k,s}}$  associé au sommet  $w$  et  $j' \in \mathcal{F}$ . Alors les géodésiques  $G_j$  et  $G_{j'}$  sont communes de  $W_0$  à  $V_{k,s}$  donc  $v_{\min,j} = v_{\min,j'}$ , et pour la géodésique  $G_{j'}$ ,  $V_{k,s}$  est un sommet du type (i) ou du type (iii).  $\square$

**Lemme 3.6.55.** *La donnée de  $Z_{\text{top},0}(f)$  permet d'identifier les sommets du type (iii) et de calculer la décoration proche située sur chaque arête reliée à ces sommets.*

*Démonstration.* Grâce aux lemmes 3.6.53 et 3.6.54, avec la donnée de  $Z_{\text{top},0}(f)$ , on décore les arêtes adjacentes aux sommets  $W_k$  tels que  $p_k > 1$  pour toutes les géodésiques  $G_j$ ,  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Il ne reste que les sommets  $W_k$  de  $G_j$  compris entre  $v_{\min,j}$  et  $f_j$  pour lesquels  $p_k = 1$ . Toutes les décorations situées sur les arêtes connectées à ces sommets sont 1, sauf la décoration  $a_k$  située sur  $G_{[W_{k-1}, W_k]}$ . En particulier, ces sommets ne sont pas connectés à un sommet de valence 1. Calculons  $a_k$ . Soit  $W_k$  le premier sommet de  $G_j$  compris entre  $v_{\min,j}$  et  $f_j$  pour lequel  $p_k = 1$  rencontré quand on parcourt  $\overline{G_j}$  de  $v_{\min,j}$  vers  $f_j$ . Alors d'après le lemme 3.6.14, le sommet  $W_{k-1}$  vérifie  $p_{k-1} > 1$ . On a

$$\nu_{W_k} = p_k \nu_{W_{k-1}} + a_k - a_{k-1} p_{k-1} p_k = a_k - a_{k-1} p_{k-1} + \nu_{W_{k-1}} = a_k - T_{k-1},$$

et on connaît  $T_{k-1}$  d'après la démonstration de la proposition 3.6.20. Toutes les arêtes adjacentes aux sommets du type (i) sont à présent décorées; les sommets du type (iii) vérifient  $p_k = 1$  et ceux du type (ii) se ramènent au type (i) ou (iii). On connaît donc le produit  $A_k$  des décorations adjacentes à  $G_{[W_k, f_j]}$  divisé par  $a_k$ . On a  $N_{W_k, j} = a_k A_k$ . Donc

$$\gamma_j^{W_k} = \frac{a_k - T_{k-1}}{a_k A_k} \text{ i.e. } a_k = \frac{T_{k-1}}{1 - A_k \gamma_j^{W_k}}$$

(on a  $1 - A_k \gamma_j^{W_k} = \frac{T_{k-1}}{a_k} \neq 0$ ). On a donc  $a_k$ . On connaît alors  $T_k = a_k - \nu_{W_k} = T_{k-1}$ . On effectue la même opération pour tous les sommets de ce type rencontrés en parcourant  $\overline{G_j}$  de  $v_{\min,j}$  vers  $f_j$ .  $\square$

**Lemme 3.6.56.** *La donnée de  $Z_{\text{top},0}(f)$  permet de calculer les décorations proches de  $v_{\min,j}$  différentes de 1.*

*Démonstration.* D'après la proposition 3.6.42,  $v_{\min,j}$  est le premier sommet de rupture de  $D_m(f_j^{n_j})$ . On calcule  $Z_{\text{top},0}(f_j^{n_j})$  grâce à la proposition 3.6.44. La proposition 3.6.20 permet alors de calculer les décorations  $a \geq 1$  et  $p \geq 1$  proches de  $v_{\min,j}$ .  $\square$

**Lemme 3.6.57.** *Si  $G_j = G_{[V_{0,1}, f_j]}$ , la donnée de  $Z_{\text{top},0}(f)$  permet de calculer les décorations proches de  $V_{0,1}$  différentes de 1.*

*Démonstration.* Si  $G_j = G_{[V_{0,1}, f_j]}$ , alors  $v_{\min,j} = V_{0,1}$  et on a  $Z_{\text{top},0}(f_j^{n_j})(s_j) = \frac{1}{1 + n_j s_j}$ . Alors  $V_{0,1}$  est un sommet du type (ii) et d'après le lemme 3.6.54, on peut se ramener au cas du lemme 3.6.56.  $\square$

**Définition 3.6.58.** *Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(f)$  appartenant au complémentaire de  $\cup_{j=1}^r \overline{G_j}$ .*

**Lemme 3.6.59.** *Soit  $v \in \mathcal{C}$ . Alors au plus une des décorations proches de  $v$  est supérieure à 1.*

*Démonstration.* Soient  $w_1, \dots, w_l$  les sommets de rupture et les flèches voisins de  $v$ . Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , soient  $\mathcal{F}^i$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_v$  associé à  $w_i$  et soit  $j_i \in \mathcal{F}^i$ . Alors d'après le lemme 3.6.52, pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ , il existe au plus une décoration proche de  $v$  adjacente à  $G_{[v, f_{j_i}]}$  différente de 1. Donc au plus une des décorations proches de  $v$  est différente de 1.  $\square$

**Position de la décoration  $\alpha \geq 1$  proche de  $v$  pour les sommets  $v \in \mathcal{C}$ .**

Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}$ . On a vu dans le lemme précédent qu'au plus une décoration proche de  $v$  est supérieure à 1. Soit  $\alpha$  cette décoration. Soient  $w_1, \dots, w_l$  les sommets de rupture et les flèches voisins de  $v$  et soit  $w_0$  le sommet de valence 1 connecté à  $v$  (en effet, puisqu'au plus une décoration proche de  $v$  est supérieure à 1,  $v$  est connecté à au plus un sommet de valence 1). Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , soit  $\mathcal{F}^i$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_v$  associé à  $w_i$ . Soient  $i, i' \in \{1, \dots, l\}$  avec  $i \neq i'$ . Soient  $j \in \mathcal{F}^i$  et  $j' \in \mathcal{F}^{i'}$ . Alors  $v \in G_{[f_j, f_{j'}]}$ .

**Lemme 3.6.60.** *Soient  $j, j' \in \{1, \dots, r\}$ . Soient  $v, v'$  deux sommets de  $D_m(f)$  appartenant à  $G_{[f_j, f_{j'}]}$ . Soient*

$$H_v^{j, j'} : \nu_v + N_{v, j} s_j + N_{v, j'} s_{j'} = 0 \text{ et } H_{v'}^{j, j'} : \nu_{v'} + N_{v', j} s_j + N_{v', j'} s_{j'} = 0.$$

Alors  $H_v^{j, j'} \neq H_{v'}^{j, j'}$ .

*Démonstration.* Puisque  $v, v' \in G_{[f_j, f_{j'}]}$ ,  $v$  et  $v'$  appartiennent à  $G_j$  et/ou  $G_{j'}$ . Si  $v, v' \in G_j$ , on a vu dans la démonstration du lemme 3.6.18 que soit  $\gamma_j^v \neq \gamma_j^{v'}$ , soit  $\gamma_{j'}^v \neq \gamma_{j'}^{v'}$ . Donc  $H_v^{j, j'} \neq H_{v'}^{j, j'}$ . Si  $v \in G_j$ ,  $v' \in G_{j'}$  et  $v, v' \notin G_j \cap G_{j'}$ , alors on a vu dans la démonstration du lemme 3.6.19 que

$$\frac{N_{v, j}}{N_{v', j}} \neq \frac{N_{v, j'}}{N_{v', j'}}, \text{ donc } H_v^{j, j'} \neq H_{v'}^{j, j'}.$$

$\square$

**Lemme 3.6.61.** *Soit  $v \in \mathcal{C}$ . Alors la donnée de  $Z_{top, 0}(f)$  permet de savoir sur quelle arête connectée à  $v$  la décoration  $\alpha \geq 1$  proche de  $v$  est placée.*

*Démonstration.* Grâce à la proposition 3.6.44, on calcule  $Z_{top, 0}(f_j^{n_j} f_{j'}^{n_{j'}})(s_j, s_{j'})$ . Si  $(\nu_v + N_{v, j} s_j + N_{v, j'} s_{j'})$  apparaît au dénominateur de  $Z_{top, 0}(f_j^{n_j} f_{j'}^{n_{j'}})(s_j, s_{j'})$ , alors d'après la proposition 3.6.43, il existe une décoration proche de  $v$  adjacente à  $G_{[f_i, f_j]}$  strictement supérieure à 1 donc on a la décoration 1 sur les arêtes  $[v, w_i]$  et  $[v, w_{i'}]$ . Si  $(\nu_v + N_{v, j} s_j + N_{v, j'} s_{j'})$  n'apparaît pas au dénominateur de  $Z_{top, 0}(f_j^{n_j} f_{j'}^{n_{j'}})(s_j, s_{j'})$ , toutes les décoration proches de  $v$  adjacentes à  $G_{[f_i, f_j]}$  sont égales à 1 donc on a la décoration 1 sur toutes les arêtes reliées à  $v$  autres que  $[v, w_i]$  et  $[v, w_{i'}]$ . Quand on a parcouru toutes les arêtes deux à deux, soit toutes les arêtes portent la décoration 1, ce qui signifie que  $\alpha = 1$ , soit une arête  $[v, w_i]$  ou l'arête  $[v, w_0]$  reliant  $v$  à un sommet de valence 1 n'est pas décorée et c'est elle qui porte la décoration  $\alpha > 1$ .  $\square$

**Propriétés des arêtes reliées aux  $v_{\min,j}$  pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ .**

Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . On considère le sommet  $v = v_{\min,j}$ . Soit  $v_1$  le sommet voisin de  $v$  tel que  $v_1 \prec v$ . Le sommet  $v_1$  peut être un sommet de rupture, un sommet de valence 1 ou une flèche. Si  $v_1$  est un sommet de valence 1 ou une flèche,  $v$  n'admet pas de sommet précédent. Soit  $v_l$  le sommet situé en dessous de  $v$ . Le sommet  $v_l$  peut être un sommet de rupture, un sommet de valence 1 ou une flèche. Enfin, soient  $v_2, \dots, v_{l-1}$  les autres sommets de rupture et les flèches voisins de  $v$ . Pour tout  $k \in \{2, \dots, l\}$ , on a donc  $v \prec v_l$ . D'après la construction des diagrammes, les deux décorations  $a \geq 1$  et  $p \geq 1$  proches de  $v$  sont portées par les arêtes  $[v, v_1]$  et  $[v, v_l]$ .

**Lemme 3.6.62.** *La lecture de  $Z_{\text{top},0}(f)$  permet d'identifier les arêtes  $[v, v_1]$  et  $[v, v_l]$  portant les décorations  $a \geq 1$  et  $p \geq 1$  proches de  $v_{\min,j}$  et de savoir laquelle porte la décoration  $a$  et laquelle porte la décoration  $p$ .*

*Démonstration.* Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , soient  $\mathcal{F}^i$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_v$  associé à  $w_i$ . On peut avoir  $\mathcal{F}^1 = \emptyset$  et  $\mathcal{F}^l = \emptyset$  mais  $\mathcal{F}^i \neq \emptyset$  pour  $i \in \{2, \dots, l-1\}$ . Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , si  $\mathcal{F}^i \neq \emptyset$ , soit  $j_i \in \mathcal{F}^i$ .

Pour  $i \in \{2, \dots, l-1\}$ , on calcule  $Z_{\text{top},0}(f_{j_i}^{n_{j_i}})(s_{j_i})$  grâce à la proposition 3.6.44 ; on a  $v = v_{\min,j_i}$ . En effet, jusqu'au sommet  $v$ , les géodésiques  $G_{j_i}$  sont confondues donc c'est clair d'après le lemme 3.6.14. De plus, les décorations  $a$  et  $p$  sont adjacentes à  $G_{[v, f_{j_i}]}$  donc  $(\nu_v + N_{v, j_i})$  apparaît au dénominateur de  $Z_{\text{top},0}(f_{j_i}^{n_{j_i}})(s_{j_i})$ . Donc sur toutes les arêtes  $[v, v_i]$  telles que  $v = v_{\min, j_i}$  et  $(\nu_v + N_{v, j_i})$  apparaît au dénominateur de  $Z_{\text{top},0}(f_{j_i}^{n_{j_i}})(s_{j_i})$ , il figure la décoration 1.

Il reste deux arêtes. Il reste à savoir laquelle porte la décoration  $a$  et laquelle porte la décoration  $p$ . Si ce sont deux sommets de valence 1,  $v$  est l'unique sommet de  $D_m(f)$  n'admettant pas de sommet précédent et la position de  $a$  et  $p$  ne change pas la topologie du germe.

Sinon, supposons que  $\mathcal{F}^1 \neq \emptyset$ . Soient  $j_1 \in \mathcal{F}^1$  et  $j_i \in \mathcal{F}^i$  où  $i \in \{2, \dots, l-1\}$ . On considère  $D_m(f_{j_1}^{n_{j_1}} f_{j_i}^{n_{j_i}})$ . D'après la proposition 3.6.43, les sommets de rupture de  $D_m(f_{j_1}^{n_{j_1}} f_{j_i}^{n_{j_i}})$  sont les sommets de rupture de  $G_{[f_{j_1}, f_{j_i}]}$  pour lesquels la décoration proche adjacente à  $G_{[f_{j_1}, f_{j_i}]}$  est strictement supérieure à 1. Le sommet  $v$  appartient donc à  $D_m(f_{j_1}^{n_{j_1}} f_{j_i}^{n_{j_i}})$  et le premier sommet rencontré sur  $G_{[v, f_{j_1}]}$  appartenant à  $D_m(f_{j_1}^{n_{j_1}} f_{j_i}^{n_{j_i}})$  est de l'un des deux types suivant :

1. C'est un sommet  $v' \in \mathcal{C}$ . Alors l'unique décoration  $\alpha > 1$  proche de  $v'$  n'est pas sur  $G_{[v, v']}$  (puisque'elle est adjacente à  $G_{[f_{j_1}, f_{j_i}]}$ ). Comme on a  $\Delta_{[v, v']} > 0$ , la décoration proche de  $v$  figurant sur l'arête  $[v, v_1]$  est  $\max(a, p)$  et celle figurant sur l'arête  $[v, v_l]$  est  $\min(a, p)$ .
2. C'est un sommet  $v' = v_{\min, j_1}$ . Soient  $a'$  et  $p'$  les deux décorations proches de  $v'$  supérieures à 1 que l'on a déjà calculées. On note  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur  $G_{[v, v']}$  et  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ) le produit des autres décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ). On veut savoir si  $\alpha = a$  ou  $p$  et si  $\alpha' = a'$  ou  $p'$ . On a  $\Delta_{[v, v']} = \alpha\alpha' - \beta\beta' > 0$ . D'autre part, puisqu'on a déjà décoré les géodésiques  $G_j$ , si  $w$  est le sommet voisin de  $v'$  sur  $G_{[v', f_{j_1}]}$ , on connaît le produit  $A_{j_1}$  des décorations adjacentes à  $G_{[w, f_j]}$ . On a  $N_{v, f_{j_1}} = \beta\beta' A_{j_1}$ . D'autre part, grâce à la

proposition 3.6.20, on connaît  $\nu_v$ . Puisqu'on connaît  $\gamma_{j_1}^v$ , on a  $N_{v,f_{j_1}} = \frac{\nu_v}{\gamma_{j_1}^v}$ . On a donc  $\beta\beta' = \frac{N_{v,f_{j_1}}}{A_{j_1}}$ . On a  $\alpha, \beta \in \{a, p\}$  et  $\alpha', \beta' \in \{a', p'\}$ . Les deux conditions  $\beta\beta' = \frac{N_{v,f_{j_1}}}{A_{j_1}}$  et  $\alpha\alpha' - \beta\beta' > 0$  donnent une unique solution.

□

**Valeur de la décoration  $\alpha \geq 1$  proche de  $v$  pour les sommets  $v \in \mathcal{C}$ .**

**Lemme 3.6.63.** *Soit  $v \in \mathcal{C}$  et soit  $\alpha$  l'unique décoration proche de  $v$  qui peut être supérieure à 1. Alors  $\nu_v = \alpha + 1$ .*

*Démonstration.* Il existe  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $v = W_k \in G_j$ . Puisque  $v \in \mathcal{C}$ , on a  $v = W_k \in G_{[W_0, v_{min,j}]}$ . On va montrer par récurrence que pour tous les sommets  $W_k \in G_{[W_0, v_{min,j}]}$ , on a  $\nu_{W_k} = a_k + 1$ . Pour le sommet  $W_0$ , on a  $\nu_{W_0} = a_0 + p_0 = a_0 + 1$  ou  $p_0 + 1$  car d'après le lemme 3.6.14,  $a_0 = 1$  ou  $p_0 = 1$ . Si  $\nu_{W_k} = a_k + 1$ , alors  $\nu_{W_{k+1}} = p_{k+1}\nu_{W_k} + a_{k+1} - a_k p_k p_{k+1}$ . Or d'après la démonstration du lemme 3.6.14,  $p_{k+1} = 1$  et  $T_k = a_k p_k - \nu_{W_k} = -1$  donc  $\nu_{W_{k+1}} = a_{k+1} + 1$ . □

**Lemme 3.6.64.** *Soit  $v \in \mathcal{C}$ . La lecture de  $Z_{top,0}(f)$  permet de calculer l'unique décoration  $\alpha$  proche de  $v$  qui peut être supérieure à 1.*

*Démonstration.* On commence par les sommets  $v \in \mathcal{C}$  connectés à un sommet  $v_{min,j}$ . D'après le lemme 3.6.61, on connaît la position de  $\alpha$ . Si  $\alpha$  est adjacente à  $G_{[v, v_{min,j}]}$ , on connaît le produit  $A_j$  des décorations adjacentes à  $G_{[v, f_j]}$  divisé par  $\alpha$  : on a  $\nu_v = \alpha + 1$  et  $N_{v,j} = \alpha A_j$ , d'où

$$\alpha = \frac{1}{\gamma_j^v A_j - 1}.$$

Si  $\alpha$  est portée par  $G_{[v, v_{min,j}]}$ , on connaît le produit  $A_j$  des décorations adjacentes à  $G_{[v, f_j]}$  : on a  $\nu_v = \alpha + 1$  et  $N_{v,j} = A_j$ , d'où

$$\alpha = \gamma_j^v A_j - 1.$$

On continue de proche en proche pour chaque sommet  $v \in \mathcal{C}$ . □

**Algorithme de décoration de l'arbre  $T(f)$ .**

1. On connecte à chaque sommet de rupture  $v$  de  $T(f)$  deux sommets de valence 1. À la fin de l'algorithme, si l'arête reliant un sommet  $v$  à un sommet de valence 1 porte la décoration 1, alors l'arête et le sommet de valence 1 disparaissent (règles de minimalisation).
2. Pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on calcule  $\gamma_j^v$  pour tout sommet de rupture  $v$  et on identifie  $v_{min,j}$ . On considère les géodésique  $\overline{G_j}$ . Grâce à la proposition 3.6.44, on calcule  $Z_{top,0}(f_j^{n_j})$ .

3. Grâce au lemme 3.6.53, on identifie les sommets du type (i) pour chaque  $\overline{G_j}$  et on décore les arêtes connectées à ces sommets. On a vu que ces sommets sont connectés à au plus un sommet de valence 1.
4. Quand on a décoré tous les sommets du type (i) pour toutes les géodésique  $\overline{G_j}$ , d'après le lemme 3.6.54, il ne reste sur les  $\overline{G_j}$  que des sommets du type (iii). On les identifie et on décore les arêtes connectées à ces sommets grâce au lemme 3.6.55. On a vu que ces sommets ne sont connectés à aucun sommet de valence 1.
5. Grâce au lemme 3.6.56, on calcule pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$  la valeur des deux décorations proches de  $v_{min,j}$  supérieures ou égales à 1. Alors d'après le lemme 3.6.57, on a décoré toutes les arêtes connectées aux sommets de  $\cup_{j=1}^r \overline{G_j}$  sauf celles connectées aux  $v_{min,j}$ .
6. Grâce au lemme 3.6.61, pour les sommets  $v \in \mathcal{C} = \mathcal{R} \setminus \cup_{j=1}^r \overline{G_j}$ , on identifie l'unique arête connectée à  $v$  portant une décoration  $\alpha \geq 1$  proche de  $v$ . Toutes les autres arêtes proches de  $v$  portent la décoration 1. En particulier, ces sommets sont connectés à au plus un sommet de valence 1.
7. Le lemme 3.6.62 permet alors de décorer les arêtes connectées aux  $v_{min,j}$  pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ .
8. Enfin, avec le lemme 3.6.64, on calcule la valeur de l'unique décoration  $\alpha$  proche de  $v$  qui peut être supérieure à 1 pour les sommets  $v \in \mathcal{C}$ .

On a maintenant complètement reconstitué  $D_m(f)$ . Si l'on veut calculer les décorations  $(N_v)$  figurant à côté des sommets de rupture  $v$  de  $D_m(f)$ , on utilise les propositions 1.5.5 et 1.5.1.

### 3.6.9 Un exemple.

On se propose de retrouver le diagramme minimal de Newton du germe  $f$  dont la fonction zêta-topologique multivariable associée à la décomposition  $\mathcal{D}$  est

$$\begin{aligned}
Z_{top,0}(f)(s_1, s_2, s_3, s_4) := & \\
& (829158864s_2^3s_3^3s_1 + 43080280s_2^4s_4^2s_3 + 222000s_2^6s_4s_1 + 118441152s_4^4s_3^3s_1 \\
& + 2413658880s_3^5s_2s_1 + 705555360s_1^4s_4^2s_2 + 8622420s_2^5s_4s_3 + 493542720s_2^3s_1^3s_3 \\
& + 325438992s_4^4s_1^2s_3 + 49175424s_4^4s_1^3s_2 + 441992700s_1^5s_4s_2 + 847277820s_1^5s_4s_3 \\
& + 138173688s_1^4s_4^3s_3 + 111689280s_1^3s_4^3s_2 + 27805680s_1^5s_2s_3 + 59940000s_1^4s_4s_2^3 \\
& + 140898396s_2^4s_1s_3 + 4232424s_2^4s_4^3s_3 + 82900800s_1^3s_4^2s_2^3 + 948672s_4^6s_3s_2 \\
& + 116336160s_2^4s_1^2s_3 + 644826960s_1^3s_4^2s_2 + 147588948s_2^4s_2^3s_1 + 15067296s_4^5s_3^2s_2 \\
& + 3671136s_4^5s_2^2s_3 + 2321679672s_1^3s_2^2s_3 + 297216000s_3^6s_1s_2 + 165801600s_1^4s_4^2s_2^2 \\
& + 362972160s_3^5s_2^2s_1 + 103518000s_1^5s_2^2s_3 + 63568800s_1^6s_4s_3 + 779582880s_1^5s_2s_3 \\
& + 270901800s_1^3s_4s_2^3 + 111689280s_1^4s_4^3s_2 + 293248512s_3^4s_4^3s_2 + 149885640s_1^5s_4^2s_3 \\
& + 5254920s_2^5s_3^2s_1 + 77393520s_4^4s_2^2s_3 + 3330000s_1^2s_4s_2^5 + 13999392s_4^5s_1^2s_3 \\
& + 2213488128s_3^4s_2^2s_1 + 2628836532s_1^4s_2s_3 + 358737408s_3^4s_4^3s_1 + 1564840s_2^5s_4^2s_3 \\
& + 534243600s_1^4s_4s_2^2 + 19980000s_1^3s_4s_2^4 + 445259520s_3^5s_4^2s_2 + 225600s_2^6s_4s_3 \\
& + 43934832s_4^5s_1s_3 + 47999952s_1^3s_4^3s_2 + 94685760s_4^4s_3^3s_2 + 1165544640s_1^4s_3^3s_2 \\
& + 1015891092s_1^3s_4^3s_3 + 860961384s_2^3s_1^2s_3 + 177120000s_3^4s_2^3s_1 + 5615856s_4^4s_2^3s_3 \\
& + 69012000s_1^4s_2^3s_3 + 3834000s_2^5s_1^2s_3 + 89910000s_1^5s_4s_2^2 + 124351200s_1^5s_4^2s_2 \\
& + 263001600s_3^6s_4s_2 + 1465022160s_1^4s_4^2s_3 + 2650356102s_1s_4s_2s_3 + 6461429772s_1^2s_4s_2s_3 \\
& + 8527014852s_1s_4s_2s_3^2 + 3345176908s_1s_4^2s_2s_3 + 7141227939s_1^3s_4s_2s_3 + 4477362546s_1^2s_4s_2^2s_3 \\
& + 5864446422s_1^2s_4^2s_2s_3 + 1066309459s_1s_4s_2^3s_3 + 5845254556s_1s_4s_2^2s_3^2 + 2348657234s_1s_4^2s_2^2s_3 \\
& + 7663936440s_1s_4^2s_2s_3^2 + 1861298028s_1s_4^3s_2s_3 + 17613450s_1 + 6629310s_2 + 23694120s_3 \\
& + 8856540s_4 + 7232700s_2^5s_4s_1 + 85738932s_2^3s_4^3s_3 + 308620800s_3^6s_4s_1 \\
& + 978013440s_1^4s_2^2s_3 + 66020400s_2^2s_4s_2^4 + 62611056s_4^4s_1^3s_3 + 298680852s_1s_4s_2 \\
& + 1009246038s_1s_4s_3 + 398429906s_2s_4s_3 + 986337333s_1^2s_4s_2 + 91223244s_1s_4 \\
& + 34923660s_2s_4 + 122360256s_3s_4 + 22486860s_4^2 + 88614567s_1^2 \\
& + 68765598s_1s_2 + 239162868s_1s_3 + 374495256s_1^2s_4 + 188642988s_1s_4^2 \\
& + 12696723s_2^2 + 92137068s_2s_3 + 55691744s_2^2s_4 + 73944876s_2s_4^2 \\
& + 159430464s_3^3 + 668475864s_3^2s_4 + 251870676s_3s_4^2 + 30221064s_4^3 \\
& + 234132606s_1^3 + 12953508s_2^3 + 558662976s_3^3 + 22698144s_4^4 \\
& + 379112955s_1s_4s_2^2 + 500889900s_1s_4^2s_2 + 3156720615s_1^2s_4s_3 + 4198843188s_1s_4s_3^2 \\
& + 1621807020s_1s_4^2s_3 + 501698019s_2^2s_4s_3 + 1736220108s_2s_4s_3^2 + 768524400s_1s_2s_3 \\
& + 1571851278s_1^3s_4s_2 + 949071852s_1^2s_4s_2^2 + 1246706394s_1^2s_4^2s_2 + 488532646s_1s_4^2s_2^2 \\
& + 402259128s_1s_4^3s_2 + 4610711880s_1^3s_4s_3 + 9339549030s_1^2s_4s_3^2 + 8069522096s_1s_4s_3^3 \\
& + 4920053544s_1s_4^2s_3^2 + 1214984424s_1s_4^3s_3 + 300926786s_2^2s_4s_3 + 639344484s_2^2s_4^2s_3 \\
& + 3595888336s_2s_4s_3^3 + 2153568360s_2s_4^2s_3^2 + 526483632s_2s_4^3s_3 + 946844469s_1s_2^2s_3 \\
& + 3252707712s_1s_2s_3^2 + 285497946s_1^2s_2 + 954496008s_1^2s_3 + 108011772s_1s_2^2 \\
& + 1276009920s_1s_3^2 + 771970581s_1^3s_4 + 602887032s_1^2s_4^2 + 196252236s_1s_4^3 \\
& + 143911632s_2^2s_3 + 2544288962s_1s_4s_2^2s_3 + 14533435392s_1^2s_4s_2s_3^2 + 12321894816s_1s_4s_2s_3^3 \\
& + 663487452s_2s_4^2s_3 + 230381622s_1s_4s_3^2 + 3728447364s_1^2s_4^2s_3 + 1636307758s_2^2s_4s_3^2 \\
& + 2447912691s_1^2s_2s_3 + 508504704s_2s_3^2 + 45369451s_2^3s_4 + 94443912s_2^2s_4^2 \\
& + 79705044s_2s_4^3 + 1812363872s_3^3s_4 + 1062528264s_3^2s_4^2 + 260021988s_3s_4^3
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +1236229290s_1^4s_4s_2 + 1070389890s_1^3s_4s_2^2 + 1400865876s_1^3s_4^2s_2 + 397077030s_1^2s_4s_2^3 \\
& + 874345344s_1^2s_4^2s_2^2 + 692148168s_1^2s_4^3s_2 + 65926470s_1s_4s_2^4 + 208624884s_1s_4^2s_2^3 \\
& + 277121592s_1s_4^3s_2^2 + 599504895s_1^3s_2 + 1884937635s_1^3s_3 + 85882455s_2^3s_1 \\
& + 113437029s_2^3s_3 + 3339473184s_3^3s_1 + 1403217888s_3^3s_2 + 104741352s_4^4s_1 \\
& + 45178488s_4^4s_2 + 136776096s_4^4s_3 + 352746090s_1^2s_2^2 + 3811570344s_1^2s_3^2 \\
& + 820917990s_1^4s_4 + 904260762s_1^3s_4^2 + 452249424s_1^2s_4^3 + 619144056s_2^2s_3^2 \\
& + 19423370s_2^4s_4 + 57812422s_2^3s_4^2 + 76692624s_2^2s_4^3 + 2490437472s_3^4s_4 \\
& + 2067060608s_3^3s_4^2 + 779398632s_3^2s_4^3 + 341235180s_1^4 + 7424580s_2^4 \\
& + 1066072128s_3^4 + 9040896s_4^4 + 153400608s_1s_4^4s_2 + 3117220254s_1^4s_4s_3 \\
& + 8837496720s_1^3s_4s_3^2 + 3670094646s_1^3s_4^2s_3 + 11680338288s_1^2s_4s_3^3 + 7501079304s_1^2s_4^2s_3^2 \\
& + 1838643372s_1^2s_4^3s_3 + 7134660672s_1s_4s_3^4 + 6317069696s_1s_4^2s_3^3 + 2394379872s_1s_4^3s_3^2 \\
& + 405933480s_1s_4^4s_3 + 83957482s_2^4s_4s_3 + 660906724s_2^3s_4s_3^2 + 267210018s_2^2s_4^2s_3 \\
& + 2356459088s_2^2s_4^3s_3^2 + 1464416968s_2^2s_4^4s_3^2 + 355394556s_2^2s_4^5s_3 + 3612688896s_2s_4^4s_3^4 \\
& + 3093831552s_2s_4^5s_3^3 + 1157285328s_2s_4^6s_3^2 + 196138296s_2s_4^7s_3 + 3686473458s_1^3s_2s_3 \\
& + 2249309412s_1^2s_2^2s_3^2 + 7455463974s_1^2s_2s_3^3 + 546460386s_1s_2^3s_3 + 2962659930s_1s_2^2s_3^2 \\
& + 6440903520s_1s_2s_3^3 + 23004000s_1^4s_3^3s_3 + 1127105280s_1^2s_4s_3^5 + 1554777792s_1^2s_4^2s_3^4 \\
& + 658359900s_1^4s_2 + 547227900s_1^3s_2^2 + 1861280532s_1^4s_3 + 5142585078s_1^3s_2^2 \\
& + 204063300s_2^2s_1^2 + 35210700s_2^4s_1 + 45787476s_2^4s_3 + 349634538s_2^3s_3^2 \\
& + 6819870672s_3^3s_1^2 + 4322071968s_3^4s_1 + 1244174352s_3^3s_2^2 + 1991413344s_3^4s_2 \\
& + 150371856s_4^4s_1^2 + 24870240s_4^5s_1 + 29293200s_4^4s_2^2 + 12181536s_4^5s_2 + 43168320s_2^4s_3^3s_1 \\
& + 247266144s_4^4s_3^2 + 31342896s_4^5s_3 + 407268000s_1^5s_4 + 625612140s_1^4s_4^2 \\
& + 433939464s_1^3s_4^3 + 3913800s_2^5s_4 + 16552460s_2^4s_4^2 + 31540344s_2^3s_4^3 + 1560337920s_3^5s_4 \\
& + 1809895680s_3^4s_4^2 + 944288640s_3^3s_4^3 + 258503400s_1^5 + 2266800s_2^5 \\
& + 1035175680s_3^5 + 1492992s_4^4 + 10658304s_4^5s_1^2s_2 + 53946000s_1^6s_4s_2 \\
& + 1440504 + 10752976782s_1^3s_4s_2s_3^2 + 6928949508s_1^2s_4s_2^2s_3^2 + 14222132472s_1^2s_4s_2s_3^3 \\
& + 9138273972s_1^2s_4^2s_2s_3^2 + 1551165886s_1s_4s_2^2s_3^2 + 5683849576s_1s_4s_2^2s_3^3 + 3658771324s_1s_4^2s_2^2s_3^2 \\
& + 8388388896s_1s_4s_2s_3^4 + 7512896672s_1s_4^2s_2s_3^3 + 2747406840s_1s_4^3s_2s_3^2 + 3669787674s_1^4s_4s_2s_3 \\
& + 3337741134s_1^3s_4s_2^2s_3 + 4400477640s_1^3s_4^2s_2s_3 + 1205022618s_1^2s_4s_2^3s_3 + 2833033560s_1^2s_4^2s_2^2s_3 \\
& + 2128864932s_1^2s_4^3s_2s_3 + 182139182s_1s_4s_2^4s_3 + 638903480s_1s_4^2s_2^3s_3 + 853961652s_1s_4^3s_2^2s_3 \\
& + 431900928s_1s_4^4s_2s_3 + 2953104156s_1^4s_3^2 + 5437342296s_1^3s_3^3 + 85546068s_1^4s_3^2 \\
& + 441224424s_2^3s_3^2 + 3484294704s_1^4s_4s_3^2 + 6628819464s_1^3s_4s_3^3 + 4460897268s_1^3s_4^2s_3^2 \\
& + 6253795296s_1^2s_4s_3^4 + 5914547568s_1^2s_4^2s_3^3 + 2164088088s_1^2s_4^3s_3^2 + 2666275200s_1s_4s_3^5 \\
& + 3358098432s_1s_4^2s_3^4 + 1722702336s_1s_4^3s_3^3 + 415084752s_1s_4^4s_3^2 + 102414432s_2^4s_4s_3^2 \\
& + 559891416s_2^3s_4s_3^3 + 369445084s_2^2s_4^2s_3^2 + 1484029152s_2^2s_4^3s_3 + 1353056112s_2^2s_4^4s_3^2 \\
& + 495768696s_2^2s_4^5s_3^2 + 1653655680s_2s_4s_3^5 + 1972813824s_2s_4^2s_3^4 + 1002000384s_2s_4^3s_3^3 \\
& + 246042288s_2s_4^4s_3^2 + 7411621716s_1^3s_2s_3^2 + 4726627704s_1^2s_2^2s_3^2 + 9784763928s_1^2s_2s_3^3 \\
& + 1118041476s_1s_2^3s_3^2 + 3981112104s_1s_2^2s_3^3 + 6000600384s_1s_2s_3^4 + 233364720s_1^2s_4^2s_3^2 \\
& + 312033888s_1^2s_4^3s_2^2 + 156695040s_1^2s_4^4s_2 + 436777920s_1^5s_4s_3^2 + 1199305440s_1^4s_4s_3^3 \\
& + 824512608s_1^4s_2^2s_3^2 + 1644991200s_1^3s_4s_3^2 + 1699172928s_1^3s_4^2s_3^2 + 570296376s_1^3s_4^3s_3^2 \\
& + 783820512s_1^2s_4^4s_3^2 + 172316160s_1^2s_4^5s_3 + 3133604556s_1^4s_2s_3^2 + 2940934716s_1^3s_2^2s_3^2 \\
& + 5908370256s_1^3s_2s_3^3 + 1043370612s_1^2s_2^2s_3^2 + 3882343104s_1^2s_2^2s_3^3 + 5577744384s_1^2s_2s_3^4 \\
& + 3363841224s_1^4s_4s_2s_3^2 + 3197933784s_1^3s_4s_2^2s_3^2 + 6473024064s_1^3s_4s_2s_3^3 + 4276815696s_1^3s_4^2s_2s_3^2 \\
& + 1117142568s_1^2s_4^3s_2^2s_3 + 4258778976s_1^2s_4^4s_2s_3^2 + 2808120624s_1^2s_4^5s_2s_3 + 6056754336s_1^2s_4^6s_2s_3^2 \\
& + 5692755360s_1^2s_4^7s_2s_3 + 1999002744s_1^2s_4^8s_2s_3 + 784753920s_1^5s_4s_2s_3 + 993980160s_1^4s_4s_2^2s_3 \\
& + 1338839820s_1^4s_4^2s_2s_3 + 500446080s_1^3s_4^3s_2s_3 + 1281166740s_1^3s_4^4s_2s_3 + 901979172s_1^3s_4^5s_2s_3 \\
& + 116670240s_1^2s_4^6s_2s_3 + 444120060s_1^2s_4^7s_2s_3 + 593353368s_1^2s_4^8s_2s_3 + 277834752s_1^5s_4s_2s_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +58118900s_2^4s_4^2s_3s_1 + 5195026944s_4^4s_1^2 + 2393020800s_5^5s_1 + 1147613568s_3^4s_2^2 \\
& +1329413760s_3^5s_2 + 130318848s_4^4s_3^3 + 21365856s_4^5s_2^2 + 331430400s_3^6s_4 \\
& +576829440s_3^5s_4^2 + 391481856s_3^4s_4^3 + 787966380s_1^5s_3 + 8079780s_2^5s_3 \\
& +1384128s_4^6s_3 + 347368500s_1^5s_2 + 399006000s_4^4s_2^2 + 204363000s_2^3s_1^3 \\
& +52434000s_2^4s_1^2 + 67277952s_4^4s_1^3 + 15137280s_4^5s_1^2 + 67068000s_6^6s_4 \\
& +159051600s_1^5s_4^2 + 147536640s_1^4s_4^3 + 388454400s_3^6 + 78732000s_1^6 \\
& +6448500s_2^5s_1 + 1347840s_4^6s_1 + 517065120s_1^5s_2^2 + 1420111440s_1^4s_3^3 \\
& +1948276800s_3^4s_1^3 + 1335156480s_3^5s_1^2 + 75232800s_1^6s_3 + 365644800s_3^6s_1 \\
& +11349120s_2^5s_4s_3s_1 + 35420976s_4^5s_2s_3s_1 + 102502368s_4^4s_2^2s_3s_1 + 115379364s_2^3s_4^3s_3s_1 \\
& +150169032s_4^4s_4s_3^3s_1 + 859186176s_2^3s_4s_3^3s_1 + 568625200s_2^3s_4^2s_3^2s_1 + 2305761312s_2^2s_4s_3^4s_1 \\
& +2184953024s_2^2s_4^2s_3^3s_1 + 759598008s_2^2s_4^3s_3^2s_1 + 2485992960s_2s_4s_5^5s_1 + 3101496576s_2s_4^2s_3^4s_1 \\
& +1546237440s_2s_4^3s_3^3s_1 + 357398496s_2s_4^4s_3^2s_1 + 460481760s_1^4s_4s_2^2s_3^2 + 230240880s_1^3s_4s_2^3s_2^2 \\
& +944738640s_1^3s_4s_2^2s_3^3 + 630608328s_1^3s_4^2s_2^2s_3^2 + 51164640s_1^2s_4s_2^4s_3^2 + 314912880s_1^2s_4s_2^3s_3^3 \\
& +210202776s_1^2s_4^2s_2^3s_3^2 + 860529600s_1^2s_4s_2^2s_3^3 + 862103712s_1^2s_4^2s_2^2s_3^3 + 279791280s_1^2s_4^2s_2^2s_3^2 \\
& +84078000s_1^5s_4s_2^2s_3 + 56052000s_1^4s_4s_2^3s_3 + 153580320s_1^4s_4^2s_2^2s_3 + 18684000s_1^3s_4s_2^4s_3 \\
& +76790160s_1^3s_4^2s_2^3s_3 + 102326328s_1^3s_4^3s_2^2s_3 + 3114000s_1^2s_4s_2^5s_3 + 17064480s_1^2s_4^2s_2^4s_3 \\
& +34108776s_1^2s_4^3s_2^3s_3 + 29672352s_1^2s_4^4s_2^2s_3 + 1422040s_2^5s_4^2s_3s_1 + 207600s_2^6s_4s_3s_1 \\
& +3173472s_4^5s_2^2s_3s_1 + 4945392s_4^4s_2^3s_3s_1 + 3789864s_4^5s_3^3s_1 + 4263720s_2^5s_4s_3^2s_1 \\
& +34990320s_4^4s_4s_3^3s_1 + 23355864s_2^4s_4^2s_3^2s_1 + 143421600s_2^3s_4s_3^4s_1 \\
& +143683952s_2^3s_4^2s_3^3s_1 + 46631880s_2^3s_4^3s_2^2s_1 + 293621760s_2^2s_4s_5^5s_1 + 392403264s_2^2s_4^2s_3^4s_1 \\
& +191020512s_2^2s_4^3s_3^3s_1 + 40500000s_2^2s_4^4s_3^2s_1 + 82808064s_4^4s_3^3s_1s_2 + 102326328s_1^4s_4^3s_3s_2 \\
& +50446800s_1^6s_4s_3s_2 + 115185240s_1^5s_4^2s_3s_2 + 9520416s_4^5s_1^2s_3s_2 + 260504064s_4^4s_3^3s_1s_2 \\
& +240192000s_3^6s_4s_1s_2 + 44508528s_4^4s_1^3s_3s_2 + 63159552s_4^4s_2^2s_1 + 23034240s_5^5s_4s_2s_1 \\
& +35342880s_4^2s_4s_1 + 69879888s_2^3s_4^3s_1 + 19266336s_4^5s_2^2s_1 + 532972800s_3^5s_4s_1 \\
& +11669280s_2^5s_3s_1 + 1238976s_4^6s_3s_1 + 4639920s_2^5s_4s_2^3 + 38133120s_4^2s_4s_3^3 \\
& +25749744s_4^4s_4s_2^3 + 156540000s_2^3s_4s_3^4 + 158721632s_2^3s_4^2s_3^3 + 52210008s_2^3s_4^3s_3^2 \\
& +320981760s_2^2s_4s_5^5 + 434355264s_2^2s_4^2s_3^4 + 214438176s_2^2s_4^3s_3^3 + 46146240s_2^2s_4^4s_2^2 \\
& +18422400s_1^2s_4^2s_2^2 + 37229760s_1^2s_4^3s_2^2 + 32783616s_1^2s_4^4s_2^2 + 567531360s_1^4s_2^2s_3^2 \\
& +283765680s_1^3s_2^3s_3^2 + 1165544640s_1^3s_2^3s_3^3 + 63059040s_1^2s_2^4s_3^2 + 388514880s_1^2s_2^3s_3^3 \\
& +1062720000s_1^2s_2^2s_3^4 + 5463936s_4^4s_2^3s_1 + 3552768s_4^5s_2^2s_1 + 1535200s_2^5s_4^2s_1 \\
& +4136640s_2^4s_4^3s_1 + 255600s_2^6s_3s_1 + 288000s_2^6 + 6134400s_4^4s_2^3 + 62110800s_1^6s_3s_2 \\
& +4050432s_4^5s_2^2 + 240000s_2^6s_4 + 1678000s_2^5s_4^2 + 4579200s_2^4s_4^3 + 1088916480s_3^5s_1^2s_2 \\
& +1057536s_4^6s_2 + 5631120s_2^5s_3^2 + 46311120s_2^4s_3^3 + 190238400s_3^4s_2^3 + 1594080000s_3^4s_1^3s_2 \\
& +390332160s_3^5s_2^2 + 273600s_2^6s_3 + 109350000s_1^5s_2^2 + 72900000s_4^4s_2^2 + 425648520s_1^5s_2^2s_2 \\
& +24300000s_2^4s_1^3 + 4050000s_2^5s_1^2 + 320025600s_3^6s_2 + 65610000s_1^6s_2 + 912384s_4^6s_1s_2 \\
& +270000s_2^6s_1 + 345361320s_1^5s_4s_2^3s_2 + 944738640s_4^4s_4s_2^3s_2 + 630608328s_4^4s_4^2s_2^2s_2 \\
& +1290794400s_1^3s_4s_4^2s_2 + 1293155568s_1^3s_4^2s_2^3s_2 + 419686920s_1^3s_4^3s_2^2s_2 + 880865280s_1^2s_4s_2^5s_2 \\
& +1177209792s_1^2s_4^2s_2^4s_2 + 573061536s_1^2s_4^3s_2^3s_2 + 121500000s_1^2s_4^4s_2^2s_2 + 12967776s_4^5s_2^3s_1s_2 \\
& +401402880s_3^5s_4s_1s_2 + 803520s_4^6s_3s_1s_2) / ((4 + 9s_1 + 3s_2 + 12s_3 + 6s_4)(1 + s_2) \\
& (9 + 18s_1 + 6s_2 + 24s_3 + 14s_4)(1 + s_4)(6 + 15s_1 + 5s_2 + 20s_3 + 6s_4)(1 + s_3)(1 + s_1) \\
& (13 + 30s_1 + 10s_2 + 44s_3 + 12s_4)(19 + 48s_1 + 16s_2 + 60s_3 + 18s_4) \\
& (27 + 60s_1 + 20s_2 + 90s_3 + 24s_4))
\end{aligned}$$

Au d enominateur, on identifie 4 fl eches et 6 sommets de rupture :

$$\begin{aligned}
a_1 : 1 + s_1 &= 0, \\
a_2 : 1 + s_2 &= 0, \\
a_3 : 1 + s_3 &= 0, \\
a_4 : 1 + s_4 &= 0, \\
v_1 : 9 + 18s_1 + 6s_2 + 24s_3 + 14s_4 &= 0, \\
v_2 : 6 + 15s_1 + 5s_2 + 20s_3 + 6s_4 &= 0, \\
v_3 : 13 + 30s_1 + 10s_2 + 44s_3 + 12s_4 &= 0, \\
v_4 : 19 + 48s_1 + 16s_2 + 60s_3 + 18s_4 &= 0, \\
v_5 : 27 + 60s_1 + 20s_2 + 90s_3 + 24s_4 &= 0, \\
v_6 : 4 + 9s_1 + 3s_2 + 12s_3 + 6s_4 &= 0.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{v_1} &= 1/2, \gamma_2^{v_1} = 3/2, \gamma_3^{v_1} = 3/8, \gamma_4^{v_1} = 9/14, \\
\gamma_1^{v_2} &= 2/5, \gamma_2^{v_2} = 6/5, \gamma_3^{v_2} = 3/10, \gamma_4^{v_2} = 1, \\
\gamma_1^{v_3} &= 13/30, \gamma_2^{v_3} = 13/10, \gamma_3^{v_3} = 13/44, \gamma_4^{v_3} = 13/12, \\
\gamma_1^{v_4} &= 19/48, \gamma_2^{v_4} = 19/16, \gamma_3^{v_4} = 19/60, \gamma_4^{v_4} = 19/18, \\
\gamma_1^{v_5} &= 9/20, \gamma_2^{v_5} = 27/20, \gamma_3^{v_5} = 3/10, \gamma_4^{v_5} = 9/8, \\
\gamma_1^{v_6} &= 4/9, \gamma_2^{v_6} = 4/3, \gamma_3^{v_6} = 1/3, \gamma_4^{v_6} = 2/3.
\end{aligned}$$

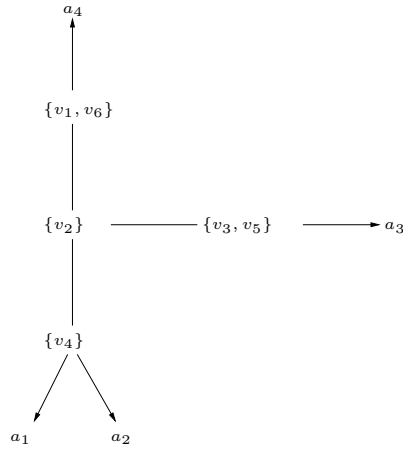
On calcule

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{v_1}(s_2, s_3, s_4) &= \frac{(2s_4 + 3)s_4}{(1 + s_4)(1 + 2s_4)}, \\
\mathcal{A}_{v_2}(s_2, s_3, s_4) &= \frac{-16(30s_3s_4 - 20s_3 - 6 + 3s_4 + 9s_4^2)}{(1 + 20s_3 + 6s_4)(1 + 4s_3)(1 + 6s_4)}, \\
\mathcal{A}_{v_3}(s_2, s_3, s_4) &= \frac{2(4s_3 + 3)s_3}{(1 + 2s_3)(1 + 4s_3)}, \\
\mathcal{A}_{v_4}(s_2, s_3, s_4) &= \frac{-(1200s_2s_3^2 - 2400s_3^2 + 320s_2^2s_3 + 720s_2s_4s_3 - 1160s_2s_3 + 1040s_3 - 1440s_3s_4 + 570 + 312s_4 + 96s_2^2s_4 + 195s_2 - 240s_2^2 - 348s_2s_4 - 216s_4^2 + 108s_2s_4^2)}{(1 + s_2)(-29 + 16s_2 + 60s_3 + 18s_4)(1 + 20s_3 + 6s_4)}, \\
\mathcal{A}_{v_5}(s_2, s_3, s_4) &= \frac{(2s_3 + 3)s_3}{(1 + s_3)(1 + 2s_3)}, \\
\mathcal{A}_{v_6}(s_2, s_3, s_4) &= \frac{8(3s_4 + 2)s_4}{(1 + 6s_4)(1 + 2s_4)},
\end{aligned}$$

dont on d eduit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{v_1} : \{1, 2, 3\} \amalg \{4\}, & \quad \mathcal{P}_{v_2} : \{1, 2\} \amalg \{3\} \amalg \{4\}, & \quad \mathcal{P}_{v_3} : \{1, 2, 4\} \amalg \{3\}, \\
\mathcal{P}_{v_4} : \{1\} \amalg \{2\} \amalg \{3, 4\}, & \quad \mathcal{P}_{v_5} : \{1, 2, 4\} \amalg \{3\}, & \quad \mathcal{P}_{v_6} : \{1, 2, 3\} \amalg \{4\}.
\end{aligned}$$

On a donc  $E_{trivial} = \emptyset$ . Il y a deux ensembles stables  $E_1 = \{v_1, v_6\}$  et  $E_2 = \{v_3, v_5\}$ , et deux sommets de bifurcation  $v_2$  et  $v_4$ . Avec les r egles de connexion, on obtient le squelette  $S(f)$  suivant :

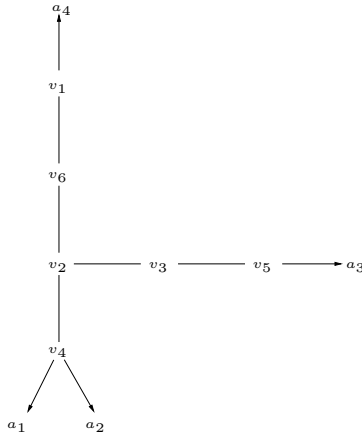


On veut maintenant connecter entre eux les sommets des deux sous-ensembles stables. On a  $v_{min,3} = v_3 \in E_2$  et  $v_{min,4} = v_1 \in E_2$ . D'autre part,

$$Z_{top,0}(f_3)(s_3) = \frac{1124s_3^2 + 1506s_3 + 351}{9(1 + s_3)(13 + 44s_3)(3 + 10s_3)},$$

$$Z_{top,0}(f_4)(s_4) = \frac{9 + 8s_4}{9(1 + s_4)(9 + 14s_4)},$$

Au dénominateur de  $Z_{top,0}(f_3)(s_3)$ , on lit  $\gamma_3^{v_3}$  et  $\gamma_3^{v_5}$ . En revanche, au dénominateur de  $Z_{top,0}(f_4)(s_4)$ , on lit  $\gamma_4^{v_1}$ . On a donc l'arbre  $T(f)$  suivant



Il reste à calculer et positionner les décorations. On commence par  $G_{[v_1, a_4]}$  : on a calculé  $Z_{top,0}(f_4)(s_4)$ . On a

$$\frac{\mathcal{A}_{v_1}}{\nu_{v_1}} = \frac{(9 + 14s_4)Z_{top,0}(f_4)(\frac{-19}{14})}{9} = \frac{6}{5}.$$

On a donc  $\gamma_4^{v_1} = 9/14$  et  $T_{v_1} = 5$ . On obtient les deux décorations (2, 7) pour  $v_1$ .

Pour  $G_{[v_3, a_3]}$ , on a

$$\frac{\mathcal{A}_{v_3}}{\nu_{v_3}} = \frac{(13 + 44s_3)Z_{top,0}(f_3)\left(\frac{-13}{44}\right)}{13} = \frac{10}{9},$$

$$\frac{\mathcal{A}_{v_5}}{\nu_{v_5}} = \frac{(27 + 90s_3)Z_{top,0}(f_3)\left(\frac{-27}{90}\right)}{27} = \frac{2}{21},$$

d'où  $T_{v_3} = 9$  et  $T_{v_5} = 63$ . Alors on obtient l'équation

$$(F) : -p^2 - 3p + 10 = 0$$

d'où  $p_{v_5} = 2$  et  $a_{v_5} = 45$ . Enfin, on a

$$a_{v_3}p_{v_3} - a_{v_3} - p_{v_3} = 9 \text{ et } \frac{a_{v_3} + p_{v_3}}{2a_{v_3}p_{v_3}} = \frac{13}{22}$$

d'où  $a_{v_3}, p_{v_3} \in \{2, 11\}$ .

On a  $v_{min,2} = v_4$  et  $v_{min,1} = v_4$ . De plus,

$$Z_{top,0}(f_1)(s_1) = \frac{18s_1 + 19}{(1 + s_1)(19 + 48s_1)},$$

$$Z_{top,0}(f_2)(s_2) = \frac{1}{(1 + s_2)}.$$

Donc on utilise  $Z_{top,0}(f_1)(s_1)$  pour calculer les décorations de  $v_4$ . On a

$$\frac{\mathcal{A}_{v_1}}{\nu_{v_1}} = \frac{(19 + 48s_1)Z_{top,0}(f_1)\left(\frac{-19}{48}\right)}{19} = \frac{30}{29},$$

donc  $T_{v_4} = 29$ . On obtient les deux décorations  $(16, 3)$  pour  $v_4$ .

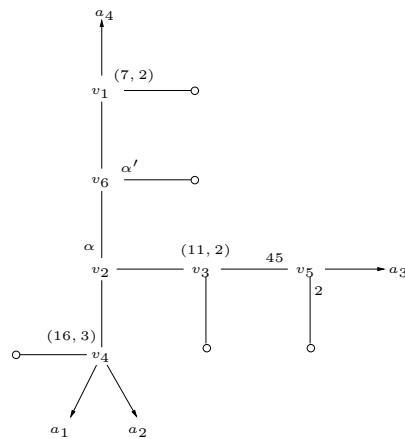
On a  $v_2, v_6 \in \mathcal{C}$ . On veut maintenant positionner les décorations de  $v_2$  et  $v_6$ .

$$\begin{aligned} Z_{top,0}(f_2f_3)(s_2s_3) = & (1000s_2^3 + 950s_2^3s_3 + 12485s_2^2s_3 + 8390s_2^2s_3^2 + 3850s_2^2 + 26992s_2s_3 \\ & + 40716s_2s_3^2 + 18520s_3^3s_2 + 4935s_2 + 2106 + 16056s_3 + 36864s_3^2 \\ & + 22480s_3^3) / (1 + s_3)(27 + 20s_2 + 90s_3)(13 + 10s_2 + 44s_3) \\ & (6 + 5s_2 + 20s_3)(1 + s_2), \end{aligned}$$

$$Z_{top,0}(f_2f_4)(s_2s_4) = \frac{18s_2^2 + 15s_2^2s_4 + 84s_2s_4 + 34s_2s_4^2 + 51s_2 + 36 + 86s_4 + 48s_4^2}{(1 + s_2)(1 + s_4)(9 + 6s_2 + 14s_4)(4 + 3s_2 + 6s_4)}.$$

$6 + 5s_2 + 20s_3$  apparaît au dénominateur de  $Z_{top,0}(f_2f_3)$  mais  $6 + 5s_2 + 6s_4$  n'apparaît pas au dénominateur de  $Z_{top,0}(f_2f_4)$ . Donc la décoration proche de  $v_2$  strictement supérieure à 1 est située sur l'arête  $[v_2, v_6]$ .

$4 + 3s_2 + 6s_4$  apparaît au dénominateur de  $Z_{top,0}(f_2f_4)$ . Donc la décoration proche de  $v_2$  strictement supérieure à 1 est située sur l'arête reliant  $v_6$  à un sommet de valence 1.



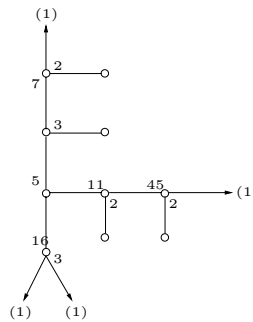
Pour  $v_3$ ,  $11 = \max(11, 2)$  donc 11 est sur l'arête  $[v_2, v_3]$  et 2 sur l'arête reliant  $v_3$  à un sommet de valence 1. Pour  $v_1$ ,  $7 = \max(7, 2)$  donc 7 est sur l'arête  $[v_1, v_6]$  et 2 sur l'arête reliant  $v_1$  à un sommet de valence 1.

Enfin, pour  $v_4$ ,  $16 = \max(16, 3)$  donc 16 est sur l'arête  $[v_4, v_2]$ . D'autre part,  $19 + 16s_2 + 60s_3$  n'apparaît pas au dénominateur de  $Z_{top,0}(f_2f_3)$  donc 3 est située sur l'arête  $[v_4, a_2]$ .

Enfin, on calcule

$$\alpha = \frac{1}{\gamma_2^{v_2} - 1} = 5 \text{ et } \alpha' = \frac{1}{2\gamma_4^{v_6} - 1} = 3.$$

Finalement, on obtient le diagramme  $D_m(f)$  suivant :



### 3.7 Un théorème généralisé de la monodromie.

Pour une définition du polynôme multi-variables d'Alexander d'un germe réduit, on se réfère à [EN] p.37.

**Théorème 3.7.1 (Théorème généralisé de la monodromie.)**. *Soit  $f$  un germe de courbe plane admettant une singularité en  $(0,0)$  et soit  $f = \prod_{j=1}^r f_j^{n_j}$  sa décomposition en produit de composantes irréductibles. Soit  $\tilde{f} = \prod_{j=1}^r f_j$  le germe réduit associé à  $f$ . On considère les paquets  $f_j^{n_j}$  pour  $j = 1, \dots, r$  et  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  la fonction zêta-topologique locale multi-variables associée à  $f$  pour la décomposition  $\mathcal{D}$ .*

*Soit  $(\nu + N_1 s_1 + \dots + N_r s_r)$  un facteur du dénominateur de  $Z_{top,0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  vérifiant  $N_j \neq 0$  pour tout  $j$ , et soient  $(1 + n_j s_j)$  pour  $j \in \{1, \dots, r\}$  les autres facteurs. Alors*

$$\left( \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_1}{N_1}\right), \dots, \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_r}{N_r}\right) \right)$$

*annule le polynôme multi-variables d'Alexander de  $\tilde{f}$ .*

*Démonstration.* D'après [EN] p.162, on a une expression du polynôme d'Alexander multi-variables du germe  $\tilde{f}$  en fonction de son diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann donnée par

$$\Delta_f(t_1, \dots, t_r) = \prod_v (t_1^{n_{v,1}} \dots t_r^{n_{v,r}} - 1)^{\delta_v - 2},$$

où  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de  $\tilde{D}(\tilde{f})$ ,  $\tilde{D}(\tilde{f})$  désigne le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann de  $\tilde{f}$ ,  $\delta_v$  désigne la valence du sommet  $v$  et pour  $j = \{1, \dots, r\}$ ,  $n_{v,j} = (\rho_v, f_j)_0$  où  $\rho_v$  est une curvette du sommet  $v$ .

On a vu au paragraphe 1.8 la relation existant entre le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann d'un germe et son diagramme minimal de Newton : elle ne concerne que les sommets de valence 1. Puisqu'on a choisi la décomposition  $\mathcal{D}$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$  et tout sommet de rupture  $v$  de  $D_m(f)$ , il existe  $n_{v,j}$  tel que  $N_{v,j} = n_j n_{v,j}$ . D'autre part, si  $v_0$  est un sommet de valence 1, il est connecté à un sommet de rupture  $v$ . Soit  $p = \Delta_{[v,v_0]}$ . Alors  $n_{v_0,j} = p n_{v,j}$ . On peut donc n'utiliser que les décorations du diagramme minimal de Newton pour exprimer le polynôme d'Alexander multi-variables de  $f$ .

Soit  $(\nu + N_1 s_1 + \dots + N_r s_r)$  un facteur du dénominateur de  $Z_{top,0}(f)$  vérifiant  $N_j \neq 0$  pour tout  $j$ . Alors d'après ce qu'on a vu dans la proposition 3.6.16, il existe un unique sommet de rupture  $v \in D(f)$  tel que  $\nu = \nu_v$  et  $N_j = N_{v,j}$  pour tout  $j$ .

Si aucun sommet de valence 1 n'est relié à  $v$ , alors comme les

$$\exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_j}{N_{v,j}}\right) = \exp\left(\frac{-2i\pi\nu}{n_{v,j}}\right)$$

sont racines  $n_{v,j}$ -èmes de l'unité, il est clair que

$$\left( \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_1}{N_{v,1}}\right), \dots, \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_r}{N_{v,r}}\right) \right)$$

annule le polynôme multi-variables d'Alexander de  $f$ .

S'il existe un unique sommet  $v_0$  de valence 1 relié à  $v$  par une arête, soit  $p = \Delta_{[v,v_0]}$ . Alors  $N_{v_0,j} = pN_{v,j}$  pour tout  $j$ , c'est à dire que  $p$  divise  $n_{v,j}$ . Donc d'une part,  $(t_1^{n_{v_0,1}} \dots t_r^{n_{v_0,r}} - 1)$  divise  $(t_1^{n_{v,1}} \dots t_r^{n_{v,r}} - 1)$  et d'autre part, les  $(\omega_1, \dots, \omega_r)$ , où  $\omega_j$  est une racine  $n_{v,j}$ -ème de l'unité qui n'est pas une racine  $\frac{n_{v,j}}{p}$ -ème de l'unité, sont racines de  $\Delta_f(t_1, \dots, t_r)$ . Or si  $\tilde{v}$  est le sommet précédant  $v$ , on a  $\nu_v = p\tilde{\nu} + q$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$  donc  $p$  ne divise pas  $\nu_v$ . Par conséquent,

$$\left( \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_1}{N_{v,1}}\right), \dots, \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_r}{N_{v,r}}\right) \right)$$

annule le polynôme multi-variables d'Alexander de  $f$ .

Enfin, s'il existe deux sommets  $v_0$  et  $v_1$  de valence 1 reliés à  $v$  par une arête, soient  $p = \Delta_{[v,v_0]}$  et  $a = \Delta_{[v,v_1]}$ . Alors puisque  $v$  est connecté à deux sommets de valence 1, il n'admet pas de sommet précédent. Par conséquent,  $\nu_v = a + p$ , et donc ni  $a$  ni  $p$  ne divisent  $\nu_v$ . Avec le même raisonnement que ci-dessus,

$$\left( \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_1}{N_{v,1}}\right), \dots, \exp\left(\frac{-2i\pi\nu n_r}{N_{v,r}}\right) \right)$$

annule le polynôme multi-variables d'Alexander de  $f$ . □



## 3.8 Polytope de quasiadjonction.

### 3.8.1 Définition.

Dans [Li], l'auteur définit la notion de polytope de quasiadjonction d'un germe  $f$ . Soit  $f = f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r}$  la décomposition de  $f$  en produit de composantes irréductibles. Nous allons ici rappeler les résultats de cet article qui permettent de calculer les faces du polytope de quasiadjonction.

Soit  $D_M(f)$  le diagramme maximal de Newton de  $f$ . On rappelle que les sommets de  $D_M(f)$  sont en bijection avec les sommets du graphe de résolution minimale de  $f$ .

**Définition 3.8.1.** Soit  $\phi \in \mathbb{C}[x, y]$  et  $v$  un sommet de  $D_M(f)$ . Le sommet  $v$  est alors aussi un sommet de  $D_M(f\phi)$ .

On définit le nombre  $e_v(\phi)$  par la somme sur toutes les flèches de  $D_M(f\phi)$  représentant  $\phi$  du produit des nombres adjacents aux géodésiques joignant  $v$  à une de ces flèches.

Soient  $v_1, \dots, v_M$  les sommets de  $D_M(f)$ . Pour  $\phi \in \mathbb{C}[x, y]$ , soit  $\mathcal{S}_\phi$  le système d'inéquations suivant dans  $\mathbb{R}^r$  :

$$\mathcal{S}_\phi : \begin{cases} N_{v_1,1}s_1 + \cdots + N_{v_1,r}s_r \geq N_{v_1,1} + \cdots + N_{v_1,r} - \nu_{v_1} - e_{v_1}(\phi) \\ \vdots \\ N_{v_M,1}s_1 + \cdots + N_{v_M,r}s_r \geq N_{v_M,1} + \cdots + N_{v_M,r} - \nu_{v_M} - e_{v_M}(\phi) \end{cases}$$

Enfin, soit

$$E := \{\phi \in \mathbb{C}[x, y] / \mathcal{S}_\phi \text{ a des solutions dans } [0, 1]^r\}.$$

**Définition 3.8.2.** Les faces du polytope de quasiadjonction de  $f$  sont les solutions dans le cube unité  $[0, 1]^r$  des systèmes

$$\tilde{\mathcal{S}}_\phi : \begin{cases} N_{v_1,1}s_1 + \cdots + N_{v_1,r}s_r \geq N_{v_1,1} + \cdots + N_{v_1,r} - \nu_{v_1} - e_{v_1}(\phi) \\ \vdots \\ N_{v_M,1}s_1 + \cdots + N_{v_M,r}s_r \geq N_{v_M,1} + \cdots + N_{v_M,r} - \nu_{v_M} - e_{v_M}(\phi) \\ \text{avec égalité pour au moins une équation} \end{cases}$$

pour tout  $\phi \in E$ .

### 3.8.2 Une nouvelle caractérisation.

Nous allons à présent donner une nouvelle caractérisation du polytope de quasiadjonction de  $f$ .

**Théorème 3.8.3.** Soient  $v'_1, \dots, v'_{M'}$  les sommets de rupture du diagramme minimal  $D_m(f)$  de Newton de  $f$ . Alors les faces du polytope de quasiadjonction de  $f$  sont les solutions dans le cube unité  $[0, 1]^r$  des systèmes

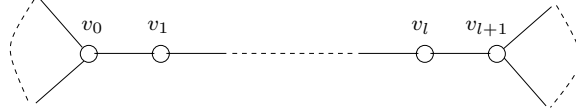
$$\mathcal{S}_\phi : \begin{cases} N_{v'_1,1}s_1 + \cdots + N_{v'_1,r}s_r \geq N_{v'_1,1} + \cdots + N_{v'_1,r} - \nu_{v'_1} - e_{v'_1}(\phi) \\ \vdots \\ N_{v'_{M'},1}s_1 + \cdots + N_{v'_{M'},r}s_r \geq N_{v'_{M'},1} + \cdots + N_{v'_{M'},r} - \nu_{v'_{M'}} - e_{v'_{M'}}(\phi) \\ \text{avec égalité pour au moins une équation} \end{cases}$$

pour tout  $\phi \in E$ .

**Remarque 3.8.4.** Les sommets de rupture de  $D_M(f)$  et ceux de  $D_m(f)$  sont en bijection. Il suffit donc de montrer que les sommets de valence 1 et 2 de  $D_M(f)$  induisent des équations inutiles dans les systèmes  $\mathcal{S}_\phi$ .

La démonstration est basée sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 3.8.5.** On considère une chaîne de la forme



Alors si  $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$  est tel que

$$\begin{cases} N_{v_0,1}x_1 + \dots + N_{v_0,r}x_r \geq N_{v_0,1} + \dots + N_{v_0,r} - \nu_{v_0} - e_{v_0}(\phi) \\ N_{v_{l+1},1}x_1 + \dots + N_{v_{l+1},r}x_r \geq N_{v_{l+1},1} + \dots + N_{v_{l+1},r} - \nu_{v_{l+1}} - e_{v_{l+1}}(\phi) \end{cases}$$

on a

$$N_{v_k,1}x_1 + \dots + N_{v_k,r}x_r \geq N_{v_k,1} + \dots + N_{v_k,r} - \nu_{v_k} - e_{v_k}(\phi)$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, l\}$ .

*Démonstration.* On reprend les notations du paragraphe 3.2.2.

Soient  $h_0$ ,  $h_k$  et  $h_{l+1}$  les formes linéaires suivantes :

$$\begin{cases} h_0(x_1, \dots, x_r) = N_{v_0,1}x_1 + \dots + N_{v_0,r}x_r \\ h_k(x_1, \dots, x_r) = N_{v_k,1}x_1 + \dots + N_{v_k,r}x_r \\ h_{l+1}(x_1, \dots, x_r) = N_{v_{l+1},1}x_1 + \dots + N_{v_{l+1},r}x_r \end{cases}$$

et  $K_0$ ,  $K_k$  et  $K_{l+1}$  les constantes suivantes :

$$\begin{cases} K_0 = N_{v_0,1} + \dots + N_{v_0,r} - \nu_{v_0} - e_{v_0}(\phi) \\ K_k = N_{v_k,1} + \dots + N_{v_k,r} - \nu_{v_k} - e_{v_k}(\phi) \\ K_{l+1} = N_{v_{l+1},1} + \dots + N_{v_{l+1},r} - \nu_{v_{l+1}} - e_{v_{l+1}}(\phi) \end{cases}$$

Montrons tout d'abord que  $h_0$ ,  $h_k$  et  $h_{l+1}$  sont liées. En effet, si l'on calcule les mineurs d'ordre 3 suivants,

$$D_{i,j,s} = \begin{vmatrix} N_{v_0,i} & N_{v_k,i} & N_{v_{l+1},i} \\ N_{v_0,j} & N_{v_k,j} & N_{v_{l+1},j} \\ N_{v_0,s} & N_{v_k,s} & N_{v_{l+1},s} \end{vmatrix}$$

en utilisant le lemme 3.2.6, on obtient

$$D_{i,j,s} = 0 \text{ pour tous } i, j, s \in \{1, \dots, r\}.$$

$\{h_0, h_k, h_{l+1}\}$  est donc de rang inférieur ou égal à 2.

1. Supposons que  $\{h_0, h_k, h_{l+1}\}$  est de rang 2. Il existe donc un mineur d'ordre 2

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} N_{v_0,i} & N_{v_{l+1},i} \\ N_{v_0,j} & N_{v_{l+1},j} \end{vmatrix}$$

non nul, et une relation de dépendance linéaire

$$h_k = \alpha h_0 + \beta h_{l+1}$$

où toujours en utilisant le lemme 3.2.6,

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} N_{v_k,i} & N_{v_{l+1},i} \\ N_{v_k,j} & N_{v_{l+1},j} \end{vmatrix}}{D_{i,j}} = \frac{\Delta_{[v_k,v_{l+1}]}}{\Delta_{[v_0,v_{l+1}]}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} N_{v_0,i} & N_{v_k,i} \\ N_{v_0,j} & N_{v_k,j} \end{vmatrix}}{D_{i,j}} = \frac{\Delta_{[v_0,v_k]}}{\Delta_{[v_0,v_{l+1}]}}.$$

Pour montrer le lemme, il suffit maintenant de montrer que

- (a)  $\alpha K_0 + \beta K_{l+1} \geq K_k$ ,  
 (b) pour  $(x_1, \dots, x_r) \in [0, 1]^r$ , si  $h_k(x_1, \dots, x_r) = K_k$  et  $h_0(x_1, \dots, x_r) > K_0$ , alors

$$h_{l+1}(x_1, \dots, x_r) \leq K_{l+1},$$

- (c) pour  $(x_1, \dots, x_r) \in [0, 1]^r$ , si  $h_k(x_1, \dots, x_r) = K_k$  et  $h_{l+1}(x_1, \dots, x_r) > K_{l+1}$ , alors

$$h_0(x_1, \dots, x_r) \leq K_0.$$

Pour (a), d'une part d'après la proposition 3.2.7, on a

$$\Delta_{[v_k,v_{l+1}]} \sum_{j=1}^r N_{v_0,j} + \Delta_{[v_0,v_k]} \sum_{j=1}^r N_{v_{l+1},j} = \Delta_{[v_0,v_{l+1}]} \sum_{j=1}^r N_{v_k,j},$$

et d'autre part, d'après la proposition 3.2.5, on a

$$\Delta_{[v_k,v_{l+1}]} \nu_{v_0} + \Delta_{[v_0,v_k]} \nu_{v_{l+1}} = \Delta_{[v_0,v_{l+1}]} \nu_{v_k}.$$

Enfin, il reste à montrer que

$$\Delta_{[v_0,v_{l+1}]} e_{v_k}(\phi) - \Delta_{[v_k,v_{l+1}]} e_{v_0}(\phi) - \Delta_{[v_0,v_k]} e_{v_{l+1}}(\phi) \geq 0.$$

Pour  $i \in \{0, \dots, l+1\}$ , soit  $C_i$  la somme sur toutes les géodésiques de  $D_m(f\phi)$  joignant  $v_i$  à une flèche représentant  $\phi$  et ne passant pas par la chaîne  $[v_0, v_{l+1}]$  du produit des nombres adjacents à cette géodésique. On a alors :

$$\begin{cases} e_{v_0}(\phi) = \alpha_0 C_0 + \beta_0 p_1 C_1 + \dots + \beta_0 p_k C_k + \dots + \beta_0 p_l C_l + \beta_0 C_{l+1} \\ e_{v_k}(\phi) = p_k C_0 + a_1 p_k C_1 + \dots + a_k p_k C_k + \dots + a_k p_l C_l + a_k C_{l+1} \\ e_{v_{l+1}}(\phi) = p_{l+1} C_0 + a_1 p_{l+1} C_1 + \dots + a_k p_{l+1} C_k + \dots + a_{l+1} C_{l+1} \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \Delta_{[v_0,v_{l+1}]} e_{v_k}(\phi) - \Delta_{[v_k,v_{l+1}]} e_{v_0}(\phi) - \Delta_{[v_0,v_k]} e_{v_{l+1}}(\phi) = \\ & \Delta_{[v_0,v_1]} \Delta_{[v_k,v_{l+1}]} C_1 + \dots + \Delta_{[v_0,v_k]} \Delta_{[v_k,v_{l+1}]} C_k + \dots + \Delta_{[v_0,v_k]} \Delta_{[v_l,v_{l+1}]} C_l \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

Donc  $\alpha K_0 + \beta K_{l+1} \geq K_k$ . Enfin, comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement positifs, (b) et (c) découlent de (a).

2. Si  $\{h_0, h_k, h_{l+1}\}$  est de rang 1, tous les mineurs  $D_{i,j}$  d'ordre 2 sont nuls. Puisqu'on a choisi la décomposition de  $f$  en produit de composantes irréductibles, on a

$$N_{v_0,1} \neq 0, N_{v_k,1} \neq 0 \text{ et } N_{v_{l+1},1} \neq 0$$

On a alors deux relations de dépendance linéaire

$$h_k = \frac{N_{v_k,1}}{N_{v_0,1}} h_0 \text{ et } h_k = \frac{N_{v_k,1}}{N_{v_{l+1},1}} h_{l+1}.$$

Pour montrer le lemme, on doit montrer que

$$\text{soit } \frac{N_{v_k,1}}{N_{v_0,1}} K_0 \geq K_k, \text{ soit } \frac{N_{v_k,1}}{N_{v_{l+1},1}} K_{l+1} \geq K_k.$$

En utilisant les lemmes 3.2.4 et 3.2.6, et en réutilisant la caractérisation des  $e_{v_i}(\phi)$  donnée dans la première partie de la démonstration, on obtient

$$\begin{aligned} N_{v_k,1} K_0 - N_{v_0,1} K_k &= \Delta_{[v_0, v_k]} \left( \sum_{j=2}^r (A_1 B_j - A_j B_1) + \left( \frac{\beta_0 - \nu_{v_0}}{\alpha_0} A_1 + B_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - A_1 C_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_k \Delta_{[v_0, v_i]} B_1 - a_0 \Delta_{[v_i, v_k]} A_1}{\Delta_{[v_0, v_k]}} C_i + \sum_{i=k}^l p_i B_1 C_i + B_1 C_{l+1} \right) \\ N_{v_k,1} K_{l+1} - N_{v_{l+1},1} K_k &= \Delta_{[v_k, v_{l+1}]} \left( - \sum_{j=2}^r (A_1 B_j - A_j B_1) - \left( \frac{\beta_0 - \nu_{v_0}}{\alpha_0} A_1 + B_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + A_1 C_0 + \sum_{i=1}^k a_i A_1 C_i - \sum_{i=k+1}^l \frac{a_k \Delta_{[v_i, v_{l+1}]} A_1 - p_{l+1} \Delta_{[v_k, v_i]} B_1}{\Delta_{[v_0, v_k]}} C_i - B_1 C_{l+1} \right) \end{aligned}$$

Si  $N_{v_k,1} K_{l+1} - N_{v_{l+1},1} K_k \geq 0$ , alors on a le résultat attendu.

Si  $N_{v_k,1} K_{l+1} - N_{v_{l+1},1} K_k \leq 0$ , alors

$$\begin{aligned} N_{v_k,1} K_0 - N_{v_0,1} K_k &\geq \Delta_{[v_0, v_k]} \left( \sum_{i=1}^k a_i A_1 C_i \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=k+1}^l \frac{a_k \Delta_{[v_i, v_{l+1}]} A_1 - p_{l+1} \Delta_{[v_k, v_i]} B_1}{\Delta_{[v_0, v_k]}} C_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_k \Delta_{[v_0, v_i]} B_1 - a_0 \Delta_{[v_i, v_k]} A_1}{\Delta_{[v_0, v_k]}} C_i + \sum_{i=k}^l p_i B_1 C_i \right) \\ &\geq \Delta_{[v_0, v_k]} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta_{[v_0, v_i]}}{\Delta_{[v_0, v_k]}} N_{i,1} C_i + \sum_{i=k}^l \frac{\Delta_{[v_i, v_{l+1}]} N_{k,1} C_i}{\Delta_{[v_k, v_{l+1}]}} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.8.6.** *On considère une chaîne de la forme*



Alors si  $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$  est tel que

$$N_{v_0,1}x_1 + \dots + N_{v_0,r}x_r \geq N_{v_0,1} + \dots + N_{v_0,r} - \nu_{v_0} - e_{v_0}(\phi),$$

on a

$$N_{v_k,1}x_1 + \dots + N_{v_k,r}x_r \geq N_{v_k,1} + \dots + N_{v_k,r} - \nu_{v_k} - e_{v_k}(\phi)$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, l+1\}$ .

*Démonstration.* On peut poser formellement dans la démonstration du lemme précédent  $p_{l+1} = 1$  et  $A_j = 0$  pour tout  $j \in 1, \dots, r$  (voir paragraphe 1.7).

Puisqu'on a déjà démontré le premier lemme, il suffit ici de montrer que l'hyperplan associé au sommet  $v_{l+1}$  est inutile.

On a

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} N_{v_0,i} & N_{v_{l+1},i} \\ N_{v_0,j} & N_{v_{l+1},j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_0 B_i & B_i \\ p_0 B_j & B_j \end{vmatrix} = 0$$

pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ . Donc  $h_0$  et  $h_{l+1}$  sont linéairement dépendantes, disons

$$h_{l+1} = \frac{N_{v_{l+1},1}}{N_{v_0,1}} h_0 = \frac{p_{l+1}}{p_0} h_0 = \frac{1}{p_0} h_0.$$

Montrons que  $\frac{1}{p_0} K_0 \geq K_{l+1}$ . En utilisant les lemmes 3.2.4 et 3.2.6, et en réutilisant la caractérisation des  $e_{v_i}(\phi)$  donnée dans la première partie de la démonstration du lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned} K_0 - p_0 K_{l+1} &= \Delta_{[v_0, v_{l+1}]} + \sum_{i=1}^{l+1} \Delta_{[v_0, v_i]} C_i \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Le théorème 3.8.3 est alors immédiat.

### 3.8.3 Un autre théorème généralisé de la monodromie.

Dans [Li], l'auteur fait le lien entre polytopes de quasiadjonction et spectre d'un germe de la manière suivante : dans le cas  $r = 1$ , le polytope de quasiadjonction d'un germe  $f$  est un ensemble de segments pour chacun desquels l'extrémité droite est  $1 \in \mathbb{R}$  et l'extrémité gauche est une valeur du spectre de  $f$ . Le théorème de la monodromie s'énonce alors de la manière suivante : si  $s_0$  est un pôle de la fonction zeta-topologique locale associée à  $f$ , alors  $s_0$  ou  $s_0 + 1$  est l'extrémité d'un segment du polytope de quasiadjonction de  $f$  (i.e.  $s_0$  ou  $s_0 + 1$  est une face du polytope de quasiadjonction de  $f$ ).

**Théorème 3.8.7 (généralisé de la monodromie).** *Soient  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un germe de courbe plane et  $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$  sa décomposition en produit de composantes irréductibles. Enfin, soit  $Z_{\text{top},0}(f)(s_1, \dots, s_r)$  la fonction zêta-topologique multi-variables locale associée à  $f$  pour la décomposition  $\mathcal{D}$  de  $f$  en les  $r$  paquets  $f_1^{n_1}, \dots, f_r^{n_r}$ . Soient  $h(s_1, \dots, s_r) = a_1 s_1 + \dots + a_r s_r$  une forme linéaire avec  $a_i \neq 0$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $K \in \mathbb{N}^*$  telles que  $h(s_1, \dots, s_r) + K$  soit un facteur du dénominateur de  $Z_{\text{top},0}(f)$ . Alors il existe une constante  $K' \in \mathbb{N}$  telle que*

$$h(s_1, \dots, s_r) + K' = 0$$

*soit l'équation d'une portion de face du polytope de quasiadjonction de  $f$ .*

*Démonstration.* La preuve découle directement des théorèmes 3.3.1, 3.5.2 et 3.8.3.  $\square$



# Bibliographie

- [A] S. S. Abhyankar *Expansion techniques in algebraic geometry*. Tata Inst. of Fund. Research, Bombay. (1977).
- [ACLM] E. Artal Bartolo, P. Cassou-Noguès, I. Luengo, A. Melle Hernández. *The Denef-Loeser zeta function is not a topological invariant*. J. London Math. Soc. 2, **65**, (2002), n.1, 45-54.
- [BK] E. Brieskorn. H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Birkhäuser Verlag Basel. (1986).
- [CNP] P. Cassou-Noguès. A. Płoski. *Plane curves*. En cours de réalisation.
- [D] D. Duval. *Rational Puiseux expansions*. Compositio Math., **70** (1989), n.2, 119-154.
- [DL1] J. Denef, F. Loeser. *Caractéristiques d'Euler-Poincaré, fonctions zêta-locales et modifications analytiques*. J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 705-720.
- [DL2] J. Denef, F. Loeser. *Geometry on arc spaces of algebraic varieties*. European congress of Mathematics, Vol 1 (Barcelona 2000), 327-348, progr. Math. 201, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [E] H. Eggers. *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*. Bonner Mathematische Schriften, 147, (1983).
- [EN] D. Eisenbud et W.D. Neumann. *Three-dimensional link theory and invariance of plane curve singularities*. Annals of Mathematics Studies, No. 110, Princeton University Press, Princeton NJ, (1985).
- [F] W. Fulton. *Algebraic Curves*. Mathematics Lecture Note Series, (1969).
- [GB] Evelia R. Gracia Barroso. *Courbes polaires et courbure des fibres de Milnor des courbes planes*. Thèse de doctorat. Université Paris 7. 26 juin (2000).
- [GH] P. Griffiths, J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley and sons, (1978). (Pure and Applied Mathematics. Wiley).
- [G] Gil Guibert. *Espaces d'arcs et invariants d'Alexander*. Commentari Math. Helvetici. À paraître.
- [H] R.C. Heitmann. *On the jacobian conjecture*. Journal of Pure and Applied Algebra. 64, (1990), 35-72.
- [Hi] H. Hironaka. *Introduction to the theory of infinitely near singular points*. Memorias del instituto Jorge Juan. n. 28 Madrid (1974).
- [KP] T-C Kuo, A. Parusiński. *On Puiseux roots of jacobians*. Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. sci. 78, (2002), n. 5, 55-59.



- [Le] M. Lejeune-Jalabert. *Sur l'équivalence des singularités de courbes algébroides planes. Coefficients de Newton*. Introduction à la théorie des singularités, I, 49-124, Travaux en Cours, 36, Hermann, Paris, (1988).
- [LP] A. Lenarcik et A. Płoski. *Polar invariants of plane curves and the Newton polygon*. Preprint.
- [Li] A. Libgober. *Hodge decomposition of Alexander invariants*. Manuscripta Math., 107, (2002), n. 2, 251-269.
- [Loe] F. Loeser. *Fonctions d'Igusa  $p$ -adiques et polynômes de Bernstein*. Amer. J. Math., 110 (1988), 1-21.
- [Loo] E. Looijenga. *Motivic measures*. Sémin. Bourbaki, 52ème année, (1999-2000), n.874. Mars 2000.
- [M1] H. Maugendre. *Topologie des germes jacobiens*. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série 1, p. 945-948, (1996), Géométrie algébrique.
- [M2] H. Maugendre. *Topologie des germes jacobiens*. thèse de doctorat (avril 1995).
- [N] Walter D. Neumann. *Irregular links at infinity of complex affine plane curves*. Q. J. Math. Oxf. II Ser 50 No 199, 301-320 (1999).
- [P] A. Płoski. *Milnor number of a plane curve and Newton polygons*. Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, fasc. XXXVII, p.75-80.
- [S] C. Sabbah. *Modules d'Alexander et  $\mathcal{D}$ -modules*. Duke Math. J., t. 60, No.3, 1990.
- [V1] W. Veys. *Zeta-functions for curves and log-canonical models*. Proc. London Math. Soc. 74 (1997), 360-378.
- [V2] W. Veys. *Determination of the poles of the topological Zeta-function for curves*. Manuscripta Math. 87 (1995), 435-448.
- [V3] W. Veys. *Holomorphy of local zeta functions for curves*. Math. Ann. 295 (1993), 631-641.
- [V4] W. Veys. *Relations between numerical data of an embedded resolution*. Amer. J. Math. 113, (1991), 573-592.
- [Y] M. Yamamoto. *Classification of isolated algebraic singularities by their Alexander polynomials*. Topology, Vol. 23, No. 3, p. 277-287, (1984).

**Résumé :** Cette thèse est consacrée à l'étude de deux invariants des germes de courbes planes à l'aide des diagrammes de Newton de ces germes. Les diagrammes de Newton sont des arbres décorés dont on décrit tout d'abord la construction et les propriétés. Le premier invariant étudié est l'ensemble des quotients jacobiens d'un germe d'application  $(f, g)$  : on montre de façon algébrique comment calculer cet ensemble sur le diagramme minimal de Newton de  $fg$  et on en déduit un résultat sur la croissance des quotients jacobiens. Le second invariant est la fonction zêta topologique locale multivariées associée à un germe  $f$  décomposé en  $r$  paquets. On donne un résultat décrivant de façon exhaustive les hyperplans au voisinage desquels elle n'est pas holomorphe. Puis on montre qu'elle détermine la topologie du germe auquel elle est associée en donnant un algorithme de construction du diagramme du germe à partir de la donnée de la fonction. Cette partie se conclut par deux théorèmes de la monodromie.

**Mots clef :** singularités, quotients jacobiens, fonction zêta topologique.

**Abstract :** This thesis is devoted to the study of two invariants of plane curves germs with the help of Newton diagrams of these germs. Newton diagrams are decorated trees ; we first describe their construction and some of their properties. The first invariant we study is the set of jacobian quotients of a germ of application  $(f, g)$  : we show in an algebraic way how to compute this set on the minimal Newton diagram of  $fg$ , and we deduce a result on the increment of the jacobian quotients. The second invariant is the multivariable local topological zeta function associated to a germ  $f$  decomposed in  $r$  packets. We give a result which describe in an exhaustive way the hyperplanes on the boundary of which the zeta function is not holomorphic. Next we prove that the zeta function determines the topology of the germ it's associated to : we give a construction algorithm of the germ's diagram from the zeta function. We finish with two monodromy theorems.

**Key words :** singularities, jacobian quotients, zeta topological function.

Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux  
Université Bordeaux I  
351, cours de la Libération  
33405 TALENCE Cedex  
FRANCE