Table des matières

Introduction

Ce travail est constitué de deux parties principales. La première traite de la régularité maximale pour les équations d'évolution et la seconde concerne des problèmes de théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger sur les variétés Riemanniennes.

Le point de départ de la première partie est le problème de Cauchy sur un intervalle $[0,\tau]$ associé à un opérateur A à domaine dense $D(A)$ sur un espace de Banach X :

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad \text{p.p. dans } (0,\tau), \quad u(0) = x. \tag{0.1}$$

De nombreuses équations aux dérivées partielles, qui permettent de modéliser l'évolution d'un système au cours du temps, peuvent être reformulées sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait. L'étude du problème de Cauchy associé à un opérateur A est intimement liée à l'existence d'un semi-groupe engendré par $-A$. Ainsi, si $-A$ est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(e^{-tA})_{t\geq 0}$, la fonction $u(t) = e^{-tA}x + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\, ds$ est l'unique solution de la version intégrale du problème de Cauchy, $u(t) - x + A\int_0^t u(s)\, ds = \int_0^t f(s)\, ds$. Mais, en général, la fonction ainsi définie n'est pas solution de (0.1). Il faut alors des hypothèses supplémentaires sur le second membre f et la condition initiale x, afin d'obtenir l'égalité au sens fort. Par exemple, si $x \in D(A)$ et f est dans l'espace de Sobolev $W^{1,1}(0,\tau;X)$, la solution du problème intégrale est l'unique solution de (0.1) appartenant à l'espace $C^1([0,\tau];X) \cap C([0,\tau];D(A))$.
Un autre point de vue consiste à s'intéresser à l'opérateur lui même. Plus précisément, sous quelles conditions sur A, l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant (0.1) au sens fort sont-elles automatiques ? C'est le problème de la régularité maximale de A.

Par la suite, on s'intéresse au problème de Cauchy avec condition initiale nulle :

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad \text{p.p. dans } (0,\tau), \quad u(0) = 0. \tag{0.2}$$

La régularité maximale peut s'avèrer beaucoup trop restrictive sur l'opérateur en question. En effet, Baillon [I.8] a montré que sur les espaces refléxifs, l'existence et l'unicité, pour tout f continue, d'une solution du problème (0.2) appartenant à $C^1([0,\tau];X) \cap C([0,\tau];D(A))$ implique que l'opérateur A soit borné. Le cadre L^p est en revanche beaucoup plus favorable.

Définition 1. *Un opérateur A à domaine $D(A)$ dense dans un espace de Banach X a la régularité maximale L^p, $p \in (1,\infty)$, sur l'intervalle $[0,\tau]$, si pour tout $f \in L^p(0,\tau;X)$, il existe un unique $u \in W^{1,p}(0,\tau;X) \cap L^p(0,\tau;D(A))$ vérifiant (0.2).*

Un des résultats qui a motivé l'étude de la régularité maximale L^p date des années 60 et concerne les espaces de Hilbert. De Simon [I.20] a en effet prouvé que si X est un espace de Hilbert et $-A$ le générateur d'un semi-groupe analytique, alors A a la régularité maximale L^p. La réciproque est vraie dans un cadre général. De nombreuses autres propriétés découlent de la régularité, comme par exemple l'indépendance par rapport à l'espace L^p considéré (voir Section 1.1 du Chapitre 1).

La notion de régularité se révèle aussi relativement stable. Ainsi, lorsque l'on perturbe A par un autre opérateur B, sous certaines conditions de contrôle de B par A, l'opérateur $A + B$ conserve le caractère régulier. De même, il est possible de substituer à la condition initiale $u(0) = 0$ une condition $u(0) = x$, pour x dans un certain espace d'interpolation, sans altérer la régularité des solutions du problème de Cauchy. Au regard de ces différentes propriétés, la notion de régularité maximale L^p apparaît très riche. Il serait donc intéressant de disposer de moyens permettant de savoir si cette propriété a lieu. Comme nous l'avons mentionné précédemment, sur les espaces de Hilbert, il faut et il suffit que $-A$ soit le générateur d'un semi-groupe analytique. Mais cette caractérisation est fausse dans un cadre général. On a longtemps cru que les espaces UMD seraient de bons candidats pour établir l'équivalence entre l'analyticité du semi-groupe et la régularité maximale, mais Kalton et Lancien [I.31] ont prouvé que le cadre hilbertien est en réalité le seul. Parallèlement à ce résultat, les travaux de Weis [I.44] et de Clément et Prüss [I.15] ont permis d'établir une caractérisation de la régularité maximale sur les espaces UMD, en terme de R-bornitude de la résolvante de A. Ce résultat, qui généralise celui de De Simon, demeure pour le moment le critère le plus général dont nous disposons.

Tout ce dont nous avons parlé précédemment concerne le problème de Cauchy associé à un opérateur, qui correspond à la traduction opératorielle d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Mais il existe des systèmes qui ne rentrent pas dans ce cadre. On est alors amené à étudier des équations aux dérivés partielles dont les coefficients varient en fonction du temps. Il s'agit du problème de Cauchy non-autonome. Considérons une famille d'opérateurs fermés $A = \{A(t), t \in [0, \tau]\}$ à domaines $D(A(t))$ denses dans X. On définit le problème de Cauchy non-autonome associé à la famille A :

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad \text{p.p. dans } (0, \tau), \quad u(0) = 0. \tag{0.3}$$

La régularité maximale L^p de la famille A est définie de façon analogue au cas autonome. Plus précisément,

Définition 2. *La famille A a la régularité maximale L^p, $p \in (1, \infty)$, sur l'intervalle $[0, \tau]$ si pour toute $f \in L^p(0, \tau; X)$, il existe un unique $u \in W^{1,p}(0, \tau; X)$ tel que la fonction $t \to A(t)u(t) \in L^p(0, \tau; X)$ et u vérifie le problème (0.3).*

Contrairement au cas autonome, il n'est pas possible, en général, de ramener l'étude du problème (0.3) à l'existence d'une famille d'opérateurs vérifiant des propriétés du type semi-groupe. Cette lacune prive la régularité maximale des bonnes propriétés établies dans le cas autonome. Par exemple, il n'est pas clair que la régularité maximale sur un intervalle entraîne la même propriété sur un sous-intervalle. De même, l'indépendance par rapport à l'espace L^p considéré n'a pu être obtenu que dans certains cas spécifiques.

Dans un premier temps, il semble naturel de considérer le cas des familles à domaine constant $D(A(t)) = D$. La famille A peut alors être vue comme une application de $[0, \tau]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(D, X)$, l'espace des opérateurs bornés de D dans X. Sous l'hypothèse de continuité de l'application A, la régularité maximale de chaque opérateur $A(t)$ est alors équivalente à la régularité maximale de la famille A. Ce résultat est obtenu par Prüss et Schnaubelt [I.40] en construisant une famille d'évolution $U(t, s)$ associé à A. Amann [I.3] a ensuite redémontré ce résultat d'une façon plus directe, sans passer par une famille d'évolution.

Dans le cas général, c'est à dire lorsque les domaines varient, on ne dispose pas pour le moment de conditions nécessaires et suffisantes pour la régularité maximale de A. De plus, la plupart des résultats connus font intervenir des hypothèses du type Acquistapace-Terreni, en particulier une condition de régularité hölderienne de l'application A. Hieber et Monniaux [I.29] ont prouvé que, dans le cas des espaces de Hilbert, ces hypothèses entraînent la régularité maximale. Ce résultat a ensuite été généralisé aux espaces UMD par Portal et Štrkalj [I.39].

Le Chapitre 3, qui correspond à un article soumis, écrit en collaboration avec Wolfgang Arendt, Ralph Chill et Simona Fornaro [I.7], s'intéresse à la régularité maximale L^p dans le cas "domaine constant". Il n'est cependant pas exclu que les méthodes utilisées puissent s'adapter au cas général.

Notre approche repose sur une vision "globale" du problème, dans l'esprit des travaux de Amann. Les familles d'évolution sont ainsi utilisées pour donner une représentation des solutions et non pour démontrer l'existence et l'unicité, comme Prüss et Schnaubelt l'ont fait. Le point de départ de notre étude est un résultat de perturbation non-autonome. Plus précisément, si un opérateur A a la régularité maximale L^p, est-il possible de le perturber par une application B de $[0, \tau]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(D(A), X)$ tout en conservant la régularité maximale ? On montre qu'il existe un $\varepsilon > 0$ dépendant de A tel que, si B vérifie pour un certain $\eta \geq 0$, $\|B(t)x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_A + \eta \|x\|_X$, alors $A + B$ a la régularité maximale L^p. Ce résultat nous permet de traiter la régularité du problème non-autonome comme une perturbation du cas autonome ; et le fait qu'on autorise la présence d'un reste $\eta ||x||_X$ dans la condition sur B suggère une hypothèse plus faible que la continuité de l'application A. On introduit alors la notion de continuité relative.

Définition 3. *Une application A fortement mesurable de $[0, \tau]$ dans $\mathcal{L}(D, X)$ est relativement continue si pour tout $t \in [0, \tau]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $\eta \geq 0$ tels que pour tout $x \in D$,*

$$|t - s| \leq \delta \Rightarrow ||A(t)x - A(s)x|| \leq \varepsilon ||x||_D + \eta ||x||.$$

L'un des principaux résultat est le suivant :

Théorème 4. *Soit $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D, X)$ une application fortement mesurable et relativement continue. Si pour tout $t \in [0, \tau)$, l'opérateur $A(t)$ a la régularité maximale, alors la famille A a la régularité maximale L^p pour tout $p \in (1, \infty)$.*

Une application continue étant a fortiori relativement continue, le théorème précédent généralise le résultat de Prüss et Schnaubelt. Comme conséquence de ce résultat, et en utilisant une propriété liée à la continuité relative, on établit un théorème de perturbation qui généralise au cas non-autonome les théorèmes mentionnés dans le Chapitre 1.

La Section 3.3 traite d'un cas d'équivalence entre la régularité maximale de A et celle des $A(t)$. Contrairement au cas où A est continu, il semble difficile d'obtenir l'équivalence sans hypothèse supplémentaire sur A. Nous supposons alors que les opérateurs $A(t)$ sont accrétifs. Cette hypothèse peut sembler assez forte car elle implique, par le théorème de Lumer-Philllips, que $-A(t)$ est le générateur d'un semi-groupe de contractions. Mais la continuité de A est aussi, de ce point de vue, restrictive, les semi-groupes engendrés par les $A(t)$ étant alors uniformément bornés.

Théorème 5. *Soit $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D, X)$ une application fortement mesurable et relativement continue telle que pour tout $t \in [0, \tau]$, $A(t)$ est accrétif. Alors A a la régularité maximale L^p si et seulement si pour tout $t \in [0, \tau]$, $A(t)$ a la régularité maximale.*

Il en résulte en particulier que dans ce contexte, la régularité maximale L^p de la famille A est indépendante de p.

La Section 3.4 propose une illustration de nos résultats pour des opérateurs elliptiques de second ordre. Il apparaît en particulier que les termes d'ordres inférieurs n'ont pas d'influence sur la régularité des solutions du problème de Cauchy associé.

La fin du Chapitre 3 est consacrée à la régularité L^p du problème de Cauchy du second ordre non-autonome. On considère deux opérateurs fermés A et B à domaines $D(A)$ et $D(B)$ denses dans un espace de Banach X. Le problème de Cauchy associé au couple (A, B) est défini de la façon suivante :

$$\ddot{u}(t) + B(t)\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{p.p. dans } (0, \tau), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0. \tag{0.4}$$

La définition de la régularité maximale L^p du couple (A, B) est analogue à celle du premier ordre.

Définition 6. *Le couple (A, B) a la régularité maximale L^p, $p \in (1, \infty)$ si pour tout $f \in L^p(0, \tau; X)$, il existe un unique $u \in W^{2,p}(0, \tau; X) \cap L^p(0, \tau; D(A))$ tel que $\dot{u} \in L^p(0, \tau; D(B))$ et u vérifie (0.4).*

La régularité maximale L^p pour le second ordre a été introduite récemment par Chill et Srivastava [I.12]. Nous nous sommes demandés s'il était possible d'adapter les méthodes utilisées précédemment dans ce contexte. La principale difficulté réside dans l'obtention d'un résultat de perturbation non-autonome analogue à celui du premier ordre. Moyennant un travail supplémentaire, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 7. *Soient $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D(A), X)$ et $B : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D(B), X)$ deux applications fortement mesurables et relativement continues. Si, pour tout $t \in [0, \tau]$, le couple $(A(t), B(t))$ a la régularité maximale L^p, alors pour tout $f \in L^p(0, \tau; X)$, il existe un unique $u \in W^{2,p}(0, \tau; X) \cap L^p(0, \tau; D(A)) \cap \{u \in L^p(0, \tau; X) : \dot{u} \in L^p(0, \tau; D(B))\}$ tel que :*

$$\ddot{u}(t) + B(t)\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \textit{p.p. dans } (0, \tau), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0. \tag{0.5}$$

La deuxième partie de cette thèse a pour cadre général la théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger $-\Delta+V$ sur les variétés Riemanniennes. Un des principaux résultats est une minoration du bas du spectre essentiel au moyen d'une quantité dépendant du potentiel V. Une telle minoration permet d'obtenir des conditions suffisantes pour que le spectre de $-\Delta + V$ soit discret. Les deux premiers chapitres de cette partie proposent un rappel de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints (Chapitre 4) ainsi qu'un état des lieux dans le cas particulier des opérateurs de Schrödinger (Chapitre 5). Ils constituent ainsi l'introduction nécessaire à la bonne compréhension de nos résultats (Chapitre 6) et permettent également de les resituer dans leur contexte. Enfin, le Chapitre 7 est consacré à une estimation du type Cwikel-Lieb-Rozenblum du nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger.

L'équation de Schrödinger, qui décrit l'évolution d'un système quantique soumis à un potentiel V, est un des fondements de la mécanique quantique. Cette équation peut être interprétée comme un problème de Cauchy abstrait ; on appelle opérateur de Schrödinger l'opérateur associé. Ces opérateurs s'écrivent sous la forme $-\Delta + V$ où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ est le Laplacien et V l'opérateur de multiplication par la fonction V (appelé potentiel). Ces opérateurs auto-adjoints sont en général construits par la méthode variationnelle.

Pour un opérateur A auto-adjoint, son spectre $\sigma(A)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Parmi les éléments de $\sigma(A)$, certains sont des valeurs propres isolées de A de multiplicité finie. L'ensembles de ces valeurs propres est discret et est appellé le spectre discret, noté $\sigma_{disc}(A)$. Son complémentaire est le spectre essentiel de A, noté $\sigma_{ess}(A)$. On peut par exemple prouver (en utilisant la transformée de Fourier) que l'opérateur $-\Delta$ où Δ est le Laplacien sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ n'a que du spectre essentiel : $\sigma(-\Delta) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$. Il se peut aussi que le spectre d'un opérateur auto-adjoint soit discret, c-à-d $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$; ce fait est équivalent à la compacité de la résolvante de A. Mais il est en général difficile d'obtenir directement des informations sur le spectre essentiel. Il est donc important de disposer de moyens détournés afin de connaitre avec précision $\sigma_{ess}(A)$. Par exemple, si la différence des résolvantes de deux opérateurs auto-adjoints est compacte, alors ils ont le même spectre essentiel. Ce résultat permet de prouver que le spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ dépend uniquement du comportement de son potentiel V à l'extérieur des compacts.

D'une façon générale, on définit l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ sur une variété Riemannienne M. La partie positive V_+ de V est localement intégrable et sa partie négative V_- doit vérifier certaines propriétés.

Avant de s'intéresser au spectre essentiel de l'opérateur ainsi défini, il paraît naturel d'étudier d'abord le spectre de $-\Delta$. Contrairement au cas euclidien, l'égalité $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$ est en général fausse. Il faut en effet tenir compte de la géométrie de la variété. Brooks [II.4] a par exemple montré que, si le volume de M est infini, le bas du spectre essentiel de $-\Delta$ est minoré par $\frac{1}{4}h^2$ où h est la constante isopérimétrique de Cheeger.

Lorsque l'on rajoute un potentiel V, il est toutefois possible de s'intéresser au spectre de l'opérateur de Schrödinger sans disposer d'informations sur la géométrie de la variété. Ouhabaz [II.26] a ainsi généralisé un résultat de positivité du spectre de $-\Delta + V$, établi dans le cas euclidien par Arendt et Batty [II.1], en ne faisant sur M que des hypothèses locales, à savoir le doublement et l'existence d'inégalités de Poincaré L^2 sur les boules. Dans ce cadre, on sait seulement que $\sigma(-\Delta) \subset [0, \infty)$. C'est donc uniquement le comportement du potentiel V qui influe sur le spectre et le résultat de Ouhabaz illustre qu'il faut alors prendre en compte la croissance du volume des boules.

Comme nous l'avons vu précédemment, le spectre essentiel de $-\Delta + V$ dépend uniquement du comportement de V en dehors des compacts. On peut ainsi prouver que si $V(x) \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$, le spectre essentiel est vide et par conséquent $-\Delta + V$ est à résolvante compacte. Ce résultat peut être vu comme un cas particulier d'un critère plus général de compacité de la résolvante, établi par Kondrat'ev et Shubin [II.18] dans le cadre des variétés à géométrie bornée. Ils démontrent que si, pour tout $L > 0$,

$$\lim_{|x| \to \infty} |\{y \in B(x, r) : V(y) < L\}| = 0, \tag{0.6}$$

pour un r suffisamment petit, alors le spectre de $-\Delta + V$ est discret. Ce résultat est en fait une conséquence de leur généralisation du critère de Molchanov aux variétés à géométrie bornée, à savoir une condition nécessaire et suffisante pour la discrétion du spectre de $-\Delta + V$. Mais ce critère, qui fait notamment intervenir la capacité harmonique, est plutôt difficile à manier. La condition (0.6) a ensuite été retrouvé par Metafune et Pallara [II.23, II.24] dans le cas euclidien, par une méthode plus simple. Leur approche consiste à obtenir une minoration du spectre essentiel de $-\Delta + V$ faisant intervenir le comportement à l'infini des quantités $|\{y \in B(x, r) : V(y) \leq L\}|$.

L'objectif du Chapitre 6, qui correspond à l'article [II.29], est de présenter une minoration du spectre essentiel de $-\Delta + V$ sur les variétés Riemanniennes qui généralise le résultat obtenu par Metafune et Pallara [II.24] dans le cas euclidien. De plus, les hypothèses faites sur M sont moins restrictives que la géométrie bornée, ce qui nous permet d'obtenir le résultat de Kondrat'ev et Shubin dans un cadre plus général. En effet, nous supposons que M vérifie le doublement local et les inégalités de Sobolev-Poincaré sur les boules :

(A1) Le doublement local.
Il existe $r_0 > 0$ et $C_1 > 0$ tels que

$$\forall r \leq r_0/2, \quad |B(x, 2r)| \leq C_1 |B(x, r)|.$$

(A2) Inégalités de Sobolev-Poincaré .
Il existe $q > 2$ et une constante C_2 tels que pour toute boule $B(x, r)$, $r \leq r_0/2$ et pour tout $u \in H^1(B(x, r))$,

$$\Big(\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^q\Big)^{1/q} \leq C_2 r |B(x, r)|^{1/q - 1/2} \Big(\int_{B(x,r)} |\nabla u|^2\Big)^{1/2},$$

où $|B(x, r)|$ est le volume de la boule de centre x et de rayon r, et $u_{B(x,r)}$ est la moyenne de u sur $B(x, r)$.

Pour alléger les notations, on ne présente que la version de notre résultat dans le cas des potentiels positifs, mais il demeure valable pour des potentiels plus généraux. Le fait d'autoriser des potentiels qui ne sont pas positifs permet, en particulier, d'obtenir des conditions assurant l'existence de valeurs propres principales (voir la Section 6.2 du Chapitre 6).

Pour $L > 0$, on introduit la quantité $E_L := \{x \in M : V(x) < L\}$ et pour $r \le r_0/2$, $\alpha_{r,L} := \limsup_{|x|\to+\infty} \frac{|E_L \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}$. Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 8. *On suppose que M vérifie (A1) et (A2). Si, pour un certain $r \le r_0/2$, il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que pour tout $L > 0$, $\alpha_{r,L} < \alpha$, alors*

$$\sigma_{ess}(-\Delta + V) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2} - 1)^2}{C_1^2 C_2^2 r^2}, \infty\Big[.$$

Comme corollaire, nous obtenons une généralisation du résultat de Kondrat'ev et Shubin, la condition sur V étant alors remplacée par une condition qui tient compte de la croissance du volume des boules :

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|\{y \in B(x,r) : V(y) < L\}|}{|B(x,r)|} = 0. \tag{0.7}$$

Dans le cadre des variétés à géométrie bornée, le volume des boules pour un rayon donné étant constant, on retrouve bien la condition de Kondrat'ev et Shubin. La condition (0.7) n'est en général pas nécessaire, mais Metafune et Pallara [II.23] ont montré que dans le cas euclidien $M = \mathbb{R}^n$, il y a équivalence pour les potentiels de la forme $V = f \circ p$ où p est un polynôme et f une fonction continue tel que $f(x) \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$. La classe de Muckenhoupt A_∞ fournit le bon cadre afin de donner une version de ce résultat sur les variétés.

Théorème 9. *Supposons que M vérifie (A1) et (A2) et que $V \in A_\infty(M)$. Le spectre de $-\Delta + V$ est discret si et seulement si il existe $r \le r_0/2$ tel que pour tout $L > 0$, la condition (0.7) est satisfaite.*

La dernière section est consacrée à un critère de discrétion en terme du comportement à l'infini du bas du spectre de Dirichlet et de Neumann de $-\Delta + V$ sur les boules. Un tel résultat est obtenu par Kondrat'ev et Shubin [II.18] sur les variétés à géométrie bornée, mais la positivité du rayon d'injectivité de M autorise des raisonnement très similaires au cas euclidien. Il est donc naturel de savoir si ce critère reste valable sous les hypothèses (A1) et (A2). Moyennant une hypothèse supplémentaire de décroissance uniforme vers 0 de $|B(x,r) \setminus B(x,tr)|/|B(x,r)|$ lorsque $t \to 1$, on retrouve le résultat de Kondrat'ev et Shubin. C'est par exemple le cas si la courbure de Ricci de M est minorée. Ceci pourrait servir de point de départ en vue d'une généralisation du critère de Molchanov sur les variétés Riemanniennes vérifiant le doublement local et les inégalités de Sobolev-Poincaré.

Jusqu'à présent, nous nous sommes surtout intéressés à des minorations du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ sans tenir compte d'éventuelles valeurs propres. Il se peut en effet que des valeurs propres viennent s'intercaler entre le bas du spectre et le spectre essentiel. On peut alors se demander combien de valeurs propres vivent sous le spectre essentiel. Le Chapitre 7, qui correspond à un travail en cours avec El Maati Ouhabaz [II.28], traite de ces questions.

Le but de l'estimation de Cwikel-Lieb-Rozenblum, aussi connue sous le nom d'inégalité CLR, est de donner une majoration du nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ dans le cadre euclidien ; ce nombre, noté $N_-(-\Delta - V)$, est alors majoré par $\int_{\mathbb{R}^n} V^{n/2}$. Levin et Solomyak [II.19] ont ensuite généralisé ce résultat aux variétés Riemanniennes vérifiant une inégalité de Sobolev globale. Mais cette hypothèse est très restrictive sur la variété. Parallèlement à ce résultat, Rozenblum et Solomyak [II.33] ont montré que le rôle de $-\Delta$ peut être tenu par des opérateurs vérifiant certaines propriétés. Ils obtiennent ainsi une majoration de $N_-(A - V)$ faisant intervenir le noyau de la chaleur de l'opérateur A. L'hypothèse importante dans [II.33] est que ce noyau est majoré par $t^{-\alpha}$ pour un $\alpha > 0$ (ce qui est encore équivalent à une inégalité de Sobolev). Nous montrons que l'estimation de Rozenblum et Solomyak s'adapte à toutes les variétés Riemanniennes complètes. Sous certaines conditions générales sur une fonction positive V permettant de définir l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 10. *Soit M une variété Riemannienne complète. Notons $p(t; x, y)$ le noyau de la chaleur de $-\Delta$. Soit G une fonction positive convexe non-identiquement nulle qui ne croît pas plus vite qu'un polynôme et telle que la fonction $t \to \frac{G(t)}{t}$ est intégrable en zéro. Posons $g(\lambda) := \int_0^\infty \frac{G(t)}{t} e^{-t/\lambda} \, dt$, pour tout $\lambda > 0$. Alors,*

$$N_-(-\Delta - V) \leq \frac{1}{g(1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\delta \to 0^+} \int_M p(t + \delta; x, x) G(tV(x)) \, d\mu(x).$$

Première partie

La régularité maximale L^p du problème de Cauchy non-autonome

Chapitre 1

Rappels dans le cas autonome

1.1 Définition et premières propriétés

Soient X un espace de Banach muni de la norme $||.||$ et A un opérateur fermé à domaine $D(A) \subset X$ dense dans X. On rappelle que A est fermé si et seulement si son domaine $D(A)$, muni de la norme du graphe $||.||_A = ||.|| + ||A.||$, est un espace de Banach. Par la suite, l'opérateur A étant fixé, on notera $D = D(A)$ son domaine et $||.||_D$ la norme du graphe. L'opérateur A peut alors être vu comme un élément de $\mathcal{L}(D, X)$, ensemble des opérateurs bornés de D dans X. Pour un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et un espace de Banach X, $L^p(a, b; X)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables de $[a, b]$ à valeurs dans X telles que la fonction $t \to ||f(t)||$ est dans $L^p(a, b)$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(a, b; X)$ est l'ensemble des fonctions de $L^p(a, b; X)$ dont la dérivée au sens des distributions est aussi dans $L^p(a, b; X)$. Un résultat classique assure que $W^{1,p}(a, b; X)$ est inclus dans $C([a, b], X)$, ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans X. On définit la régularité de A en termes de régularité des solutions du problème de Cauchy.

Définition 1.1.1. *Un opérateur A fermé à domaine dense $D(A) = D \subset X$ a la régularité maximale L^p, $p \in (1, \infty)$, sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, si pour tout $f \in L^p(a, b; X)$, il existe un unique $u \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D)$ tel que*

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad p.p. \text{ dans } (a, b), \quad u(a) = 0. \tag{1.1}$$

En d'autres termes, le problème de la régularité maximale revient à se poser la question naturelle suivante : si le second membre du problème de Cauchy est dans $L^p(a, b; X)$, en est-il de même pour $\dot{u}$ et Au, où u est la solution de (1.1) ? Le premier résultat sur ce sujet est vraisemblablement obtenu par De Simon [I.20]. Il a prouvé que si X est un espace de Hilbert et $-A$ le générateur d'un semi-groupe analytique, alors A a la régularité maximale. Nous préciserons ces notions par la suite. Brézis a ensuite demandé, sous la forme d'une question alors ouverte, pour quels espaces de Banach le résultat de De Simon était encore vrai. Il a fallu attendre le début des années 2000 et les travaux de Kalton et Lancien [I.31] pour découvrir que le cadre hilbertien était finalement le seul (voir la Section 1.4 pour ces questions). Entre temps, la régularité maximale aura suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens parmi lesquels Sobolevskii [I.41], Da Prato et Grisvard [I.18], Coulhon et Lamberton [I.17], Cannarsa et Vespri [I.10], Dore et Venni[I.24], Dore [I.22, I.23], Coulhon et Duong [I.16]... Nous proposons dans ce chapitre un état des lieux sur ce sujet.

Nous commençons par un inventaire de quelques propriétés classiques qui découlent de la régularité maximale L^p. On peut, par exemple, trouver les preuves des propriétés suivantes dans l'article de Dore [I.23].

Proposition 1.1.2. *Si A a la régularité maximale L^p sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, alors A vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $A + \lambda I$, où I est l'identité sur X, a la régularité maximale L^p.

(ii) A a la régularité maximale L^p sur tout intervalle fermé borné.

(iii) $-A$ est le générateur d'un semi-groupe analytique fortement continu.

On rappelle qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit analytique s'il admet un prolongement analytique sur un secteur $\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$ et si ce prolongement est borné sur $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| \leq 1\}$, pour tout $\theta' \in (0, \theta)$. Le semi-groupe est analytique borné s'il est borné sur tous les sous-secteurs $\Sigma_{\theta'}$, $\theta' \in (0, \theta)$. On dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe s'il est fortement continu. Le semi-groupe engendré par $-A$ est noté $(e^{-tA})_{t\geq 0}$. La Proposition 1.1.2 (iii) permet en particulier de donner une formule explicite pour la solution du problème (1.1) via la méthode de la variation de la constante :

$$u(t) = \int_a^t e^{-(t-s)A} f(s)\, ds. \tag{1.2}$$

Nous avons vu que la régularité maximale était indépendante de l'intervalle sur lequel le problème de Cauchy était donné. On peut alors se demander si la régularité maximale L^p entraîne la régularité maximale L^q, pour $q \neq p$. La réponse est positive ; Sobolevskii [I.41] a mentionné le premier un résultat de ce type en suggérant que la preuve est essentiellement basée sur l'utilisation d'un théorème de multiplicateur de Benedek, Calderon et Panzone [I.9]. Coulhon et Lamberton [I.17] ont ensuite démontré le théorème suivant :

Théorème 1.1.3. *Si A a la régularité maximale L^p pour $p \in (1, \infty)$, alors A a la régularité maximale L^q pour tout $q \in (1, \infty)$.*

Par la suite, au vu de la Propriété 1.1.2 (ii) et du théorème précédent, on utilisera la notation $A \in \mathcal{MR}$ si A a la régularité maximale L^p sur $[a, b]$.

Malheureusement, ces propriétés élémentaires se transposent mal au cas non-autonome, c'est à dire lorsque A peut varier avec le temps. Nous verrons que la seule connaissance d'une solution régulière du problème de Cauchy ne semble pas suffisante. Par exemple, il n'est pas clair que la régularité maximale L^p sur un intervalle entraîne la même propriété sur un sous-intervalle. Afin de remédier à cette situation, on est amené à faire des hypothèses supplémentaires sur A.

1.2 Résultats de perturbation

Nous nous intéressons maintenant au comportement de la régularité maximale lorsque l'on perturbe l'opérateur A par un autre opérateur B. Le résultat de perturbation établi par Dore [I.23] assure notamment que dans le cas des opérateurs différentiels elliptiques les termes d'ordre inférieur n'ont pas d'influence sur la régularité maximale. Nous donnerons une généralisation de ce théorème dans le cadre non-autonome (voir le Théorème 3.2.11 du Chapitre 3). Pour la définition de l'espace d'interpolation réel $(X, D)_{\alpha,q}$, on renvoie au livre de Lunardi [I.35].

Théorème 1.2.1 (Dore 2000). *Soient $A \in \mathcal{MR}$ et $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ où Y est tel que l'espace d'interpolation réel $(X, D)_{\alpha,q}$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, s'injecte de façon continue dans Y. Alors $A + B \in \mathcal{MR}$.*

Pour ce faire, il est intéressant et pratique de reformuler la propriété de régularité maximale en terme de bijectivité d'un certain opérateur. On définit tout d'abord l'espace de régularité maximale comme l'espace de fonctions suivant :

$$MR_p(a, b) := W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D).$$

$MR_p(a, b)$ est un espace de Banach pour la norme : $\|u\|_{MR} = \|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} + \|u\|_{L^p(a,b;D)}$. On considère ensuite l'opérateur $\mathcal{A}$ agissant sur $L^p(a, b; X)$ défini par :

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= L^p(a, b; D), \\ (\mathcal{A}u)(t) &= Au(t), \quad t \in (a, b), \end{aligned}$$

et l'opérateur $\mathcal{D}_t$,

$$\begin{aligned} D(\mathcal{D}_t) &= \{u \in W^{1,p}(a, b; X) : u(a) = 0\}, \\ \mathcal{D}_t u &= \dot{u} \ . \end{aligned}$$

On désigne par L_A la somme de ces deux opérateurs :

$$\begin{aligned} D(L_A) &= D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{D}_t) \\ &= \{u \in MR_p(a, b) : u(a) = 0\}, \\ L_A &= \mathcal{D}_t + \mathcal{A}. \end{aligned}$$

La régularité maximale est ainsi équivalente à la bijectivité de L_A de $D(L_A)$ dans $L^p(a, b; X)$ et la solution du problème de Cauchy (1.1) est $u = L_A^{-1} f$. Perturber l'opérateur A revient donc à perturber L_A. Le point crucial de la preuve du Théorème 1.2.1 est une estimation de la résolvante $(\lambda + L_A)^{-1}$.

Lemme 1.2.2. *Soit $A \in \mathcal{MR}$. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $\lambda \geq 0$,*

$$||(\lambda + L_A)^{-1}||_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} \leq \frac{M}{1 + \lambda}. \tag{1.3}$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.1.2 (i), $(\lambda+L_A)^{-1}$ existe et on a la représentation suivante :

$$((\lambda + L_A)^{-1} f)(t) = \int_a^t e^{-(t-s)(A+\lambda)} f(s)\, ds, \quad t \in [a,b].$$

En prolongeant f par 0 en dehors de $[a,b]$ et en considérant l'application K_λ,

$$K_\lambda(t) = \begin{cases} e^{-t(A+\lambda)} & \text{si} \quad t \in [a,b], \\ 0 \quad \text{sinon}, \end{cases}$$

Nous obtenons alors $(\lambda + L_A)^{-1} f = K_\lambda * f$ et, par l'inégalité de Young,

$$||(\lambda + L_A)^{-1}||_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} \leq ||K_\lambda||_{L^1(a,b;\mathcal{L}(X))}.$$

Or, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{R}$ tel que $||e^{-tA}||_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{mt}$, d'où

$$\begin{aligned} ||(\lambda + L_A)^{-1}||_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} &\leq C \int_a^b e^{(m-\lambda)t}\, dt, \\ &\leq \frac{M}{1+\lambda}, \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \geq 0$, où M est une constante positive. □

Dore montre ensuite que l'opérateur $L_A + \lambda + \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est défini de façon analogue à $\mathcal{A}$, est inversible pour λ suffisamment grand. Il en découle la régularité maximale de $A+B+\lambda$ et donc celle de $A+B$ par le Proposition 1.1.2 (i). Dans le troisième chapitre, nous verrons une preuve indirecte de cette estimation (voir le Lemma 3.1.2).

Parallèlement à ce résultat, et suite à la caractérisation de la régularité maximale L^p sur les espaces UMD (voir Section 1.4), Kunstmann et Weis [I.33] ont démontré le résultat de perturbation suivant :

Théorème 1.2.3. *Soient X un espace UMD et $A \in \mathcal{MR}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $B \in \mathcal{L}(D, X)$ vérifiant*

$$||Bx|| \leq \varepsilon ||x||_D + \eta ||x||,$$

pour un certain $\eta \geq 0$, l'opérateur $A + B$ a la régularité maximale.

Ce résultat généralise, au moins dans le cas des espaces UMD, le Théorème 1.2.1. On sait en effet que $(X,D)_{\alpha,q}$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, vérifie une inégalité d'interpolation,

$$\begin{aligned} ||x||_{(X,D)_{\alpha,q}} &\leq C ||x||_D^\alpha ||x||^{1-\alpha}, \\ &\leq \delta^\alpha ||x||_D^\alpha C \frac{1}{\delta^\alpha} ||x||^{1-\alpha}, \quad \delta > 0, \\ &\leq \alpha\delta \|x\|_D + (1-\alpha)(\frac{C}{\delta^\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} \|x\|, \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si B vérifie les hypothèses du Théorème 1.2.1, il suffit de choisir δ suffisament petit pour appliquer le Théorème 1.2.3.

En revanche, l'inconvénient de ce résultat, et plus particulièrement de sa preuve, est qu'il se limite aux espaces UMD. En fait, il n'est pas "directement" prouvé que $A + B$ a la régularité maximale. On passe en effet par une propriété équivalente à la régularité maximale dans le cas des espaces UMD (voir la Section 1.4). On montre ensuite que si B vérifie l'hypothèse du Théorème 1.2.3 alors $A + B$ a cette propriété donc $A + B \in \mathcal{MR}$.

1.3 Condition initiale

Jusqu'à présent, nous avons présenté le problème de Cauchy avec condition initiale nulle : $u(a) = 0$. Une question naturelle est de savoir dans quel espace doivent vivre les conditions initiales $u(a) = x$ afin de préserver la régularité L^p. On montre que l'espace d'interpolation réel $(X, D)_{\frac{1}{p^*},p}$, $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$, est le bon espace. Notons que ce résultat est mentionné par Cannarsa et Vespri [I.10].
Cette discussion est principalement basée sur une caractérisation de l'espace $(X, D)_{\frac{1}{p^*},p}$.
On définit l'espace trace

$$Tr_p(a, b) \quad = \quad \{u(a) : u \in MR_p(a, b)\},$$

où $MR_p(a, b) = W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D)$. $W^{1,p}(a, b; X)$ étant inclus dans $C([a, b], X)$, $u(a)$ est bien défini. L'espace $Tr_p(a, b)$ muni de la norme $||x||_{Tr} := \inf\{||u||_{MR} : x = u(a)\}$ est un espace de Banach. Le théorème suivant, dont on peut trouver une démonstration dans le livre de Lunardi [I.35], établit la relation entre $MR_p(a, b)$ et l'espace d'interpolation réel $(X, D)_{\frac{1}{p^*},p}$.

Théorème 1.3.1. *Soient X et D deux espaces de Banach tels que $D \hookrightarrow X$, et $p \in (1, \infty)$. Alors*

$$(X, D)_{\frac{1}{p^*},p} = Tr_p(a, b).$$

A l'aide de cette caractérisation, la régularité maximale de A entraîne la régularité du problème de Cauchy associé à A avec la condition initiale $u(a) = x \in (X, D)_{\frac{1}{p^*},p}$.

Proposition 1.3.2. *Supposons que $A \in \mathcal{MR}$. Alors, pour tout $f \in L^p(a, b; X)$ et pour tout $x \in (X, D)_{\frac{1}{p^*},p}$, $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$, il existe un unique $u \in MR_p(a, b) = W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D)$ tel que :*

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad \text{p.p. dans } (a, b), \quad u(a) = x. \tag{1.4}$$

Démonstration. Soient $f \in L^p(a, b; X)$ et $x \in (X, D)_{\frac{1}{p^*},p}$. D'après le Théorème 1.3.1, il existe $w \in MR_p(a, b)$ tel que $w(a) = x$. Considèrons $g(t) = f(t) - \dot{w}(t) - Aw(t)$. On a alors $g \in L^p(a, b; X)$ et, par la régularité maximale de A, il existe $v \in MR_p(a, b)$ solution de

$$\dot{v}(t) + Av(t) = g(t), \quad \text{p.p. dans } (a, b), \quad v(a) = 0.$$

La fonction $u = v + w$ appartient à $MR_p(a, b)$ et u satisfait (1.4). L'unicité découle aussi de la régularité maximale de A. $\square$

Pour voir que $(X,D)_{\frac{1}{p^*},p}$ est le bon espace pour les conditions initiales, considèrons le problème homogène :

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0, \quad \text{p.p. dans } (a,b), \quad u(a) = x. \tag{1.5}$$

Si $-A$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe analytique, la solution de (1.5) est alors donnée par $u(t) = e^{-(t-a)A}x$. On sait de plus $u \in W^{1,p}(a,b;X) \cap L^p(a,b;D)$ si et seulement si $x \in (X,D)_{\frac{1}{p^*},p}$ (voir [I.4]). Par conséquent, la régularité maximale du problème (1.4) ne peut avoir lieu que pour des conditions initiales appartenant à l'espace d'interpolation réel $(X,D)_{\frac{1}{p^*},p}$.

1.4 Conditions nécessaires et suffisantes pour la régularité maximale L^p

Après ce survol des principales conséquences de la régularité maximale, nous présentons les principaux critères permettant d'assurer la régularité maximale L^p.
Le premier résultat concerne le cas hilbertien. Dans ce cadre, c'est à dire si X est un espace de Hilbert, De Simon [I.20] a prouvé que la condition nécessaire (iii) de la Proposition 1.1.2 est suffisante .

Théorème 1.4.1 (De Simon 1964). *Soient X un espace de Hilbert et A un opérateur fermé à domaine $D(A)$ dense dans X. Alors $A \in \mathcal{MR}$ si et seulement si $-A$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe analytique.*

On s'est longtemps demandé si cette caractérisation était aussi valable pour une classe plus large d'espaces de Banach. Brezis a ainsi formulé la question suivante : à quelles conditions sur X a-t-on la régularité maximale L^p pour tout A générateur d'un semi-groupe analytique bornée. Coulhon et Lamberton [I.17] ont montré que les espaces UMD sont le cadre limite pour obtenir une généralisation du Théorème 1.4.1. Ils considèrent le semi-groupe suivant sur $E = L^2(X)$: $\tilde{P}_t = P_t \otimes I$, où P_t est le semi-groupe de Poisson à une dimension. Le semi-groupe $\tilde{P}_t$ est analytique et soit $-A$ son générateur.

Théorème 1.4.2 (Coulhon, Lamberton 1986). *A a la régularité maximale L^p si et seulement si E est un espace UMD.*

Dore et Venni [I.24] ont ensuite obtenu un résultat positif dans le cas UMD, mais sous des hypothèses plus restrictives sur A. Plus précisément, si X est un espace UMD et A est à puissance imaginaire borné, alors $A \in \mathcal{MR}$. Mais Kalton et Lancien [I.31] ont prouvé que les espaces UMD ne répondent pas à la question de Brézis. Ils montrent en effet que l'équivalence "analyticité-régularité" est caractéristique des espaces de Hilbert au sein des espaces de Banach possédant une base inconditionnelle.

Théorème 1.4.3 (Kalton, Lancien 2000). *Soient X un espace de Banach possédant une base inconditionnelle et $p \in (1,\infty)$. Si X n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert, alors il existe un générateur de semi-groupe analytique qui n'admet pas la régularité maximale L^p.*

Toutefois, des progrès fondamentaux survenus au début des années 2000 dans le domaine des multiplicateurs de Fourier à valeur opérateur ont permis d'établir une caractérisation de la régularité maximale L^p dans le cas des espaces UMD ; la notion de R-bornitude d'une famille d'opérateurs en est la clé.

Définition 1.4.4. *Une famille d'opérateurs $\Phi \subset \mathcal{L}(X)$ est dite R-bornée s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $T_1, ..., T_n \in \Phi$ et pour tout $x_1, ..., x_n \in X$, on a*

$$\int_0^1 || \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(t) T_j x_j || \, dt \leq C \int_0^1 || \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(t) x_j || \, dt,$$

où $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est la suite de fonctions de Rademacher, $\varepsilon_j(t) = sign(\sin(2^j \pi t))$.

Dans le cas des espaces L^p, la R-bornitude d'une famille est équivalente à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $T_1, ..., T_n \in \Phi$ et pour tout $x_1, ..., x_n \in X$,

$$||(\sum_{j=1}^n |T_j x_j|^2)^{1/2}||_p \leq C||(\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{1/2}||.$$

En général, la R-bornitude est plus forte que la bornitude de la famille Φ à part dans le cadre hilbertien où ces deux notions équivalentes. La généralisaton aux espaces UMD des théorèmes de multiplicateurs L^p sur les espaces de Hilbert passe ainsi par la R-bornitude (voir [I.44]). Le résultat suivant caractérise complètement la régularité maximale dans ce cadre.

Théorème 1.4.5. *Soit X un espace UMD. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $A \in \mathcal{MR}_p$
(ii) Il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\}$ est inclus dans l'ensemble résolvant de A et la famille $\{\lambda(\lambda I - A)^{-1} : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\}$ est R-bornée.

Weis [I.44] a montré l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i), alors que la nécessité de la condition est établie par Clément et Prüss [I.15].
Ce théorème permet en outre de retrouver l'équivalence du cadre hilbertien et il en est ainsi une excellente généralisation. En effet, sur les espaces de Hilbert, bornitude et R-bornitude sont deux notions équivalentes et la propriété (ii) est alors équivalente au fait que $-A$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe analytique. En revanche, la R-bornitude d'une famille d'opérateurs est, dans la pratique, assez compliquée à vérifier ce qui rend le Théorème 1.4.5 peu maniable dans un cadre non-hilbertien.

Chapitre 2

Le problème de Cauchy non-autonome

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la régularité du problème de Cauchy (1.1) associé à un opérateur A. On peut aussi se demander ce qu'il advient dès lors que l'on autorise A à varier en fonction du temps. Considérons alors une famille d'opérateurs $A := \{A(t), t \in [a,b]\}$ à domaine $D(A(t))$ dense dans un espace de Banach X. Le problème de Cauchy non-autonome associé à la famille A est :

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad \text{p.p. dans } (a,b), \quad u(a) = 0. \tag{2.1}$$

Définition 2.0.6. *La famille A a la régularité maximale L^p, $p \in (1,\infty)$, sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, et on note $A \in \mathcal{MR}_p(a,b)$, si pour tout $f \in L^p(a,b;X)$, il existe un unique $u \in W^{1,p}(a,b;X)$ tel que $t \to A(t)u(t) \in L^p(a,b;X)$ et vérifiant le problème (2.1).*

De manière évidente, en considérant le cas où A est réduit à un opérateur, on retrouve le cas autonome. Dans le cas non-autonome, il semble très difficile de dégager de la régularité maximale des propriétés du type indépendance de l'intervalle, de l'espace L^p considéré, génération d'un semi-groupe... De même, la perspective d'un critère général dans l'esprit du Théorème 1.4.5 paraît vaine, à moins d'imposer des hypothèses supplémentaires sur la famille $\{A(t), t \in [a,b]\}$. Même dans le cas hilbertien, il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pour la régularité maximale L^p.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques uns des principaux résultats de cette théorie et dans cette optique, il convient de faire une distinction entre le cas où les domaines des $A(t)$ sont indépendants de t et le cas général. Nous verrons en particulier que, dans le cas où A est à domaine constant, un hypothèse de continuité est suffisante alors que dans le cas général, le résultat le plus satisfaisant renvoie aux hypothèses d'Acquistapace-Terreni, autrement dit des estimations de types hölderiennes.
Par la suite, pour alléger les notations, l'étude sera limitée aux intervalles $[a,b] = [0,\tau]$.

2.1 Le cas "domaine constant"

Soient X et D deux espaces de Banach vérifiant $D \hookrightarrow X$ et D dense dans X. Supposons que pour tout $t \in [0, \tau]$, $D(A(t)) = D$ et que les normes du graphes associées à chaque $A(t)$ soient uniformément équivalentes à la norme $||.||_D$. La famille A est alors vue comme une application bornée de $[0, \tau]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(D, X)$. Si, de plus, l'application A ainsi définie est fortement mesurable, la régularité maximale de A peut être reformulée de la façon suivante :

Définition 2.1.1. *A a la régularité maximale L^p si, pour tout $f \in L^p(0, \tau; X)$, il existe un unique $u \in MR_p(0, \tau) := W^{1,p}(0, \tau; X) \cap L^p(0, \tau; D)$ tel que :*

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad p.p. \ dans \ (0, \tau), \quad u(0) = 0.$$

Une démonstration analogue à celle de la Proposition 1.3.2 permet de remplacer la condition initiale $u(0) = 0$ par $u(0) = x$, où $x \in (X, D)_{\frac{1}{p^*}, p}$.

Proposition 2.1.2. *Supposons que $A \in \mathcal{MR}_p(0, \tau)$. Alors, pour tout $f \in L^p(0, \tau; X)$ et pour tout $x \in (X, D)_{\frac{1}{p^*}, p}$ où $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$, il existe un unique $u \in W^{1,p}(0, \tau; X) \cap L^p(0, \tau; D)$ tel que :*

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad p.p. \ dans \ (0, \tau), \quad u(0) = x. \tag{2.2}$$

Sous certaines hypothèses sur l'application A, l'existence d'une famille d'évolution permet de fournir une approche du problème non-autonome et, bien qu'il ne s'agisse pas de régularité L^p, il semble naturel de rappeler quelques résultats fondamentaux de cette théorie. Il s'agit en fait de trouver une notion analogue au semi-groupe dans le cas non-autonome. On renvoie au livre de Pazy [I.38] pour les preuves.

Définition 2.1.3. *Un famille d'évolution est une famille d'opérateurs bornés sur X à deux paramètres, $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq \tau$, vérifiant les conditions suivantes :*
(i) $U(t, t) = I$ et $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$, $0 \leq s \leq r \leq t \leq \tau$.
(ii) $(t, s) \to U(t, s)$ est fortement continu.

La construction d'une famille d'évolution est liée au problème d'évolution non-autonome sans second membre mais avec condition initiale $x \in X$:

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq t \leq \tau, \quad u(s) = x. \tag{2.3}$$

Le résultat à la base de cette théorie concerne les familles d'opérateurs bornés :

Théorème 2.1.4. *Supposons que $A \in C([0, \tau], \mathcal{L}(X))$. Alors, pour tout $x \in X$, le problème (2.3) a une unique solution classique, c-à-d continue sur $[s, \tau]$ et continument dérivable sur $(s, \tau]$.*

En posant $U(t, s)x = u(t)$ pour $0 \leq s \leq t \leq \tau$, où u est la solution de (2.3), on montre que $U(t, s)$ est une famille d'évolution. Par exemple, si A est constant, on peut définir le semi-groupe associé à $-A$, et la famille d'évolution qui gouverne (2.3) est $U(t,s) = e^{-(t-s)A}$. Dans notre contexte, si $A : [a,b] \to \mathcal{L}(D,X)$, où D est dense dans X, une approche de ce problème par un famille d'évolution est présenté par Pazy [I.38]. Sous certaines hypothèses sur l'application A, il prouve l'existence d'une solution classique.

Théorème 2.1.5. *Supposons que A vérifie les hypothèses suivantes :*

(H1) *Pour tout $t \in [0,\tau]$, l'ensemble résolvant $\rho(A(t))$ contient $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\}$, et il existe une constante $M \geq 0$ tel que*

$$||(\lambda - A(t))^{-1}|| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0, \quad t \in [0,\tau].$$

(H2) *Il existe deux constantes $L \geq 0$ et $\alpha \in (0,1)$ telles que*

$$||(A(t) - A(s))A(r)^{-1}|| \leq L|t-s|^{\alpha}, \quad r,\, s,\, t \in [0,\tau].$$

Alors le problème (2.3) a une unique solution classique u donnée par $u(t) = U(t,s)x$, où $U(t,s)$ est une famille d'évolution.

Sous ces hypothèses, nous obtenons aussi une solution du problème d'évolution avec second membre f hölderien. Cette solution est donnée par $u(t) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,r)f(r)\,dr$.

Plus proche de notre sujet, mais toujours en gardant cette approche par une famille d'évolution, les travaux de Prüss et Schnaubelt [I.40] constituent une véritable avancée car ils ont réussi à dépasser l'hypothèse hölderienne (H2).

Théorème 2.1.6 (Prüss, Schnaubelt 2001). *Supposons que A vérifie les hypothèses suivantes :*

(H1') *Pour tout $t \in [0,\tau]$, l'opérateur $A(t) \in \mathcal{MR}$ et le semi-groupe engendré par $A(t)$ est de type négatif.*

(H2') *A est continue de $[0,\tau]$ à valeur dans $\mathcal{L}(D,X)$.*

Alors pour tout $f \in L^p(0,\tau;X)$ et pour tout $x \in (X,D)_{\frac{1}{p^*},p}$, il existe un unique $u \in W^{1,p}(0,\tau;X) \cap L^p(0,\tau;D)$ tel que :

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad \text{p.p. dans } (0,\tau), \quad u(0) = x. \tag{2.4}$$

De plus, la solution u est donnée par $u(t) = U(t,0)x + \int_0^t U(t,s)f(s)\,ds$, où $U(t,s)$ est une famille d'évolution.

Dans le cas des espaces réflexifs, Cannarsa et Vespri [I.10] ont obtenu un résultat du même type. Notons que Amman [I.3] a prouvé ce théorème par une méthode plus simple, sans passer par une famille d'évolution. Le principal intérêt de l'approche de Prüss et Schnaubelt n'est donc pas l'existence et l'unicité de la solution mais véritablement la construction de la famille d'évolution. L'existence de $U(t,s)$ permet, en plus d'avoir une représentation explicite des solutions, de résoudre, à posteriori, le problème de Cauchy avec donnée initiale $x \in X$.

Théorème 2.1.7 (Prüss, Schnaubelt 2001). *Supposons que A vérifie (H1') et (H2'), pour tout $f \in L^p(0,\tau;X)$ et pour tout $x \in X$, il existe un unique $u \in C([0,\tau];X) \cap W^{1,p}_{loc}(0,\tau;X) \cap L^p_{loc}(0,\tau;D)$ solution de (2.4).*

Leur construction de $U(t,s)$ repose essentiellement sur l'approximation de Yosida $A_n(t) = nA(t)(n-A(t))^{-1}$. L'application A_n, ainsi définie, est continue de $[0,\tau]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$. Par le Théorème 2.1.4, A_n dispose d'une famille d'évolution $U_n(t,s)$. La principale difficulté est alors de montrer que les $U_n(t,s)$ sont uniformément bornés. La famille $U(t,s)$ est ensuite construite par approximation à partir des $U_n(t,s)$.

Une approche totalement différente a permis à Amman [I.3] d'établir le Théorème 2.1.6 ainsi que des résultats de perturbation.

Théorème 2.1.8 (Amann 2004). *Soient α, $\theta \in (0,1)$ et ρ tel que $0 \leq \frac{1}{\rho} \leq (1-\theta) \wedge \frac{1}{p}$. Soient A, B et C trois applications telles que*

(i) $A \in C([0,\tau], \mathcal{L}(D,X)$ et pour tout $t \in [0,\tau]$, $A(t) \in \mathcal{MR}$.

(ii) $B \in L^\infty(0,\tau; \mathcal{L}(D,(X,D)_{\alpha,\infty}))$.

(iii) $C \in L^\rho(0,\tau; \mathcal{L}((X,D)_{\theta,\infty}, X))$.

Alors $A+B+C \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$.

De plus, il a montré que dans le cas où l'application A est continue, la régularité maximale L^p de A est équivalente à la régularité des opérateurs $A(t)$, $t \in [0,\tau]$.

Proposition 2.1.9 (Amann 2004). *Si A est continue de $[0,\tau]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(D,X)$, alors $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$ si et seulement si pour tout $t \in [0,\tau)$, $A(t) \in \mathcal{MR}$.*

Sa démarche repose sur un traitement "direct" de la régularité maximale L^p, dans le sens où elle ne fait pas appel à des notions "extérieures" du type famille d'évolution. A l'aide d'un résultat de perturbation non-autonome dans l'esprit du Théorème 1.2.1, et en utilisant la continuité de A, le fait d'écrire $A(t) = A(t_0) + (A(t) - A(t_0))$, pour t_0 fixé, permet de résoudre le problème de Cauchy dans un voisinage de t_0. En effet, $A(t_0) \in \mathcal{MR}$ par hypothèse et, pour t suffisament proche de t_0, on considère $(A(t) - A(t_0))$ comme une perturbation de $A(t_0)$. Cette démarche très simple rencontre cependant certains obstacles techniques. Nous reviendrons sur ces questions dans le prochain chapitre.

2.2 Le cas "domaine variable"

Considérons une famille d'opérateurs $A := \{A(t), t \in [0,\tau]\}$ à domaine $D(A(t))$ dense dans X. Dans ce contexte, il est beaucoup plus difficile d'avoir une approche globale du problème. On voit mal en effet comment exprimer la propriété de régularité en termes d'inversibilité d'un certain opérateur. Il existe cependant de nombreux résultats mais, pour le moment, on ignore s'il est possible de se contenter de la continuité, comme dans le cas "domaine constant". Les hypothèses suivantes, dites de Acquistapace-Terreni, demeurent les plus faibles pour assurer la régularité maximale L^p :

(AT1) Il existe $\theta \in (0,\pi/2)$ tel que pour tout $t \in [0,\tau]$, $\sigma(A(t)) \subset \Sigma_\theta$ et pour tout $\phi \in (\theta,\pi)$, il existe $M > 0$ tel que

$$||(\lambda - A(t))^{-1}|| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad t \in [0,\tau], \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi.$$

(AT2) Il existe des constantes α, $\beta \in [0,1]$, $\alpha < \beta$, $\omega \in (\theta, \pi/2)$ et $c > 0$ telles que

$$||A(t)(\lambda - A(t))^{-1}(A(t)^{-1} - A(s)^{-1})|| \leq c\frac{|t-s|^\beta}{1+|\lambda|^{1-\alpha}}, \quad s,t \in [0,\tau], \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega.$$

(AT1) et (AT2), sous une forme un peu plus faible, ont été introduites par Acquistapace et Terreni [I.1] afin d'étudier le problème d'évolution (2.3) dans le cas où les $A(t)$ n'ont pas le même domaine. Sous ces hypothèses, le problème (2.3) avec condition initiale $x \in D(A(s)$ admet une unique solution classique, au sens où $u \in C^1([s,\tau];X) \cap \{u \in C([s,\tau];X) : u(t) \in D(A(t)),\ A(.)u(.) \in C([s,\tau];X)\}$. Une preuve de ce résultat à l'aide d'une famille d'évolution est donnée par Monniaux et Rhandi [I.36].
Ces hypothèses restent encore valables si l'on s'intéresse à la régularité maximale L^p. Ainsi Hieber et Monniaux [I.29] ont montré que si une famille A vérifie (AT1) et (AT2), alors la régularité maximale L^p de A est indépendante de p. De plus, dans le cadre hilbertien, ces deux hypothèses suffisent pour établir la régularité de A.

Théorème 2.2.1 (Hieber, Monniaux 2000). *Supposons que X soit un espace de Hilbert. Si la famille A vérifie (AT1) et (AT2), alors $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$, pour tout $p \in (1,\infty)$.*

Par la suite, Portal et Štrkalj [I.39] ont généralisé le Théorème 2.2.1 aux espaces UMD, en considérant, au lieu de (AT1), sa version en terme de R-bornitude :

(AT1') Il existe $\theta \in (0,\pi/2)$ et $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0,\tau]$, $\sigma(A(t)) \subset \Sigma_\theta$ et la famille $\{(1+|\lambda|)(\lambda - A(t))^{-1}, \quad t \in [0,\tau], \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\theta\}$ est R-bornée.

Pour le moment, il semble difficile de pouvoir se passer de l'hypothèse hölderienne lorsque les domaines des $A(t)$ peuvent varier. Le Chapitre 3 propose, en détail, une étude du cas "domaine constant" qui permet d'établir le Théorème 2.1.8 sous une hypothèse plus faible que la continuité de A. On introduira la notion de continuité relative d'une fonction mesurable et bornée à valeurs opérateurs. Nous verrons aussi que cette méthode s'adapte à l'étude de la régularité maximale L^p du problème non-autonome du second ordre,

$$\ddot{u}(t) + B(t)\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{p.p. dans } (0,\tau), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0. \tag{2.5}$$

Chapitre 3

Contributions à l'étude de la régularité maximale L^p dans le cas non-autonome

Let $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D, X)$ be strongly measurable and bounded, where D, X are Banach spaces such that $D \hookrightarrow X$. We assume that the operator $A(t)$ has maximal regularity for all $t \in [0, \tau]$. Then we show under some additional hypothesis (viz. relative continuity) that the non-autonomous problem

$$(P) \qquad \dot{u} + A(t)u = f \quad \text{a.e. on } (0, \tau), \quad u(0) = x,$$

is well-posed in L^p ; i.e. for all $f \in L^p(0, \tau; X)$ and all $x \in (X, D)_{\frac{1}{p*},p}$ there exists a unique $u \in W^{1,p}(0, \tau; X) \cap L^p(0, \tau; D)$ solution of (P), where $1 < p < \infty$. If the operators $A(t)$ are accretive, we show that conversely, well-posedness of (P) implies that $A(t)$ has maximal regularity for all $t \in [0, \tau]$. We also consider the non-autonomous second order problem

$$\ddot{u} + B(t)\dot{u} + A(t)u = f \quad \text{a.e. on } (0, \tau), \quad u(0) = x, \, \dot{u}(0) = y,$$

for which we prove similar regularity and perturbation results.

Introduction

In this article we study L^p-maximal regularity for non-autonomous first order and second order Cauchy problems.

In order to explain these concepts, let X and D be two Banach spaces such that D is continuously and densely embedded into X. We say that a single operator $A \in \mathcal{L}(D, X)$ has *L^p-maximal regularity* ($p \in (1, \infty)$) if for every $f \in L^p(0, \tau; X)$ there exists a unique $u \in W^{1,p}(0, \tau; X) \cap L^p(0, \tau; D)$ such that

$$\dot{u} + Au = f \quad \text{a.e. on } (0, \tau), \qquad u(0) = 0. \tag{3.1}$$

The property of L^p-maximal regularity has been studied intensively in the recent years due to its applications to proving existence, uniqueness and regularity of solutions of linear and especially nonlinear evolution equations; see [I.4], [I.5], [I.6], [I.13], [I.14], [I.21], [I.34] for abstract results and their applications.

If A is not constant but if $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D, X)$ is a bounded and strongly measurable function, then L^p-maximal regularity of A is defined similarly as above, the problem (3.1) now being a non-autonomous first order Cauchy problem. The L^p-maximal regularity of the non-autonomous Cauchy problem is less well understood. Hieber and Monniaux [I.29], [I.28] and Štrkalj [I.43] proved L^p-maximal regularity assuming Acquistapace-Terreni conditions on A and L^p-maximal regularity for every $A(t)$. Their approach goes back to the operator sum method of Da Prato and Grisvard [I.18] and Acquistapace and Terreni [I.1] but it also uses kernel estimates or the concept of R-boundedness; the time regularity of A is rather strong but their result has the advantage that the domains of the $A(t)$ may depend on t.

More recently, Prüss and Schnaubelt [I.40] and Amann [I.3] proved L^p-maximal regularity assuming only that A is continuous and that $A(t)$ has L^p-maximal regularity for every $t \in [0, \tau]$.

In this article, we prove L^p-maximal regularity assuming only that A is bounded, strongly measurable and relatively continuous and that $A(t)$ has L^p-maximal regularity for every $t \in [0, \tau]$. In the application to a non-autonomous diffusion equation which we describe in Section 3.4, this weaker regularity assumption means that the lower order coefficients need only be measurable in time.

In addition to L^p-maximal regularity, we prove well-posedness of the initial value problem

$$\dot{u} + A(t)u = 0 \quad \text{a.e. on } (s, \tau), \qquad u(s) = x,$$

in certain real interpolation spaces, where $s \in [0, \tau]$, and if the $A(t)$ are in addition accretive, then we actually prove well-posedness of the initial value problem in X itself. Regularity of the solutions or of the associated evolution families (see [I.11] for this concept) is described in Sections 3.2 and 3.3. Note that here our proofs are more direct than those of the corresponding results in [I.40].

Finally, we study also L^p-maximal regularity of second order Cauchy problems. Let D_A and D_B be two Banach spaces which embed continuously and densely into X. We say that the couple (A, B) of two bounded and strongly measurable functions $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D_A, X)$ and $B : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D_B, X)$ has *L^p-maximal regularity* if for every $f \in L^p(0, \tau; X)$ there exists a unique $u \in W^{2,p}(0, \tau; X) \cap L^p(0, \tau; D_A)$ such that $\dot{u} \in L^p(0, \tau; D_B)$ and

$$\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f \quad \text{a.e. on } (0, \tau), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0.$$

The concept of L^p-maximal regularity of the second order Cauchy problem is more recent and has been studied in [I.12] in the autonomous case. In Section 3.5, we prove L^p-maximal regularity for the non-autonomous Cauchy problem using similar ideas than for the first order problem. But here the resolvent estimates we need are more difficult to obtain and need new ideas. An application to a non-autonomous, strongly damped wave equation is described in Section 3.6.

3.1 Perturbation of maximal regularity

Let X and D be two Banach spaces such that D is continuously and densely embedded into X. We write $D \underset{d}{\hookrightarrow} X$.

Let $A \in \mathcal{L}(D, X)$.

Definition 3.1.1. Let $p \in (1, \infty)$. We say that A has *L^p-maximal regularity* (and write $A \in \mathcal{MR}_p$) if for some bounded interval (a, b) and all $f \in L^p(a, b; X)$ there exists a unique $u \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D)$ such that

$$\dot{u} + Au = f \quad \text{a.e. on } (a, b), \qquad u(a) = 0\ . \tag{3.2}$$

Recall, that $W^{1,p}(a, b; X) \subset C([a, b]; X)$ so that the condition $u(a) = 0$ in the above equation makes sense.

It is known that the property of L^p-maximal regularity is independent of the bounded interval (a, b), and if $A \in \mathcal{MR}_p$ for some $p \in (1, \infty)$ then $A \in \mathcal{MR}_p$ for all $p \in (1, \infty)$, [I.10], [I.41], [I.34]. Hence, we can write $A \in \mathcal{MR}$ for short.

It is also known that if $A \in \mathcal{MR}$ then $-A$, seen as an unbounded operator on X, generates a holomorphic C_0-semigroup $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ on X, [I.22], [I.34]. The converse is true if X is a Hilbert space. Then $A \in \mathcal{MR}$ if and only if $-A$ generates a holomorphic semigroup. However, this equivalence is restricted to Hilbert spaces, at least in the class of all Banach spaces with unconditional basis, [I.31]. On the other hand, there are large classes of operators which are known to have the property of maximal regularity (see [I.21] and also the survey article [I.4]).

Now we fix $p \in (1, \infty)$. By

$$MR(a, b) := W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D)$$

we denote the *maximal regularity space* which is a Banach space for the norm

$$\|u\|_{MR} = \|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} + \|u\|_{L^p(a,b;D)}\ .$$

Moreover, we consider the *trace space* $Tr := \{u(a) : u \in MR(a, b)\}$ with the norm

$$\|x\|_{Tr} = \inf\{\|u\|_{MR} : x = u(a)\}\ .$$

The space Tr is isomorphic to the real interpolation space $(X, D)_{\frac{1}{p^*},p}$ where $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$, [I.35, Chapter 1]. In particular, Tr does not depend on the choice of the interval. We also note that

$$MR(a, b) \underset{d}{\hookrightarrow} C([a, b], Tr).$$

If $A \in \mathcal{MR}$, then for every $x \in Tr$ the homogeneous problem

$$\dot{u} + Au = 0 \quad \text{a.e. on } (a, b), \qquad u(a) = x, \tag{3.3}$$

has the unique solution $u(t) = e^{-(t-a)A}x \in MR(a, b)$. Clearly, the condition $x \in Tr$ is necessary for u to belong $MR(a, b)$. The sufficiency will be proved below in a more general context (Proposition 3.1.3).

It will be convenient to formulate the property of maximal regularity in terms of the closedness of the sum of two operators (see Clément [I.13] for more information of this aspect). For this, consider first the operator $\mathcal{B}$ on $L^p(a,b;X)$ given by

$$\begin{aligned} D(\mathcal{B}) &= \{u \in W^{1,p}(a,b;X) : u(a) = 0\}, \\ \mathcal{B}u &= \dot{u} \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Then $-\mathcal{B}$ generates the shift semigroup $(e^{-t\mathcal{B}})_{t\geq 0}$ given by

$$(e^{-t\mathcal{B}}u)(s) = \begin{cases} u(s-t) & 0 \leq t \leq s-a \\ 0 & t > s-a \ . \end{cases}$$

Now assume that $-A$ generates a C_0-semigroup $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ on X (where $A \in \mathcal{L}(D,X)$ is the given operator, seen as an unbounded operator on X). Consider the multiplication operator $\mathcal{A}$ on $L^p(a,b;X)$ given by

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= L^p(a,b;D), \\ (\mathcal{A}u)(s) &= Au(s), \quad s \in (a,b). \end{aligned}$$

Then $-\mathcal{A}$ generates the C_0-semigroup $(e^{-t\mathcal{A}}u)(s) = e^{-tA}u(s)$ $(s \in (a,b))$. The shift semigroup $(e^{-t\mathcal{B}})_{t\geq 0}$ and the multiplication semigroup $(e^{-t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ commute and the product

$$(e^{-t\mathcal{B}}\, e^{-t\mathcal{A}})_{t\geq 0} \tag{3.5}$$

defines a C_0-semigroup on $L^p(a,b;X)$ whose generator is the closure of $-(\mathcal{A}+\mathcal{B})$. In fact, $D(\mathcal{A})\cap D(\mathcal{B})$ is dense and invariant by the product semigroup and so a core of its generator. Since the product semigroup is nilpotent, the closure of $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ has empty spectrum.

Now assume that $A \in \mathcal{MR}$. This is equivalent to saying that the sum $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ is closed. We denote this sum by L_A for short. Thus $-L_A$ is the generator of the semigroup (3.5) and has empty spectrum. We have

$$\begin{aligned} D(L_A) &= \{u \in MR(a,b) : u(a) = 0\}, \\ L_A u &= \dot{u} + Au \ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

The inverse L_A^{-1} of L_A gives the solution of the maximal regularity problem. For $f \in L^p(a,b;X)$, $u = L_A^{-1}f$ is the unique solution in $MR(a,b)$ of the inhomogeneous problem (3.2).

Fix $\tau > 0$. For each subinterval $(a,b) \subset (0,\tau)$ we may consider the operator L_A on $L^p(a,b;X)$. We do not use different notations for these operators in order to keep notations simple. We need the following uniform estimate.

Lemma 3.1.2. *Assume that $A \in \mathcal{MR}$. There exists a constant $M \geq 0$ such that*

$$\begin{aligned} &\|(\lambda + L_A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X),MR(a,b))} \leq M, \ \textit{and} \\ &\|(1+\lambda)\,(\lambda + L_A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} \leq M, \end{aligned}$$

for all intervals $(a,b) \subset (0,\tau)$ and all $\lambda \geq 0$.

Proof. Since $-L_A$ generates a C_0-semigroup on $L^p(0,\tau;X)$ and has empty spectrum one has

$$\sup_{\lambda\geq 0}\|(\lambda+L_A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\tau;X),MR(0,\tau))}<\infty\ ,$$

and

$$\sup_{\lambda\geq 0}\|(1+\lambda)\,(\lambda+L_A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\tau;X))}<\infty\ .$$

Let $(a,b)\subset(0,\tau)$ be any subinterval, and let $\lambda\geq 0$. Let $f\in L^p(a,b;X)$. Extend f by 0 to $(0,\tau)$. Let $u\in MR(0,\tau)$ such that

$$\dot{u}+\lambda u+Au=f\quad \text{a.e. on } (0,\tau),\qquad u(0)=0\ .$$

Since $f(t)=0$ on $(0,a)$, it follows from unique solvability of (3.2) on $(0,a)$ that $u=0$ on $[0,a]$. This shows that $(\lambda+L_{A,a,b})^{-1}$ is the restriction of $(\lambda+L_{A,0,\tau})^{-1}$ where $L_{A,a,b}$ is the operator L_A on $L^p(a,b;X)$. □

Now we prove the perturbation result. We consider the given operator $A\in\mathcal{L}(D,X)$, a fixed $p\in(1,\infty)$ and $\tau>0$.

Proposition 3.1.3. *Assume that $A\in\mathcal{MR}$. Let $(a,b)\subset(0,\tau)$ and $B:(a,b)\to\mathcal{L}(D,X)$ be strongly measurable. Suppose that there exists $\eta\geq 0$ such that*

$$\|B(t)x\|_X\leq\frac{1}{2M}\|x\|_D+\eta\|x\|_X \tag{3.7}$$

for all $x\in D$, $t\in(a,b)$, where M is the constant in Lemma 3.1.2. Then for all $f\in L^p(a,b;X)$, $x\in(X,D)_{\frac{1}{p^*},p}$ there exists a unique $u\in MR(a,b)$ satisfying

$$\dot{u}+Au+B(t)u=f\quad \textit{a.e. on } (a,b)\qquad u(a)=x\ . \tag{3.8}$$

Proof. (a) Let $\lambda\in\mathbb{C}$. Assume that for each $g\in L^p(a,b;X)$ there exists a unique $v\in MR(a,b)$ satisfying

$$\dot{v}+(A+\lambda)v+B(t)v=g\quad \text{a.e. on } (a,b),\quad v(a)=0. \tag{3.9}$$

Then also (3.8) has a unique solution if $x=0$. In fact, let $u\in MR(a,b)$, $v(t)=e^{-\lambda t}u(t)$. Then u satisfies (3.8) with $x=0$ if and only if v satisfies (3.9) for $g(t)=e^{-\lambda t}f(t)$.

(b) We assume that $x=0$. Consider the operator $\tilde{B}\in\mathcal{L}(MR(a,b),L^p(a,b;X))$ given by $(\tilde{B}u)(t)=B(t)u(t)$. Then

$$\begin{aligned}\|\tilde{B}u\|_{L^p(a,b;X)}&\leq\Big(\int_a^b\|B(t)u(t)\|_X^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\frac{1}{2M}\|u\|_{L^p(a,b;D)}+\eta\,\|u\|_{L^p(a,b;X)}\ .\end{aligned}$$

Consider the operator $L = L_A$ on $L^p(a,b;X)$, as defined in (3.6). Then, by Lemma 3.1.2,

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{B}(\lambda+L)^{-1}f\|_{L^p(a,b;X)} \\
\leq\ & \frac{1}{2M}\|(\lambda+L)^{-1}f\|_{L^p(a,b;D)} + \eta\,\|(\lambda+L)^{-1}f\|_{L^p(a,b;X)} \\
\leq\ & \frac{1}{2M}\|(\lambda+L)^{-1}f\|_{MR(a,b)} + \eta\,\|(\lambda+L)^{-1}f\|_{L^p(a,b;X)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|f\|_{L^p(a,b;X)} + \frac{\eta\, M}{1+\lambda}\,\|f\|_{L^p(a,b;X)}
\end{aligned}$$

for all $\lambda \geq 0$. Hence, we find $\lambda \geq 0$ such that

$$\|\tilde{B}(\lambda+L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} \leq \frac{3}{4}\ .$$

Thus, the operator $I+\tilde{B}(\lambda+L)^{-1}$ on $L^p(a,b;X)$ is invertible. It follows that also $\lambda+L+\tilde{B} = (I+\tilde{B}(\lambda+L)^{-1})(\lambda+L) \in \mathcal{L}(D(L), L^p(a,b;X))$ is invertible. This means that the problem (3.9) has a unique solution for every $g \in L^p(a,b;X)$. Hence, the problem (3.8) has a unique solution for every $f \in L^p(a,b;X)$, if $x = 0$.

(c) Let $x \in (X,D)_{\frac{1}{p^*},p}$. Then there exists $w \in MR(a,b)$ such that $w(a) = x$. By (b), there exists a unique $v \in MR(a,b)$ solution of

$$\dot{v} + (A+B(t))v = -\dot{w} - (A+B(t))w + f \quad \text{a.e. on } (a,b), \qquad v(a) = 0.$$

Putting $u := v + w$, we have proved existence for (3.8). Uniqueness follows from (b). $\square$

3.2 The non-autonomous first order problem

Let X and D be two Banach spaces such that $D \underset{d}{\hookrightarrow} X$.

Fix $\tau > 0$, and let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ be a bounded and strongly measurable function.

Definition 3.2.1. Let $p \in (1,\infty)$. We say that the function A has *L^p-maximal regularity* (and we write $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$) if for every $f \in L^p(0,\tau;X)$ there exists a unique $u \in MR(0,\tau)$ such that

$$\dot{u} + A(t)u = f \quad \text{a.e. on } (0,\tau), \quad u(0) = 0. \tag{3.10}$$

We show that maximal regularity on every subinterval of $(0,\tau)$ implies the well-posedness of the homogeneous equation with initial values in the trace space and thus the existence of an evolution family on Tr associated with A.

Lemma 3.2.2. *Assume that $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau')$ for every $0 < \tau' \leq \tau$. Then for every $x \in Tr$ and every $s \in [0,\tau)$ there exists a unique $u \in MR(s,\tau)$ such that*

$$\dot{u} + A(t)u = 0 \quad \textit{a.e. on } (s,\tau), \quad u(s) = x. \tag{3.11}$$

Moreover, if for fixed $x \in Tr$ we denote by u_s the solution of the above problem and if $s_n \to s$ then

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{s_n} - u_s\|_{MR(s\vee s_n,\tau)} = 0.$$

Proof. *Uniqueness :* Let u_1, $u_2 \in MR(s,\tau)$ be two solutions of (3.11). Define $v = u_1 - u_2$ and extend this function by 0 on $[0,s)$. Then v is a solution of (3.10) for the right-hand side $f = 0$, and therefore, by maximal regularity, $v = 0$.

Existence : Let $w \in MR(0,\tau)$ be such that $w(0) = x$. Let $w_s(t) := w(t-s)$ for $t \in [s,\tau]$ and let

$$f_s(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t < s, \\ -\dot{w}_s(t) - A(t)w_s(t) & \text{if } s \le t \le \tau. \end{cases}$$

Let $v_s \in MR(0,\tau)$ be the unique solution of

$$\dot{v}_s + A(t)v_s = f_s \quad \text{a.e. } t \in [0,\tau], \quad v_s(0) = 0,$$

and set $u_s(t) := v_s(t) + w_s(t)$ for $t \in [s,\tau]$. Observe that $v_s(s) = 0$ since $A \in \mathcal{MR}_p(0,s)$ and $f_s = 0$ on $(0,s)$. Thus, u_s solves (3.11).

Estimate : By definition,

$$\lim_{n\to\infty} \|w_{s_n} - w_s\|_{MR(s\vee s_n,\tau)} = 0$$

and thus also

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{s_n} - f_s\|_{L^p(0,\tau;X)} = 0.$$

The latter estimate and the boundedness of L_A^{-1} implies

$$\lim_{n\to\infty} \|v_{s_n} - v_s\|_{MR(0,\tau;X)} = 0,$$

from where the estimate for u_s. □

Let $\Delta := \{(t,s) \in [0,\tau] \times [0,\tau] : t \ge s\}$, and assume that $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau')$ for every $0 < \tau' \le \tau$. By Lemma 3.2.2, for every $(t,s) \in \Delta$ and every $x \in Tr$ we can define

$$U(t,s)x := u(t),$$

where u is the unique solution of the initial value problem (3.11).

Proposition 3.2.3. *The family $(U(t,s))_{(t,s)\in\Delta}$ is a bounded, strongly continuous evolution family on Tr, i.e.*

(i) $U(t,s) \in \mathcal{L}(Tr)$ for every $(t,s) \in \Delta$ and $\sup_{(t,s)\in\Delta} \|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(Tr)} \le M$,

(ii) $U(t,t) = I$ and $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ for every $0 \le s \le r \le t \le \tau$, and

(iii) for every $x \in Tr$ the function $\Delta \to Tr$, $(t,s) \mapsto U(t,s)x$ is continuous.

Proof. By the estimate from Lemma 3.2.2 and the boundedness of the embedding $MR(s,\tau) \hookrightarrow C([s,\tau],Tr)$, for every $x \in Tr$ the function $(t,s) \mapsto U(t,s)x$ is continuous with values in Tr. By the closed graph theorem, there exists $M \ge 0$ such that

$$\sup_{(t,s)\in\Delta} \|U(t,s)x\|_{Tr} \le M\, \|x\|_{Tr}.$$

The property (ii) is an easy consequence of unique solvability of the initial value problem (3.11). □

Next we show that the solution of the inhomogeneous problem (3.10) with initial value 0 is given by convolution of the non-homogeneity f and the evolution family U.

Proposition 3.2.4. *Assume that $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau')$ for every $0 < \tau' \le \tau$. For every $f \in L^p(0,\tau;Tr)$ the unique solution u of the inhomogeneous problem* (3.10) *is given by*

$$u(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)\, ds.$$

Proof. By the estimate from Lemma 3.2.2, for every $x \in Tr$ the function $U(\cdot,\cdot)x$ belongs to $L^p(\Delta, D)$. Hence, for every simple function $f \in L^p(0,\tau,Tr)$, the function $(t,s) \mapsto U(t,s)f(s)$ belongs to $L^p(\Delta, D)$. Thus, if we put $v(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)\, ds$, then v is well-defined for almost every $t \in (0,\tau)$. Note that

$$U(t,s)f(s) = f(s) - \int_s^t A(r)U(r,s)f(s)\, dr$$

for $0 \le s \le t \le \tau$, by the definition of $U(t,s)$. Thus, by Fubini's theorem, for almost every $t \in (0,\tau)$

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^t f(s)\, ds - \int_0^t \int_s^t A(r)U(r,s)f(s)\, dr\, ds \\
&= \int_0^t f(s)\, ds - \int_0^t \int_0^r A(r)U(r,s)f(s)\, ds\, dr \\
&= \int_0^t f(s)\, ds - \int_0^t A(r) \int_0^r U(r,s)f(s)\, ds\, dr \\
&= \int_0^t f(s)\, ds - \int_0^t A(r)v(r)\, dr.
\end{aligned}$$

Hence, v is a solution of (3.10), and by uniqueness, $u = v$. For general $f \in L^p(0,\tau,Tr)$ one argues by density. ☐

So far we described consequences of L^p-maximal regularity of the non-autonomous problem 3.10. Next we give a criterion which implies L^p-maximal regularity. It is based on the following definition.

Definition 3.2.5. A function $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ is called *relatively continuous* if for each $t \in [0,\tau]$ and all $\varepsilon > 0$ there exist $\delta > 0$, $\eta \ge 0$ such that for all $x \in D$, $s \in [0,\tau]$, $|s-t| \le \delta$ implies that

$$\|A(t)x - A(s)x\|_X \le \varepsilon \|x\|_D + \eta \|x\|_X \ .$$

Remark 3.2.6. If A is relatively continuous then by a compactness argument A is *uniformly relatively continuous*, by which we mean that for every $\varepsilon > 0$ there exist $\delta > 0$ and $b \ge 0$ such that for all $x \in D$ and all s, $t \in [0,\tau]$ one has

$$\|A(t)x - A(s)x\|_X \le \varepsilon \|x\|_D + b\|x\|_X$$

whenever $|t-s| \le \delta$. This implies in particular that each relatively continuous function is bounded.

Now the main result is the following.

Theorem 3.2.7. *Let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ be strongly measurable and relatively continuous. Assume that $A(t) \in \mathcal{MR}$ for all $t \in [0,\tau]$. Then $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau')$ for every $0 < \tau' \le \tau$ and every $p \in (1,\infty)$.*

In particular, for each $f \in L^p(0,\tau;X)$ and each $x \in (X,D)_{\frac{1}{p^*},p}$ there exists a unique $u \in W^{1,p}(0,\tau;X) \cap L^p(0,\tau;D)$ satisfying

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f \quad \text{a.e. on } (0,\tau), \\ u(0) = x \ . \end{cases} \tag{3.12}$$

This result generalizes a result by Prüss and Schnaubelt [I.40] (see also Amann [I.3]) where it is supposed that A is norm continuous. If A is norm continuous then the semigroup generated by $-A(t)$ are uniformly exponentially bounded, i.e. $\|e^{-sA(t)}\|_{\mathcal{L}(X)} \le Me^{\omega s}$ for all $s \ge 0$, $t \in [0,\tau]$. Our more general hypothesis does not imply such a uniform bound. For the proof we need the following compactness property.

Lemma 3.2.8. *For each $t \in [0,\tau]$ let be given $\delta_t > 0$. Then there exist a partition $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = \tau$ and $t_i \in [0,\tau]$, $i = 0,1,\ldots,n$ such*

$$t_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i}]$$

for all $i = 0,1,\ldots,n-1$.

Proof. By compactness, we find $t_i \in [0,\tau]$ such that $[0,\tau] \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]$ where $\delta_i = \delta_{t_i}$. We may assume that this covering is minimal. Then $t_i \neq t_j$ for $i \neq j$. Then we can arrange the t_i in such a way that $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le \tau$. It follows that for $i = 0,1,\ldots,n-2$,

$$t_i - \delta_i \le t_{i+1} - \delta_{i+1} \le t_i + \delta_i \le t_{i+1} + \delta_{i+1} \ .$$

Now let $\tau_0 = 0$ and

$$\tau_i = \max\{t_{i-1}, t_i - \delta_i\}$$

$i = 1,\ldots,n-1$ and $\tau_n = \tau$. □

Proof of Theorem 3.2.7. (a) Let $f \in L^p(0,\tau;X)$. By assumption on A, for every $t \in [0,\tau]$ there exists $\delta_t > 0$ and $\eta_t \ge 0$ such that for every $s \in [t-\delta_t, t+\delta_t]$ and every $x \in D$,

$$\|A(t)x - A(s)x\|_X \le \frac{1}{2M(t)} \|x\|_D + \eta_t \|x\|_X,$$

where $M(t) \ge \|(\lambda + L_{A(t)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X),MR(a,b))}$ for all $\lambda \ge 0$ and all $(a,b) \subset (0,\tau)$ (cf. Lemma 3.1.2).

By Lemma 3.2.8, there exist a partition $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = \tau$ and $t_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ such that $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]$ ($\delta_i := \delta_{t_i}$). We consider the functions

$$B_i : [\tau_i, \tau_{i+1}] \to \mathcal{L}(D,X)$$

given by $B_i(s) = A(s) - A(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. It follows from Proposition 3.1.3 that for each $x_i \in (X, D)_{\frac{1}{p^*}, p}$ there exists a unique $u_i \in MR(\tau_i, \tau_{i+1})$ such

$$\dot{u}_i + A(t_i)u_i + B_i(t)u_i = f \quad \text{a.e. on } (\tau_i, \tau_{i+1}), \qquad u_i(\tau_i) = x \ .$$

Note that $A(t_i) + B_i(t) = A(t)$ on $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Now let $x \in (X, D)_{\frac{1}{p^*}, p}$. Then we find $u_0 \in MR(0, \tau_1)$ such that

$$\dot{u}_0 + A(t)u_0 = f \quad \text{a.e. on } (0, \tau_1), \qquad u_0(0) = x_1 \ .$$

Let $x_1 = u_0(\tau_1)$. We find $u_1 \in MR(\tau_1, \tau_2)$ satisfying

$$\dot{u}_1 + A(t)u_1 = f \quad \text{a.e. on } (\tau_1, \tau_2), \qquad u_1(\tau_1) = x_1 \ .$$

Continuing in this way we find functions $u_i \in MR(\tau_i, \tau_{i+1})$ such that

$$\dot{u}_i + A(t)u_i = f \quad \text{a.e. on } (\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

and such that $u_i(\tau_{i+1}) = u_{i+1}(\tau_{i+1})$. Thus, the function $u : [0, \tau] \to X$ given by

$$u(t) = u_i(t) \text{ for } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$$

solves the problem (3.13).

(b) In order to show uniqueness, consider a function $u \in MR(0, \tau)$ such that $\dot{u} + A(t)u = 0$ a.e. on $(0, \tau)$ and $u(0) = 0$. It follows from (a) that $u = 0$ a.e. on $[0, \tau_1]$. Then we obtain successively $u = 0$ a.e. on $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ for $i = 1, \ldots, n-1$. □

We conclude this section by establishing a perturbation result for relatively continuous functions. For this we consider an intermediate Banach space Y, i.e.,

$$D \hookrightarrow Y \hookrightarrow X \ .$$

For the purpose of this paper, we say that Y is *close to X compared with D* if for each $\varepsilon > 0$ there exists $\eta \geq 0$ such that

$$\|x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_D + \eta \|x\|_X \ , \quad x \in D.$$

Notice that $\beta \|x\|_X \leq \|x\|_Y$ for every $x \in Y$ and some constant $\beta > 0$. Thus the condition says that the norm of Y is equivalent to the norm of X up to perturbations by $\varepsilon \|x\|_D$.

There are several examples.

Example 3.2.9. (a) Assume that Y satisfies an interpolation inequality

$$\|x\|_Y \leq c \|x\|_D^\alpha \|x\|_X^{1-\alpha} \quad (x \in D)$$

where $0 < \alpha < 1$, $c \geq 0$. Then for $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \|x\|_Y &\leq \delta^\alpha \|x\|_D^\alpha c \frac{1}{\delta^\alpha} \|x\|_X^{1-\alpha} \\ &\leq \alpha\delta \|x\|_D + (1-\alpha)(c/\delta^2)^{\frac{1}{1-\alpha}} \|x\|_X \ . \end{aligned}$$

Thus Y is near X compared with D.

(b) Let $Y = (X, D)_{\alpha,p}$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, be a real interpolation space or $Y = [X, D]_\alpha$ a complex interpolation space. Then the interpolation inequality a) is valid.

(c) Let $Y = D(B^\alpha)$ with graph norm $\|x\|_Y := \|B^\alpha x\|_X$ where B is an invertible sectorial operator and $0 < \alpha < 1$. Then the interpolation inequality (3.2.6) is valid, [I.38, Chapter 2, Theorem 10.6].

(d) Let $D \underset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow X$ where the c indicates that the inclusion $D \hookrightarrow Y$ is compact. Then by Ehrling's Lemma [I.2, p. 334] Y is close to X compared with D.

Proposition 3.2.10. *Let $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D, X)$ be relatively continuous and let $B : [0, \tau] \to \mathcal{L}(Y, X)$ be strongly measurable and bounded, where Y is close to X compared with D. Then $A + B$ is relatively continuous.*

Proof. Let $t \in [0, \tau]$, $\varepsilon > 0$. There exist $\delta > 0$, $\eta \geq 0$ such that $|t - s| \leq \delta$ implies

$$\|(A(t) - A(s))x\|_X \leq \frac{\varepsilon}{3}\|x\|_D + \eta\|x\|_X \ .$$

Moreover, $\|B(s)x\|_X \leq c\|x\|_Y \leq \varepsilon/3\|x\|_D + \eta_1\|x\|_X$ for all $s \in [0, \tau]$ and some η_1. Hence

$$\|((A(t) + B(t)) - (A(s) + B(s)))x\|_X \leq \varepsilon\|x\|_D + (\eta + 2\eta_1))\|x\|_X$$

whenever $|s - t| \leq \delta$. □

Theorem 3.2.11. *Let $A : [0, \tau] \to \mathcal{L}(D, X)$ be relatively continuous and let $B : [0, \tau] \to \mathcal{L}(Y, X)$ be strongly measurable and bounded, where Y is close to X compared with D. Assume that $A(t) \in \mathcal{MR}$ for every $t \in [0, \tau]$. Then $A + B \in \mathcal{MR}_p$ for every $p \in (1, \infty)$.*

Proof. By Proposition 3.1.3 and by the assumption on $A(t)$, $A(t) + B(t) \in \mathcal{MR}$ for every $t \in [0, \tau]$. In fact, apply Proposition 3.1.3 to the operator $A = A(t)$ and to the constant function $B(t)$; use also that Y is close to X compared with D. By Proposition 3.2.10, $A + B$ is relatively continuous. The claim thus follows from Theorem 3.2.7 □

3.3 Accretive operators

In this section we consider the non-autonomous problem assuming that each operator $A(t)$ is accretive. We recall some facts concerning the notion of accretivity. Let X be a Banach space. By $N(x) = \|x\|$ we denote the norm on X which is a sublinear mapping. For $x \in X$, $y \in X$ we denote by

$$D_y N(x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h}$$

the right Gateaux derivative of N at x in the direction of y. Let

$$\partial N(x) := \{x' \in X' : \|x'\| \leq 1, \langle x', x\rangle = \|x\|\}$$

be the subdifferential of N at x. It follows from the Hahn-Banach Theorem that $\partial N(x) \neq \emptyset$ for all $x \in X$. From the definition it follows that

$$D_y N(x) \geq \mathrm{Re}\,\langle x', y\rangle \tag{3.13}$$

for all $x' \in \partial N(x)$. In fact,

$$\begin{aligned} \|x + hy\| - \|x\| &= \|x + hy\| - \langle x', x\rangle \\ &\geq \mathrm{Re}\,\langle x', x + hy\rangle - \langle x', x\rangle \\ &= h\,\mathrm{Re}\,\langle x', y\rangle \ . \end{aligned}$$

An operator B on X with domain $D(B)$ is called *accretive* if for every $x \in D(B)$ there exists $x' \in \partial N(x)$ such that $\mathrm{Re}\,\langle x', Ax\rangle \geq 0$. The operator B is called *strictly accretive* if $\mathrm{Re}\,\langle x', Ax\rangle \geq 0$ for all $x' \in \partial N(x)$. If $-B$ generates a contractive C_0-semigroup, then B is strictly accretive, [I.26, Proposition 3.23]. Conversely, the Lumer-Phillips Theorem says that $-B$ generates a contractive C_0-semigroup whenever B is densely defined, accretive and $\lambda + B$ is surjective for some $\lambda > 0$. We need the following chain rule (see e.g. [I.37, B-II Proposition 2.3]).

Lemma 3.3.1. *Let $u : [t, t+\delta) \to X$ be right-differentiable at t with right derivative $\dot{u}(t)$. Then*

$$\frac{d}{ds}\|u(s)\|\,\big|_{s=t} = D_{\dot{u}(t)} N(u(t)) \ .$$

After these preparations we consider the non-homogeneous Cauchy problem. Let X and D be two Banach spaces such that $D \underset{d}{\hookrightarrow} X$. Let $A : (a, b) \to \mathcal{L}(D, X)$ be a strongly measurable function.

Proposition 3.3.2. *Assume that $A(t)$ is accretive for all $t \in (a, b)$. Let $u \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D)$ be a solution of*

$$\dot{u} + A(t)u = 0 \quad a.e. \ on \ (a, b) \ .$$

Then $\|u(t)\|$ is decreasing on $[a, b]$. In particular, if $u(a) = 0$, then $u \equiv 0$.

Proof. Let

$$J = \{t \in (0, \tau) : u \text{ is differentiable at } t,\ u(t) \in D,\ \dot{u} + A(t)u = 0\}.$$

Then, by assumption, $(0, \tau)\backslash J$ is a null set. Let $v(t) = u(\tau - t)$. We have to show that $\|v(t)\|$ is increasing. Let $t \in J$. Choose $x' \in \partial N(u(\tau - t))$ such that $\mathrm{Re}\,\langle x', A(\tau - t)u(\tau - t)\rangle \geq 0$. Then

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|v(s)\|\,\big|_{s=t} &= D_{\dot{v}(t)} N(v(t)) \\ &\geq \mathrm{Re}\,\langle x', \dot{v}(t)\rangle \\ &= \mathrm{Re}\,\langle x', -\dot{u}(\tau - t)\rangle \\ &= \mathrm{Re}\,\langle x', -\dot{u}(\tau - t) - A(\tau - t)u(\tau - t)\rangle + \\ &\quad + \mathrm{Re}\,\langle x', A(\tau - t)u(\tau - t)\rangle \\ &\geq 0 \ . \end{aligned}$$

Since v is absolutely continuous, also $\|v(\cdot)\|$ is absolutely continuous. Hence $\|v(t)\| = \|v(0)\| + \int_0^t \frac{d}{ds}\|v(s)\|ds$ is increasing. $\square$

From Proposition 3.3.2 we deduce uniqueness of the non-autonomous Cauchy problem.

Theorem 3.3.3. *Let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ be strongly measurable and relatively continuous. Assume that $A(t)$ is accretive for all $t \in [0,\tau]$. Let $1 < p < \infty$. Then the following assertions are equivalent.*

(i) $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$

(ii) $A(t) \in \mathcal{MR}$ *for all* $t \in [0,\tau]$.

If one of the equivalent conditions (i) or (ii) is satisfied then the operator L_A given by

$$\begin{aligned} D(L_A) &= \{u \in W^{1,p}(0,\tau;X) \cap L^p(0,\tau;D) : u(0) = 0\} \\ L_A u &= \dot{u} + A(\cdot)u \end{aligned}$$

is the negative generator of a contractive C_0-semigroup on $L^p(0,\tau;X)$.

Proof. (i)$\Rightarrow$(ii) We assume that $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$.
(a) We first show that $A \in \mathcal{MR}_p(a,b)$ for all $(a,b) \subset (0,\tau)$. Let $f \in L^p(a,b;X)$. Extend f by 0 to the interval $(0,\tau)$ and consider the solution u of (3.10) on $(0,\tau)$. Then $u \equiv 0$ on $[0,a]$ by Proposition 3.3.2. Thus, $u_{|(a,b)}$ is a solution of

$$\dot{u} + A(t)u = f \quad \text{a.e. on } (a,b), \qquad u(a) = 0.$$

Uniqueness follows from Proposition 3.3.2.
(b) Consider the multiplication operator $\mathcal{A}$ on $L^p(0,\tau;X)$ given by

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= L^p(0,\tau;D), \\ \mathcal{A}u &= A(\cdot)u. \end{aligned}$$

Let $\lambda > 0$, $u \in D(\mathcal{A})$, $\lambda u + \mathcal{A}u = f$. Then $\lambda u + A(t)u = f$ a.e. on $(0,\tau)$. Since $A(t)$ is accretive, it follows that $\lambda\|u(t)\| \le \|f(t)\|$ for almost all $t \in (0,\tau)$ and so $\lambda\|u\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$. We have shown that $\mathcal{A}$ is accretive.

Consider the negative shift-generator $\mathcal{B}$ on $L^p(0,\tau;X)$ defined in (3.4). Then $\mathcal{B}$ is strictly accretive. It follows that $L_A = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ is accretive. Since L_A is invertible by the assumption of maximal regularity and since $\varrho(L_A)$ is open, it follows from the Lumer-Phillips Theorem that $-L_A$ generates a contractive C_0-semigroup.
(c) Choose $\varepsilon > 0$ such that

$$\varepsilon \cdot \|L_A^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\tau;X),MR(0,\tau))} =: q < 1/2 \ .$$

Then $\varepsilon\|L_A^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X),MR(a,b))} \le q$ whenever $(a,b) \subset (0,\tau)$.

Let $t_0 \in [0,\tau]$. Choose a nondegenerate interval $[a,b] \subset [0,\tau]$ such that $t_0 \in [a,b]$ and $\|(A(t) - A(t_0))x\|_X \le \varepsilon\|x\|_D + \eta\|x\|_X$ for all $x \in D$ and all $t \in [a,b]$. Let $\mathcal{C} : L^p(a,b;D) \to L^p(a,b;X)$ be defined by $(\mathcal{C}u)(t) = (A(t_0) - A(t))u(t)$. Then

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}u\|_{L^p(a,b;X)} &\le \varepsilon\|u\|_{L^p(a,b;D)} + \eta\|u\|_{L^p(a,b;X)} \\
&= \varepsilon\|L_A^{-1}L_A u\|_{L^p(a,b;D)} + \eta\|u\|_{L^p(a,b;X)} \\
&\le q\|L_A u\|_{L^p(a,b;X)} + \eta\|u\|_{L^p(a,b;X)} \ .
\end{aligned}$$

Since L_A generates a contractive C_0-semigroup and since $q < 1/2$, it follows that $\lambda + L_A + \mathcal{C} = (I + \mathcal{C}(\lambda + L_A)^{-1})(\lambda + L_A)$ is invertible for $\lambda > 0$ large enough. Thus, for all $f \in L^p(a,b;X)$ there exists a unique $u \in D(L_A)$ such that $\lambda u + L_A u + \mathcal{C}u = f$; i.e. $\dot{u} + \lambda u + A(t_0)u = f$ a.e. on (a,b), $u(a) = 0$. Thus $A(t_0) \in \mathcal{MR}$. We have shown that $A(t) \in \mathcal{MR}$ for all $t \in [0,\tau]$ and also the additional assertion concerning L_A.

The converse implication (ii)⇒(i) follows from Theorem 3.2.7. □

For uniformly continuous $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ (but not necessarily accretive $A(t)$) Theorem 3.3.3 is proved in [I.3, Proposition 7.1] and [I.40, Theorem 2.5]. The following corollary is immediate.

Corollary 3.3.4 (p-independence). *Let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ be strongly measurable and relatively continuous. Assume that $A(t)$ is accretive for all $t \in [0,\tau]$. Then $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$ for some $1 < p < \infty$ if and only if $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau)$ for all $1 < p < \infty$.*

Next we want to establish the evolution family governing the non-autonomous problem. This can be done very easily in the accretive case. it can also be done without the accretivity assumption if one assumed that $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ is norm continuous. In fact, Prüss and Schnaubelt [I.40] use an approximation argument which is not easy to prove and they also use many results of the theory of evolution semigroups to do this. So the easy direct argument in the accretive case is of some interest.

Corollary 3.3.5. *Let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ be strongly measurable and relatively continuous. Assume that $A(t)$ is accretive and that $A(t) \in \mathcal{MR}$ for every $t \in [0,\tau]$. Let $p \in (1,\infty)$. Then there exists a contractive evolution family $(U(t,s))_{(t,s)\in\Delta} \subset \mathcal{L}(X)$ such that for every $x \in X$ the function $u(t) := U(t,0)x$ is the unique solution in*

$$C([0,\tau];X) \cap L^p_{loc}((0,\tau];D) \cap W^{1,p}_{loc}((0,\tau];X)$$

of

$$\dot{u} + A(t)u = 0 \quad \text{a.e. on } (0,\tau), \qquad u(0) = x.$$

Moreover, there exists a constant $M \ge 0$, depending on p but independent of $x \in X$, such that

$$\|t\,u(t)\|_{MR(0,\tau)} \le M\,\|x\|_X.$$

Proof. By Theorem 3.2.7, $A \in \mathcal{MR}_p(0,\tau')$ for every $\tau' \in (0,\tau]$ and every $p \in (1,\infty)$.

Fix $p \in (1,\infty)$, and let $(U(t,s))_{(t,s)\in\Delta}$ be the associated evolution family on the trace space (Lemma 3.2.3). By Proposition 3.3.2, for every $x \in Tr$ and every $(t,s) \in \Delta$,

$$\|U(t,s)x\|_X \leq \|x\|_X.$$

Hence, the evolution family U extends to a contractive, strongly continuous evolution family on X, which we will also denote by U.

For every $x \in Tr$ the function $v(t) := tU(t,0)x$ is the unique solution of the non-homogeneous problem

$$\dot{v} + A(t)v = U(t,0)x \quad \text{a.e. on } (0,\tau), \qquad v(0) = 0.$$

Hence,

$$\|v\|_{MR(0,\tau)} \leq \|L_A^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\tau;X),MR(0,\tau))} \|U(\cdot,0)x\|_{L^p(0,\tau;X)} \leq M\|x\|_X.$$

By density, this estimate holds for every $x \in X$. In particular, for every $x \in X$ and every $p \in (1,\infty)$,

$$U(\cdot,0)x \in L^p_{loc}((0,\tau],D) \cap W^{1,p}_{loc}((0,\tau],X).$$

The claim follows from the definition of U. $\square$

Corollary 3.3.5 gives estimates for the homogeneous problem. As in Proposition 3.2.4 we can now represent the solution of the inhomogeneous problem by the evolution family U also for $f \in L^p(0,\tau;X)$ (and not only for functions with values in the trace space). Putting all together, we can formulate the following final result.

Corollary 3.3.6. *Let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D,X)$ be strongly measurable and relatively continuous. Assume that $A(t)$ is accretive and that $A(t) \in \mathcal{MR}$ for every $t \in [0,\tau]$. Let $p \in (1,\infty)$.*

Then for every $x \in X$ and every $f \in L^p(0,\tau;X)$ the function

$$u(t) := U(t,0)x + \int_0^t U(t,s)f(s)\,ds$$

is the unique solution in $C([0,\tau];X) \cap L^p_{loc}((0,\tau];D) \cap W^{1,p}_{loc}((0,\tau];X)$ of the problem (3.12).

3.4 An example

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set such that $\partial\Omega$ is bounded and of class C^2. Assume that

(H1) $a_{ij} \in C([0,\tau]\times\bar{\Omega})$ for $i,\, j = 1,\dots,n$ is uniformly continuous, bounded and *uniformly elliptic*, i.e.,
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \beta|\xi|^2$$
for some $\beta > 0$ and all $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,\tau]$, and

(H2) $b_j \in L^\infty((0,\tau)\times\Omega)$ for $j = 0,1,\dots,n$.

Define the partial differential operators $\mathcal{A}(t,x,D)$ by

$$\mathcal{A}(t,x,D)u(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\partial_j u(x) + b_0(t,x)u(x).$$

Theorem 3.4.1. *Let p, $q \in (1,\infty)$. Then for every $u_0 \in B^{2/q'}_{pq} \cap \mathring{B}^{1/q'}_{pq}(\Omega)$ and every $f \in L^q(0,\tau;L^p(\Omega))$ there exists a unique*

$$\begin{aligned} u \;\in\; & C([0,\tau];B^{2/q'}_{pq} \cap \mathring{B}^{1/q'}_{pq}(\Omega)) \cap \\ & \cap W^{1,q}(0,\tau;L^p(\Omega)) \cap L^q(0,\tau;W^{2,p} \cap W^{1,p}_0(\Omega)) \end{aligned}$$

solution of

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \mathcal{A}(t,x,D)u(t,x) = f(t,x) \quad \text{a.e. on } (0,\tau)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0 \quad \text{on } (0,\tau)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{a.e. on } \Omega\ . \end{cases} \tag{3.14}$$

Here we let $u(t,x) = u(t)(x)$.

Proof. Let $D := W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ and define for every $t \in (0,\tau]$ the operator $A(t) \in \mathcal{L}(D, L^p(\Omega))$ by

$$A(t)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,\cdot)\partial_i\partial_j u, \qquad u \in D.$$

It follows from [I.21, Theorem 8.2] that $A(t) \in \mathcal{MR}$ for all $t \in [0,\tau]$. Moreover, A is continuous from $[0,\tau]$ into $\mathcal{L}(D, L^p(\Omega))$.

Let $Y := (L^p(\Omega), W^{2,p}(\Omega))_{\theta,s}$, where $\theta \in (\frac{1}{2},1)$ and $s \in (1,\infty)$. Then $Y = B^{2\theta}_{ps}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}_0(\Omega)$ by [I.42]. Hence, Y and *a fortiori* $W^{1,p}(\Omega)$ are close to $L^p(\Omega)$ compared with $W^{2,p}(\Omega)$.

Let $B : (0,\tau) \to \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))$ be given by

$$(Bu)(t) = -\sum_{j=1}^{n} b_j(t,\cdot)\partial_j u - b_0(t,\cdot)u.$$

Then B is weakly measurable. In fact, for every $g \in L^{p'}(\Omega)$,

$$\langle (Bu)(t), g\rangle = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega b_j(t,x)\partial_j u(x)\, g(x)\, dx + \int_\Omega b_0(t,x)u(x)\, g(x)\, dx$$

is measurable for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$. It follows from Pettis' Theorem that B is strongly measurable. Moreover, B is clearly bounded.

Now the claim follows from Theorem 3.2.11. □

Theorem 3.4.2. *In addition to (H1) and (H2), assume that*

$$\text{(H1)}' \qquad a_{ij}(t,\cdot) \in W^{1,\infty}(\Omega) \textit{ for every } t \in [0,\tau] \textit{ and}$$
$$\partial_i a_{ij} \in L^\infty((0,\tau)\times\Omega) \textit{ for } i,\, j = 1,\dots,n.$$

Then for every $u_0 \in L^p(\Omega)$ and every $f \in L^q(0,\tau;L^p(\Omega))$ there exists a unique solution

$$\begin{aligned} u \quad \in \quad & C([0,\tau];L^p(\Omega)) \cap C((0,\tau];B^{2/q'}_{pq} \cap \mathring{B}^{1/q'}_{pq}(\Omega)) \cap \\ & \cap W^{1,q}_{loc}((0,\tau];L^p(\Omega)) \cap L^q_{loc}((0,\tau];W^{2,p}\cap W^{1,p}_0(\Omega)) \end{aligned}$$

of the problem (3.14)*.*

Proof. Fix $p \in (1,\infty)$ and let A and B be defined as in the proof of Theorem 3.4.1. Then it was shown that $A+B$ is bounded and strongly measurable, relatively continuous and $A+B \in \mathcal{MR}_p$ for every $q \in (1,\infty)$.

By the additional regularity of the coefficients a_{ij} and by [I.19, Theorem 5.1], there exists $\omega_p \geq 0$ depending on p and also on the L^∞ norms of the coefficients such that the operators $A(t)+B(t)+\omega_p I$ are accretive on $L^p(\Omega)$, i.e. the $A(t)+B(t)$ are uniformly quasi-accretive. Hence, by Corollary 3.3.6, for every $u_0 \in L^p(\Omega)$ and every $f \in L^q(0,\tau;L^p(\Omega))$ there exists a unique function u with the regularity prescribed in the statement and which is a solution of (3.14) with b_0 replaced by $b_0+\omega_p$. The claim follows from this and a simple renormalization. $\square$

Remark 3.4.3. In the proof of Theorem 3.4.2, instead of applying [I.21] in order to obtain maximal regularity for the operators $A(t)+B(t)$ one could also use that the semigroup generated by $-A(t)-B(t)$ has Gaussian estimates [I.19, Theorem 6.1], and the fact that Gaussian estimates imply maximal regularity [I.30].

Alternatively, one can use the quasicontractivity and positivity of the associated semigroups on $L^p(\Omega)$ and the fact that this also implies maximal regularity [I.32].

3.5 The non-autonomous second order problem

Let X, D_A and D_B be three Banach spaces such that D_A and D_B are densely and continuously embedded into X. Actually, in the following we assume that

$$D_A \underset{d}{\hookrightarrow} D_B \underset{d}{\hookrightarrow} X,$$

although the definition of L^p-maximal regularity makes sense in the general case, too.

Let $A \in \mathcal{L}(D_A,X)$ and $B \in \mathcal{L}(D_B,X)$.

Definition 3.5.1. Let $p \in (1,\infty)$. We say that the couple (A,B) has *L^p-maximal regularity* (and we write $(A,B) \in \mathcal{MR}_p$) if for some interval (a,b) and all $f \in L^p(a,b;X)$ there exists a unique $u \in W^{2,p}(a,b;X) \cap L^p(a,b;D_A)$ with $\dot{u} \in L^p(a,b;D_B)$ such that

$$\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f \qquad \text{a.e. on } (a,b), \qquad u(a) = \dot{u}(a) = 0. \tag{3.15}$$

We recall that $W^{2,p}(a,b;X) \subset C^1([a,b];X)$ so that the condition $u(a) = \dot{u}(a) = 0$ makes sense. It is known that L^p-maximal regularity is independent of the bounded interval (a,b), [I.12, Corollary 2.4].

By

$$MR(a,b) := \{u \in W^{2,p}(a,b;X) \cap L^p(a,b;D_A) : \dot{u} \ \in L^p(a,b;D_B)\}$$

we denote the *maximal regularity space* which is a Banach space for the norm

$$\|u\|_{MR} = \|u\|_{W^{2,p}(a,b;X)} + \|u\|_{L^p(a,b;D_A)} + \|\dot{u}\|_{L^p(a,b;D_B)}.$$

Moreover, we consider the *trace space* $Tr := \{(u(a), \dot{u}(a)) : u \in MR(a,b)\}$ with the norm

$$\|(x,y)\|_{Tr} := \inf\{\|u\|_{MR} : x = u(a),\ y = \dot{u}(a)\}.$$

For further properties of those spaces, we refer to [I.12].

By [I.12, Theorem 2.3], if $(A,B) \in \mathcal{MR}_p$ then for every $(x,y) \in Tr$ there exists a unique solution $u \in MR(a,b)$ of the homogeneous problem

$$\ddot{u} + B\dot{u} + Au = 0 \quad \text{a.e. on } (a,b), \qquad u(a) = x,\ \dot{u}(a) = y. \tag{3.16}$$

Clearly, the couple (A,B) has L^p-maximal regularity if and only if for some (for all) bounded intervals (a,b) the operator L on $L^p(a,b;X)$ given by

$$\begin{aligned} D(L) &= \{u \in MR(a,b) : u(a) = \dot{u}(a) = 0\}, \\ Lu &= \ddot{u} + B\dot{u} + Au \end{aligned}$$

is invertible. Moreover, the operator L is invertible if and only if for some (for every) $\lambda \in \mathbb{C}$ the operator $L_\lambda : D(L) \to L^p(a,b;X)$ given by

$$L_\lambda u = \ddot{u} + (B+\lambda)\dot{u} + (\lambda^2 + \lambda B + A)u$$

is invertible. In fact, L and L_λ, and thus also their inverses, are similar :

$$L_\lambda^{-1} f = e^{-\lambda \cdot} L^{-1}(e^{\lambda \cdot} f). \tag{3.17}$$

Fix $\tau > 0$. For each subinterval $(a,b) \subset (0,\tau)$ we may consider the operator L on $L^p(a,b;X)$. We do not use different notations for these operators in order to keep notations simple.

Lemma 3.5.2. *Assume that $(A,B) \in \mathcal{MR}_p$. Then there exists a constant $M \geq 0$ such that*

$$\begin{aligned} &\|L_\lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X),L^p(a,b;D_A \cap D_B))} \leq M \\ &\|(1+\lambda)\, L_\lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} \leq M, \\ &\|(\frac{d}{dt} + \lambda) L_\lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X),L^p(a,b;D_B))} \leq M, \ \textit{and} \\ &\|(1+\lambda^{\frac{p-1}{p}})\, (\frac{d}{dt} + \lambda) L_\lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} \leq M \end{aligned}$$

for every $\lambda \geq 0$ and every interval $(a,b) \subset (0,\tau)$.

For the proof of Lemma 3.5.2 we need the following maximum principle.

Lemma 3.5.3. *Let X, Y be two Banach spaces such that Y is continuously embedded into X. Let $\mathbb{C}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > 0\}$, and let $F : \mathbb{C}_+ \to Y$ be an analytic function which extends continuously to $\overline{\mathbb{C}_+}$. Assume that*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_+} \|F(\lambda)\|_X < \infty \textit{ and } \sup_{s \in \mathbb{R}} \|F(is)\|_Y < \infty.$$

Then

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_+} \|F(\lambda)\|_Y < \infty.$$

Proof. Since the function F is bounded and analytic with values in X, we have the following Poisson representation

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(is) \frac{\mathrm{Re}\ \lambda}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^2 + (\mathrm{Im}\ \lambda - s)^2}\, ds$$

for every $\lambda \in \mathbb{C}_+$, [I.25]. Since F is bounded on the imaginary axis with values in Y, and since Y embeds continuously into X, this representation holds also in Y. The claim follows from a simple integral estimate. □

Proof of Lemma 3.5.2. It suffices to prove the estimate for the interval $(0, \tau)$. The same estimate then holds for arbitrary subintervals $(a, b) \subset (0, \tau)$ (cp. Lemma 3.1.2).

We first note that the function $\lambda \to L_\lambda^{-1}$, $\mathbb{C} \to \mathcal{L}(L^p(0, \tau; X), L^p(0, \tau; D_A \cap D_B))$ is entire.

By [I.12, Proposition 2.6] and the similarity (3.17), there exists a function

$$S \in C([0, \tau]; \mathcal{L}(X)) \cap C^\infty((0, \tau]; D_A \cap D_B)$$

such that

$$S(0) = 0 \text{ and } L_\lambda^{-1} f = (e^{-\lambda \cdot} S) * f. \tag{3.18}$$

The regularity of S implies that

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_+} \|(1 + \mathrm{Re}\ \lambda)\, L_\lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\tau;X))} < \infty,$$

which yields already the second estimate. By the similarity (3.17) and since the mapping $f \mapsto e^{-is\cdot} f$ is an isometric isomorphism both on $L^p(0, \tau; X)$ and on $L^p(0, \tau; D_A \cap D_B)$,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|L_{is}^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\tau;X), L^p(0,\tau;D_A \cap D_B)} < \infty.$$

Hence, by Lemma 3.5.3,

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_+} \|L_\lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\tau;X), L^p(0,\tau;D_A \cap D_B)} < \infty,$$

and this is the first estimate.

In order to prove the third and the fourth estimate, note that $S(0) = 0$ and so

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dt} + \lambda)\, L_\lambda^{-1} f &= (\frac{d}{dt} + \lambda)\,(e^{-\lambda\cdot} S) * f \\ &= (e^{-\lambda\cdot} \dot{S}) * f.\end{aligned}$$

Applying the representation (3.18) for $\lambda = 0$ to constant functions f and using L^p-maximal regularity, we obtain that for every $x \in X$,

$$\dot{S}(\cdot)x \in L^p(0,\tau;X)$$

and

$$\|\dot{S}(\cdot)x\|_{L^p(0,\tau;X)} \le C\, \|x\|_X,$$

where C is a constant independent of x. By Hölder's inequality and Fubini's theorem, for every $f \in L^p(0,\tau;X)$,

$$\begin{aligned}\|(e^{-\lambda\cdot}\dot{S}) * f\|^p_{L^p(0,\tau;X)} &\le \int_0^\tau \big(\int_0^t \|e^{-\lambda(t-s)}\dot{S}(t-s)f(s)\|_X\, ds\big)^p\, dt \\ &\le \int_0^\tau \big(\int_0^t e^{-\lambda s p'}\, ds\big)^{p-1} \big(\int_0^t \|\dot{S}(t-s)f(s)\|_X^p\, ds\big)\, dt \\ &\le \frac{C}{1+\lambda^{p-1}} \int_0^\tau \int_s^\tau \|\dot{S}(t-s)f(s)\|_X^p\, dt\, ds \\ &\le \frac{C}{1+\lambda^{p-1}} \int_0^\tau \|f(s)\|_X^p\, ds \\ &\le \frac{C}{1+\lambda^{p-1}}\, \|f\|_{L^p(0,\tau;X)},\end{aligned}$$

so that we have proved the fourth estimate. By L^p-maximal regularity, the function

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\to \mathcal{L}(L^p(0,\tau;X), L^p(0,\tau;D_B)), \\ \lambda &\mapsto (\frac{d}{dt} + \lambda)\, L_\lambda^{-1}\end{aligned}$$

is entire. Moreover, for every $f \in L^p(0,\tau;X)$

$$\|\dot{S} * f\|_{L^p(0,\tau;D_B)} = \|L^{-1} f\|_{L^p(0,\tau;D_B)} \le C\, \|f\|_{L^p(0,\tau;X)},$$

and by similarity, as above,

$$\|(e^{-is\cdot}\dot{S}) * f\|_{L^p(0,\tau;D_B)} \le M\, \|f\|_{L^p(0,\tau;X)}$$

for all $s \in \mathbb{R}$ and some constant $C \ge 0$ independent of s. The third estimate thus follows from Lemma 3.5.3 again. □

As in the first order case, we prove a perturbation result for maximal regularity.

Proposition 3.5.4. *Assume that* $(A,B) \in \mathcal{MR}_p$. *Let* $(a,b) \subset (0,\tau)$ *and let* $C:(a,b) \to \mathcal{L}(D_A, X)$, $D:(a,b) \to \mathcal{L}(D_B, X)$ *be two strongly measurable functions. Suppose that there exists a constant* $\eta \geq 0$ *such that for every* $x \in D_A$, $y \in D_B$, *and every* $t \in (a,b)$,

$$\begin{aligned} \|C(t)x\|_X &\leq \frac{1}{3M}\|x\|_{D_A} + \eta\|x\|_X, \text{ and} && (3.19)\\ \|D(t)y\|_X &\leq \frac{1}{3M}\|y\|_{D_B} + \eta\|y\|_X, && (3.20)\end{aligned}$$

where M *is the constant from Lemma 3.5.2.*

Then for all $f \in L^p(a,b;X)$, $(x,y) \in Tr$ *there exists a unique* $u \in MR(a,b)$ *satisfying*

$$\ddot{u} + B\dot{u} + D(t)\dot{u} + Au + C(t)u = f \quad \text{a.e. on } (a,b), \qquad u(a) = x,\ \dot{u}(a) = y. \qquad (3.21)$$

Proof. (a) We define two operators $\tilde{C} \in \mathcal{L}(L^p(a,b;D_A), L^p(a,b;X))$ and $\tilde{D} \in \mathcal{L}(L^p(a,b;D_B), L^p(a,b;X))$ by

$$\begin{aligned} (\tilde{C}u)(t) &:= C(t)u(t), \text{ and}\\ (\tilde{D}u)(t) &:= D(t)u(t). \end{aligned}$$

Then the problem

$$\ddot{u} + B\dot{u} + D(t)\dot{u} + Au + C(t)u = f \quad \text{a.e. on } (a,b), \qquad u(a) = \dot{u}(a) = 0, \qquad (3.22)$$

admits for every $f \in L^p(a,b;X)$ a unique solution $u \in MR(a,b)$ if and only if the operator $\tilde{L}: D(L) \to L^p(a,b;X)$ given by

$$\tilde{L}u := Lu + \tilde{D}\dot{u} + \tilde{C}u$$

is boundedly invertible. However, the latter operator is invertible if and only if for some (for all) $\lambda \in \mathbb{C}$ the operator $\widetilde{L_\lambda}: D(L) \to L^p(a,b;X)$ given by

$$\widetilde{L_\lambda}u := L_\lambda u + \tilde{D}\dot{u} + \lambda\tilde{D}u + \tilde{C}u$$

is boundedly invertible, and in this case

$$\widetilde{L_\lambda}^{-1} f = e^{-\lambda\cdot}\tilde{L}^{-1}(e^{\lambda\cdot}f).$$

(b) By assumption on the functions C and D, we obtain

$$\begin{aligned} \|\tilde{C}u\|_{L^p(a,b;X)} &= \Big(\int_a^b \|C(t)u(t)\|_X^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \Big(\int_a^b \Big(\frac{1}{3M}\|u(t)\|_{D_A} + \eta\|u(t)\|_X\Big)^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{1}{3M}\|u\|_{L^p(a,b;D_A)} + \eta\|u\|_{L^p(a,b;X)}, \end{aligned}$$

and similarly

$$\|\tilde{D}u\|_{L^p(a,b;X)} \leq \frac{1}{3M}\,\|u\|_{L^p(a,b;D_B)} + \eta\,\|u\|_{L^p(a,b;X)}.$$

Hence, for every $\lambda \geq 0$, by Lemma 3.5.2,

$$\begin{aligned}
&\|(\tilde{D}\frac{d}{dt} + \tilde{D}\lambda + \tilde{C})L_\lambda^{-1}f\|_{L^p(a,b;X)} \\
\leq\;& \frac{1}{3M}\|(\frac{d}{dt}+\lambda)\,L_\lambda^{-1}f\|_{L^p(a,b;D_B)} + \eta\,\|(\frac{d}{dt}+\lambda)\,L_\lambda^{-1}f\|_{L^p(a,b;X)} + \\
&\quad + \frac{1}{3M}\|L_\lambda^{-1}f\|_{L^p(a,b;D_A)} + \eta\,\|L_\lambda^{-1}f\|_{L^p(a,b;X)} \\
\leq\;& (\frac{2}{3} + \frac{\eta M}{1+\lambda^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{\eta M}{1+\lambda})\,\|f\|_{L^p(a,b;X)}.
\end{aligned}$$

Choosing $\lambda \geq 0$ large enough, we find that

$$\|(\tilde{D}\frac{d}{dt} + \tilde{D}\lambda + \tilde{C})L_\lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b;X))} \leq \frac{3}{4},$$

and hence the operator

$$\widetilde{L_\lambda} = (I + (\tilde{D}\frac{d}{dt} + \tilde{D}\lambda + \tilde{C})L_\lambda^{-1})L_\lambda$$

is invertible. In particular, by (a), for every $f \in L^p(a,b;X)$ the problem (3.22) admits a unique solution $u \in MR(a,b)$.

(c) Let $(x,y) \in Tr$. Then there exists $w \in MR(a,b)$ such that $w(a) = x$ and $\dot{w}(a) = y$. By (b), there exists a unique function $v \in MR(a,b)$ such that

$$\begin{aligned}
&\ddot{v} + (B + D(t))\dot{v} + (A + C(t))v = \\
&\qquad = -\ddot{w} - (B + D(t))\dot{w} - (A + C(t))w + f \quad \text{a.e. on } (a,b), \\
&\qquad\qquad v(a) = \dot{v}(a) = 0.
\end{aligned}$$

Putting $u := v + w$, we have proved existence for (3.21). Uniqueness follows from (b). □

Following the same idea as in the proof of Theorems 3.2.7 and 3.2.11, we deduce from the perturbation result the following two theorems on the non-autonomous second order problem.

Theorem 3.5.5. *Let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D_A, X)$ and $B : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D_B, X)$ be relatively continuous. Let $p \in (1,\infty)$, and assume that $(A(t), B(t)) \in \mathcal{MR}_p$ for all $t \in [0,\tau]$. Then for every $f \in L^p(0,\tau;X)$ and every $(x,y) \in Tr$ there exists a unique $u \in MR(0,\tau)$ satisfying*

$$\ddot{u} + B(t)\dot{u} + A(t)u = f \quad \text{a.e. on } (0,\tau), \qquad u(0) = x,\ \dot{u}(0) = y. \tag{3.23}$$

Theorem 3.5.6. *Let $A : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D_A, X)$ and $B : [0,\tau] \to \mathcal{L}(D_B, X)$ be relatively continuous. Let $p \in (1,\infty)$, and assume that $(A(t), B(t)) \in \mathcal{MR}_p$ for all $t \in [0,\tau]$. Let $C : [0,\tau] \to \mathcal{L}(Y_A, X)$ and $D : [0,\tau] \to \mathcal{L}(Y_B, X)$ be strongly measurable and bounded,* *where Y_A resp. Y_B are close to X compared with D_A resp. D_B. Then $(A + C, B + D) \in \mathcal{MR}_p$. In particular, for every $f \in L^p(0,\tau;X)$ and every $(x, y) \in Tr$ there exists a unique $u \in MR(0,\tau)$ satisfying*

$$\begin{cases} \ddot{u} + (B(t) + C(t))\dot{u} + (A(t) + D(t))u = f \quad \text{a.e. on } (0,\tau), \\ u(0) = x, \ \dot{u}(0) = y. \end{cases} \tag{3.24}$$

3.6 An example

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set such that $\partial\Omega$ is bounded and of class C^2. Assume the conditions (H1) and (H2) from Section 3.4 and

$$\text{(H3)} \qquad c_j \in L^\infty((0,\tau) \times \Omega) \text{ for } j = 0, 1, \ldots, n.$$

We define partial differential operators $\mathcal{A}(t, x, D)$ and $\mathcal{B}(t, x, D)$ by

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t,x,D)u(x) &:= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)(\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(t,x)\partial_j u(x) + b_0(t,x)u(x) \text{ and} \\ \mathcal{B}(t,x,D)u(x) &:= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)(\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{j=1}^n c_j(t,x)\partial_j u(x) + c_0(t,x)u(x). \end{aligned}$$

Theorem 3.6.1. *Let p, $q \in (1,\infty)$. Then for every $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, every $u_1 \in B_{pq}^{2/q'} \cap \mathring{B}_{pq}^{1/q'}(\Omega)$ and every $f \in L^q(0,\tau;L^p(\Omega))$ there exists a unique*

$$\begin{aligned} u \ \in \ & W^{1,q}(0,\tau;W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)) \cap \\ & \cap C^1([0,\tau];B_{pq}^{2/q'} \cap \mathring{B}_{pq}^{1/q'}(\Omega)) \cap \\ & \cap W^{2,q}(0,\tau;L^p(\Omega)) \end{aligned}$$

solution of

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \mathcal{B}(t,x,D)\partial_t u(t,x) - \mathcal{A}(t,x,D)u(t,x) = f(t,x) \quad \text{a.e. on } (0,\tau) \times \Omega, \\ u(t,x) = 0 \quad \text{on } (0,\tau) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{a.e. on } \Omega \ , \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \quad \text{a.e. on } \Omega \ . \end{cases} \tag{3.25}$$

Here we let $u(t,x) = u(t)(x)$.

Proof. Let $D_A = D_B := D := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ and define for every $t \in [0,\tau]$ the operator $A(t) \in \mathcal{L}(D, L^p(\Omega))$ by

$$A(t)u = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,\cdot)\partial_i\partial_j u, \qquad u \in D.$$

It follows from [I.21, Theorem 8.2] that $A(t)$ has a bounded H^∞ functional calculus on some sector of angle $\beta_t \in (0, \frac{\pi}{2})$ for all $t \in [0, \tau]$ (the sector may depend on t). Since $L^p(\Omega)$ has property (α), $A(t)$ has in fact a bounded RH^∞ functional calculus on the same sector. By [I.12, Theorem 4.1], the couple $(A(t), A(t))$ has L^q-maximal regularity for every $q \in (1, \infty)$. Moreover, A is continuous from $[0, \tau]$ into $\mathcal{L}(D, L^p(\Omega))$.

Let $Y_A = Y_B := Y := (L^p(\Omega), W^{2,p}(\Omega))_{\theta,s}$, where $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ and $s \in (1, \infty)$. Then $Y = B^{2\theta}_{ps}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}_0(\Omega)$ by [I.42]. Hence, Y and *a fortiori* $W^{1,p}(\Omega)$ are close to $L^p(\Omega)$ compared with $W^{2,p}(\Omega)$.

Let B, $C : (0, \tau) \to \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))$ be given by

$$
\begin{aligned}
(Bu)(t) &:= -\sum_{j=1}^{n} b_j(t, \cdot)\partial_j u - b_0(t, \cdot)u \quad \text{and} \\
(Cu)(t) &:= -\sum_{j=1}^{n} c_j(t, \cdot)\partial_j u - c_0(t, \cdot)u.
\end{aligned}
$$

Then B and C are strongly measurable; compare the proof of Theorem 3.4.1. Moreover, B and C are clearly bounded.

Now the claim follows from Theorem 3.5.6. $\square$

Bibliographie

[I.1] P. Acquistapace and B. Terreni, *A unified approach to abstract linear non-autonomous parabolic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **78** (1987), 47–107.

[I.2] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[I.3] H. Amann, *Maximal regularity for nonautonomous evolution equations*, Advanced Nonlinear Studies **4** (2004), 417–430.

[I.4] W. Arendt, *Semigroups and evolution equations : functional calculus, regularity and kernel estimates*, Handbook of Differential Equations (C. M. Dafermos, E. Feireisl eds.), Elsevier/North Holland, 2004, pp. 1–85.

[I.5] W. Arendt and S. Bu, *The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity*, Math. Z. **240** (2002), 311–343.

[I.6] W. Arendt and S. Bu, *Tools for maximal regularity*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **134** (2003), 317–336.

[I.7] W. Arendt, R. Chill, S. Fornaro, and C. Poupaud, *L^p-maximal regularity for non-autonomous evolution equations*, preprint (2005).

[I.8] J. B. Baillon, *Caractère borné de certains générateurs de semi-groupes linéaires dans les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **290** (1980), no. 16, 757–760.

[I.9] A. Benedek, A.P. Calderon and R. Panzone, *Convolution operators on Banach space valued functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **48** (1962), 356–365.

[I.10] P. Cannarsa and V. Vespri, *On maximal L^p regularity for the abstract Cauchy problem*, Boll. Un. Mat. Ital. B **5** (1986), 165–175.

[I.11] C. Chicone and Y. Latushkin, *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 70, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1999.

[I.12] R. Chill and S. Srivastava, *L^p-maximal regularity for second order Cauchy problems*, Math. Z. (2005), to appear.

[I.13] Ph. Clément, *On the method of sums of operators*, Semi-groupes d'opérateurs et calcul fonctionnel (Besançon, 1998), Publ. Math. UFR Sci. Tech. Besançon, vol. 16, Univ. Franche-Comté, Besançon, 1998, pp. 1–30.

[I.14] Ph. Clément and S. Li, *Abstract parabolic quasilinear problems and application to a groundwater flow problem*, Adv. Math. Sci. Appl. **3** (1994), 17–32.

[I.15] Ph. Clément and J. Prüss, *An operator-valued transference principle and maximal regularity on vector-valued L_p-spaces*, Evolution equations and their applications in physical and life sciences, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol.215, Dekker, New York, 2001, 67–87.

[I.16] T. Coulhon and X.T. Duong, *Maximal regularity and kernel bounds : observations on a theorem by Hieber and Prüss*, Adv. Differ. Equ. **5**, No.1-3, 343-368 (2000).

[I.17] T. Coulhon and D. Lamberton, *Régularité L^p pour les équations d'évolution*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1984/1985, Publ. Math. Univ. Paris VII 26 (1986), 155–165.

[I.18] G. Da Prato and P. Grisvard, *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. **54** (1975), 305–387.

[I.19] D. Daners, *Heat kernel estimates for operators with boundary conditions*, Math. Nachr. **217** (2000), 13–41.

[I.20] L. De Simon, *Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **34** (1964), 205–223.

[I.21] R. Denk, M. Hieber, and J. Prüss, *$\mathcal{R}$-Boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 166, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2003.

[I.22] G. Dore, *L^p regularity for abstract differential equations*, Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto), Lecture Notes in Math., vol. 1540, Springer, Berlin, 1993, pp. 25–38.

[I.23] G. Dore, *Maximal regularity in L^p spaces for an abstract Cauchy problem*, Adv. Differ. Equ. **5** (2000), 293–322.

[I.24] G. Dore and A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Math. Z. **196** (1987) 189–201.

[I.25] P. L. Duren, *Theory of H^p-spaces*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1970.

[I.26] K. J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 194, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New-York, 1999.

[I.27] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.

[I.28] M. Hieber and S. Monniaux, *Heat kernels and maximal $L^p - L^q$ estimates : The nonautonomous case*, J. Fourier Anal. Appl. **328** (2000), 467–481.

[I.29] M. Hieber and S. Monniaux, *Pseudo-differential operators and maximal regularity results for non-autonomous parabolic equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1047–1053.

[I.30] M. Hieber and J. Prüss, *Heat kernels and maximal $L^p - L^q$ estimates for parabolic evolution equations*, Commun. Partial Diff. Eq. **22** (1997), 1647–1669.

[I.31] N. Kalton and G. Lancien, *A solution to the problem of L^p-maximal regularity*, Math. Z. **235** (2000), 559–568.

[I.32] N. Kalton and L. Weis, *The H^∞-calculus and sums of closed operators*, Math. Ann. **321** (2001), 319–345.

[I.33] P. C. Kunstmann and L. Weis, *Perturbation theorems for maximal L_p-regularity*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **30** (2001), 415–435.

[I.34] P. C. Kunstmann and L. Weis, *Maximal L^p regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ functional calculus*, Levico Lectures, Proceedings of the Autumn School on Evolution Equations and Semigroups (M. Iannelli, R. Nagel, S. Piazzera eds.), vol. 69, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2004, pp. 65–320.

[I.35] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 16, Birkhäuser, Basel, 1995.

[I.36] S. Monniaux and A. Rhandi, *Semigroup methods to solve non-autonomous evolution equations*, Semigroup Forum **60** (2000), 122–134.

[I.37] R. Nagel (ed.), *One-parameter Semigroups of Positive Operators*, Lect. Notes in Math., vol. 1184, Springer Verlag, 1986.

[I.38] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[I.39] P. Portal and Ž. Štrkalj, *L_p boundedness of pseudodifferential operators with operator valued symbols and application*, preprint.

[I.40] J. Prüss and R. Schnaubelt, *Solvability and maximal regularity of parabolic evolution equations with coefficients continuous in time*, J. Math. Anal. Appl. **256** (2001), 405–430.

[I.41] P. E. Sobolevskii, *Coerciveness inequalities for abstract parabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **157** (1964), 52–55.

[I.42] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.

[I.43] Ž. Štrkalj, *R-Beschränktheit, Summensätze abgeschlossener Operatoren und operatorwertige Pseudodifferentialoperatoren*, Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.

[I.44] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity*, Math. Ann. **319** (2001), 735–758.

Deuxième partie

Théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger sur les variétés Riemanniennes

Chapitre 4

Le spectre essentiel des opérateurs auto-adjoints

4.1 Opérateurs auto-adjoints

Dans toute cette section, H désigne un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est noté $(.,.)$. Soit un opérateur A à domaine $D(A)$ dense dans H. L'adjoint de A, noté A^*, est alors défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{u \in H : \exists f \in H \quad \text{tel que} \quad (Av, u) = (v, f), \quad \forall v \in D(A)\}, \\ A^* u &= f. \end{aligned}$$

A est dit auto-adjoint si $A = A^*$. La méthode variationnelle, qui consiste à associer un opérateur à une forme, est le principal outil dont nous disposons pour l'étude des opérateurs auto-adjoints.
Soit $\mathfrak{a}$ une forme sésquilinéaire définie sur un sous-espace $D(\mathfrak{a})$ de H, appelé domaine de $\mathfrak{a}$. Supposons que $\mathfrak{a}$ vérifie les propriétés suivantes :
(i) $D(\mathfrak{a})$ est dense dans H.
(ii) $\mathfrak{a}$ est positive : $\forall u \in D(\mathfrak{a}), \mathrm{Re}\,(\mathfrak{a}(u,u)) \geq 0$.
(iii) $\mathfrak{a}$ est continue pour la norme $||.||_{\mathfrak{a}} := (||.||_H^2 + \mathrm{Re}\ \mathfrak{a}(.,.))^{1/2}$:

$$\exists M > 0, \forall u, v \in D(\mathfrak{a}), |\mathfrak{a}(u,v)| \leq M||u||_{\mathfrak{a}}||v||_{\mathfrak{a}}.$$

(iv) $\mathfrak{a}$ est fermée, au sens où $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$ est complet.
Les propriétés (i)-(iv) font de $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$ un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$(u,v)_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{2}\Big[\mathfrak{a}(u,v) + \overline{\mathfrak{a}(v,u)}\Big] + (u,v)].$$

On peut alors, via le théorème de Lax Milgram, associer à $\mathfrak{a}$ un opérateur non borné A à domaine $D(A)$ dense en posant :

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in D(\mathfrak{a}) : \exists f \in H \quad \text{tel que} \quad \mathfrak{a}(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in D(\mathfrak{a})\}, \\ Au &= f. \end{aligned}$$

La positivité de $\mathfrak{a}$ entraîne celle de A, au sens où, pour tout $u \in D(A)$, $\mathrm{Re}\,(Au, u) \geq 0$. Par un simple argument de perturbation, il est possible de définir l'opérateur associé à une forme minorée, c'est à dire pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$, $\mathrm{Re}\ \mathfrak{a}(u, u) \geq -\gamma(u, u)$, où γ est une constante positive. On considère alors la forme $\mathfrak{a}+\gamma$ donnée par $(\mathfrak{a}+\gamma)(u, v) = \mathfrak{a}(u, v)+\gamma(u, v)$, pour u, $v \in D(\mathfrak{a})$. La forme $\mathfrak{a} + \gamma$ vérifie les hypothèses (i)-(iv). Soit B son opérateur associé. L'opérateur A associé à $\mathfrak{a}$ est défini par $A = B - \gamma I$.

Soit $\mathfrak{a}^*$ la forme adjointe de $\mathfrak{a}$, définie par :

$$\mathfrak{a}^*(u, v) = \overline{\mathfrak{a}(v, u)}, \quad \forall u, v \in D(\mathfrak{a}^*) = D(\mathfrak{a}).$$

On montre que l'opérateur associé à $\mathfrak{a}^*$ n'est autre que l'adjoint de A. La propriété suivante est alors immédiate :

Proposition 4.1.1. *Si la forme $\mathfrak{a}$ est symétrique, c-à-d $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$, alors l'opérateur associé A est auto-adjoint.*

Le théorème de Kato-Rellich permet d'établir qu'un opérateur symétrique est auto-adjoint s'il est suffisamment proche d'un autre opérateur auto-adjoint. Un opérateur B à domaine $D(B)$ dense est dit symétrique si $(Bx, y) = (x, By)$ pour tout x, $y \in D(B)$. Les preuves des deux théorèmes suivants peuvent trouvées dans le livre de Reed et Simon [II.30].

Théorème 4.1.2 (Kato-Rellich). *Soient A un opérateur auto-adjoint et B un opérateur symétrique tel que $D(A) \subset D(B)$ et pour tout $x \in D(A)$,*

$$||Bx|| \leq \varepsilon||Ax|| + \eta||x||$$

pour $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta \geq 0$. Alors l'opérateur $A + B$, avec domaine $D(A)$, est auto-adjoint.

Dans le cas où A et B sont définis à l'aide de la méthode variationnelle, le théorème KLMN permet d'obtenir le même résultat en supposant une inégalité qui ne met en jeu que les formes $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ associées à A et B. La plupart des opérateurs auto-adjoints étant définis par la méthode variationnelle, ce résultat est dans la pratique plus facile à manier que le théorème de Kato-Rellich.

Théorème 4.1.3 (KLMN). *Soit A un opérateur auto-adjoint positif défini par une forme $\mathfrak{a}$ et soit $\mathfrak{b}$ une forme symétrique sur $D(\mathfrak{a})$ telle que pour tout $x \in D(\mathfrak{a})$*

$$|\mathfrak{b}(x, x)| \leq \varepsilon\mathfrak{a}(x, x) + \eta(x, x)$$

pour un ε, $0 < \varepsilon < 1$ et un certain $\eta \in \mathbb{R}$. Alors la forme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ avec domaine $D(\mathfrak{a})$ est fermée et minorée. Son opérateur auto-adjoint associé est alors vu comme une perturbation de A, noté $A + B$.

4.2 Le spectre

Notons $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de H dans lui-même. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A et son spectre $\sigma(A)$ sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est une bijection de } D(A) \text{ dans } H \text{ et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\Big\}, \\ \sigma(A) &= \mathbb{C} \setminus \rho(A).\end{aligned}$$

L'ensemble $\rho(A)$ est ouvert et $\sigma(A)$ fermé. Par la suite, supposons que A est un opérateur auto-adjoint. Dans ce cas, $\sigma(A)$ est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ et si A est positif, alors son spectre est inclus dans l'intervalle $[0, \infty)$. Le spectre essentiel de A est défini de la façon suivante :
Considérons l'ensemble des valeurs propres de A qui sont de multiplicité finie, c-à-d telles que le sous-espace propre associé soit de dimension finie. Le spectre discret de A, noté $\sigma_{disc}(A)$ correspond à l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie qui sont isolées dans le spectre au sens où il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\lambda + \varepsilon, \lambda - \varepsilon[\cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. Le spectre essentiel $\sigma_{ess}(A)$ est alors défini comme le complémentaire du spectre discret dans $\sigma(A)$:

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A).$$

Le critère de Weyl donne une caractérisation du spectre essentiel.

Théorème 4.2.1 (Critère de Weyl). *Soit A un opérateur auto-adjoint. Alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si et seulement si il existe une suite $(u_n) \subset D(A)$ telle que $||u_n|| = 1$, u_n converge faiblement vers 0 et $||(A - \lambda I)u_n|| \to 0$.*

Le spectre essentiel peut éventuellement être vide et dans ce cas, le spectre est discret, composé uniquement de valeurs propres de multiplicité finie.

Théorème 4.2.2. *Soit A un opérateur auto-adjoint positif. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$.
(ii) L'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est compact pour un, ou de facon équivalente, pour tout $\lambda \in \rho(A)$.
(iii) L'inclusion $D(a) \subset H$ est compacte.
(iv) L'inclusion $D(A) \subset H$ est compacte.

Si un opérateur vérifie la condition (ii), on dit qu'il est à résolvante compacte.
Dans le cas où le spectre essentiel est non-vide, les deux propositions suivantes permettent de le localiser au moyen de sous-espaces de $D(A)$ (voir [II.12]) :

Proposition 4.2.3. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intervalle $(-\infty, \lambda]$ a une intersection non vide avec $\sigma_{ess}(A)$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace G_ε de $D(A)$ de dimension infinie tel que pour tout $x \in G_\varepsilon$, $(Ax - \lambda x - \varepsilon x, x) < 0$.*

Proposition 4.2.4. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intervalle $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ a une intersection non vide avec $\sigma_{ess}(A)$ si et seulement si il existe un sous-espace G de $D(A)$ de dimension infinie tel que pour tout $x \in G_\varepsilon$, $||(A - \lambda I)x|| < \varepsilon ||x||$.*

Il n'est pas toujours facile de construire de tels sous-espaces. Il est donc souhaitable de disposer de moyens indirects afin d'obtenir des informations sur le spectre essentiel. Par exemple, le théorème suivant permet de reconstituer le spectre essentiel d'un opérateur A à partir de celui d'un autre opérateur :

Théorème 4.2.5 (Weyl). *Soient A et A_0 deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert H. On suppose qu'il existe $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A_0)$ tel que $(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - A_0)^{-1}$ est un opérateur compact. Alors $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_0)$.*

Chapitre 5

Localisation du spectre

Ce chapitre propose une revue de certains résultats concernant le spectre des opérateurs de Schrödinger. Nous considérons une variété Riemannienne (M, g) de dimension n. L'élément de volume Riemannien est noté $d\mu$ et la distance associée à la métrique g, d. $B(x, r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r et on appelle volume d'un borélien B, noté $|B|$, la mesure de B. Sauf mention contraire, les intégrales seront toujours considérées par rapport au volume Riemannien $d\mu$.

5.1 L'opérateur de Schrödinger sur une variété Riemannienne

Rappelons brièvement la construction de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta+V$ sur $L^2(M)$. Nous donnons d'abord la définition de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ.

Dans une carte locale, notons $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de g dans la base $(\partial/\partial x_i)$ et $(g^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ son inverse. Le gradient Riemannien ∇f d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est le champ de vecteurs dont les coordonnées sont donnés par :

$$(\nabla f)_i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}(\frac{\partial f}{\partial x_j}).$$

Considérons la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}_\mathfrak{o}$ suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\mathfrak{o}(u, v) &= \int_M \nabla u.\overline{\nabla v}, \\ D(\mathfrak{a}_\mathfrak{o}) &= C_c^\infty(M), \end{aligned}$$

où $C_c^\infty(M)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(M)$ à support compact.
La fermeture $\tilde{\mathfrak{a}_\mathfrak{o}}$ de $\mathfrak{a}_\mathfrak{o}$ sur $L^2(M)$ est la plus petite extension fermée de $\mathfrak{a}_0$:

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{a}_\mathfrak{o}) &\subset D(\tilde{\mathfrak{a}_\mathfrak{o}}) \subset L^2(M) \\ \tilde{\mathfrak{a}_\mathfrak{o}}(u, v) &= \mathfrak{a}_\mathfrak{o}(u, v), \quad u, v \in D(\mathfrak{a}_\mathfrak{o}) \end{aligned}$$

Une telle forme existe et son domaine $D(\tilde{\mathfrak{a}_\mathfrak{o}})$ est l'espace de Sobolev $H^1(M) = W^{1,2}(M)$. L'opérateur $-\Delta$ est défini comme l'opérateur auto-adjoint associé à $\tilde{\mathfrak{a}_\mathfrak{o}}$ sur $L^2(M)$ et Δ est

appelé l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M.
On définit l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ pour des fonctions V non nécessairement minorées. Pour ce faire, considérons une fonction V_- positive vérifiant pour tout $u \in H^1(M)$,

$$\int_M V_-|u|^2 \leq \varepsilon \int_M |\nabla u|^2 + \eta \int_M |u|^2,$$

où $\varepsilon \in (0,1)$ et $\eta \geq 0$. Le théorème KLMN permet de définir l'opérateur $-\Delta - V_-$ comme opérateur associé à la forme $\mathfrak{a}_-(u,v) = \tilde{\mathfrak{a}_o}(u,v) - \int_M V_- u\overline{v}$. Soit V_+ un fonction positive et localement intégrable. L'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$, où $V = V_+ - V_-$, est alors défini comme l'opérateur associé à la forme $\mathfrak{a}(u,v) = \mathfrak{a}_-(u,v) + \int_M V_+ u\overline{v}$ avec domaine $D(\mathfrak{a}) = H^1(M) \cap \{u \in L^2(M) : \int_M V_+|u|^2 < \infty\}$. En particulier, $-\Delta + V$ est auto-adjoint. La fonction V est appelée le potentiel de l'opérateur de Schrödinger.

5.2 Le spectre essentiel d'une variété

Avant d'étudier le spectre de $-\Delta+V$, nous nous intéressons au spectre de $-\Delta$, souvent appelé le spectre de la variété M. Le premier résultat concerne les variétés compacts.

Théorème 5.2.1. *Si M est compacte, alors le spectre de M est discret.*

Par la suite, on désigne par $s_{ess}(-\Delta)$ la borne inférieure du spectre essentiel de $-\Delta$; $s_{ess}(-\Delta)$ est aussi appelé le bas du spectre essentiel.
Brooks [II.4] a obtenu un encadrement de $s_{ess}(-\Delta)$ en des termes géométriques. Plus précisément, dans le cas où M a une volume infini, il a prouvé que

$$\frac{1}{4}h^2 \leq s_{ess}(-\Delta) \leq \frac{1}{4}\delta^2$$

où h est la constante isopérimetrique de Cheeger (voir [II.3]) et δ la croissance exponentielle du volume des boules, $\delta = \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} log|B(x,r)|$, pour $x \in M$ arbitraire. On obtient par exemple que si M a un volume infini et un spectre discret, c-à-d $s_{ess}(-\Delta) = \infty$, alors le volume des boules croît très rapidement. Si le volume de M est fini, il a montré [II.5] une inégalité du même type avec des constantes h et δ légèrement modifiées.
La courbure de Ricci $Ric(M)$ de M peut aussi fournir des informations sur le spectre essentiel de la variété. Si M est simplement connexe à courbure de Ricci constante,$Ric(M) = -c$, $c > 0$, alors le spectre essentiel de $-\Delta$ est la demi-droite $[(n-1)^2c/4, \infty)$ (voir [II.12]). Si la courbure n'est pas constante, ce résultat n'est plus valable mais dans le cas où M est à courbure de Ricci minorée, Donnelly [II.12] a démontré le théorème suivant :

Théorème 5.2.2 (Donnelly 1981). *Soit M une variété Riemannienne complète et non-compacte dont la courbure de Ricci est minorée par $-(n-1)c$, $c \geq 0$. Alors le spectre essentiel de M rencontre l'intervalle* $[0, (n-1)^2c/4]$.

Démonstration. Soit $x \in M$ et $r > 0$. La première valeur propre de $-\Delta$ défini sur $L^2(B(x,r))$ avec conditions de Dirichlet au bord est donnée par la formule variationnelle :

$$\lambda_1(B(x,r)) = \inf_{f\in C_c^\infty(B(x,r))} \frac{\int_{B(x,r)} |\nabla f|^2}{\int_{B(x,r)} |f|^2}.$$

Les travaux de Cheng [II.7] et l'hypothèse $Ric(M) \geq -(n-1)c$ permettent d'obtenir une estimation de la première valeur propre,

$$\lambda_1(B(x,r)) \leq (n-1)^2 c/4 + \varepsilon(r)$$

où $\varepsilon(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $r > 0$ tel que $\lambda_1(B(x,r)) \leq (n-1)^2 c/4 + \varepsilon/2$. Nous utilisons maintenant le fait que M n'est pas compacte. En particulier, il existe une infinité de boules $B(x_i, r)$ disjointes. Par la formule variationnelle, il existe $f_i \in C_c^\infty(B(x_i, r))$ telles que

$$(-\Delta f_i, f_i) < (\lambda_1(B(x_i, r))f_i, f_i) + \varepsilon/2(f_i, f_i).$$

Grâce à l'estimation de $\lambda_1(B(x,r))$, on obtient que $(-\Delta f_i - (n-1)^2 c/4 f_i - \varepsilon f_i, f_i) < 0$ et le résultat découle de la Proposition 4.2.3. □

5.3 Positivité du spectre de $-\Delta + V$

On désigne par $s(-\Delta + V)$ la borne inférieure du spectre de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$. Si $V \geq 0$, l'opérateur de Schrödinger est positif, et en particulier $s(-\Delta + V) \geq 0$. Cette section est consacrée au cas où l'inégalité est stricte, c-à-d $s(-\Delta + V) > 0$.

Dans le cadre euclidien $M = \mathbb{R}^n$, Arendt et Batty [II.1] ont prouvé que, pour les potentiels V bornés, la stricte positivité du bas du spectre est équivalente à la condition

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \int_{B(x,r)} V(y)\, dy > 0$$

pour un certain $r > 0$. Ouhabaz [II.26] a montré que cette condition reste suffisante pour les variétés Riemanniennes satisfaisant le doublement local et les inégalités de Poincaré L^2 :

(A1) Le doublement local.
Il existe $R > 0$ et $C_1 > 0$ tels que

$$\forall r \leq R, \quad |B(x, 2r)| \leq C_1 |B(x,r)|.$$

(A2) Inégalités de Poincaré L^2.
Il existe $R > 0$ et $C_2 > 0$ tels que pour tout $r \in (0, R]$ et pour tout $x \in M$,

$$\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^2 \leq C_2 r^2 \int_{B(x,r)} |\nabla u|^2,$$

où $u_{B(x,r)}$ est la moyenne de u sur la boule $B(x,r)$,

$$u_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\, d\mu(y).$$

Théorème 5.3.1 (Ouhabaz 2001). *Soient M une variété Riemannienne complète vérifiant (A1) et (A2) et V un potentiel positif et borné tel que*

$$\inf_{x\in M} \frac{\int_{B(x,r)} V}{|B(x,r|} > 0.$$

Alors le spectre de $-\Delta + V$ est stricement positif.

Ce résultat est remarquable pour deux raisons. Il montre en effet l'importance des inégalités de Poincaré pour l'étude spectrale dans le cadre Riemannien. De plus Ouhabaz a montré que la condition sur V est nécessaire et suffisante sur les variétés à courbure de Ricci positive. Ceci met en évidence le rôle de la croissance du volume des boules. Par la suite, Shen [II.36] a démontré que l'hypothèse V borné peut affaiblie. Il a aussi donné une minoration explicite du bas du spectre.

Théorème 5.3.2 (Shen 2003). *Soit M une variété complète non-compacte vérifiant (A1) et (A2). On suppose qu'il existe des constantes C_3, C_4 et $p \in (1,\infty]$ telles que pour tout $x \in M$*

$$\inf_{x\in M} \frac{\int_{B(x,r)} V}{|B(x,r|} = C_3 > 0$$

et

$$\Big(\frac{1}{|B(x,r|}\int_{B(x,r)} V^p\Big)^{1/p} \leq \frac{C_4}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V.$$

Alors

$$s(-\Delta+V) \geq \frac{C_3}{\max(2, 2^{1/(p-1)})(2C_1C_3C_4^{p/(p-1)}r^2+1)C_2^2}.$$

5.4 Minoration du spectre essentiel de $-\Delta + V$ et discrétion du spectre

On s'intéresse désormais au spectre essentiel des opérateurs de Schrödinger et plus particulièrement à sa borne inférieure, notée $s_{ess}(-\Delta+V)$. Par définition $\sigma_{ess}(-\Delta+V) \subset \sigma(-\Delta+V)$; les résultats de la section précédente fournissent donc des minorations pour le bas du spectre essentiel. Mais, au vu du Théorème 4.2.5, on s'attend à ce que le spectre essentiel dépende surtout du comportement du potentiel à l'infini. En effet, si W est à support compact, il est facile de voir que la différence des résolvantes de $-\Delta+V$ et $-\Delta+V+W$ est un opérateur compact. Le Théorème 4.2.5 permet alors de conclure à l'égalité des spectres essentiels. Par conséquent, le spectre essentiel ne tient compte que de V en dehors des compacts. Le résultat suivant établi par Nayatani et Urakawa [II.25] va dans ce sens :

Théorème 5.4.1 (Nayatani, Urakawa 1993). *Soit M une variété Riemannienne complète telle que $s_{ess}(-\Delta) \geq c$. On définit, pour un $0 \in M$ fixé, la quantité suivante :*

$$d = \liminf_{r \to \infty} \inf_{x \in M \setminus B(0,r)} V(x).$$

Alors le spectre essentiel de $-\Delta + V$ est inclus dans l'intervalle $[c + d, \infty)$.

En particulier, si $V(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to \infty$, alors $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \emptyset$ et par conséquent le spectre de l'opérateur de Schrödinger est discret. Dans le cas euclidien $M = \mathbb{R}^n$, il existe une version plus forte si $d = 0$. On peut en effet prouver le théorème suivant (voir le livre de Shubin [II.37]) :

Théorème 5.4.2. *Soit V un potentiel sur $\mathbb{R}^n$ localement borné tel que $ess \sup_{|x| \geq r} |V(x)| \to 0$ lorsque $r \to \infty$. Alors $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$.*

Toujours dans le cas euclidien, Metafune et Pallara [II.24] ont obtenu une minoration du bas du spectre essentiel au moyen des quantités $|\{x \in Q(x,r) : V(x) < L\}|$ où $Q(x,r)$ est le cube centré en x et de côté r. Nous verrons dans le chapitre suivant une démonstration de ce résultat pour une variété Riemannienne satisfaisant des inégalités du type Poincaré et le doublement local. Leur minoration de $s_{ess}(-\Delta + V)$ a permis de fournir une preuve relativement simple d'un critère de discrétion du spectre que Kondrat'ev et Shubin [II.18] ont établi pour les variétés Riemanniennes à géométrie bornée. L'hypothèse de géométrie bornée entraîne notamment la positivité du rayon d'injectivité $r_{inj}(M)$.

Théorème 5.4.3 (Kondrat'ev, Shubin 1999). *Soient M une variété Riemannienne à géométrie bornée et V un potentiel positif localement intégrable. Il existe $r_0 \in (0, r_{inj}(M))$ tel que si pour tout $L > 0$ et pour tout $r \leq r_0/2$,*

$$\lim_{|x| \to \infty} |\{x \in B(x,r) : V(x) < L\}| = 0,$$

alors le spectre de $-\Delta + V$ est discret.

Ce théorème découle en fait de leur généralisation du critère de Molchanov aux variétés à géométrie bornée. Ils obtiennent une condition nécessaire et suffisante pour que le spectre soit discret, en terme d'intégrales de V. La notion de capacité joue un rôle central dans la preuve. La capacité newtonienne ou harmonique d'un compact F est notée $\mathrm{cap}(F)$.

Théorème 5.4.4 (Kondrat'ev, Shubin 1999). *Soit M une variété Riemannienne à géométrie bornée de dimension $n \geq 3$ et V un potentiel positif localement intégrable. Il existe $r_0 \in (0, r_{inj}(M))$ et $c > 0$ tels que le spectre de $-\Delta + V$ est discret si et seulement V vérifie la condition suivante :*

Pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ tendant vers l'infini, pour tout $r \leq r_0/2$ et pour tout compact $F_k \subset B(x_k, r)$ tel que $cap(F_k) \leq cr^{n-2}$,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{B(x_k,r) \setminus F_k} V(y)\, d\mu(y) = \infty.$$

Il est clair qu'une telle condition n'est, en général, pas facile à vérifier, d'où l'intérêt d'obtenir des critères dans l'esprit du Théorème 5.4.3. De plus, l'hypothèse $r_{inj}(M) > 0$ permet de raisonner d'une manière analogue au cas euclidien $M = \mathbb{R}^n$. L'un des objectifs de la prochaine partie est d'obtenir une généralisation du Théorème 5.4.3 en ne supposant sur la variété M que le doublement local et les inégalités de Sobolev-Poincaré $L^2 - L^q$, $q > 2$. Ce critère passe par une minoration du bas du spectre essentiel qui généralise aux variétés le résultat obtenu par Metafune et Pallara [II.24].

Chapitre 6

Minoration du spectre essentiel d'opérateurs de Schrödinger sur les variétés Riemanniennes

The main result of this paper is a lower bound for the essential spectrum of Schrödinger operators $-\Delta+V$ on Riemannian manifolds. In particular, we obtain conditions on V which imply the discreteness of the spectrum, or equivalently, the compactness of the resolvent.

Introduction and main results

The aim of this article is to find, under conditions on the potential V, a lower bound for the essential spectrum of Schrödinger operators $-\Delta + V$ on Riemannian manifolds. Potentials under consideration here are not necessarily bounded from below.

Let (M, g) be a Riemannian manifold of dimension n. Throughout this paper, we shall assume that M is complete and non-compact. We denote by d the distance associated with the metric g, by $d\mu$ the Riemannian volume element and by ∇ the Riemannian gradient. Let V be in $L^{\infty}_{loc}(M)$, the space of functions which are bounded on compact sets. We denote by V_+ the positive part of V and by V_- the negative part, so that $V = V_+ - V_-$.
We consider the quadratic form $\mathfrak{a}$ with domain $D(\mathfrak{a}) = C_c^{\infty}(M)$, the space of C^{∞} functions on M with compact support, and defined by

$$\mathfrak{a}(u, v) = \int_M \nabla u.\overline{\nabla v}\, d\mu + \int_M V u\overline{v}\, d\mu. \tag{6.1}$$

In the case of positive potentials, that is $V_{\equiv}0$, the Schrödinger operator $-\Delta + V$ acting on $L^2(M)$ is the operator associated with the closure of the form $\mathfrak{a}$. In this case it is clear that the closure $\tilde{\mathfrak{a}}$ of this form exists and the Schrödinger operator $-\Delta + V$ is the associated operator with $\tilde{\mathfrak{a}}$. That is :

$$D(-\Delta + V) = \{u \in D(\tilde{\mathfrak{a}}) : \exists f \text{ such that } \tilde{\mathfrak{a}}(u, v) = \int_M f\overline{v}\, d\mu, \forall v \in D(\tilde{\mathfrak{a}})\},$$

$$(-\Delta + V)u = f.$$

For potentials not necessarily positive, the well-known KLMN theorem allows one to define the Schrödinger operator $-\Delta + V$ under some conditions on V_-. We shall make this precise in Section 1.

We use the classical notation $B(x,r) = \{y \in M : d(x,y) < r\}$, $|B(x,r)| = \mu(B(x,r))$. We make the following assumptions on the manifold M :

$A1$) The local doubling property :
there exist $r_0 > 0$ and $C_1 > 0$ such that :

$$\forall r \leq r_0/2, \quad |B(x,2r)| \leq C_1 |B(x,r)|.$$

$A2$) Sobolev-Poincaré inequalities $(S_{2,q}(r_0))$:
there exist $q > 2$ and $C_2 > 0$ such that for all balls $B(x,r)$ with $r \leq r_0/2$ and all $u \in H^1(B(x,r))$,

$$\Big(\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^q \, d\mu \Big)^{1/q} \leq C_2 r |B(x,r)|^{1/q - 1/2} \Big(\int_{B(x,r)} |\nabla u|^2 \, d\mu \Big)^{1/2},$$

where $u_{B(x,r)}$ is the average of u on the ball $B(x,r)$, i.e,

$$u_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u \, d\mu.$$

Sobolev-Poincaré inequalities have been widely studied in recent years particularly because of their many applications in spectral theory. For example, Ouhabaz [II.26] gives conditions on V for the positivity of the bottom of the spectrum $s(-\Delta + V)$ on Riemannian manifold satisfying $A1$) and Poincaré inequality $(P_2(r_0))$, that is the Sobolev-Poincaré inequality with $q = 2$. More precisely, if $V \in L^\infty(M)$, he proves that if $\inf_{x \in M} \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} V d\mu > 0$, then $s(-\Delta + V) > 0$. Shen improves in [II.36] this result giving an explicit lower bound of $s(-\Delta + V)$ for V in a slightly more general class of potentials. In Section 2, we will see how Sobolev-Poincaré inequalities could be applied to give a lower bound of $\inf \sigma_{ess}(-\Delta + V)$. Let us recall that if A is a self-adjoint operator, the essential spectrum of A, $\sigma_{ess}(A)$, consists of all elements of the spectrum which are not ioslated eigenvalues of finite multiplicity.

For a potential $V = V_+ - V_-$, let us define the following quantities :

For $L > 0$, let us consider $E_L := \{x \in M : V_+(x) < L\}$ and for $r \leq r_0/2$,

$$\alpha_{r,L} := \limsup_{|x| \to +\infty} \frac{|E_L \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|},$$

where $|x| = d(0,x)$ and 0 is a fixed point in M.

For $l > 0$, let us consider $F_l := \{x \in M : V_-(x) > l\}$ and for $r \leq r_0/2$,

$$\gamma_{r,l} := \limsup_{|x| \to +\infty} \frac{|F_l \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}.$$

Now we make the following assumptions on V :

$A3$) there exists $0 < \alpha < 1$ such that for all $L > 0$, $\alpha_{r,L} < \alpha$.

$A4$) there exists $l > 0$ such that $\gamma_{r,l} = 0$.

$A5$) there exists $C_3 > 0$ such that for all balls $B = B(x, r)$,

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |V_-|^p\Big)^{1/p} \leq C_3,$$

with p such that $2/p + 2/q = 1$, and $q > 2$ is such that the manifold M satisfies the Sobolev-Poincaré inequality $(S_{2,q}(r_0))$.

The following theorem is one of the main result of this paper.

Theorem 6.0.1. *Assume that the manifold M satisfies $A1$) and $A2$). If for some $r \leq r_0/2$, V satisfies $A3$), $A4$) and $A5$) then*

$$\sigma_{ess}(A) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2}-1)^2}{C_1^2C_2^2r^2} - C_1^2 l, \infty\Big[.$$

This result was established by Metafune and Pallara [II.24] in the euclidean case $M = \mathbb{R}$ for Schrödinger operators with non-negative potentials. Our proof follows similar ideas but several arguments need modifications in the general setting of the present paper. The framework of our article includes Riemannian manifolds with Ricci curvature bounded from below, see Maheux and Saloff-Coste [II.21]. This is a widely studied class of manifold. Note also that Wang [II.39] gives a general criterion for a given λ to be a lower bound of $\sigma_{ess}(L)$ for a class of linear operator L acting on $L^2(M)$. More precisely, he proves under some conditions that $\alpha_0^{-1} \leq \inf \sigma_{ess}(L)$ if and only if

$$\int_M f^2\, d\mu \leq \alpha \int_M Lf.f\, d\mu + \beta(\alpha)\Big(\int_M \phi|f|\, d\mu\Big)^2,\ \alpha > \alpha_0,\ f \in D(L),$$

for some functions $\beta : (\alpha_0, \infty) \to (0, \infty)$ and $\phi > 0$ with $||\phi||_2 = 1$ (see Theorem 2.1 in [II.39]). Although this criterion is quite general, it is not clear how it can be used to obtain quantitative estimates of $\inf \sigma_{ess}(-\Delta + V)$ in terms of V as in Theorem 6.0.1.

As a consequence of Theorem 6.0.1, we will show how a lower bound for $\sigma_{ess}(-\Delta+V)$ by a ratio depending on V could give solutions to the principal eigenvalue problem. Theorem 6.0.1 also provides interesting conditions which imply that the spectrum consists only of isolated eigenvalues of finite multiplicity. We have

Corollary 6.0.2. *Assume that for some $r \leq r_0/2$ and any $L > 0$*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{|E_L \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} = 0. \tag{6.2}$$

Then the spectrum of $-\Delta + V$ is discrete.

A similar result as in Corollary 6.0.2 was already obtained by Kondrat'ev and Shubin [II.18] for manifold of bounded geometry and Schrödinger operators with potentials bounded from below. In fact, they give a generalization of the Molchanov's criterion for the spectrum to be discrete. Their results and proofs are based on the (rather difficult) study of harmonic capacity of compact sets. As a consequence, they established that the condition

$$\lim_{|x|\to+\infty} |E_L \cap B(x,r)| = 0$$

is sufficient for $\sigma_{ess}(-\Delta+V)$ to be empty. Note that the bounded geometry requirement is quite strong and implies the positivity of the radius of injectivity. Here, by easier argument, we obtain this condition in a more general setting. It is also very interesting to note that the growth of the volume of the balls plays an important role in our case.
In the euclidean case, Metafune and Pallara [II.23] also obtained that condition (6.2) implies $\sigma_{ess}(-\Delta+V) = \emptyset$. Furthermore, they prove that (6.2) is necessary and sufficient condition for $\sigma_{ess}(-\Delta+V) = \emptyset$ when potentials are of the form $V = f \circ p$, where p is a polynomial and f is a continuous function satisfying $f(t) \to +\infty$ as $|t| \to +\infty$.

In Section 3, we obtain necessity of condition (6.2) in Corollary 6.0.2 for a class of potentials. If $0 \leq V$ is such that for all $\alpha \in \left]0,1\right[$, there exists $\beta \in \left]0,1\right[$ such that for all balls B and all subsets $F \subset B$,

$$|F| \geq \alpha|B| \Rightarrow \int_F V \geq \beta \int_B V$$

then $\sigma_{ess}(-\Delta+V) = \emptyset$ implies (6.2). Potentials V satisfying the above condition correspond to function in the Muckenhoupt class $A_\infty(M)$. In the euclidean case, Stein [II.38] proves that $A_\infty(\mathbb{R})$ corresponds to the reverse Hölder class, i.e., there exist $p > 1$ and $c > 0$ such that

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B V^p\Big)^{1/p} \leq \frac{c}{|B|}\int_B V.$$

Note that non-negative polynomial functions are in $A_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Shen [II.36] gives another criterion for the discreteness of the spectrum on Riemannian manifolds for potentials V in a larger class, including the reverse Hölder class. He proves that the condition $\frac{1}{l(x)^2} \to +\infty$ as $x \to +\infty$ with $l(x) = \inf\{r > 0 : \frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V\,d\mu \geq r_0^2 c\}$ for a certain $c > 0$ is equivalent to the discreteness of $\sigma(-\Delta+V)$. This latter condition seems to be quite difficult to check.

In Section 4, we study the relationship between the discreteness of the spectrum and the behavior of the bottom of the Dirichlet and Neumann spectra on balls $B(x,r)$. For example, set

$$\lambda(B(x,r)) = inf\Big\{\frac{\int_{B(x,r)}(|\nabla u|^2 + V|u|^2)}{\int_{B(x,r)}|u|^2}, \quad u \in C_c^\infty(B(x,r)) \setminus \{0\}\Big\}.$$

We prove on Riemannian manifolds with Ricci curvature bounded from below that the discreteness of the spectrum of $-\Delta+V$ is equivalent to the fact that $\lambda(B(x,r)) \to +\infty$ as $x \to +\infty$.
Finally, note that the results of the present paper on Schrödinger operators can be applied to

obtain lower bound for the essential spectrum and discreteness of the spectrum for Ornstein-Uhlenbeck type operators. It is well known that such operators are unitary equivalent to Schrödinger operators. Therefore, one can deduce information on the spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operators from Schrödinger operators. Such results on the spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operators may also be deduced from Wang's results [II.39].

6.1 Definition of $-\Delta + V$

For a non-negative potential $V = V_+$, the operator $-\Delta + V$ can be defined as follows. We consider the quadratic form $\mathfrak{a}_+$, with domain $D(\mathfrak{a}_+) = C_c^\infty(M)$, defined by

$$\mathfrak{a}_+(u,v) = \int_M \nabla u.\overline{\nabla v}\, d\mu + \int_M V u\overline{v}\, d\mu. \tag{6.3}$$

One can easily see that $\mathfrak{a}_+$ is closable on $L^2(M)$. Its closure $\tilde{\mathfrak{a}}_+$ is a non-negative form with dense domain $D(\tilde{\mathfrak{a}}_+)$. Therefore one can define an associated self-adjoint operator, denoted by $-\Delta + V_+$. It is given by :

$$D(-\Delta + V_+) = \{u \in D(\tilde{\mathfrak{a}}_+) : \exists f \text{ such that } \tilde{\mathfrak{a}}_+(u,v) = \int_M f\overline{v}\, d\mu, \forall v \in D(\tilde{\mathfrak{a}}_+)\},$$

$$(-\Delta + V_+)u = f.$$

One can use this method to define $-\Delta + V$ when $V = V_+ - V_-$ is bounded from below. In this case the quadratic form $\mathfrak{a}$ with domain $D(\mathfrak{a}) = C_c^\infty(M)$ and defined by (6.1) is also closable. The Schrödinger operator $-\Delta + V$ is the operator associated with its closure.

Some difficulties appear for potentials which are not bounded from below since we can not conclude about the boundedness (from below) of $\mathfrak{a}$. We give some conditions on V, especially on V_-, that allow us to define the operator $-\Delta + V$. Here Sobolev-Poincaré inequalities will also play an important part.

The following lemma, which is a simple consequence of the Solobev-Poincaré inequality, will be needed latter.

Lemma 6.1.1. *For all $\varepsilon > 0$ and all balls $B = B(x,r) \subset M$, we have the following estimate for $u \in H^1(B)$,*

$$\Big(\int_B |u|^q\Big)^{2/q} \leq |B|^{\frac{2}{q}-1}\Big[C_2^2 r^2\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int_B |\nabla u|^2 + (1+\varepsilon)\int_B |u|^2\Big]. \tag{6.4}$$

Proof. By noting that the left-hand side in Sobolev-Poincaré inequality is the norm of $u - u_B$ in $L^q(B)$, denoted by $||u-u_B||_{q,B}$, we obtain

$$||u||_{q,B} \leq C_2 r|B|^{1/q-1/2}||\nabla u||_{2,B} + ||u_B||_{q,B}.$$

Moreover, since $q > 2$, Hölder's inequality gives $||u_B||_{q,B} \leq |B|^{1/q-1/2}||u||_{2,B}$. Adding the two previous inequalities we obtain

$$||u||_{q,B} \leq |B|^{1/q-1/2}(C_2 r||\nabla u||_{2,B} + ||u||_{2,B}).$$

Taking the square and using the obvious inequality that for $a, b \geq 0$ and $\varepsilon > 0$, $(a+b)^2 \leq (1+1/\varepsilon)a^2 + (1+\varepsilon)b^2$, we obtain (6.4). □

Lemma 6.1.2. *Assume that V satisfies conditions A4) and A5). For all $\delta > 0$ there exists $R > 0$ such that for all balls $B = B(x, r)$ with $|x| > R$, we have for $u \in H^1(B)$*

$$\int_B V_-|u|^2 \leq 2C_2^2C_3r^2\delta^{1/p}\int_B |\nabla u|^2 + (2C_3\delta^{1/p} + l)\int_B |u|^2. \tag{6.5}$$

Proof. Choose $\delta > 0$. By assumption $A4)$ and the definition of $\gamma_{r,l}$, there exists $R > 0$ such
for $B = B(x, r)$ with $|x| > R$ we have

$$|F_l \cap B| \leq \delta|B|. \tag{6.6}$$

Let us write

$$\int_B V_-|u|^2 = \int_{B\setminus F_l} V_-|u|^2 + \int_{B\cap F_l} V_-|u|^2.$$

By definition of F_l,

$$\int_{B\setminus F_l} V_-|u|^2 \leq l\int_B |u|^2. \tag{6.7}$$

For the other part, we need a 3-fold use of Hölder's inequality with $1/p + 1/p + 2/q = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{B\cap F_l} V_-|u|^2 &= \int_B \chi_{B\cap F_l}V_-|u|^2,\\ &\leq |B\cap F_l|^{1/p}\Big(\int_B V_-^p\Big)^{1/p}\Big(\int_B |u|^q\Big)^{2/q}.\end{aligned}$$

Now, using (6.6), assumption $A5)$, and inequality (6.4) in Lemma 6.1.1 with $\varepsilon = 1$, we obtain

$$\begin{aligned}\int_{B\cap F_l} V_-|u|^2 &\leq \delta^{1/p}|B|^{1/p}C_3|B|^{1/p}|B|^{\frac{2}{q}-1}\Big[2C_2^2r^2\int_B |\nabla u|^2 + 2\int_B |u|^2\Big],\\ &\leq \delta^{1/p}C_3\Big[2C_2^2r^2\int_B |\nabla u|^2 + 2\int_B |u|^2\Big]. \end{aligned}\tag{6.8}$$

Adding inequalities (6.7) and (6.8), we obtain (6.5).

□

Proposition 6.1.3. *Assume that V satisfies conditions A4) and A5). Then the quadratic form $\mathfrak{a}$ given by (6.1) with domain $D(\mathfrak{a}) = D(\tilde{\mathfrak{a}}_+)$ is bounded below and closed. Its associated operator is denoted by $-\Delta + V$.*

Proof. First we choose $\delta > 0$ and fix $R > 0$ for which inequality (6.5) holds. Now, we use the fact that, under assumption $A1)$, M has the finite covering property : for each $r \leq r_0/2$, there exist a sequence $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in M and a positive number m such that $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, r)$, the balls $B(x_i, r/2)$ are pairwise disjoint, and each $x \in M$ is contained in at most m balls $B(x_i, r)$. For the proof of this property, we refer to Ouhabaz [II.26].

We introduce M' as the union of the balls $B(x_i, r)$ with $|x_i| > R$. We can sum (6.5) on $|x_i| > R$ and using the finite recovering property, we obtain

$$\int_{M'} V_-|u|^2 \leq 2mC_2^2C_3r^2\delta^{1/p}\int_M |\nabla u|^2 + m(2C_3\delta^{1/p} + l)\int_M |u|^2.$$

For the remaining part, we use the fact that $M \setminus M'$ is a compact set and so V_- is bounded by a constant $C \geq 0$ so that

$$\int_{M\setminus M'} V_-|u|^2 \leq C\int_M |u|^2.$$

Now, we choose $\delta > 0$ such that $2mC_2^2C_3r^2\delta^{1/p} < 1$ and we add inequalities (6.9) and (6.9) :

$$\int_M V_-|u|^2 \leq 2mC_2^2C_3r^2\delta^{1/p}\int_M |\nabla u|^2 + (2mC_3\delta^{1/p} + ml + C)\int_M |u|^2.$$

We conclude with the KLMN theorem. $\square$

6.2 A lower bound for the essential spectrum

We recall that M is a complete, non-compact Riemannian manifold satisfying a local doubling property and Sobolev-Poincaré inequalities $(S_{2,q}(r_0))$ (see $A1$) and $A2$)), and assume that $V = V_+ - V_- \in L^\infty_{loc}(M)$ and satisfies $A3$), $A4$), and $A5$).

We start this section by the proof of the lower bound of $\inf \sigma_{ess}(-\Delta + V)$.

Proof of Theorem 6.0.1. Assume that for some $r \leq r_0/2$, there exists $0 < \alpha < 1$ such that for all $L > 0$, $\alpha_{r,L} < \alpha$. We recall that

$$\alpha_{r,L} = \overline{\lim}_{|x|\to+\infty}\frac{|E_L \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}$$

where $E_L = \{x \in M, V_+(x) < L\}$. Then we choose arbitrary $L > 0$ and β such that $\alpha < \beta < 1$. By definition of $\alpha_{r,L}$, there exists $R_1 > 0$ such that for all $x \in M$,

$$|x| > R_1 \Rightarrow |E_L \cap B(x,r)| \leq \beta|B(x,r)|.$$

We also assume that there exists $l > 0$ such that $\gamma_{r,l} = 0$. We choose $\delta > 0$, and by Lemma 6.1.2, there exists $R_2 > 0$ such that inequality (6.5) holds for $u \in C_c^\infty(M)$ and we multiply it by C_1^2 so that

$$C_1^2\int_B V_-|u|^2 \leq 2C_1^2C_2^2C_3r^2\delta^{1/p}\int_B |\nabla u|^2 + C_1^2(2C_3\delta^{1/p} + l)\int_B |u|^2, \tag{6.9}$$

where $B = B(x, r)$.

Let R be the maximum of R_1 and R_2. We consider balls B with $|x| > R$.
First of all we give an inequality involving the positive part V_+.

For $u \in C_c^\infty(M)$, let us write

$$\int_B |u|^2 = \int_{B\setminus E_L} |u|^2 + \int_{B\cap E_L} |u|^2.$$

On one hand, by definition of E_L and since $V_+ \geq 0$,

$$\int_{B\setminus E_L} |u|^2 \leq \frac{1}{L}\int_B V_+|u|^2. \tag{6.10}$$

On the other hand, Hölder's inequality and Lemma 6.1.1 imply that

$$\begin{aligned}\int_{B\cap E_L} |u|^2 &\leq |E_L\cap B|^{1-2/q}\Big(\int_{B\cap E_L}|u|^q\Big)^{2/q},\\ &\leq \beta^{1-2/q}|B|^{1-2/q}\Big(\int_B |u|^q\Big)^{2/q},\end{aligned}$$

and

$$\int_{B\cap E_L} |u|^2 \leq \beta^{1-2/q}\Big[C_2^2 r^2\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int_B |\nabla u|^2 + (1+\varepsilon)\int_B |u|^2\Big]. \tag{6.11}$$

Adding inequalities (6.10) and (6.11), yields

$$L\Big(1-\beta^{1-2/q}(1+\varepsilon)\Big)\int_B |u|^2 \leq L\beta^{1-2/q}C_2^2 r^2\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int_B |\nabla u|^2 + \int_B V_+|u|^2. \tag{6.12}$$

Before adding inequalities (6.12) and (6.9), we choose $L = \frac{1-2C_1^2C_2^2C_3r^2\delta^{1/p}}{\beta^{1-2/q}C_2^2r^2(1+1/\varepsilon)}$ so that the coefficient of $\int_B |\nabla u|^2$ is equal to 1. This choice is possible for δ small enough and $\alpha \leq \beta < 1$ and $\varepsilon > 0$. Setting $\varepsilon' = 2C_1^2C_2^2C_3r^2\delta^{1/p}$ and adding (6.12) and (6.9), we obtain

$$C\int_B |u|^2 + C_1^2\int_B V_-|u|^2 \leq \int_B |\nabla u|^2 + \int_B V_+|u|^2 + \Big(\frac{\varepsilon'}{C_2^2r^2} + C_1^2 l\Big)\int_B |u|^2, \tag{6.13}$$

where $C = C(\beta,\varepsilon,\varepsilon') = (1-\varepsilon')\frac{1-\beta^{1-2/q}(1+\varepsilon)}{\beta^{1-2/q}C_2^2r^2(1+\frac{1}{\varepsilon})}$. We recall that (6.13) holds for all balls $B = B(x,r)$ with $|x| > R$.

Now, we introduce a new potential W :

$$W(x) = \begin{cases} V_+(x) + C & \text{if} \quad |x| \leq R+r, \\ V(x) & \text{if} \quad |x| > R+r. \end{cases}$$

We show that (6.13) holds for all balls $B(x,r)$ with W instead of V :

$$C\int_B |u|^2 + C_1^2\int_B W_-|u|^2 \le \int_B |\nabla u|^2 + \int_B W_+|u|^2 + (\frac{\varepsilon'}{C_2^2 r^2} + C_1^2 l)\int_B |u|^2. \tag{6.14}$$

First of all, if $|x|\le R$ then $B(x,r)\subset B(0,R+r)$. Using the facts that $W_- = 0$ and $W_+ \ge C$ on $B(0,R+r)$, we obtain (6.14). For balls $B(x,r)$ with $|x|>R$, it follows from (6.13) and the facts that $W_+ \ge V_+$ and $W_- \le V_-$ on M.
Now, we divide both sides of (6.14) by $|B| = |B(x,r)|$ and integrate with respect to $x \in M$. By Fubini's Theorem, we obtain

$$C\int_M |u|^2 h + C_1^2\int_M W_-|u|^2 h \le \int_M |\nabla u|^2 h + \int_M W_+|u|^2 h + (\frac{\varepsilon'}{C_2^2 r^2} + C_1^2 l)\int_M |u|^2 h, \tag{6.15}$$

where

$$h(x) = \int_{B(x,r)} \frac{1}{|B(y,r)|}\, d\mu(y).$$

The local doubling property $A1)$ gives an estimation for h. Indeed, if $y \in B(x,r)$ then $B(y,r)\subset B(x,2r)$ and $B(x,r)\subset B(y,2r)$ so that for all $x\in M$

$$\frac{1}{C_1} \le h(x) \le C_1.$$

Using this and (6.15) we obtain

$$\frac{C}{C_1^2}\int_M |u|^2 + \int_M W_-|u|^2 \le \int_M |\nabla u|^2 + \int_M W_+|u|^2 + (\frac{\varepsilon'}{C_2^2 r^2} + C_1^2 l)\int_M |u|^2,$$

and we can rewrite it

$$\Big(\frac{C}{C_1^2} - (\frac{\varepsilon'}{C_2^2 r^2} + C_1^2 l)\Big)\int_M |u|^2 \le \int_M |\nabla u|^2 + \int_M W|u|^2.$$

This inequality gives in fact a lower bound for $\inf \sigma(-\Delta + W)$:

$$\inf \sigma(-\Delta + W) \ge \frac{C}{C_1^2} - \frac{\varepsilon'}{C_2^2 r^2} - C_1^2 l.$$

By construction, $V - W$ is a bounded function with compact support and so we have $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta + W)$. We finally obtain

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta + V) \ge \frac{C(\beta,\varepsilon,\varepsilon')}{C_1^2} - \frac{\varepsilon'}{C_2^2 r^2} - C_1^2 l,$$

We conclude by taking the maximal value in the right-hand side for $\beta \in]\alpha, 1[$, $\varepsilon, \varepsilon' > 0$:

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta + V) \geq \frac{(\alpha^{1/q-1/2} - 1)^2}{C_1^2 C_2^2 r^2} - C_1^2 l.$$

$\square$

Remarks. It is also interesting to study what happens if instead of $A3$), we assume that there exists $L > 0$ such that $\alpha_{r,L} = 0$. A similar proof as Theorem 6.0.1 gives that under this condition, $\inf \sigma_{ess}(-\Delta + V) \geq \frac{L}{C_1^2} - C_1^2 l$. For example, it is the case if V is bounded below by $L > 0$ outside a compact set. The lower bound is not exactly what we would expect. The loss corresponding to the factor $\frac{1}{C_1^2}$ comes from the recovering argument. In the euclidean case, one can get ride of this factor by using a covering by disjoint cubes instead of balls.
On the other hand, if V satisfies $A3$) and $V \geq c^2$ outside a compact set, we deduce from Theorem 6.0.1 that

$$\sigma_{ess}(-\Delta + V) \subset \Big[c^2 + \frac{(\alpha^{1/q-1/2} - 1)^2}{C_1^2 C_2^2 r^2}, \infty\Big[.$$

To do this, we only have to write $V = (V - c^2) + c^2$ and to check that if V satisfies $A3$), $V - c^2$ does too. This version of Theorem 6.0.1 underlines the fact that condition $A3$) deals essentially with the behavior of $\limsup_{|x| \to +\infty} V$.

Now we make some more comments on conditions $A3$), $A4$), and $A5$). First, the following example shows that condition $A3$) does not imply that $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \emptyset$.

Example 6.2.1. We consider, in the case $M = \mathbb{R}$ the non-negative potential V defined by :

$$V(x) = \begin{cases} n & \text{if} \quad x \in [n, n + \frac{1}{2}[, \\ 0 & \text{if} \quad x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[. \end{cases}$$

It is clear that V satisfies $A3$) with $r = 1$ and $\alpha > 1/2$. Conditions $A4$) and $A5$) obviously hold since $V_- = 0$. By Theorem 6.0.1, we obtain a lower bound for $\sigma_{ess}(-\Delta + V)$. Moreover, by the Molchanov's criterion, one can easily see that $\sigma_{ess}(-\Delta + V)$ is not empty. The Molchanov's criterion states that $-\Delta + V$ has compact resolvent (or equivalently that the essential spectrum is empty) if and only if

$$\forall d > 0, \lim_{|x| \to +\infty} \int_x^{x+d} V = +\infty.$$

Taking $d = 1/2$ and $x = n + 1/2$ in our example, we obtain that $\int_{n+1/2}^{n+1} V = 0$ so that $\sigma_{ess}(-\Delta + V) \neq \emptyset$. By Theorem 6.0.1, we obtain an estimation of the bottom of $\sigma_{ess}(-\Delta + V)$.

Let us focus on conditions $A4$) and $A5$). Trivially, if V_- is bounded by $l > 0$, that is $V \geq -l$, then $A4$) holds with l and $A5$) is satisfied. So we obtain, under $A1$), $A2$), and $A3$), the inclusion

$$\sigma_{ess}(-\Delta + V) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2} - 1)^2}{C_1^2 C_2^2 r^2} - C_1^2 l, \infty\Big[.$$

This inclusion doesn't change if we only assume that $\limsup_{x\to+\infty} V_- < l$. It is also interesting to note that if V_- satisfies condition $A4$) for any l, we obtain

$$\sigma_{ess}(-\Delta+V) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2}-1)^2}{C_1^2C_2^2r^2} - C_1^2 l, \infty\Big[.$$

Since this holds for every $l > 0$, we have

$$\sigma_{ess}(-\Delta+V) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2}-1)^2}{C_1^2C_2^2r^2}, \infty\Big[.$$

So, we obtain the same lower bound for $\sigma_{ess}(-\Delta+V)$ and $\sigma_{ess}(-\Delta+V_+)$. This can be seen as a result of stability for the lower bound of the essential spectrum. In fact, Ouhabaz showed in [II.26] that if V_- vanishes at infinity then $-\Delta+V$ and $-\Delta+V_+$ have the same essential spectrum. Here, under a weaker assumption, we can conclude on the lower bound of the essential spectrum.

Theorem 6.0.1 can also be used in order to prove the existence of principal eigenvalues. That is the existence of a couple (λ, u) with $\lambda \geq 0$ and u satisfying :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda V u, \\ u > 0,\ u \in L^2(M). \end{cases}$$

There are several works on this question in the euclidean case $M = \mathbb{R}^n$ and smooth domains of $\mathbb{R}^n$. This problem first appears in [II.16] where Hess and Kato studied the bifurcation of solutions to some nonlinear problems. The principal eigenvalue problem is studied there for the Laplacian with Dirichlet boundary conditions on a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^n$ and considered eigenfunctions in the space of continuous functions. In [II.1], Arendt and Batty studied the eigenvalue problem on $L^2(\mathbb{R}^n)$. They established that the positivity of the spectral lower bound of $-\Delta+V_+$ assures the existence of principal eigenvalue. Ouhabaz [II.26] extended this results to the Riemannian manifolds settings. He also obtained a condition on the potential V that gives the existence and the uniqueness of solution to the principal eigenvalue problem. Here, we show the existence of a principal eigenvalue if $A4$) is satisfied for all $l > 0$. Note that we need an additional hypothesis that $-\Delta+\lambda V$ is non-negative for some $\lambda > 0$. For more informations on this problem, we refer to [II.26], [II.36]. In the euclidean case, a complete characterization of potentials for which $-\Delta+\lambda V$ is a non-negative self-adjoint operator is given in [II.22].

Theorem 6.2.2. *Assume that M satisfies $A1$) and $A2$) and that for some $r \leq r_0/2$, V satisfies $A3$), $A4$) for all $l > 0$, and $A5$), and $V_- \not\equiv 0$. If there exists $\lambda_1 > 0$ such that the self-adjoint operator $-\Delta+\lambda_1 V$ is non-negative, then there exists a principal eigenvalue.*

Proof. By Theorem 6.0.1, the inclusion

$$\sigma_{ess}(-\Delta+V) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2}-1)^2}{C_1^2C_2^2r^2} - C_1^2 l, \infty\Big[$$

holds also for all $l > 0$. Hence

$$\sigma_{ess}(-\Delta + V) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2}-1)^2}{C_1^2C_2^2r^2}, \infty\Big[.$$

Moreover, multiplying the potential V by a constant $\lambda > 0$ doesn't change our conditions. More precisely, if V satisfies $A3$), $A4$) for all $l > 0$, and $A5$), so does λV. Therefore, for all $\lambda > 0$, we have

$$\sigma_{ess}(-\Delta + \lambda V) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2}-1)^2}{C_1^2C_2^2r^2}, \infty\Big[.$$

Particularly $\sigma_{ess}(-\Delta + \lambda V) > 0$.

Set, for $\lambda \geq 0$, $s(\lambda) := s(-\Delta + \lambda V)$ the bottom of the spectrum of $-\Delta + \lambda V$. We recall that

$$s(\lambda) = \inf\{\int_M |\nabla u|^2 + \int_M \lambda V|u|^2, u \in D(\mathfrak{a}), ||u||_2 = 1\}. \tag{6.16}$$

Since $V_- \not\equiv 0$, there exists $u \in C_c^\infty(M)$ such that $||u||_2 = 1$ and $\int_M V|u|^2 < 0$. For such a function, we have

$$s(\lambda) \leq \int_M |\nabla u|^2 + \lambda \int_M V|u|^2.$$

We deduce that $s(\lambda) \to -\infty$ as $\lambda \to +\infty$. Moreover the function $\lambda \to s(\lambda)$ is the infimum of affine functions, so it is concave with $s(0) \geq 0$. We also assume that there exists $\lambda_1 > 0$ such that $-\Delta + \lambda_1 V$ is non-negative. Consequently, $s(\lambda_1) \geq 0$ and so, there exists $\lambda_0 > 0$ such that $s(\lambda_0) = 0$. Now, since $\inf \sigma_{ess}(-\Delta + \lambda_0 V) > 0$, 0 is an eigenvalue of $-\Delta + \lambda_0 V$. The fact that one can choose a positive eigenvector u such that $(-\Delta + \lambda_0 V)u = 0$ follows from positivity properties of the semigroup $(e^{-t(-\Delta+\lambda_0 V)})_{t\geq 0}$ (see [II.1] and [II.26]). □

We make a remark on the behavior at the origin of the bottom of $\sigma_{ess}(-\Delta+\lambda V)$, noted $s_{ess}(-\Delta + \lambda V)$ as $\lambda \to 0$. In the proof, we see that

$$s_{ess}(-\Delta + \lambda V) \geq \frac{(\alpha^{1/q-1/2}-1)^2}{C_1^2C_2^2r^2} > 0$$

and so $s_{ess}(-\Delta+\lambda V)$ can not tend to 0 as $\lambda \to 0$. However, in the case $M = \mathbb{R}^n$, $s_{ess}(-\Delta) = 0$. So there is a discontinuity at the origin for $s_{ess}(-\Delta + \lambda V)$, whereas $s(-\Delta + \lambda V)$ is continuous as the infimum of affine functions (this last property follows from (6.16)).

We close this section with a result on the discreteness of the spectrum of $-\Delta + V$.

Corollary 6.2.3. *Assume that the manifold M satisfies $A1$) and $A2$) and that one of the following properties holds :*

i) For some $r \leq r_0/2$, V satisfies $A3$) for α arbitrary small, $A4$), and $A5$).

ii) For $r \leq r_0/2$ arbitrary small, V satisfies $A3$), $A4$), and $A5$).

Then the spectrum of $-\Delta + V$ is discrete and consists of eigenvalues of finite multiplicity.

Proof. In the first case, let $\alpha \to 0$ in Theorem 6.0.1 and obtain $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \emptyset$. In the other case, let $r \to 0$ and obtain the same conclusion. $\square$

We shall see in the next section that, if the potential V belongs to a certain class, the first condition in Corollary 6.2.3 is in fact necessary for the discreteness of the spectrum. Another point is the fact that the two conditions *i)* and *ii)* in Corollary 6.2.3 are not equivalent, as shown below.

Example. Let $M = \mathbb{R}$ and consider the potential V defined as follows :

$$V(x) = \begin{cases} n^2 & \text{if} \quad x \in [n + \frac{2k}{n}, n + \frac{2k+1}{n}[, \quad 0 \le k \le \frac{n-1}{2} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For such a V, we easily see that $\alpha_{r,L} = 1/2$ for all r and L, and consequently, condition (i) is not satisfied. However condition (ii) is fulfilled and so, the spectrum is discrete.
Moreover, in the case $M = \mathbb{R}$, the well-known Molchanov's criterion says that the spectrum is discrete if and only if for all r, $\int_{B(x,r)} V \to +\infty$ as $x \to +\infty$. So, it seems that condition (ii), although it is not equivalent to the Molchanov's criterion, is not very far from this condition. The fact that $\int_{B(x,r)} V \to +\infty$ for all r implies that V should be, in some sense, unbounded on sufficiently small intervals.

6.3 The class A_∞

Let V be a non-negative potential in $L^\infty_{loc}(M)$.

Definition 6.3.1. V belongs to the class $A_\infty(M)$ if for all $\alpha \in \left]0,1\right[$, there exists $\beta \in \left]0,1\right[$, such that for all balls B and all subsets $F \subset B$,

$$|F| \ge \alpha |B| \Rightarrow \int_F V \ge \beta \int_B V.$$

In the case $M = \mathbb{R}^n$, the following theorem shows that $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ coincides with the reverse Hölder's class, see [II.38], Chapter V.

Theorem 6.3.2. *$V \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ if and only if there exist $p > 1$ and $c > 0$ such that*

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B V^p\Big)^{1/p} \le \frac{c}{|B|}\int_B V.$$

It is also established in [II.38], p.219, that non negative polynomial potentials belong to $A_\infty(\mathbb{R}^n)$. More precisely, if P is a polynomial potential with degree d, then

$$a > -1/d \Rightarrow |P|^a \in A_\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.17}$$

The next result characterizes the discreteness of the spectrum.

Theorem 6.3.3. *Assume that M satisfies $A1$) and $A2$) and that $V \in A_\infty(M)$. The spectrum of $-\Delta + V$ consists of eigenvalues of finite multiplicity if and only if there exists $r \le r_0/2$ such that for all $L > 0$, $\alpha_{r,L} = 0$.*

Proof. If $\alpha_{r,L} = 0$, then $\sigma_{ess}(-\Delta + V)$ is empty by Corollary 6.2.3.
Conversely, assume that there exist $L > 0$, a sequence $\{x_k\}$ such that $|x_k| \to \infty$ and $\delta > 0$ such that

$$|E_L \cap B(x_k, r)| > \delta |B(x_k, r)|, \tag{6.18}$$

for k large enough. Since M is non-compact, we can assume that the balls $B(x_k, r)$ are pairwise disjoint.
The fact that V lies in $A_\infty(M)$ and the previous inequality imply the existence of β such that

$$\int_{B(x_k,r)} V \leq \beta \int_{E_L \cap B(x_k,r)} V$$

and so, by definition of E_L and inequality (6.18),

$$\begin{aligned}\int_{B(x_k,r)} V &\leq \beta L |E_L \cap B(x_k, r)| \\ \int_{B(x_k,r)} V &\leq \beta L |B(x_k, r)|.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Now, we introduce the following sequence of functions $\{u_k\}$:

$$u_k(x) = \frac{1}{|B(x_k, \frac{r}{2})|^{1/2}} \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in B(x_k, \frac{r}{2}), \\ 2 - \frac{2}{r} d(x, x_k) & \text{if} \quad x \in B(x_k, r) \setminus B(x_k, \frac{r}{2}), \\ 0 & \text{if} \quad x \in M \setminus B(x_k, r). \end{cases}$$

By construction, all u_k are compactly supported and their supports are all disjoint. Moreover the sequence $\{u_k\}$ is bounded in $(D(a), ||.||_a)$. Indeed, by local doubling property, $\{u_k\}$ is bounded in $H^1(M)$. Furthermore by inequality (6.19) and the fact that $u_k \leq 1/|B(x_k, \frac{r}{2})|^{1/2}$, we obtain that $\int_M V|u_k|^2 \leq \beta L C_1$ and $\{u_k\}$ is bounded in $D(a)$.
From the definition of u_k it follows also that

$$\int_M |u_k|^2 \geq \int_{B(x_k,r/2)} |u_k|^2 = 1$$

and since their supports are pairwise disjoint, we have, for $i \neq j$,

$$\int_M |u_i - u_j|^2 = \int_M |u_i|^2 + \int_M |u_j|^2 \geq 2.$$

In particular, we can not extract from $\{u_k\}$ a convergent subsequence in $L^2(M)$, although it is bounded in $D(a)$. Hence $-\Delta + V$ can not have compact resolvent and $\sigma_{ess}(-\Delta + V)$ is not empty. □

For $M = \mathbb{R}^n$, we obtain, thanks to (6.17), that for polynomial potentials there is equivalence between the discreteness of the spectrum and $\alpha_{r,L} = 0$. This result is in fact true for a larger class. Metafune and Pallara [II.24] prove that we have the equivalence for potentials of the form $V = f \circ p$ where p is a polynomial and f is a continuous function satisfying $f(t) \to +\infty$ as $|t| \to +\infty$. They give also a very nice characterization of the negation of the condition $\alpha_{r,L} = 0$. Namely, they obtain that the spectrum is not discrete if and only if there exists a direction $\omega \in \mathbb{R}^n$ such that $\frac{\partial p}{\partial \omega} = 0$.

6.4 Localization and discreteness of the spectrum

In this section, we characterize the discreteness of the spectrum of $-\Delta + V$ with non-negative V in terms of the behavior of the bottom of the Dirichlet and Neumann spectra on balls $B(x,r)$.
Let Ω be a bounded subset of M. We will use the following notation :

$$\lambda(\Omega) = inf\Big\{\frac{\int_\Omega(|\nabla u|^2 + V|u|^2)}{\int_\Omega |u|^2}, \quad u \in C_c^\infty(\Omega) - 0\Big\},$$

$$\mu(\Omega) = inf\Big\{\frac{\int_\Omega(|\nabla u|^2 + V|u|^2)}{\int_\Omega |u|^2}, \quad u \in C^\infty(\Omega) - 0\Big\}.$$

Note that $\lambda(\Omega)$ (resp. $\mu(\Omega)$) is the first eigenvalue of $-\Delta + V$ considered as an operator on $L^2(\Omega)$ and subject to Dirichlet (resp. Neumann) boundary conditions.
For $r \leq r_0$, where r_0 is as in assumption $A1$), we set

$$\lambda^\infty(r) = \liminf_{|x|\to+\infty} \lambda(B(x,r)),$$

$$\mu^\infty(r) = \liminf_{|x|\to+\infty} \mu(B(x,r)).$$

Our purpose is to give a criterion for the discreteness of the spectrum of $-\Delta+V$ involving $\lambda^\infty(r)$ and $\mu^\infty(r)$. The next two proposition show the similarity between the behavior at infinity of $\lambda(B(x,r))$ and $\mu(B(x,r))$. Note that, in the case of bounded geometry, such results has been proved by Kondrat'ev and Shubin [II.18].
It comes directly from the definition that $\lambda^\infty(r) \geq \mu^\infty(r)$. Now we have

Proposition 6.4.1.

$$\mu^\infty(r) = +\infty \Rightarrow \lambda^\infty(r) = +\infty.$$

For the converse, we need to make an additional assumption on M :

$$\lim_{t\to1^-} \frac{|B(x,r) \setminus B(x,tr)|}{|B(x,r)|} = 0 \text{ uniformly in } x. \tag{6.20}$$

Cheeger, Gromov and Taylor prove in [II.6] (see Proposition 4.1) that, if the Ricci curvature of M is bounded from below, then (6.20) is satisfied.

Proposition 6.4.2. *Assume that M satisfies $A1$), $A2$), and (6.20). Then,*

$$\lambda^\infty(r) = +\infty \Rightarrow \mu^\infty(r) = +\infty.$$

Proof. Suppose $\mu^\infty(r) < +\infty$. We can find a sequence $\{x_k\}$, with $|x_k| \to +\infty$ such that for k large enough, $\mu(B(x_k,r)) < \mu^\infty(r)+1$. By definition of $\mu(B(x_k,r))$, there exists $u_k \in C^\infty(B(x_k,r))$ such that,

$$\int_{B(x_k,r)} (|\nabla u_k|^2 + V|u_k|^2) \leq (\mu^\infty(r)+1)\int_{B(x_k,r)} |u_k|^2. \tag{6.21}$$

Let choose $k \in \mathbb{N}$ and $1/2 \leq t < 1$. We define the function $\theta_{k,t}$ in the following way :

$$\theta_{k,t}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in B(x_k, tr), \\ \frac{r - d(x, x_k)}{r(1-t)} & \text{if} \quad x \in B(x_k, r) \setminus B(x_k, tr), \\ 0 & \text{if} \quad x \in M \setminus B(x_k, r). \end{cases}$$

Setting $\phi_{k,t} = \theta_{k,t} u_k$, $S = 1/r(1-t)$ and, since $\theta_{k,t}$ is compactly supported in $B(x_k, r)$ and lower than 1, we have

$$\begin{aligned} \int_M (|\nabla \phi_{k,t}|^2 + V|\phi_{k,t}|^2) &\leq \int_{B(x_k,r)} (2|\nabla u_k|^2 + 2S^2|u_k|^2 + V|u_k|^2) \\ &\leq 2(\int_{B(x_k,r)} (|\nabla u_k|^2 + V|u_k|^2 + S^2|u_k|^2) \\ &\leq 2(\mu^\infty(r) + 1 + S^2) \int_{B(x_k,r)} |u_k|^2. \end{aligned} \tag{6.22}$$

From inequality (6.21), we have

$$\int_{B(x_k,r)} |\nabla u_k|^2 \leq (\mu^\infty(r) + 1) \int_{B(x_k,r)} |u_k|^2$$

and, taking $\varepsilon = 1$ in Lemma 6.4.3 below,

$$\Big(1 - K(t)(2 + 2C_2^2 r^2(\mu^\infty(r) + 1))\Big) \int_{B(x_k,r)} |u_k|^2 \leq \int_{B(x_k,tr)} |u_k|^2.$$

Under hypothesis (6.20), we can choose t close to 1 such that

$$1 - K(t)(2 + 2C_2^2 r^2(\mu^\infty(r) + 1)) > \frac{1}{2}$$

and the choice of t does not depend on k. So, for such a t,

$$\int_{B(x_k,r)} |u_k|^2 \leq 2 \int_{B(x_k,tr)} |u_k|^2.$$

This, together with inequality (6.22), implies

$$\begin{aligned} \int_{B(x_k,r)} (|\nabla \phi_{k,t}|^2 + V|\phi_{k,t}|^2) &\leq 4(\mu^\infty(r) + 1 + S^2) \int_{B(x_k,tr)} |u_k|^2 \\ &\leq 4(\mu^\infty(r) + 1 + S^2) \int_{B(x_k,tr)} |\phi_{k,t}|^2, \\ \int_{B(x_k,r)} (|\nabla \phi_{k,t}|^2 + V|\phi_{k,t}|^2) &\leq 4(\mu^\infty(r) + 1 + S^2) \int_{B(x_k,r)} |\phi_{k,t}|^2. \end{aligned}$$

Consequently, $\lambda(B(x_k, r))$ is uniformly bounded in k. Hence $\lambda^\infty(r)$ is finite. $\square$

Lemma 6.4.3. *For $\varepsilon > 0$, $0 \le t < 1$ and all balls $B(x,r)$, we have, for $u \in H^1(B(x,r))$,*

$$\Big(1 - K(t)(1+\varepsilon)\Big) \int_{B(x,r)} |u|^2 \le \int_{B(x,tr)} |u|^2 + K(t) C_2^2 r^2 \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big) \int_{B(x,r)} |\nabla u|^2,$$

where $K(t) = K(x,r,q,t) = \Big(\frac{|B(x,r)\setminus B(x,tr)|}{|B(x,r)|}\Big)^{1-2/q}$

Proof. Let us write

$$\int_{B(x,r)} |u|^2 = \int_{B(x,tr)} |u|^2 + \int_{B(x,r)\setminus B(x,tr)} |u|^2.$$

By Hölder's inequality,

$$\int_{B(x,r)\setminus B(x,tr)} |u|^2 \le \Big(\int_{B(x,r)} |u|^q\Big)^{2/q} |B(x,r) \setminus B(x,tr)|^{1-2/q},$$

and we conclude by Lemma 6.1.1. □

The next step is to show the link between $\lambda^\infty(r)$, $\mu^\infty(r)$ and the spectrum.

Proposition 6.4.4. *Assume M satisfies A1) and A2). If the spectrum of $-\Delta + V$ is discrete then $\lambda^\infty(r) = +\infty$.*

Proof. Assume $\lambda^\infty(r) < +\infty$. There exists a sequence $\{x_k\}$, with $x_k \to +\infty$, such that for k large enough, $\lambda(B(x_k,r)) < \lambda^\infty(r) + 1$. By definition of $\lambda(B(x_k,r))$, there exists $u_k \in C_c^\infty(B(x_k,r)$ such that

$$\int_{B(x_k,r)} |u_k|^2 = 1$$

and

$$\int_{B(x_k,r)} (|\nabla u_k|^2 + V|u_k|^2) \le \lambda^\infty(r) + 1.$$

The sequence $\{u_k\}$ is bounded in $D(a)$. Choosing $\{x_k\}$ such that all balls $B(x_k,r)$ are disjoint,

$$\begin{aligned} \int_M |u_i - u_j|^2 &= \int_{B(x_i,r)} |u_i|^2 + \int_{B(x_j,r)} |u_j|^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

and we conclude as in the proof of Theorem 6.3.3. □

Proposition 6.4.5. *Assume M satisfies A1). If there exists $L > 0$ such that $\mu^\infty(r) > L$ then $\sigma_{ess}(-\Delta + V) \subset [\frac{L}{C_1^2}; +\infty[$.*

Proof. Assume $\mu^\infty(r) > L$. There exists $R > 0$ such that

$$|x| \geq R \Rightarrow \mu(B(x,r)) > L.$$

Then, for all $u \in C^\infty(B(x,r))$,

$$\int_{B(x,r)} (|\nabla u|^2 + V|u|^2) \geq L \int_{B(x,r)} |u|^2.$$

Now we define a new potential W :

$$W(x) = \begin{cases} V(x) + L(\beta, \varepsilon, \varepsilon') & \text{if} \quad |x| \leq R + r, \\ V(x) & \text{if} \quad |x| > R + r. \end{cases}$$

The same argument as in the proof of Theorem 6.0.1 gives

$$\frac{L}{C_1^2} \int_M |u|^2 \leq \int_M |\nabla u|^2 + W|u|^2,$$

and we finally obtain that $\sigma_{ess}(-\Delta + V) \subset [\frac{L}{C_1^2}, +\infty[$. $\square$

Now, we put the three previous propositions together and we have

Theorem 6.4.6. *Assume that M satisfies hypothesis $A1)$, $A2)$ and (6.20). The following assertions are equivalent :*

i) $\lambda^\infty(r) = +\infty$.

ii) $\mu^\infty(r) = +\infty$.

iii) The spectrum of $-\Delta + V$ consists of eigenvalues of finite multiplicity.

Proof. We only need to prove *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*. If $\mu^\infty(r) = +\infty$, Proposition 6.4.5 shows that the inclusion $\sigma_{ess}(-\Delta + V) \subset [\frac{L}{C_1^2}, +\infty[$ holds for all $L > 0$. Therefore $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \emptyset$ and the spectrum is discrete. $\square$

Our last comment concerns Ornstein-Uhlenbeck operators. We recall that an Ornstein-Uhlenbeck operator $Bu = -e^F div(e^{-F}\nabla u)$ acts on $L^2(M, dm)$, where $dm = e^{-F} d\mu$ and $F \in C^2(M)$, and is associated with the form

$$b(u,v) = \int_M \nabla u \overline{\nabla v}\, dm$$

and

$$D(b) = H^1(M, dm).$$

Assume that the function $|\nabla F|^2 - 2\Delta F$ is bounded from below. Then it is classical that if we set $\phi = e^{-F/2}$ and T is the multiplication operator by ϕ on $L^2(M, dm)$, then T is a unitary map from $L^2(M, dm)$ to $L^2(M, d\mu)$. Therefore we obtain that the operator TBT^{-1} acting on $L^2(M, d\mu)$ is in fact the Schrödinger operator $A = -\Delta + V$ with $V = \frac{1}{4}(|\nabla F|^2 - 2\Delta F)$. Consequently, A and B are unitary equivalent. In particular, A and B have the same spectral properties. Therefore we have

Theorem 6.4.7. *Assume that M satisfies A1) and A2). Let $F \in C^2(M)$ such that $|\nabla F|^2 - 2\Delta F$ is non-negative and set $V = \frac{1}{4}(|\nabla F|^2 - 2\Delta F)$. If for some $r \leq r_0/2$ there exists $0 < \alpha < 1$ such that for all $L > 0$, $\alpha_{r,L}(V) < \alpha$, then*

$$\sigma_{ess}(B) \subset \Big[\frac{(\alpha^{1/q-1/2} - 1)^2}{C_1^2 C_2^2 r^2}, \infty\Big[,$$

where B is the Ornstein-Uhlenbeck operator $Bu = -e^F div(e^{-F}\nabla u)$ acting on $L^2(M, e^{-F}d\mu)$.

Applying the same idea to Corollary 6.2.3 and Theorem 6.4.6, we obtain, without any effort, results on the discreteness of the spectrum of B.

Chapitre 7

L'estimation de Cwikel-Lieb-Rozenblum sur les variétés Riemanniennes

7.1 L'inégalité de Cwikel-Lieb-Rozenblum

L'inégalité de Cwikel-Lieb-Rozenblum donne une majoration du nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. On considère un potentiel $V \geq 0$ appartenant à $L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$. Le théorème KLMN permet alors de définir l'opérateur $-\Delta - V$. Notons $N_-(-\Delta - V)$ le nombre de valeurs propres négatives de $-\Delta - V$. Le théorème suivant a d'abord été établi par Rozenblum [II.32], puis redécouvert, de façons indépendantes, par Lieb [II.20] et Cwikel [II.8] (voir aussi Reed et Simon [II.31, p.101]).

Théorème 7.1.1 (Inégalité CLR). *Supposons $n \geq 3$. Soit $V \geq 0$ appartenant à $L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une constante $c_n \geq 0$ telle que*

$$N_-(-\Delta - V) \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{n/2}\, dx. \tag{7.1}$$

Les preuves de Rozenblum et de Cwikel utilisent des outils spécifiques au Laplacien euclidien, alors que celle de Lieb peut être transposée dans un cadre plus général. C'est l'objet du travail de Rozenblum et Solomyak [II.33] dont il est question dans la prochaine section.

7.2 Une généralisation due à Rozenblum et Solomyak

Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini. Par la suite, L^p désignera l'espace $L^p(\Omega, \mu)$. Un résultat classique assure que tout opérateur auto-adjoint positif B sur L^2 est le générateur d'un semi-groupe de contractions, noté $(e^{-tB})_{t\geq 0}$. Un semi-groupe est dit positif s'il laisse stable les fonctions positives. Le critère de Beurling-Deny permet de caractériser cette propriété à l'aide de la forme $\mathfrak{b}$ dont B est issu (voir Davies [II.9] ou Ouhabaz [II.27]).

Le semi-groupe $(e^{-tB})_{t\geq 0}$ est dit $L^2 - L^\infty$ borné si pour tout $t > 0$, e^{-tB} est borné de L^2 dans L^∞. On peut alors associer à chaque e^{-tB} un noyau intégral noté $p_B(t;x,y)$:

$$e^{-tB}f(x) = \int_\Omega p_B(t;x,y)f(y)\,d\mu(y), \quad f \in L^2.$$

La fonction $p_B(t;x,y)$ est appelé le noyau de la chaleur de B. Il est alors possible d'exprimer la norme de e^{-tB} agissant de L^2 dans L^∞ à l'aide du noyau $p_B(t;x,y)$:

$$M_B(t) := ||e^{-\frac{t}{2}B}||_{L^2\to L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_B(t;x,x)$$

Sous l'hypothèse

$$\int_a^\infty M_B(t)\,dt < \infty, \quad a > 0, \tag{7.2}$$

Rozenblum et Solomyak démontrent une inégalité du type CLR pour l'opérateur $B - V$ où V est une fonction positive vérifiant pour tout $u \in D(\mathfrak{b})$,

$$\int_\Omega V|u|^2\,d\mu \leq \varepsilon\mathfrak{b}(u,u) + \eta\int_\Omega |u|^2\,d\mu,$$

pour un certain $\varepsilon \in (0,1)$ et $\eta \geq 0$. L'opérateur $B - V$ est alors construit à l'aide du théorème KLMN.
On introduit l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions G continues sur $[0,\infty)$ qui ne croissent pas plus vite qu'un polynôme à l'infini et telles que la fonction $t \to \frac{G(t)}{t}$ est intégrable en zéro. Pour $G \in \mathcal{G}$, on définit la fonction $g = \mathcal{L}(G)$ suivante :

$$g(\lambda) = \mathcal{L}(G)(\lambda) := \int_0^\infty \frac{G(t)}{t}e^{-t/\lambda}\,dt, \quad \lambda > 0.$$

Rozenblum et Solomyak établissent la version paramétrique suivante de l'inégalité CLR :

Théorème 7.2.1 (Rozenblum, Solomyak 97). *Soient B un opérateur auto-adjoint positif tel que $(e^{-tB})_{t\geq 0}$ est positif. Supposons de plus que $M_B(t)$ vérifie (7.2) et que $M_B(t) = O(t^{-\alpha})$ en zéro pour un $\alpha > 0$. Soit $G \in \mathcal{G}$ une fonction positive convexe non-identiquement nulle et $g = \mathcal{L}(G)$. Alors*

$$N_-(B - V) \leq \frac{1}{g(1)}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\int_\Omega M_B(t)G(tV(x))\,d\mu(x), \tag{7.3}$$

à condition que le membre de droite soit fini.

Comme corollaire de ce théorème, on retrouve l'estimation classique de Cwikel-Lieb-Rozenblum (7.1). En effet, dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et $B = -\Delta$, la norme $L^2 - L^\infty$ du semi-groupe vaut $M_B(t) = p_B(t;x,x) = (4\pi t)^{-n/2}$. Choisissons alors $G(t) = (t-a)_+$ pour un certain $a > 0$. D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} N_-(-\Delta - V) &\leq c_n\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}(tV(x)-a)_+\,dx, \\ &\leq c_n\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \frac{1}{t^{1+n/2}}(tV(x)-a)_+\,dtdx. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $s = tV(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} N_-(A-V) &\leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{n/2} \Big(\int_a^\infty \frac{s-a}{s^{1+n/2}}\, ds \Big)\, dx, \\ &\leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{n/2}\, dx. \end{aligned}$$

Le Théorème 7.2.1 est donc satisfaisant en ce sens. Cependant l'hypothèse de positivité peut se révéler trop restrictive ; il faut alors introduire une classe plus générale d'opérateurs.

Définition 7.2.2. *Soit A un opérateur auto-adjoint positif. Le semi-groupe de contractions $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ est dominé par un semi-groupe positif $(e^{-tB})_{t\geq 0}$ si pour tout $f \in L^2$, $|e^{-tA} f| \leq e^{-tB}|f|$.*

De même l'hypothèse (7.2) peut aussi être supprimée ; l'estimation du nombre de valeurs propres négatives de $A - V$ s'exprime alors en terme du noyau de la chaleur $p_B(t; x, y)$ de B :

Théorème 7.2.3 (Rozenblum, Solomyak 97). *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs tels que $(e^{-tB})_{t\geq 0}$ est positif et $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ est dominé par $(e^{-tB})_{t\geq 0}$. Supposons de plus que $M_B(t) = O(t^{-\alpha})$ en zéro pour un $\alpha > 0$. Soit $G \in \mathcal{G}$ une fonction positive convexe non-identiquement nulle et $g = \mathcal{L}(G)$. Alors*

$$N_-(A-V) \leq \frac{1}{g(1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\delta \to 0^+} \int_\Omega p_B(t+\delta; x, x) G(tV(x))\, d\mu(x),$$

à condition que le membre de droite soit fini.

Sur une variété Riemannienne complète M, la condition $M_B(t) = O(t^{-\alpha})$ où $B = -\Delta$ est en général fausse. En revanche, c'est le cas si l'on se restreint à un ouvert régulier relativement compact. Il serait donc intéressant de pouvoir déduire une estimation du nombre de valeurs propres négatives d'un opérateur à partir de ses restrictions. C'est l'objet de la section suivante.

7.3 Un lemme d'approximation

Soit H un espace de Hilbert. On note $(.,.)$ son produit scalaire et $||.||$ la norme associée. Par la suite, les formes considérées ne sont pas nécessairement à domaine dense dans un espace de Hilbert H ; l'opérateur associé est donc un opérateur agissant sur l'adhérence dans H du domaine de la forme.
Commençons par le lemme de Glazman [II.37, p.16]. Ce résultat permet d'exprimer le nombre de valeurs propres négatives $N_-(A)$ d'un opérateur auto-adjoint A à l'aide de sa forme quadratique.

Lemme 7.3.1 (Glazman 1963). *Soit $\mathfrak{a}$ une forme fermée à domaine $D(\mathfrak{a})$ sur un espace de Hilbert H. Supposons que $\mathfrak{a}$ soit symétrique et minorée, c-à-d il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $x \in D(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}(x,x) \geq -\alpha ||x||^2$. Alors,*

$$N_-(A) = \max\{\dim F : F \subset D(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}(x,x) < 0, \text{ pour tout } x \in F, x \neq 0\}.$$

Ce résultat nous permet d'établir le lemme d'approximation suivant :

Lemme 7.3.2. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme fermée symétrique et minorée par $-\alpha$, $\alpha \geq 0$, et $D(\mathfrak{a})$ son domaine. Soit $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de formes symétriques vérifiant :*

(i) $D(\mathfrak{a}_n) \subset D(\mathfrak{a}_{n+1}) \subset ... \subset D(\mathfrak{a})$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(\mathfrak{a}_n)$ est dense dans $D(\mathfrak{a})$ pour la norme $||x||_{\mathfrak{a}} = ((\alpha+1)||x||^2 + \mathfrak{a}(x,x))^{1/2}$.

(ii) Pour tout $x \in D(\mathfrak{a}_n) \subset D(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}_n(x,x) = \mathfrak{a}(x,x)$.

Alors

$$N_-(A) = \limsup_{n\to\infty} N_-(A_n),$$

où A et A_n sont les opérateurs respectivement associés à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_n$.

Démonstration. L'inégalité $\limsup_{n\to\infty} N_-(A_n) \leq N_-(A)$ est une simple conséquence du lemme de Glazman. En effet, $D(\mathfrak{a}_n)$ étant inclus dans $D(\mathfrak{a})$, si F_n est un sous-espace vectoriel de $D(\mathfrak{a}_n)$ tel que pour tout $x \in F_n$, $\mathfrak{a}_n(x,x) < 0$, alors $F_n \subset D(\mathfrak{a})$ et vérifie la même propriété pour $\mathfrak{a}$. Par conséquent, d'après le Lemme 7.3.1, $N_-(A_n) \leq N_-(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'inégalité inverse demande un peu plus de travail. Soit F un sous-espace vectoriel de $D(\mathfrak{a})$ de dimension $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in F \setminus \{0\}$, $\mathfrak{a}(x,x) < 0$. Considérons l'ensemble $S_F = \{x \in F : ||x|| = 1\}$. L'espace F étant de dimension finie, S_F est compact. Par conséquent, il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in S_F$, $\mathfrak{a}(x,x) < -c$. On obtient donc que pour tout $x \in F$, $\mathfrak{a}(x,x) < -c||x||^2$. La forme $-\mathfrak{a}$ étant positive, on choisit une base $\{x_i\}_{1\leq i\leq N}$ de F telle que $\mathfrak{a}(x_i,x_j) = 0$, pour $i \neq j$, et $||x_i|| = 1$. D'après l'hypothèse (i), pour tout i, $1 \leq i \leq N$, il existe une suite $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(\mathfrak{a}_n)$ telle que $||x_i^{(k)} - x_i||_{\mathfrak{a}} \to 0$ lorsque $k \to \infty$ et $||x_i^{(k)}|| = 1$. Le nombre de suites étant fini, pour $\varepsilon > 0$ dont le choix sera précisé, il existe k suffisamment grand tel que :

(1) Les vecteurs $\{x_i^{(k)}\}_{1\leq i\leq N}$ sont linéairement indépendants et appartiennent à $D(\mathfrak{a}_{n_k})$, pour un certain n_k.

(2) $\mathfrak{a}_{n_k}(x_i^{(k)}, x_i^{(k)}) < -c/2$ et $|\mathfrak{a}_{n_k}(x_i^{(k)}, x_j^{(k)})| < \varepsilon$ pour $i \neq j$.

Soit $F_{n_k} \subset D(\mathfrak{a}_{n_k})$ le sous-espace vectoriel engendré par les $\{x_i^{(k)}\}_{1\leq i\leq N}$. Trivialement, (1) entraîne que $\dim F_{n_k} = N$. Soit $x \in F_{n_k}$, $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i^{(k)}$. En utilisant (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{n_k}(x,x) &= \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \mathfrak{a}_{n_k}(x_i^{(k)}, x_i^{(k)}) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{1\leq i<j\leq N} \alpha_i \overline{\alpha_j} \mathfrak{a}_{n_k}(x_i^{(k)}, x_j^{(k)}) \\ &\leq -\frac{c}{2} \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 + \varepsilon \sum_{1\leq i<j\leq N} |\alpha_i||\alpha_j|. \end{aligned} \tag{7.4}$$

On choisit alors ε tel que $\varepsilon \sum |\alpha_i||\alpha_j| \leq \frac{c}{4} \sum |\alpha_i|^2$. L'inégalité (7.4) entraîne donc que $\mathfrak{a}_{n_k}(x,x) \leq -\frac{c}{4} \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 < 0$ pour tout $x \neq 0$.

Au final, dès que l'on se donne un sous-espace vectoriel $F \subset D(\mathfrak{a})$ de dimension N tel que pour tout $x \in F \setminus \{0\}$, $\mathfrak{a}(x,x) < 0$, nous avons montré qu'il existe un sous-espace $F_{n_k} \subset D(\mathfrak{a}_{n_k})$ de même dimension vérifiant $\mathfrak{a}_{n_k}(x,x) < 0$ pour tout $x \in F_{n_k}$. Le lemme de Glazman permet alors de conclure. □

7.4 Estimation CLR dans un cadre général

Considèrons une variété Riemannienne M complète de dimension n. On peut alors écrire M comme la réunion d'une suite croissante d'ouverts réguliers relativement compacts $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sur chaque Ω_n, on définit l'opérateur $-\Delta_{\Omega_n}$ agissant sur $L^2(\Omega_n)$ comme l'opérateur auto-adjoint associé à la forme $\mathfrak{a}_n$ suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_n(u,v) &= \int_{\Omega_n} \nabla u.\overline{\nabla v}, \\ D(\mathfrak{a}_n) &= H_0^1(\Omega_n). \end{aligned}$$

L'ouvert Ω_n étant régulier et relativement compact, le noyau de la chaleur de $-\Delta_{\Omega_n}$, noté $p_n(t;x,y)$, existe et vérifie $p_n(t;x,x) = O(t^{-n/2})$ en $t=0$, uniformément en $x \in \Omega_n$ (voir Dodziuk [II.11]).
L'opérateur $-\Delta$ est l'opérateur agissant sur $L^2(M)$ associé à la forme $\mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(u,v) &= \int_{M} \nabla u.\overline{\nabla v}, \\ D(\mathfrak{a}) &= H^1(M). \end{aligned}$$

Nous ne disposons pas d'estimation sur le noyau de la chaleur, noté $p(t;x,y)$, de $-\Delta$. En revanche, pour tout $x,y \in \Omega_n$, $p_n(t;x,y) \leq p(t;x,y)$ (voir aussi [II.11]).
Soit V une fonction positive sur M telle que pour tout $u \in H^1(M)$,

$$\int_M V|u|^2\, d\mu \leq \varepsilon \int_M |\nabla u|^2\, d\mu + \eta \int_M |u|^2\, d\mu, \tag{7.5}$$

pour un certain $\varepsilon \in (0,1)$ et $\eta \geq 0$. A l'aide du théorème KLMN, on définit l'opérateur $-\Delta - V$ comme l'opérateur associé à la forme :

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(u,v) &= \int_{M} \nabla u.\overline{\nabla v} - \int_M V u\overline{v} \\ D(\mathfrak{b}) &= H^1(M). \end{aligned}$$

En prolongeant les éléments de $H_0^1(\Omega_n)$ par 0 en dehors de Ω_n, $H_0^1(\Omega_n)$ peut être vu comme un sous-espace de $H^1(M)$. L'hypothèse (7.5) est alors valable pour $u \in H_0^1(\Omega_n)$ en remplaçant M par Ω_n. Ceci nous permet de définir l'opérateur de Schrödinger $-\Delta_{\Omega_n} - V$ sur $L^2(\Omega_n)$ associé à la forme $\mathfrak{b}_n$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_n(u,v) &= \int_{\Omega_n} \nabla u.\overline{\nabla v} - \int_{\Omega_n} V u\overline{v}, \\ D(\mathfrak{b}_n) &= H_0^1(\Omega_n). \end{aligned}$$

A l'aide du Théorème 7.2.3 et en utilisant le fait que $p_n(t;x,x) = O(t^{-n/2})$, nous obtenons l'estimation suivante du nombre de valeurs propres négatives de $-\Delta_{\Omega_n} - V$:

$$N_-(-\Delta_{\Omega_n} - V) \leq \frac{1}{g(1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\delta\to 0^+} \int_{\Omega_n} p_n(t+\delta;x,x) G(tV(x))\, d\mu(x). \tag{7.6}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, $H_0^1(\Omega_n)$ est vu comme un sous-espace de $H^1(M)$ en prolongeant par 0 en dehors de Ω_n. Il est alors facile de voir que les formes $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}_n$ vérifient les hypothèses du Lemme 7.3.2. Ainsi, $N_-(-\Delta - V) = \limsup_{n\to\infty} N_-(-\Delta_{\Omega_n} - V)$. L'inégalité (7.6) et le fait que pour tout $x \in \Omega_n$, $p_n(t;x,x) \le p(t;x,x)$, entraînent donc le théorème suivant :

Théorème 7.4.1. *Soient M une variété Riemannienne complète et V une fonction positive sur M vérifiant (7.5) pour un $\varepsilon \in (0,1)$ et $\eta \ge 0$. Notons $p(t;x,y)$ le noyau de la chaleur de $-\Delta$. Soit $G \in \mathcal{G}$ une fonction positive convexe non-identiquement nulle et $g = \mathcal{L}(G)$. Alors,*

$$N_-(-\Delta - V) \le \frac{1}{g(1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\delta\to 0^+} \int_M p(t+\delta;x,x) G(tV(x))\, d\mu(x).$$

Bibliographie

[II.1] Arendt, W., Batty, C.J.K. : The spectral function and principal eigenvalues for Schrödinger operators. Potential Anal. **7**, 415-436 (1997).

[II.2] Aubin, T. : Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations. Springer, Berlin Heidelberg, 1982.

[II.3] Baider, A. : Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra. J. Differ. Geom. **14**, 41-57 (1979).

[II.4] Brooks, R. : A relation between growth and the spectrum of the Laplacian. Math. Z. **178**, 501-508 (1981).

[II.5] Brooks, R. : On the spectrum of non-compact Manifolds with finite volume. Math. Z. **184**, 425-432 (1984).

[II.6] Cheeger, J., Gromov, M., Taylor, M. : Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. J. Differ. Geom. **17**, 15-53 (1982).

[II.7] Cheng, S.-Y. : Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. Math. Z. **143**, 289-297 (1975).

[II.8] Cwikel, M. : Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators. Ann. Math. **2** 106, 93-100 (1977).

[II.9] Davies, E.B. : Heat Kernels and Spectral Theory. Cambridge Tracts in Math. **92**, (1989).

[II.10] Davies, E.B. : Spectral Theory and Differential Operators. Cambridge Studies in Ad. Math. **42**, (1995).

[II.11] Dodziuk, J. : Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds. Indiana Univ. Math. J. **32**, 703-716 (1983).

[II.12] Donnelly, H. : On the essential spectrum of a complete Riemannian manifold. Topology **20**, 1-14 (1981).

[II.13] Donnelly, H., Li, P. : Pure point spectrum and negative curvature for non-compact manifolds. Duke Math. J. **46**, 497-503 (1979).

[II.14] Edmunds, D.E., Evans, W.D. : Spectral Theory and Differential Operators. Oxford Mathematical Monographs, 1987.

[II.15] Gilbarg, D., Trudinger, N.S. : Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, Berlin Heidelberg, 1983.

[II.16] Hess, P., Kato, T. : On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function. Comm. Partial Differential Equations **5**, 999-1030 (1980).

[II.17] Jerison, D. : The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. Duke Math. J. **53**, 503-523 (1986).

[II.18] Kondrat'ev, V., Shubin, M. : Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds with bounded geometry. Oper. Theory Adv. Appl. **110**, 185-226 (1999).

[II.19] Levin, D, Solomyak, M. : The Rozenblum-Lieb-Cwikel inequality for Markov generators. J. Anal. Math. **71**, 173-193 (1997).

[II.20] Lieb, E.H. : Bounds on the eigenvalues of the Laplace and Schrödinger operators. Bull. Am. Math. Soc. **82**, 751-753 (1976).

[II.21] Maheux, P., Saloff-Coste, L. : Analyse sur les boules d'un opérateur sous-elliptique. Math. Ann. **303**, 713-740 (1995).

[II.22] Maz'ya, V.G., Verbitsky, I.E. : The Schrödinger operator on the energy space : Boundedness and compactness criteria. Acta Math. **188**, 263-302 (2002).

[II.23] Metafune, G., Pallara, D. : Discreteness of the spectrum for some differential operators with unbounded coefficients in $\mathbb{R}^N$. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Natur **11**, 9-19 (2000).

[II.24] Metafune, G., Pallara, D. : On the localization of the essential spectrum of Schrödinger operators. Proc. Amer. Math. Soc. **130**, 1779-1786 (2002).

[II.25] Nayatani, S., Urakawa, H. : Spectrum of the Schrödinger operator on a complete manifold. J. Funct. Anal. **112**, 459-479 (1993).

[II.26] Ouhabaz, E.M. : The spectral bound and principal eigenvalues of Schrödinger operators on Riemannian manifolds. Duke Math. J. **110**, 1-35 (2001).

[II.27] Ouhabaz, E.M. : Analysis of heat equations on domains. London Mathematical Society Monographs Series **31**. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2005.

[II.28] Ouhabaz, E.M., Poupaud, C. : CLR-type estimates for Schrödinger operators on Riemannian manifolds. En préparation.

[II.29] Poupaud, C. : On the essential spectrum of Schrödinger operators on Riemannian manifolds. Math. Z. **251**, 1-20 (2005).

[II.30] Reed, M., Simon, B. : Methods of Modern Mathematical Physics. II : Fourier Analysis, Self-adjointness. Academic Press, New York, 1975.

[II.31] Reed, M., Simon, B. : Methods of Modern Mathematical Physics. IV : Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1978.

[II.32] Rozenblum, G.V. : The distribution of the discrete spectrum for singular differential operators. Sov. Math., Dokl. **13**, 245-249 (1972) ; translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR **202**, 1012-1015 (1972).

[II.33] Rozenblum, G., Solomyak, M. : CLR-estimate for the generators of positivity preserving and positively dominated semi-groups. St. Petersbg. Math. J. **9**, No.6, 1195-1211 (1997) ; translation from Algebra Anal. **9**, No.6, 214-236 (1997).

[II.34] Saloff-Coste, L. : A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities. Internat. Math. Res. Notices, 27-38 (1992).

[II.35] Schechter, M. : Spectra of partial differential operators. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 1971.

[II.36] Shen, Z. : The spectrum of Schrödinger operators with positive potentials in Riemannian manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **131**, 3447-3456 (2003).

[II.37] Shubin, M.A. : Partial differential equations VII. Spectral theory of differential operators. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. **64**. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[II.38] Stein, E.M. : Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Mathematical Series **43**, 1993.

[II.39] Wang, F.-Y. : Functional inequalities and spectrum estimates : the infinite measure case. J. Funct. Anal. **194**, 288-310 (2002).