

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par Etienne Ahusborde

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

\*\*\*\*\*

Méthode d'ordre élevé pour l'opérateur  $-\text{grad}(\text{div}(\cdot))$  et applications.

\*\*\*\*\*

Soutenue le : 28 septembre 2007

Après avis de :

M. Mohamed Amara    Professeur, Université de Pau            **Rapporteur**  
M. Pierre Haldenwang    Professeur, Université de Provence            **Rapporteur**

Devant la commission d'examen formée de :

M.	Mohamed Amara	Professeur, Université de Pau	<b>Rapporteur</b>
M.	Pierre Haldenwang	Professeur, Université de Provence	<b>Rapporteur</b>
M.	Mejdi Azaïez	Professeur, Université Bordeaux 1	<b>Directeur</b>
Mme	Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia	Directrice de recherche CNRS	<b>Présidente</b>
M.	Jean Paul Caltagirone	Professeur, Université Bordeaux 1	<b>Examineur</b>
M.	Michel Deville	Professeur, EPFL	<b>Examineur</b>
M.	Ralf Gruber	Collaborateur Scientifique, EPFL	<b>Examineur</b>
M.	Ernest Mund	Professeur, Université Libre de Bruxelles	<b>Examineur</b>

# Sommaire

<b>Conventions et notations</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>13</b>
<b>2 Recherche d'un élément spectral stable</b>	<b>21</b>
2.1 Condition limite $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$	21
2.1.1 Formulations variationnelles du problème	23
2.1.2 Discrétisation spectrale	24
2.1.3 Résultats numériques	29
2.2 Condition limite $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$	30
2.2.1 Formulations variationnelles du problème	31
2.2.2 Discrétisation spectrale	31
2.2.3 Résultats numériques	32
2.3 Un algorithme itératif pour la décomposition de domaine	33
2.3.1 Méthode itérative basée sur les conditions de transmission à l'interface	35
2.3.2 Résultats numériques	36
2.3.3 Interprétation en terme de Steklov-Poincaré	39
<b>3 Applications : Décomposition de Helmholtz</b>	<b>43</b>
3.1 Technique de projection	45
3.1.1 Projection sur le noyau de l'opérateur $-\mathbf{grad}(\operatorname{div})$	45
3.1.2 Projection sur l'image de l'opérateur $-\mathbf{grad}(\operatorname{div})$	46
3.1.3 Résultats numériques	47
3.2 Projection vectorielle	48
3.2.1 Problème continu et formulations variationnelles	49

---

3.2.2	Discrétisation stable . . . . .	50
3.2.3	Résultats numériques . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Une nouvelle méthode <math>hp</math> pour les géométries non-cartésiennes</b>	<b>53</b>
4.1	Une nouvelle base pour $\mathbb{P}_{p-1}(\Lambda)$ . . . . .	53
4.2	Spectre de l'opérateur $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$ . . . . .	58
4.2.1	Présentation de la méthode . . . . .	58
4.2.2	Résultats numériques . . . . .	60
4.3	Elimination des contraintes . . . . .	61
4.3.1	Cas mono-domaine . . . . .	62
4.3.2	Extension aux éléments spectraux . . . . .	66
4.4	Applications . . . . .	66
4.4.1	Spectre de Stokes . . . . .	66
4.4.2	Problème de Stokes . . . . .	68
4.4.3	Equations de Navier-Stokes . . . . .	70
	<b>Conclusion générale</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

# Remerciements

Mes travaux de thèse ont été financés grâce à une allocation de recherche du Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie (MENRT) et ont été réalisés au sein du laboratoire Transferts Ecoulements Fluides Energétique (TREFLE) sur le site de l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie Physique de Bordeaux (ENSCP).

En premier lieu, je tiens à manifester ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse, le Professeur Mejdî Azaïez pour m'avoir donné la possibilité de réaliser cette thèse. Malgré toutes ses sollicitations et ses nombreuses responsabilités, il a toujours été disponible pour répondre à mes multiples questions.

Je remercie ensuite les deux directeurs du laboratoire qui se sont succédés, les Professeurs Eric Arquis et Jean Rodolphe Puiggali.

Je remercie également Messieurs Mohamed Amara, Professeur à l'Université de Pau et Pierre Haldenwang, Professeur à Université de Provence d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire. Leurs remarques et conseils m'ont permis d'améliorer ce document.

J'exprime ma gratitude à Madame Anne-Sophie Bonnet BenDhia, Directrice de recherche au CNRS pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi qu'à Monsieur Jean-Paul Caltagirone, Professeur à l'Université Bordeaux 1 pour avoir accepté de juger mon travail.

Cette thèse est le fruit d'une collaboration initiale entre les Professeurs Mejdî Azaïez, Michel Deville et Ralf Gruber de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et Ernest Mund de l'Université Libre de Bruxelles. Je les remercie tous les trois pour toutes les discussions que nous avons pu avoir ainsi que pour leur présence dans mon jury de thèse.

Mes remerciements viennent maintenant naturellement à tous les membres du laboratoire TREFLE. Tout d'abord je remercie les permanents : Stéphane G. pour sa disponibilité et sa gentillesse, Stéphane V., les compères Pierre et Cédric, Jean, David, Pascale, Sylvie, Bernard, Arnaud qui agrandit la colonie basque du laboratoire, Mohamed, Guillaume G., Marie-Paule qui a relu ma thèse et corrigé les nombreuses fautes d'orthographe...

De nombreux doctorants se sont succédés pendant ces trois années. Mes prédécesseurs : la gentille Delphine toujours disponible, Greg, Nirina, Christophe, Nicolas P., Aurélie L., Sylvain, Eric, Cyril et Stéphanie ma souriante collègue de bureau. Ceux qui sont arrivés avec moi : Hamza et Nicolas R. Ceux qui sont arrivés après moi : Guillaume B., Jérôme, D'havh, Mathieu, Houssen, Arthur, les miss " petits gateaux " Aurélie et Mathilde, Erwan et ses barbecues et Romain.

Durant ma thèse j'ai passé trois mois au sein du Laboratoire d'Ingénierie Numérique (LIN) à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Je remercie vivement le Professeur Michel Deville de m'avoir accueilli pendant cette période. Tous mes remerciements vont aussi vers Monsieur Ralf Gruber avec qui j'ai eu le plaisir de travailler pendant ces trois mois. Son enthousiasme et ses coups de colère en suisse allemand resteront dans ma mémoire. Merci aussi à toute la famille Gruber pour la raclette, la fondue et le papet vaudois. Je remercie aussi Vincent pour m'avoir fait visiter Montreux et découvrir le hockey. Merci enfin à toute l'équipe du LIN : Roland, Marc-Antoine, Heidi, Dzido et les autres.

Enfin je tiens à remercier toute ma famille ainsi que ma chère et tendre Florence qui m'a accompagné tout au long de cette thèse.

A tous je vous souhaite bonne continuation. Et encore merci.

# Conventions et notations

## Espaces de Hilbert et normes associées

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $3$ , de frontière  $\partial\Omega$  supposée Lipschitzienne ayant pour normale extérieure le vecteur  $\mathbf{n}$ . Dans toute la suite on utilisera les espaces de Hilbert suivants (voir [Girault 86])

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, de carré intégrable}\}, \\ L_0^2(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} = 0\}, \\ H^1(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in (L^2(\Omega))^n\}, \\ H_0^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \\ H(\text{div}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n, \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_0(\text{div}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \end{aligned}$$

munis respectivement des normes suivantes

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}; \Omega)} &= \left( \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

## Outils pour l'approximation spectrale

On se limite dans cette section au rappel de quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite du manuscrit. La littérature sur les méthodes spectrales et les éléments spectraux est de nos jours riche en références. On peut citer par exemple les livres suivants :

Deville et al [Deville 02], Bernardi et Maday [Bernardi 97], Canuto et al [Canuto 88], Peyret [Peyret 02] et Gottlieb et Orszag [Gottlieb 77]. Concernant l'introduction aux méthodes  $hp$  on cite par exemple l'ouvrage de Karniadakis et Sherwin [Karniadakis 99].

Notre approche de discrétisation repose sur l'approximation de formulation variationnelle et ceci nécessite le recours aux formules de quadrature d'ordre élevé :

Soient  $\Sigma_{GLL} = \{(\xi_i, \rho_i); 0 \leq i \leq p\}$  et  $\Sigma_{GL} = \{(\zeta_i, \omega_i); 1 \leq i \leq p\}$  les ensembles respectifs des noeuds et poids des quadratures de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) et Gauss-Legendre (GL) associés aux polynômes de degré  $p$ . Ces quantités sont telles que sur  $\Lambda := ]-1, +1[$  :

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathbb{P}_{2p-1}(\Lambda), \quad & \int_{-1}^{+1} \Phi(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^p \Phi(\xi_j) \rho_j, \\ \forall \Phi \in \mathbb{P}_{2p-1}(\Lambda), \quad & \int_{-1}^{+1} \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^p \Phi(\zeta_j) \omega_j, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}_p(\Lambda)$  désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ . Les noeuds  $\xi_i$  ( $0 \leq i \leq p$ ) sont solutions de  $(1-x^2)L'_p(x) = 0$  où  $L_p$  désigne le polynôme de Legendre de degré  $p$ , tandis que les noeuds  $\zeta_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) sont solutions de  $L_p(x) = 0$  [Deville 02]. On rappelle ici quelques propriétés utiles vérifiées par les polynômes de Legendre :

(i) les  $L_p$ ,  $p \geq 0$ , vérifient l'équation différentielle

$$\left( (1-\zeta^2) L'_p \right)' + p(p+1) L_p = 0,$$

(ii) tout polynôme  $L_p$ ,  $p \geq 1$ , satisfait l'équation

$$(2p+1) L_p = L'_{p+1} - L'_{p-1},$$

(iii) la norme du polynôme  $L_p$ ,  $p \geq 0$ , dans  $L^2(\Lambda)$  vaut

$$\int_{-1}^1 L_p^2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{p + \frac{1}{2}},$$

(iv) les polynômes  $L_p$  peuvent être calculés

$$\begin{aligned} L_0(\zeta) &= 1 \quad \text{et} \quad L_1(\zeta) = \zeta, \\ (p+1)L_{p+1}(\zeta) &= (2p+1)\zeta L_p(\zeta) - p L_{p-1}(\zeta), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En pratique la mise en oeuvre fait intervenir un choix de base et de fonctions tests du type polynôme de Lagrange. La base des polynômes d'interpolation  $h_i(x) \in \mathbb{P}_p(\Lambda)$  construite sur  $\Sigma_{GLL}$  est donnée par les relations :

$$h_i(x) = -\frac{1}{p(p+1)} \frac{1}{L_p(\xi_i)} \frac{(1-x^2)L'_p(x)}{(x-\xi_i)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 0 \leq i \leq p, \quad (1)$$

avec la propriété triviale

$$h_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq p,$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. On introduit aussi la base des polynômes d'interpolation  $\tilde{h}_j(x) \in \mathbb{P}_{p-1}(\Lambda)$  construite sur  $\Sigma_{GL}$

$$\tilde{h}_j(x) = \frac{1}{L'_p(\zeta_j)} \frac{L_p(x)}{(x-\zeta_j)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 1 \leq j \leq p. \quad (2)$$

Les fonctions (2) satisfont la propriété

$$\tilde{h}_j(\zeta_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq p.$$

Sachant que les applications que nous visons nécessitent une grande précision sur les solutions numériques issues des simulations, nous avons opté pour le choix des méthodes spectrales et des éléments spectraux. Ces méthodes sont connues pour leur précision dans l'approximation des équations aux dérivées partielles, en ce sens que la vitesse de convergence n'est limitée que par la régularité des solutions recherchées. De plus en plus, il leur est reconnu dans la communauté scientifique une grande capacité à simuler de manière directe et à un coût raisonnable des écoulements complexes en 3 dimensions. L'emploi des techniques de décomposition de domaines alliées aux méthodes spectrales a permis de traiter des domaines complexes ou encore à géométrie instationnaire. L'existence d'algorithmes performants de résolution (sur des machines séquentielles et/ou à architecture parallèle) des équations algébriques finales issues d'une discrétisation de type éléments spectraux a suscité un véritable engouement pour ces méthodes, tant dans le domaine de la recherche que des applications.





# Introduction : pourquoi l'opérateur $\mathbf{grad}(\mathbf{div})$ ?

Depuis leur introduction en mécanique des fluides numérique, les méthodes spectrales ont été utilisées avec succès dans de nombreuses applications. A travers les années, les communautés des mécaniciens et des mathématiciens ont apporté de grandes contributions dans le domaine de l'approximation d'opérateurs divers et variés. On peut trouver dans les ouvrages parus depuis quelques décennies (voir [Deville 02], [Canuto 88], [Bernardi 97], [Peyret 02], [Gottlieb 77]) des idées de schémas analysés et numériquement validés pour approcher des opérateurs tels que le Laplacien, Stokes, Darcy et Maxwell.

A notre connaissance de la littérature, l'opérateur  $\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  souffre d'une absence notoire d'étude dans le cadre des méthodes spectrales et des éléments spectraux, et ce malgré sa présence dans de multiples modèles mathématiques. Le but de cette thèse est d'apporter une contribution dans ce domaine avec une extension aux méthodes  $hp$  et aux techniques de décomposition de domaine.

L'opérateur  $\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  intervient dans de nombreux problèmes mathématiques modélisant des problèmes physiques. Il intervient notamment en mécanique des milieux continus, en électromagnétisme ou en magnétohydrodynamique.

En mécanique des milieux continus, le tenseur des contraintes de Cauchy possède plusieurs invariants. En particulier, le premier invariant défini comme la trace de ce tenseur est la divergence d'un champ de vecteur. Il s'agit de la divergence du champ de vitesse en mécanique des fluides visqueux newtoniens, tandis qu'en élasticité linéaire, il s'agit de la divergence d'un vecteur déplacement. Dans les deux cas, lorsque l'on écrit les lois de conservation, la divergence du tenseur des contraintes produit un terme de la forme  $\mathbf{grad}(\mathbf{div})$ .

En mécanique des fluides, l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ou principe fondamental de la dynamique, s'écrit sous la forme :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mathbf{div} \sigma'.$$

Ici et dans toute la suite  $\mathbf{v}$  représente le vecteur vitesse du fluide,  $\rho$  la masse volumique,  $p$  la pression,  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur et  $\sigma'$  le tenseur des contraintes visqueuses. De plus :

$$\mathbf{div} \sigma' = \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

ce qui donne l'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux newtonien :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

La viscosité  $\mu$  est appelée viscosité dynamique tandis que  $\zeta$  est la viscosité de volume [Chassaing 00].

Toujours en mécanique des fluides, l'opérateur **grad**(div) intervient aussi dans la modélisation de vagues sans force de Coriolis ni friction turbulente [Gill 82] et de l'écoulement d'un fluide dans un bassin tournant [Descloux 81]. En effet, les équations de Navier-Stokes modélisant l'écoulement d'un fluide incompressible dans un bassin tournant sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \varphi - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \right) + \nu \Delta \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \tag{4}$$

L'équation (3) traduit la contrainte d'incompressibilité.  $\nu$  désigne la viscosité cinématique,  $\boldsymbol{\Omega}$  la vitesse angulaire du bassin tournant et  $\varphi$  le potentiel de la gravité.  $\boldsymbol{\Omega}$  est dirigée selon l'axe  $z$  et  $|\boldsymbol{\Omega}| = \omega$ . Le dernier terme de l'équation (4) représente la force de Coriolis. La plupart du temps, la force centrifuge  $\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$  est incorporée dans la pression.

Les mouvements ayant une amplitude horizontale large par rapport à l'amplitude verticale, on peut utiliser l'approximation hydrostatique à savoir :

$$p = \rho g z_0, \tag{5}$$

où  $z_0 = z_0(x, y, t)$  est le profil instantané de la surface de l'océan.

On introduit le nombre de Rosby :

$$Ro = \frac{U}{\omega L},$$

où  $U$  est une vitesse représentative et  $L$  une distance au delà de laquelle la vitesse ne varie que sensiblement. Ce nombre compare les effets du terme d'inertie par rapport aux forces de Coriolis. Dans l'océan,  $Ro \ll 1$  et par conséquent, le terme advectif des équations de Navier-Stokes peut être négligé. L'équation (4) se réduit alors à :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \quad (6)$$

Si on néglige la viscosité et on tient compte de la pression hydrostatique (5), l'équation (6) se réduit à :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -g \nabla z_0 - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \quad (7)$$

Un argument classique en dynamique des fluides océaniques traduit que la vitesse verticale change en fonction du niveau selon la relation suivante :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial z_0}{\partial t},$$

où  $h$  est la hauteur d'eau à l'équilibre quand le fluide est au repos. La condition d'incompressibilité (3) se traduit alors par :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial z_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

où  $\mathbf{u}$  est désormais la vitesse 2-D horizontale  $\mathbf{u} = (v_x, v_y)$ . En introduisant la variable  $\xi = z_0/h$ , le problème se réduit au couple d'équations :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g h \nabla \xi - 2\omega R \mathbf{u}. \quad (9)$$

$R$  est l'opérateur linéaire  $R\mathbf{u} = (-v_y, v_x)$ . En négligeant la force de Coriolis et en combinant les deux équations (8)-(9), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = g h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

L'opérateur **grad**(div) intervient aussi en acoustique linéaire. On le retrouve notamment dans l'équation de Galbrun [Galbrun 31]. L'équation de Galbrun régit le déplacement lagrangien  $\boldsymbol{\xi}$  d'une particule fluide dans un écoulement perturbé par rapport à sa

position dans le même écoulement sans perturbation.  $\boldsymbol{\xi}$  s'exprime en fonction des coordonnées  $(x,t)$  (représentation Euler-Lagrange). On considère un problème de propagation d'ondes dans un écoulement uniforme de fluide parfait dans un conduit rigide de section constante, modélisé par un guide droit infini [Dhia 01]. L'écoulement porteur est modélisé par une masse volumique  $\rho_0$ , une pression statique  $p_0$ , une célérité du son  $c_0$  constantes et un champ de vitesse  $\mathbf{v}_0$  de norme  $v_0$  constante dirigé selon la direction axiale du guide. L'équation de Galbrun s'écrit alors [Dhia 01] :

$$\rho_0 \frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \rho_0 c_0^2 \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0},$$

où  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$  désigne la dérivée particulaire dans l'écoulement porteur.

On retrouve aussi l'opérateur **grad**(div) dans l'interaction fluide-structure lorsque l'on étudie les modes de vibrations d'un fluide dans une cavité [Chen 90, Bathe 95, Boffi 00c]. Pour un fluide non-visqueux subissant des petites vibrations, les équations régissant ce phénomène s'écrivent :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (11)$$

où  $c$  représente la vitesse du son. L'équation (11) implique que :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{p}{\rho c^2}, \quad (12)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur déplacement. En combinant (12) et (10), il vient :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

L'opérateur **grad**(div) est aussi présent en électromagnétisme. Dans le cas général, les quatre équations de Maxwell dans le vide s'écrivent [Landau 63, Bossavit 98] :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (16)$$

où  $\mathbf{E}$  représente le champ électrique,  $\rho$  la densité de charge électrique,  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide,  $\mathbf{B}$  le champ magnétique,  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide et  $\mathbf{j}$  le vecteur densité de courant. En prenant le rotationnel de l'équation (15), il vient :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t},$$

puis en combinant avec l'équation (16) :

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

L'opérateur **grad**(div) est aussi présent dans la théorie magnétohydrodynamique (MHD) qui combine les équations de Navier-Stokes et de Maxwell. L'opérateur de MHD idéale inclut deux spectres continus avec des contraintes complexes. Il décrit le comportement de stabilité des tokamaks [Appert 75, Troyon 83, Gruber 85], ainsi que les mécanismes de chauffage par les ondes d'Alfvén [Appert 82] dans les expériences de fusion nucléaire par confinement magnétique.

Enfin, un autre domaine dans lequel l'opérateur **grad**(div) joue un rôle important est celui des algorithmes du type Lagrangien augmenté [Fortin 83, Brezzi 91]. En effet, un moyen d'imposer la contrainte d'incompressibilité consiste à modifier les équations de Navier-Stokes par une pénalisation de la pression qui est remplacée par une constante multipliée par la divergence du champ de vitesse. Les équations de Navier-Stokes semi-discrétisées linéarisées s'écrivent :

$$\rho \left( \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^{n+1} \right) - \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{v}^{n+1} + \nabla^t \mathbf{v}^{n+1})) = \mathbf{f} + \nabla p^{n+1},$$

où  $\mathbf{f}$  est un terme source. La réalisation de la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement est assurée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange, en l'occurrence la pression, en transformant le problème en une recherche de point selle [Fortin 83, Brezzi 91] :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^{n+1} \right) - \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{v}^{n+1} + \nabla^t \mathbf{v}^{n+1})) - r \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}) &= \mathbf{f} + \nabla p^n, \\ p^{n+1} &= p^n - r \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Le paramètre  $r$  de la première équation est un terme de couplage des contraintes sur le champ de vitesse qui doit satisfaire à la fois l'équation de Navier-Stokes et l'équation

de continuité. Un moyen complémentaire d'imposer la contrainte d'incompressibilité est d'utiliser l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$  comme opérateur de projection afin d'extraire la partie solénoïdale d'un champ de vecteur donné [Caltagirone 99]. Cette technique consiste à considérer la formulation (17) comme étape de prédiction afin de calculer une vitesse  $\mathbf{v}^*$  :

$$\rho \left( \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^* \right) - \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{v}^* + \nabla^t \mathbf{v}^*)) - r \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}^*) = \mathbf{f} + \nabla p^n,$$

$$p^* = p^n - r \nabla \cdot \mathbf{v}^*.$$

Bien que petite, la divergence du champ de vitesse  $\mathbf{v}^*$  issue de cette étape n'est généralement pas nulle et pour la corriger, on résout une deuxième étape baptisée *projection vectorielle*. Elle consiste à calculer un champ de vecteurs  $\mathbf{v}'$  solution de :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}') = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}^*), \quad (18)$$

pour définir le champ à divergence nulle  $\mathbf{v}^{n+1}$  :

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'.$$

Tout comme pour les méthodes de projection scalaire classiques (voir [Guermond 06]), l'étape de projection vectorielle (18) adapte la nature de ses conditions limites à celle du problème physique prises en compte dans l'équation de mouvement. Celles-ci sont du type *périodique* quand le problème de départ l'est, de *glissement* ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ) quand la vitesse attendue est imposée au bord, ou *libre* ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ) si le problème physique admet une condition aux limites du type sortie libre. On note, qu'en plus d'être solénoïdaux, les champs de vitesse  $\mathbf{v}^{n+1}$  satisfont les mêmes conditions aux limites physiques que  $\mathbf{v}^*$ .

Dans la suite de ce document, nous présentons sous la forme de quatre chapitres, une synthèse des travaux réalisés, suivie par les textes d'articles décrivant avec détail nos résultats. Dans le premier chapitre, nous présentons une revue de l'état de l'art sur l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$  suivie, dans le second chapitre, par la description d'un élément spectral stable pour plusieurs types de conditions limites. Des applications pour la décomposition de Helmholtz sont proposées dans le troisième chapitre. Enfin, dans le dernier chapitre, nous proposons une nouvelle méthode *hp* valable pour des géométries complexes.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

L'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$  a déjà fait l'objet de nombreuses investigations numériques. Plusieurs travaux ont déjà été effectués notamment en éléments finis afin de trouver des éléments stables pour résoudre le problème aux valeurs propres : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u}$  solutions de :

$$-\mathbf{grad}(\text{div } \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

où  $\mathbb{R}^+$  désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls. La condition limite (1.2) peut être remplacée par une condition limite dite libre (c'est à dire  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  sur  $\partial\Omega$ ) ou bien périodique.

En plus de la formulation primale exprimée par (1.1)-(1.2), ce problème aux valeurs propres peut être exprimé sous une formulation mixte qui s'écrit : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\varphi$  tels que :

$$\mathbf{u} - \mathbf{grad } \varphi = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\text{div } \mathbf{u} = -\lambda^2 \varphi, \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où  $\mathbb{R}_*^+$  désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Chacune de ces deux formulations est considérée et étudiée dans la littérature sous sa forme variationnelle. Ce qui consiste pour la primale à : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  tels que :

$$(\text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v}) = \lambda^2 (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega).$$



$(.,.)$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  ou bien dans  $(L^2(\Omega))^2$ . La formulation variationnelle mixte s'écrit : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  et  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$  tels que :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega), \quad (1.3)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = -\lambda^2(\varphi, q), \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (1.4)$$

où  $b(\mathbf{v}, q) = (\text{div } \mathbf{v}, q)$ .

C'est cette dernière formulation qui a été la plus abordée pour traiter le problème (1.1)-(1.2).

Dans [Boffi 97] et [Boffi 00a], Boffi et al analysent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un problème aux valeurs propres converge. Leur analyse se base sur une théorie adaptée aux problèmes écrits sous formulation mixte que nous rappelons ici. Soient  $Q$  et  $M$  deux espaces de Hilbert. On désigne par  $a(.,.) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b(.,.) : Q \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , deux formes bilinéaires continues, c'est à dire qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B > 0$  telles que :

$$|a(u, v)| \leq A \|u\|_Q \|v\|_Q,$$

$$|b(u, \Phi)| \leq B \|u\|_Q \|\Phi\|_M,$$

pour  $u, v \in Q$  et  $\Phi \in M$ . Le problème sous formulation mixte consiste à : *Trouver*  $(u, \Phi) \in Q \times M$  solutions de :

$$a(u, v) + b(v, \Phi) = 0, \quad \forall v \in Q, \quad (1.5)$$

$$b(u, \Psi) = (f, \Psi), \quad \forall \Psi \in M, \quad (1.6)$$

où  $(.,.)$  est le produit scalaire défini sur  $M$ . Soit  $V$  un sous espace fermé de  $Q$  tel que

$$V = \{v \in Q \mid \forall \Psi \in M, b(v, \Psi) = 0\}.$$

i) La forme bilinéaire  $a(.,.)$  est  $V$ -elliptique c'est à dire :

$$\exists \alpha > 0 \mid a(v, v) \geq \alpha \|v\|_Q^2, \quad \forall v \in V. \quad (1.7)$$

ii) La forme bilinéaire  $b(.,.)$  vérifie la condition inf-sup suivante :

$$\exists \beta > 0 \mid \inf_{\Phi \in M} \sup_{v \in Q} \frac{b(v, \Phi)}{\|v\|_Q \|\Phi\|_M} \geq \beta. \quad (1.8)$$

Sous les hypothèses (1.7)-(1.8) et pour  $a(.,.)$  symétrique et définie positive, il est bien connu que le problème (1.5)-(1.6) admet une solution unique.

Or les travaux de Boffi et al ont montré que même en respectant cette théorie, des valeurs propres fausses peuvent apparaître et polluer le spectre de l'opérateur. Pour prouver leur conclusion, ces auteurs [Boffi 00a] se basent sur le problème aux valeurs propres de Laplace suivant :

$$-\Delta\varphi = \lambda^2\varphi,$$

muni d'une condition limite de Dirichlet. La formulation mixte de ce problème s'écrit :  
*Trouver*  $(\mathbf{u}, \varphi, \lambda^2) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^+$  tels que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \varphi) &= 0, & \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega), \\ b(\mathbf{u}, q) &= -\lambda^2(\varphi, q), & \forall q \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

où  $b(\mathbf{v}, q) = (\text{div } \mathbf{v}, q)$ . Ils exhibent plusieurs éléments finis standards qui, bien que vérifiant les versions discrètes des hypothèses (1.7)-(1.8), donnent tous de mauvais résultats. On observe en effet, dans le spectre discret, l'apparition de valeurs propres qui convergent vers des valeurs propres qui ne sont pas des valeurs propres continues. Ces modes représentent une mauvaise approximation de la valeur propre nulle et sont non-physiques. De plus, ces modes ne satisfont pas les contraintes internes liées à l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$ . En effet, tous les vecteurs associés aux valeurs propres non nulles doivent être à rotationnel nul, ce qui n'est pas le cas. Ce phénomène est appelé la pollution spectrale et ces modes sont qualifiés de "modes parasites".

Pour contourner ce problème, la plupart des auteurs ne s'intéressent qu'à la partie non nulle du spectre et proposent, dans le but de contrôler la pollution, d'ajouter une contrainte qui force les vecteurs propres à être irrotationnels. Pour cela, ils considèrent le problème suivant : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\mathbf{u}$  solutions de :

$$-\mathbf{grad}(\text{div } \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.11)$$

Ce problème en lui-même est intéressant car il intervient notamment dans le cadre de l'interaction fluide-structure, pour l'étude des fréquences de résonance d'un fluide dans une cavité.

L'une des principales difficultés dans la résolution du problème (1.9)-(1.11) est de satisfaire la contrainte  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ . Dans la littérature, deux méthodes sont principalement utilisées afin de satisfaire numériquement cette contrainte.

Tout d'abord, en remarquant que la contrainte  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  découle automatiquement de l'équation  $-\mathbf{grad}(\text{div } \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}$  avec  $\lambda^2 \neq 0$ , on peut abandonner cette contrainte et ajouter une fréquence nulle qui correspond au noyau de l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$ . Dans ce cas, on se ramène au problème (1.1)-(1.2). L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que l'on calcule ainsi un nombre important de valeurs propres nulles qui ne sont pas toujours intéressantes. Un élément fini très utilisé pour traiter ce problème est l'élément fini de Raviart-Thomas [Raviart 77] dont on rappelle l'expression. Soit  $K$  un  $n$ -simplexe (triangle ou tétraèdre), l'élément de Raviart-Thomas de degré  $k$  s'écrit :

$$RT_k(K) = (P_k(K))^n + \mathbf{x} P_k(K),$$

où  $n$  désigne la dimension de l'espace,  $P_k(K)$  l'espace des polynômes à  $n$  variables de degré inférieur ou égal à  $k$  sur  $K$  et  $\mathbf{x}$  le vecteur  $\mathbf{x} = (x, y)$  en deux dimensions et  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  en trois dimensions. On définit (pour  $n = 2$ ) :

$$P_{k_1, k_2}(K) = \left\{ p(x, y) \mid p(x, y) = \sum_{\substack{i \leq k_1 \\ j \leq k_2}} a_{ij} x^i y^j \right\},$$

l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k_1$  en  $x$  et de degré inférieur ou égal à  $k_2$  en  $y$ . On peut définir de la même manière  $P_{k_1, k_2, k_3}(K)$  pour  $n = 3$ . On définit alors :

$$Q_k(K) = \begin{cases} P_{k, k}(K), & \text{pour } n = 2, \\ P_{k, k, k}(K), & \text{pour } n = 3. \end{cases}$$

Si  $K$  est un élément rectangulaire, l'élément de Raviart-Thomas s'écrit alors :

$$RT_k(K) = (Q_k(K))^n + \mathbf{x} Q_k(K),$$

qui est équivalent à :

$$RT_k(K) = \begin{cases} P_{k+1, k} \times P_{k, k+1}, & \text{pour } n = 2, \\ P_{k+1, k, k} \times P_{k, k+1, k} \times P_{k, k, k+1}, & \text{pour } n = 3. \end{cases}$$

Nédélec [Nédélec 82] a généralisé l'élément fini de Raviart-Thomas dans les cas tridimensionnel.

Pour l'approximation du problème (1.1)-(1.2), on peut utiliser l'élément fini de Raviart-Thomas de plus bas degré qui est dans le cas bidimensionnel un espace de dimension 3 contenant des polynômes de la forme :

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= a + bx, \\ p_2(x, y) &= c + by. \end{aligned}$$

On note deux autres contributions s'inscrivant dans cette démarche. D'abord celle de Bermúdez et al [Bermúdez 95] qui, dans le cadre de l'interaction fluide-structure, proposent une approche non conforme utilisant des éléments finis linéaires par morceaux pour le solide et des éléments de Raviart-Thomas de plus bas degré pour le fluide. Ensuite, après avoir constaté que des éléments finis bilinéaires donnent une mauvaise approximation du spectre régulier sur un carré, Chen et Taylor [Chen 90] proposent une méthode d'intégration réduite utilisant des éléments finis bilinéaires auxquels ils enlèvent le terme  $xy$ . Ils utilisent comme fonctions de bases des polynômes de la forme :

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= a + bx + cy, \\ p_2(x, y) &= d + ex + by. \end{aligned}$$

Cette méthode est reprise et analysée dans [Boffi 99].

En résumé, cette première approche pour satisfaire la contrainte  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  consiste à remplacer les éléments finis nodaux standards par des éléments finis appropriés, sans modifier la formulation du problème initial.

La seconde méthode permettant de traiter la contrainte  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  consiste à régulariser le problème en considérant une formulation de pénalisation. Soit  $\alpha$  un nombre réel positif, la formulation pénalisée du problème (1.1)-(1.2) s'écrit : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$  *et*  $\mathbf{u}$  *solutions de :*

$$-\mathbf{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \alpha \mathbf{rot}(\text{rot } \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.12)$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.14)$$

Ce problème est alors associé à un opérateur elliptique. En acoustique, dans le cadre de l'équation de Galbrun [Galbrun 31], Bonnet-Ben Dhia et al [Dhia 01] et Legendre

[Legendre 03] utilisent eux aussi une stratégie de pénalisation afin de régulariser leur équation où intervient l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$ . L'avantage de leur démarche est de pouvoir utiliser des éléments finis nodaux.

Dans le cadre de l'interaction fluide-structure, Hamdi et *al* [Hamdi 78] ont proposé cette solution de pénalisation afin d'éviter la pollution spectrale. Comme les modes parasites sont des modes à rotationnel non nul, les auteurs imposent une contrainte d'irrotationnalité du déplacement en modifiant la formulation variationnelle du problème par pénalisation. Même si elle ne les élimine pas, cette méthode permet de déplacer les modes parasites vers des fréquences plus hautes.

En dehors des cas où les domaines sont convexes, les éléments finis nodaux semblent être inefficaces pour traiter le problème (1.12)-(1.14). Pour étendre la résolution à des géométries non convexes [Bathe 95], [Boffi 00c] et [Boffi 00b] proposent une stratégie d'intégration réduite faisant intervenir trois champs comme variables : le déplacement, la pression et un "moment de vorticité" qui permet d'imposer la contrainte faiblement. Dans [Boffi 00d], les auteurs présentent une nouvelle formulation variationnelle pour le problème (1.12)-(1.14). Ils rappellent qu'une approche possible pour résoudre ce problème sur une géométrie non-convexe consiste à diviser la solution en une partie régulière et une partie singulière, la partie régulière pouvant être traitée par des éléments finis linéaires par morceaux tandis que le traitement de la partie singulière dépend de la forme du domaine que l'on considère.

Compte tenu de l'orthogonalité entre les opérateurs  $\mathbf{rot}$  et  $\mathbf{grad}$ , le problème (1.9)-(1.11) peut être relié au problème de vibration intervenant en électromagnétisme : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\mathbf{u}$  tels que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.15)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{t}$  désigne le vecteur tangent à la frontière  $\partial\Omega$ . Là encore, la difficulté principale est le respect de la contrainte  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  et deux approches sont à nouveau possibles.

Comme pour l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$ , en observant que la contrainte  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  découle directement de l'équation  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}$ , avec  $\lambda^2 \neq 0$ , on peut abandonner la contrainte solénoïdale et rajouter une valeur propre nulle au problème (1.15)-(1.17). Dans [Nédélec 80],

l'auteur propose deux familles d'éléments finis conformes pour les espaces  $H(\text{div}; \Omega)$  et  $H(\text{rot}; \Omega)$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans le cas 2D, il s'agit en fait d'une généralisation de l'élément de Raviart-Thomas. Il apparaît en effet que dans ce cas, les éléments conformes de  $H(\text{rot}; \Omega)$  sont facilement reliés aux éléments conformes de  $H(\text{div}; \Omega)$  par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ . En 3D, ces éléments baptisés les éléments finis d'arêtes de Nédélec d'ordre  $k$ . Ils s'écrivent :

$$N_k(K) = (P_k(K))^3 + \mathbf{x} \times P_k(K), \quad (1.18)$$

où  $K$  est un tétraèdre et  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .

Dans [Boffi 98], les auteurs utilisent cette stratégie sur un carré et montrent que même si la discrétisation par un élément fini standard satisfait les hypothèses (1.7)-(1.8), les valeurs propres discrètes ne convergent pas vers les valeurs propres continues. Ils montrent alors que les éléments finis d'arêtes donnent des résultats satisfaisants. Dans [Boffi 06], les auteurs présentent une méthode  $hp$  pour le problème (1.15)-(1.17) auquel ils ont rajouté une valeur propre nulle. Cette méthode utilise les éléments finis d'arêtes d'ordre élevé sur des rectangles. Dans le cas où  $K$  est un rectangle, l'élément fini d'arête de Nédélec d'ordre  $k$  s'écrit :

$$N_k(K) = P_{k,k+1} \times P_{k+1,k}.$$

Ils présentent d'abord une méthode  $p$  puis ensuite une méthode  $hp$ . Ils identifient notamment les modes parasites lorsqu'on utilise un élément non stable.

La seconde approche permettant de respecter la contrainte solénoïdale consiste à considérer la formulation pénalisée : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$  *et*  $\mathbf{u}$  *solutions de :*

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) - \alpha \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.19)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.21)$$

Dans [Boffi 01], les auteurs considèrent le problème sur un domaine convexe puis non-convexe. Ils rappellent que sur un domaine convexe, on peut utiliser l'approche précédente dont l'inconvénient est d'introduire un grand nombre de valeurs propres nulles ou bien l'approche pénalisée (1.19)-(1.21). Là encore, des éléments finis nodaux peuvent être appliqués. Par contre, si le domaine est non convexe, l'emploi de la formulation pénalisée nécessite une adaptation de la méthode d'intégration réduite présentée dans [Bathe 95] au

problème (1.12)-(1.14). Toujours pour un domaine non convexe, Assous et *al* [Assous 99] décomposent la solution du problème en une somme orthogonale d'une partie régulière et d'une partie singulière dont ils donnent une caractérisation.

C'est à partir de cette connaissance de l'état de l'art que nous avons abordé le problème du calcul du spectre de l'opérateur  $\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  par méthodes spectrales. Dans ce domaine d'approximation, nous avons noté une absence notoire de résultats et il semble même que la question n'ait jamais été abordée par les spectralistes.

## Chapitre 2

# Recherche d'un élément spectral stable

On s'intéresse à l'approximation spectrale du problème aux valeurs propres :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega,$$

muni de deux conditions limites différentes. La première est :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et la seconde :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine fermé connexe doté d'une frontière lipschitzienne. Ici  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure le long de la frontière  $\partial\Omega$ . Dans la suite,  $\Omega$  désigne le domaine de référence  $] -1, +1[^2$ . Dans chacun des cas, on cherche un élément spectral stable.

### 2.1 Condition limite $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$

Nous étudions le problème suivant :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Le spectre de ce problème possède une partie singulière et une partie régulière. La partie singulière est composée de valeurs propres nulles et de vecteurs propres associés à divergence nulle tandis que la partie régulière est composée de valeurs propres non nulles et de



vecteurs propres associés à rotationnel nul. Ainsi la recherche de la partie régulière peut être réécrite sous la forme :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.5)$$

La condition (2.4) nous conduit à chercher  $\mathbf{u}$  sous la forme :

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi.$$

Ainsi la résolution du problème (2.3)-(2.5) est équivalente à celle du problème aux valeurs propres de Laplace muni d'une condition limite de Neumann :

$$-\Delta \varphi = \lambda^2 \varphi, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.7)$$

On peut montrer que sur le domaine  $\Omega = ]-1, 1[^2$ , les valeurs propres non nulles sont :

$$\lambda_{k,\ell}^2 = \frac{\pi^2}{4}(k^2 + \ell^2), \quad k, \ell = 0, 1, \dots,$$

tandis que les vecteurs propres sont des produits de fonctions trigonométriques dépendant de la parité de  $k$  et  $\ell$  :

– pour  $k$  et  $\ell$  impairs

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right),$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right),$$

– pour  $k$  impair et  $\ell$  pair

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right),$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = -\ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right),$$

– pour  $k$  pair et  $\ell$  impair

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = -k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right),$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right),$$

– pour  $k$  et  $\ell$  pairs

$$\begin{aligned} u_x^{k,\ell}(x, y) &= k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \\ u_y^{k,\ell}(x, y) &= \ell \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right). \end{aligned}$$

On remarque que l'ensemble des indices  $(k, 0)$  et  $(0, k)$  renvoie à la même valeur propre  $\lambda_k^2 = k^2\pi^2/4$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) associée à deux vecteurs propres linéairement indépendants pouvant être notés  $(\varphi'_k(x), 0)^T$  et  $(0, \varphi'_k(y))^T$ ,  $\varphi_k$  désignant la solution du problème aux valeurs propres 1-D :

$$-\varphi_k''(r) = \lambda_k^2 \varphi_k(r), \quad -1 < r < +1, \quad (2.8)$$

$$\varphi'_k(\pm 1) = 0. \quad (2.9)$$

On va utiliser cette remarque plus tard afin de comprendre l'effet de la pollution spectrale.

### 2.1.1 Formulations variationnelles du problème

Le problème (2.1)-(2.2) peut être écrit sous deux formulations variationnelles. La première formulation correspond à une méthode de projection de Galerkin et s'écrit : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  tels que :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega), \quad (2.10)$$

où  $\mathbb{R}^+$  désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls. On peut noter que pour  $\lambda^2 = 0$ , on obtient  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  presque partout ce qui montre que les vecteurs  $\mathbf{u}$  satisfaisant cette propriété appartiennent au noyau de  $-\mathbf{grad}(\text{div})$ . On note  $K(\mathcal{A})$  ce noyau tandis que l'image de l'opérateur est notée  $R(\mathcal{A})$ . On peut montrer que le noyau  $K(\mathcal{A})$  est orthogonal à  $R(\mathcal{A})$  et que  $H(\text{div}; \Omega)$  peut être décomposé de manière unique sous la forme :

$$H(\text{div}; \Omega) = K(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A}).$$

La seconde formulation correspond à un problème de point selle et s'écrit : *Trouver*  $(\lambda^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}_*^+ \times H_0(\text{div}; \Omega)$  et  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$  tels que :

$$\mathbf{u} - \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.11)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = -\lambda^2 \varphi, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.13)$$

$\mathbb{R}_*^+$  désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

On peut noter que la relation  $\mathbf{u} = \mathbf{grad} \varphi$  n'est vérifiée qu'à l'intérieur du domaine et qu'au bord c'est la condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  qui prime. Ainsi, on s'attend à ce que numériquement, le rotationnel de  $\mathbf{u}$  ne soit nul qu'à l'intérieur avec une convergence spectrale vers 0 au bord. Parmi les formulations variationnelles faibles disponibles [Azaïez 94, Achdou 03], on choisit pour être consistant avec (2.10) celle où  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  et  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$ . La formulation duale devient alors : *Trouver*  $(\lambda^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}_*^+ \times H_0(\text{div}; \Omega)$  et  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$  tels que :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega), \quad (2.14)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = -\lambda^2(\varphi, q), \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (2.15)$$

où la forme bilinéaire  $b(\mathbf{v}, q)$  définie sur  $H_0(\text{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est donnée par :

$$b(\mathbf{v}, q) = + \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{v}) q \, d\mathbf{x}. \quad (2.16)$$

Il y a équivalence naturelle entre les formulations fortes (2.11)-(2.13) et faibles (2.14)-(2.15) et on peut vérifier facilement que la forme bilinéaire  $b(., .)$  satisfait une condition inf-sup avec une constante positive  $\beta$  [Brezzi 91, Roberts 91] telle que :

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}; \Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

## 2.1.2 Discrétisation spectrale

### - Un choix naturel mais instable

Un choix naturel pour l'approximation de  $\mathbf{u}$  est celui des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  dans les deux directions spatiales. On définit donc l'espace discret d'approximation :

$$\mathbf{X}_p(\Omega) = \mathbb{P}_p(\Omega)^2 \cap H_0(\text{div}; \Omega) = (\mathbb{P}_p^0(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_p(\Lambda)) \times (\mathbb{P}_p(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_p^0(\Lambda)) \quad (2.17)$$

où le symbole  $\otimes$  désigne le produit tensoriel usuel et  $\mathbb{P}_p^0(\Lambda)$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  satisfaisant des conditions limites de Dirichlet homogènes sur  $\Lambda := ]-1, +1[$ . Le problème primal discret s'écrit : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u}_p = (u_{xp}, u_{yp})^T \in \mathbf{X}_p(\Omega)$  solutions de :

$$\mathcal{A}_p(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) := (\text{div} \mathbf{u}_p, \text{div} \mathbf{v}_p)_p = \lambda^2 (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_p)_p, \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega), \quad (2.18)$$

où  $(\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_p)_p := (u_{xp}, v_{xp})_p + (u_{yp}, v_{yp})_p$  et  $(\cdot, \cdot)_p$  désigne le produit scalaire discret :

$$(\psi, \varphi)_p := \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \psi(\xi_i, \xi_j) \varphi(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j.$$

En utilisant les fonctions de base (1) sur une grille GLL en deux dimensions, on obtient les approximations pour les composantes  $u_{xp}(x, y)$  et  $u_{yp}(x, y)$  :

$$\begin{aligned} u_{xp}(x, y) &= \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{\ell=0}^p u_{k\ell}^x h_k(x) h_\ell(y), \\ u_{yp}(x, y) &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=1}^{p-1} u_{k\ell}^y h_k(x) h_\ell(y), \end{aligned}$$

où  $u_{k\ell}^x$  et  $u_{k\ell}^y$  désignent respectivement  $u_{xp}(\xi_k, \xi_\ell)$  et  $u_{yp}(\xi_k, \xi_\ell)$ . Les conditions aux limites sont incluses dans les développements. Le problème aux valeurs propres algébrique issu de (2.18) devient :

$$\mathcal{K}_P \mathbf{U} = \lambda^2 \mathcal{M}_P \mathbf{U}.$$

On peut trouver les détails de construction du système algébrique dans [Ahusborde 07b]. Ce système algébrique donne  $2(p^2 - 1)$  valeurs propres et vecteurs propres correspondant aux degrés de liberté de  $\mathbf{X}_p(\Omega)$ . Notre objectif est de déterminer la dimension du noyau discret  $K(\mathcal{A}_p)$  de l'opérateur **-grad**(div). Pour cela nous allons travailler sur la formulation duale qui donne uniquement la partie régulière du spectre pour connaître la dimension de l'image discrète  $R(\mathcal{A}_p)$  de l'opérateur. On considère donc le problème : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathbf{u}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega)$  et  $\varphi_p \in \mathbb{P}_p(\Omega)$  solutions de :

$$(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)_p + (\varphi_p, \nabla \cdot \mathbf{v}_p)_p = 0, \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega), \quad (2.19)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_p, q_p)_p = -\lambda^2 (\varphi_p, q_p)_p, \quad \forall q_p \in \mathbb{P}_p(\Omega). \quad (2.20)$$

En résolvant (2.19)-(2.20), on observe l'apparition de 4 valeurs propres nulles alors qu'il ne devrait y en avoir qu'une correspondant au mode constant du problème aux valeurs propres de Laplace-Neumann (2.6)-(2.7). Ces 4 valeurs propres sont fausses [Azaïez 98, Azaïez 06]. Leurs vecteurs propres associés sont tels que  $\mathbf{u}_p = \mathbf{grad} \varphi_p$ , avec

$$\varphi_p \in \{1, L_p(x), L_p(y), L_p(x)L_p(y)\}.$$

La présence de ces modes propres parasites réduit la dimension de  $R(\mathcal{A}_p)$  de  $(p+1)^2$  à  $(p+1)^2 - 4$ . Sachant que  $\dim(K(\mathcal{A}_p)) + \dim(R(\mathcal{A}_p)) = 2(p^2 - 1)$ , il en résulte que

$\dim(K(\mathcal{A}_p)) = (p - 1)^2$ .

Nous avons remarqué que l'ensemble des indices  $(k, 0)$  et  $(0, k)$  donne des valeurs propres de multiplicité 2. Il se trouve que si on utilise l'élément spectral (2.17) pour la discrétisation du problème, la multiplicité de telles valeurs propres passe de 2 à 4. Cela s'explique facilement par l'argument suivant développé pour la composante  $(k, 0)$ . Soient  $\lambda_k^2$  et  $\mathbf{u}_{kp} = (\varphi'_k(x), 0)^T$  une valeur propre et son vecteur propre associé,  $\varphi_k$  étant solution du problème aux valeurs propres discret (2.8)-(2.9). On peut vérifier que le vecteur  $\mathbf{u}_{kp}^* = (\varphi'_k(x) L_p(y), 0)^T$ , bien qu'il ne soit pas un vecteur propre analytique de  $-\mathbf{grad}(\text{div})$  est un vecteur propre numérique de (2.18) associé à  $\lambda_k^2$ . En effet, en introduisant  $\mathbf{u}_{kp}^*$  dans la formulation variationnelle primale, on obtient :  $\forall \mathbf{v}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega)$

$$\begin{aligned} (\text{div } \mathbf{u}_{kp}^*, \text{div } \mathbf{v}_p)_p &= (\varphi_k''(x) L_p(y), \text{div } \mathbf{v}_p)_p, \\ &= -\lambda_k^2 \left( \varphi_k(x) L_p(y), \frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yp}}{\partial y} \right)_p, \\ &= \lambda_k^2 \left( (\varphi'_k(x) L_p(y), v_{xp})_p + (\varphi_k(x) L'_p(y), v_{yp})_p \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_k^2 (\varphi'_k(x) L_p(y), v_{xp})_p, \quad (2.22) \\ &= \lambda_k^2 (\mathbf{u}_{kp}^*, \mathbf{v}_p)_p. \end{aligned}$$

Le passage de (2.21) à (2.22) vient du fait que  $(\varphi_k(x) L'_p(y), v_{yp})_p = 0$  en raison des règles de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre. On vérifie de plus que :

$$\text{rot } \mathbf{u}_{kp}^* = -\varphi'_k(x) L'_p(y).$$

Ainsi  $\mathbf{u}_{kp}^*$  n'est pas à rotationnel identiquement nul puisque  $\text{rot } \mathbf{u}_{kp}^*$  s'annule uniquement sur les noeuds intérieurs de la grille GLL et sur les noeuds du bord, il est égal à  $-\varphi'_k(\xi_i) L'_p(\pm 1)$  pour  $i = 0, \dots, p$ .

On peut donc voir que les 4 modes parasites ont un double effet. Tout d'abord, ils augmentent la taille du noyau discret  $K(\mathcal{A}_p)$ . De plus, ils "polluent" l'image  $R(\mathcal{A}_p)$  en modifiant artificiellement la multiplicité de certaines valeurs propres du spectre régulier et leurs vecteurs propres associés sont faux.

Un moyen d'éliminer ces effets consiste à calculer tous les vecteurs propres sur la grille de Gauss-Legendre. Les résultats numériques de la figure (2.1) illustrent les effets de pollution sur le mode propre et le filtrage obtenu par interpolation sur la grille GL. La figure montre la composante  $u_{xp}$  du vecteur propre correspondant à  $\lambda_{4,0}^2$  calculé avec  $p = 44$ . Comme  $\ell = 0$ , le calcul est sensible au mode parasite introduit par  $L_p$ . La pollution est clairement

visible sur la partie gauche de la figure où le calcul a été réalisé sur la grille GLL. La partie droite de la figure montre que lorsque le calcul des vecteurs propres est réalisé sur la grille GL par un procédé d'interpolation, l'effet de pollution est éliminé.

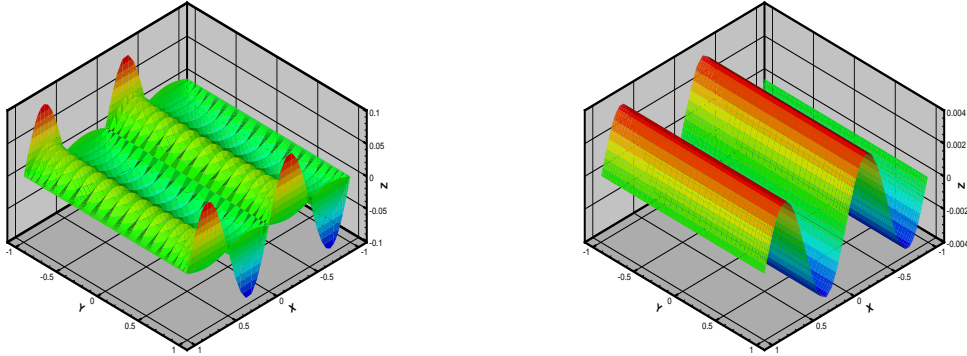


FIG. 2.1: Représentation de la composante  $u_{x_p}$  du vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_{4,0}^2$  calculée avec l'élément spectre instable ( $p = 44$ ). A gauche : calcul sur la grille GLL. A droite : calcul sur la grille GL.

### - Une méthode spectrale stable et optimale

Afin d'éviter la présence des modes parasites, on propose un nouveau schéma de discrétisation pour le problème dans sa formulation primale (2.10). On introduit par conséquent l'espace polynomial :

$$\mathbf{Y}_p(\Omega) = (\mathcal{P}_p(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_{p-1}(\Lambda)) \times (\mathcal{P}_{p-1}(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_p(\Lambda)). \quad (2.23)$$

L'espace polynomial  $\mathbf{X}_p(\Omega)$  devient :

$$\mathbf{X}_p(\Omega) = \mathbf{Y}_p(\Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega) = (\mathcal{P}_p^0(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_{p-1}(\Lambda)) \times (\mathcal{P}_{p-1}(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_p^0(\Lambda)). \quad (2.24)$$

Le problème discret en formulation variationnelle primale s'écrit maintenant : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega)$  tels que :

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_p, \nabla \cdot \mathbf{v}_p)_p^G = \lambda^2 (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)_p^{GL}, \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega).$$

On définit alors le produit scalaire discret :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)_p^{GL} &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^p u_{xp}(\xi_i, \zeta_j) v_{xp}(\xi_i, \zeta_j) \rho_i \omega_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^p u_{yp}(\zeta_i, \xi_j) v_{yp}(\zeta_i, \xi_j) \omega_i \rho_j, \end{aligned} \quad (2.25)$$

et pour tout couple de champs scalaires  $\psi, q$  :

$$(\psi, q)_p^G = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\psi q)(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j. \quad (2.26)$$

Les exposants GL et G ont été introduits pour rappeler que (2.25) fait appel aux quadratures de Gauss-Legendre et Gauss-Lobatto-Legendre tandis que (2.26) utilise uniquement la quadrature de Gauss-Legendre.

En utilisant les fonctions de bases (1) et (2) les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$u_{xp}(x, y) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{\ell=1}^p u_{k\ell}^x h_k(x) \tilde{h}_\ell(y), \quad (2.27)$$

$$u_{yp}(x, y) = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{p-1} u_{k\ell}^y \tilde{h}_k(x) h_\ell(y), \quad (2.28)$$

avec désormais  $u_{k\ell}^x = u_{xp}(\xi_k, \zeta_\ell)$  et  $u_{k\ell}^y = u_{yp}(\zeta_k, \xi_\ell)$ .

Nous passons maintenant à la forme discrète de la formulation variationnelle (2.14)-(2.15).

Comme il a été prouvé dans [Azaïez 06], un élément spectral stable est composé de  $\mathbf{X}_p(\Omega)$  et  $M_p(\Omega)$  respectivement pour  $\mathbf{u}_p$  et  $\varphi_p$  avec :

$$M_p(\Omega) := \mathbb{P}_{p-1} \cap L_0^2(\Omega). \quad (2.29)$$

Ainsi, l'approximation spectrale de (2.14)-(2.15) s'écrit : *Trouver*  $(\lambda^2, \mathbf{u}_p, \varphi_p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbf{X}_p(\Omega) \times M_p(\Omega)$  tels que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)_p^{GL} + (\varphi_p, \nabla \cdot \mathbf{v}_p)_p^G &= 0, \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_p, q_p)_p^G + \lambda^2 (\varphi_p, q_p)_p^G &= 0, \quad \forall q_p \in M_p(\Omega). \end{aligned}$$

L'approximation de  $\mathbf{u}_p$  est la même que pour la formulation primale à savoir (2.27)-(2.28) tandis que  $\varphi_p$  s'écrit :

$$\varphi_p(x, y) = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p \varphi_{k\ell} \tilde{h}_k(x) \tilde{h}_\ell(y) \text{ avec } \varphi_{k\ell} = \varphi_p(\zeta_k, \zeta_\ell).$$

### 2.1.3 Résultats numériques

Nous avons réalisé plusieurs calculs afin de valider la stabilité de cet élément.

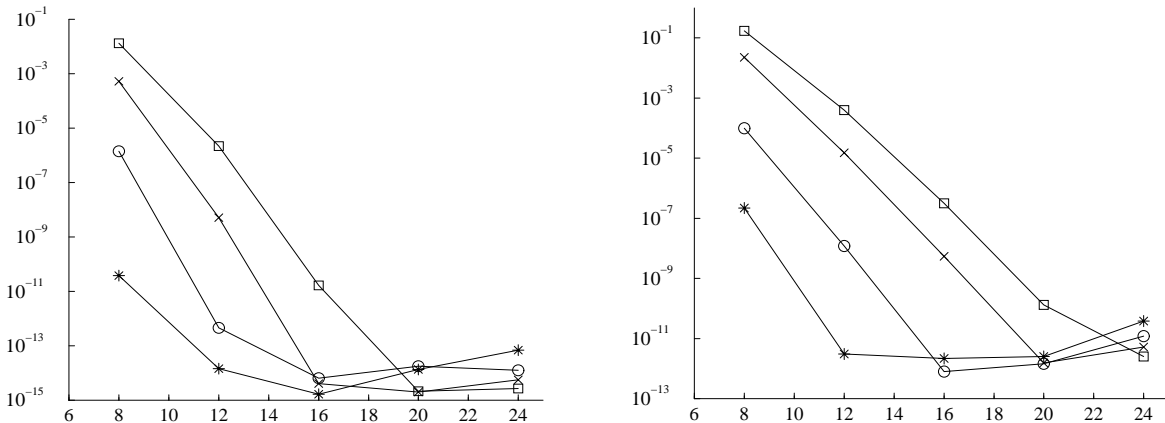


FIG. 2.2: Erreurs sur le spectre régulier en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique. A gauche : erreur relative pour les 4 premières valeurs propres de multiplicité 1,  $\lambda_{kk}$ . A droite : erreur en norme  $L^2$  pour les 4 vecteurs propres associés. La correspondance est la suivante : \* ( $k = 1$ ), o ( $k = 2$ ), x ( $k = 3$ ), □ ( $k = 4$ ).

La figure (2.2) montre l'erreur relative sur les quatre premières valeurs propres de multiplicité 1 (à gauche) et l'erreur en norme  $L^2$  sur les quatre vecteurs propres associés (à droite) sur une échelle semi-logarithmique en fonction du degré polynomial  $p$ . Comme attendu, l'erreur décroît de manière exponentielle lorsque  $p$  croît.

La même stratégie a été adoptée pour calculer le spectre en 3 dimensions sur le domaine  $] -1, 1[^3$ . La figure (2.3) montre l'erreur relative sur les deux premières valeurs propres de multiplicité 1 (à gauche) et l'erreur en norme  $L^2$  sur les deux vecteurs propres associés (à droite) sur une échelle semi-logarithmique en fonction du degré polynomial  $p$ . Là encore, la décroissance de l'erreur est spectrale.

Ainsi, cette nouvelle discrétisation est stable. En effet, on a exactement le bon nombre de valeurs propres nulles. De plus toutes les valeurs propres de la partie régulière ont une bonne multiplicité et tous les vecteurs propres associés ont un rotationnel qui décroît spectralement vers 0. Enfin, la convergence est spectrale, aussi bien pour les valeurs propres que pour les vecteurs propres.



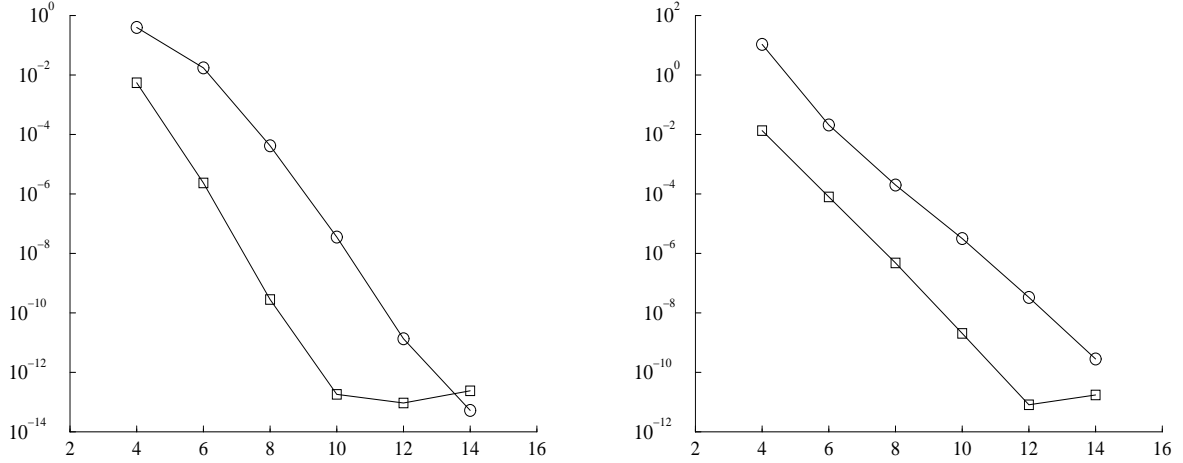


FIG. 2.3: Erreurs sur le spectre régulier en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique. A gauche : erreur relative pour les 2 premières valeurs propres de multiplicité 1,  $\lambda_{kkk}$ . A droite : erreur en norme  $L^2$  pour les 2 vecteurs propres associés. La correspondance est la suivante :  $\square$  ( $k = 1$ ),  $\circ$  ( $k = 2$ ).

## 2.2 Condition limite $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$

Le problème aux valeurs propres que l'on traite désormais est :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.31)$$

Le spectre du problème (2.30)-(2.31) possède les mêmes propriétés que le spectre du problème (2.1)-(2.2) à savoir une partie singulière avec des valeurs propres nulles et des vecteurs propres associés à divergence nulle et une partie régulière constituée de valeurs propres non nulles et de vecteurs propres associés à rotationnel nul. La recherche de la partie régulière peut s'écrire sous la forme :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.32)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.34)$$

Puisque  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \cdot) = 0$ , on peut chercher  $\mathbf{u}$  sous la forme :

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Ainsi résoudre le problème (2.32)-(2.34) équivaut à résoudre le problème aux valeurs propres de Laplace muni d'une condition limite de Dirichlet :

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi &= \lambda^2 \varphi, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi &= 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On peut montrer que sur le domaine  $\Omega$  les valeurs propres non nulles sont :

$$\lambda_{k,\ell}^2 = \frac{\pi^2}{4}(k^2 + \ell^2), \quad k, \ell = 1, 2, \dots,$$

tandis que les vecteurs propres sont des produits de fonctions trigonométriques dépendant de la parité de  $k$  et  $\ell$ .

### 2.2.1 Formulations variationnelles du problème

Tout comme le problème (2.1)-(2.2), le problème (2.30)-(2.31) peut être écrit sous deux formulations variationnelles. La formulation variationnelle primale consiste à : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega)$  tels que :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega).$$

La formulation variationnelle duale s'écrit : *Trouver*  $(\lambda^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}_*^+ \times H(\text{div}; \Omega)$  et  $\varphi \in L^2(\Omega)$  tels que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\varphi, \text{div } \mathbf{v}) &= 0, & \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega), \\ (\text{div } \mathbf{u}, q) &= -\lambda^2(\varphi, q), & \forall q \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

### 2.2.2 Discrétisation spectrale

On retrouve les mêmes conclusions que pour la condition limite (2.2), à savoir que le choix naturel d'espace d'approximation  $\mathbf{H}_p(\Omega)$  tel que :

$$\mathbf{H}_p(\Omega) = \mathbb{P}_p(\Omega)^2 \cap H(\text{div}; \Omega),$$

est instable et produit le même phénomène de pollution spectrale que précédemment. En effet, on considère le problème : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\mathbf{u}_p \in \mathbf{H}_p(\Omega)$  et  $\varphi_p \in \mathbb{P}_p(\Omega)$  solutions de :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)_p + (\varphi_p, \nabla \cdot \mathbf{v}_p)_p &= 0, & \forall \mathbf{v}_p \in \mathbf{H}_p(\Omega), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_p, q_p)_p &= -\lambda^2(\varphi_p, q_p)_p, & \forall q_p \in \mathbb{P}_p(\Omega). \end{aligned}$$

Sa résolution fait apparaître une valeur propre nulle. Le vecteur propre associé à cette valeur propre est  $\mathbf{u}_p = \mathbf{grad} \varphi_p$  avec  $\varphi_p = L_p(x)L_p(y)$  [Ahusborde 07c]. Tout comme pour la condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ , il s'agit d'un mode parasite ayant les mêmes conséquences sur le spectre, à savoir un nombre accru de valeurs propres nulles, une mauvaise multiplicité de certaines valeurs propres non nulles et le non respect du caractère irrotationnel des vecteurs propres du spectre régulier.

Un choix optimal et stable pour l'espace d'approximation est  $\mathbf{Y}_p(\Omega)$  défini par (2.23). Le problème discret en formulation variationnelle primale s'écrit maintenant : *Trouver*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u}_p \in \mathbf{Y}_p(\Omega)$  tels que :

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_p, \nabla \cdot \mathbf{v}_p)_p^G = \lambda^2 (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)_p^{GL}, \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathbf{Y}_p(\Omega).$$

Les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_{xp}(x, y) &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=1}^p u_{k\ell}^x h_k(x) \tilde{h}_\ell(y), \\ u_{yp}(x, y) &= \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=0}^p u_{k\ell}^y \tilde{h}_k(x) h_\ell(y). \end{aligned}$$

### 2.2.3 Résultats numériques

Là encore, nous avons réalisé plusieurs calculs en 2D et 3D afin de valider la stabilité de cet élément. La figure (2.4) montre l'erreur relative sur les quatre premières valeurs propres (à gauche) et l'erreur en norme  $L^2$  sur les quatre vecteurs propres associés (à droite) sur une échelle semi-logarithmique en fonction du degré polynomial  $p$ . Comme attendu, l'erreur décroît spectralement en fonction de  $p$ .

Pour un calcul en 3D, la figure (2.5) montre l'erreur relative sur les deux premières valeurs propres de multiplicité 1 (à gauche) et l'erreur en norme  $L^2$  sur les deux vecteurs propres associés (à droite) sur une échelle semi-logarithmique en fonction du degré polynomial  $p$ . La décroissance de l'erreur est spectrale. Ce choix conduit donc à un schéma stable et toutes les propriétés des spectres réguliers et singuliers sont vérifiées.

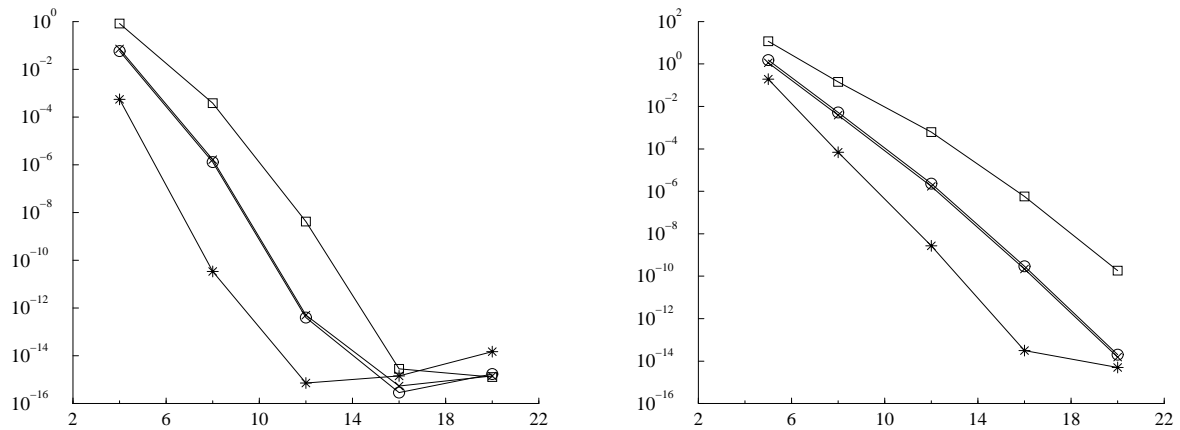


FIG. 2.4: Erreurs sur le spectre régulier en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique. A gauche : erreur relative pour les 4 premières valeurs propres. A droite : erreur en norme  $L^2$  pour les 4 vecteurs propres associés. La correspondance est la suivante :  $*$  :=  $\lambda_{1,1} (\pi^2/2)$ ,  $\circ$  :=  $\lambda_{1,2} (5\pi^2/4)$ ,  $\times$  =  $\lambda_{2,2} (2\pi^2)$  et  $\square$  =  $\lambda_{3,1} (10\pi^2/4)$ .

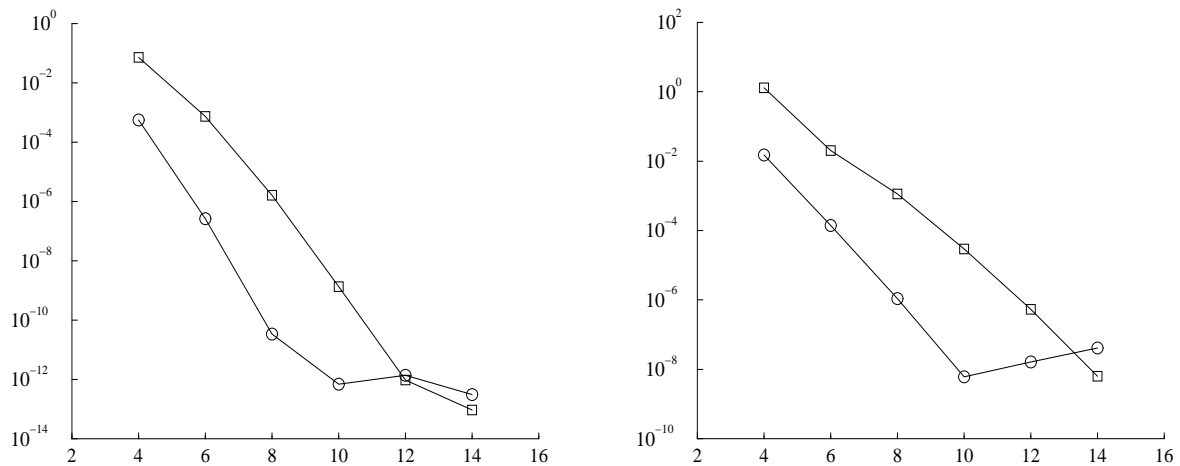


FIG. 2.5: Erreurs sur le spectre régulier en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique. A gauche : erreur relative pour les 2 premières valeurs propres de multiplicité 1,  $\lambda_{kkk}$ . A droite : erreur en norme  $L^2$  pour les 2 vecteurs propres associés. La correspondance est la suivante :  $\circ$  ( $k=1$ ),  $\square$  ( $k=2$ ).

## 2.3 Un algorithme itératif pour la décomposition de domaine

Le but de cette partie est de mettre à profit les résultats des sections précédentes pour résoudre le problème  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  par une technique de décomposition de domaine. Cette

section a fait l'objet d'un article soumis pour publication au journal CiCP (Communications in Computational Physics). En reprenant l'esprit de l'algorithme appelé *Dirichlet-to-Neumann* introduit pour l'opérateur du Laplacien par Quarteroni [Quarteroni 99], nous présentons ici une version adaptée à notre opérateur. On introduit les conditions aux limites de transmission sur le squelette de la décomposition de domaine qui sera supposée sans recouvrement et conforme. Enfin on écrira le problème de décomposition de domaine comme un problème d'interface écrit sur le squelette et faisant intervenir l'opérateur de Steklov-Poincaré [Agoshkov 85]. Plus précisément, on souhaite résoudre le problème aux limites linéaire et symétrique : *Pour un champ  $\mathbf{f}$  donné trouver  $\mathbf{u}$  solution de :*

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \alpha^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.36)$$

Ici le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est supposé borné avec un bord Lipschitzien ayant  $\mathbf{n}$  pour normale extérieure.

Pour illustrer notre méthode nous allons fixer les idées en décomposant sans recouvrement le domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On note  $\Gamma := \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$  (voir figure 2.6). On désigne par  $\mathbf{u}_i$  la restriction de  $\mathbf{u}$  à  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  et par  $\mathbf{n}_i$  la direction normale extérieure à  $\Gamma$ . Pour simplifier on notera  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ .

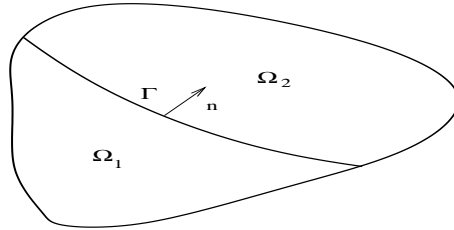


FIG. 2.6: Un exemple de partition sans recouvrement de  $\Omega$  en deux sous-domaines.

On note au passage que dans plusieurs domaines d'application la source  $\mathbf{f}$  est irrotationnelle et que cette condition devient nécessaire quand le coefficient  $\alpha$  est nul.

La construction de l'algorithme itératif repose essentiellement sur le résultat d'équivalence entre le problème (2.35)-(2.36) et le problème suivant : *Trouver  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  solutions de :*

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + \alpha^2 \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (2.37)$$

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_2) + \alpha^2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega_2, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.41)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = \operatorname{div} \mathbf{u}_2, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.42)$$

Les égalités (2.41) et (2.42) sont les conditions de transmission couplant les problèmes locaux.

### 2.3.1 Méthode itérative basée sur les conditions de transmission à l'interface

Une manière de résoudre le système couplé (2.37)-(2.42) consiste à le découpler par un algorithme itératif. On introduit une suite de sous-problèmes dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  pour lesquels les conditions (2.41) et (2.42) fournissent les conditions limites manquantes sur  $\Gamma$ . Cela peut être réalisé de plusieurs manières, on se focalisera sur la méthode suivante : *Pour  $\lambda^0$  donné, résoudre pour chaque  $k \geq 0$*

$$\begin{aligned} -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1^{k+1}) + \alpha^2 \mathbf{u}_1^{k+1} &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathbf{u}_1^{k+1} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_1^{k+1} \cdot \mathbf{n} &= \lambda^k, & \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.43)$$

*ensuite*

$$\begin{aligned} -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_2^{k+1}) + \alpha^2 \mathbf{u}_2^{k+1} &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_2^{k+1} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_2^{k+1} &= \operatorname{div} \mathbf{u}_1^{k+1}, & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (2.44)$$

*Enfin*

$$\lambda^{k+1} = \mathbf{u}_2^{k+1} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.45)$$

Pour accélérer la convergence de cet algorithme, la condition (2.45) est remplacée par une version relaxée à savoir

$$\lambda^{k+1} = \omega \mathbf{u}_2^{k+1} \cdot \mathbf{n} + (1 - \omega) \lambda^k, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.46)$$

C'est cette dernière version que nous allons adopter pour la validation numérique.

La partie suivante est consacrée à l'étude numérique de la convergence de l'algorithme itératif et son efficacité à approcher le problème continu. On étudiera en particulier la convergence spectrale ainsi que le comportement du nombre d'itérations en fonction du maillage et de la topologie de la décomposition (selon qu'elle contient ou non un point de croisement). L'étude théorique associée à cette partie est en cours d'analyse.

### 2.3.2 Résultats numériques

La version discrète utilise l'élément spectral stable introduit dans les sections précédentes. Le test d'arrêt de l'algorithme itératif est basé sur le résidu calculé sur l'interface  $\Gamma$ . Il sera fixé dans toute cette partie à  $1.10^{-8}$ . Le coefficient de relaxation  $\omega$  est choisi égal à 0.5. Ce choix est considéré numériquement optimal au sens où il requiert le plus petit nombre d'itérations pour un maillage donné.

Un premier test numérique est réalisé sur le rectangle  $\Omega = ]-1, 3[ \times ]-1, 1[$  que l'on a divisé en deux sous-domaines carrés. Le second membre et les conditions aux limites proviennent de la solution analytique fournie par :

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2 \sin(x) \cos(y), \\ u_y(x, y) &= \cos(x) \sin(y). \end{aligned}$$

On fixe  $\alpha$  égal à 1. La solution exacte  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  est approchée par  $\mathbf{u}_p$ . Le comportement de l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|$  en norme  $L^2$  est représenté sur la figure (2.7) où une échelle semi-logarithmique est utilisée. La décroissance est bien spectrale comme on peut s'y attendre.

Le tableau (2.1) montre le nombre d'itérations entre les deux sous-domaines pour atteindre la convergence en fonction du degré polynomial  $p$ . On remarque que le nombre d'itérations est indépendant de degré polynomial  $p$ . La même conclusion est observée pour le Laplacien.

Degré polynomial $p$	4	8	12	16	20
Nombre d'itérations	9	8	8	7	7

TAB. 2.1: Nombre d'itérations en fonction de  $p$ .

Pour le second test numérique, on considère un domaine plus complexe possédant un point de croisement. En effet, on étudie le problème sur un domaine  $\Omega$  en forme de L

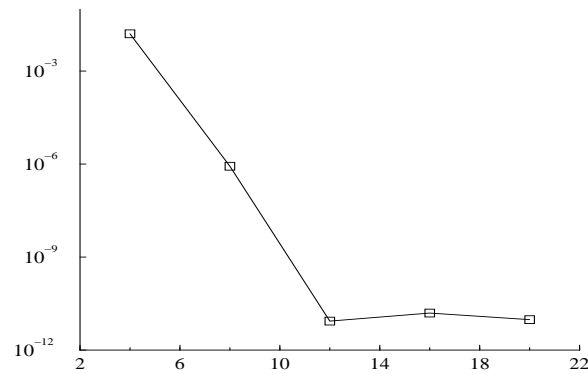


FIG. 2.7: Erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|_{(L^2(\Omega))^2}$  en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique sur le domaine rectangulaire.

comme le montre la figure (2.8). Ce domaine est divisé en 3 sous-domaines. On utilise la même stratégie que précédemment, à savoir un algorithme itératif entre les sous-domaines. Les données correspondent à la même solution analytique que dans le cas précédent.

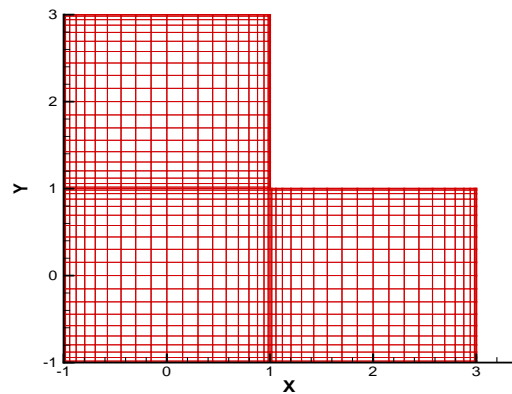


FIG. 2.8: Domaine en L : forme de la décomposition pour  $p = 20$ .

La figure (2.9) représente la convergence de l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|_{(L^2(\Omega))^2}$  sur une échelle semi-logarithmique. On observe encore une convergence exponentielle.

Le tableau (2.2) montre le nombre d'itérations entre les trois sous-domaines afin d'atteindre la convergence en fonction du degré polynomial  $p$ . Là encore, la valeur optimale pour le paramètre de relaxation est  $\omega = 0.5$ . On peut remarquer que dans ce cas le nombre



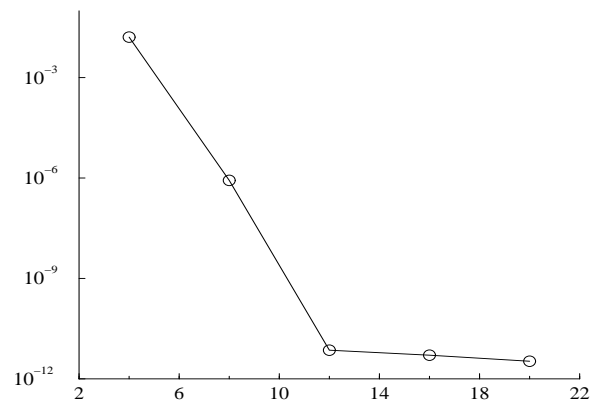


FIG. 2.9: Erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|_{(L^2(\Omega))^2}$  en fonction de  $p$  sur le domaine en L.

d'itérations dépend de  $p$ .

Degré polynomial $p$	4	8	12	16	20
Nombre d'itérations	30	34	36	38	42

TAB. 2.2: Nombre d'itérations en fonction de  $p$ .

La figure (2.10) illustre les isovaleurs de la composante approchée  $u_{xp}$  calculée pour  $p = 20$ . On note sa continuité à travers les interfaces entre les sous-domaines.

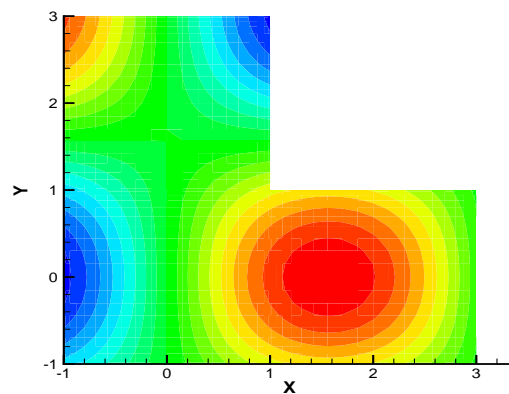


FIG. 2.10: Isovaleurs de la composante approchée  $u_{xp}$  calculée pour  $p = 20$ .

### 2.3.3 Interprétation en terme de Steklov-Poincaré

Nous allons maintenant introduire le problème de Steklov-Poincaré sur  $\Gamma$  et exprimer une relation entre sa résolution et l'algorithme itératif (2.43)-(2.46). Pour cela nous introduisons les notations et espaces suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_i &:= \{ \mathbf{v}_i \in H(\text{div} ; \Omega_i) \mid \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0 \}, \\ \mathbf{W}_i^0 &:= H_0(\text{div} ; \Omega_i), \\ \Psi &:= \{ \psi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \mid \psi = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}_i \}.\end{aligned}$$

L'espace des traces  $\Psi$  coïncide avec l'espace dual de  $H^{1/2}(\Gamma)$  (voir [Girault 86], p. 27 Théorème 2.5). Aussi pour chaque élément  $\psi$  de  $\Psi$ , on définit une extension de  $\Gamma$  à  $\Omega_i$  notée  $\mathbf{H}_i\psi$ , comme l'unique solution de :

$$\begin{aligned}-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}_i\psi) + \alpha^2 \mathbf{H}_i\psi &= \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{H}_i\psi \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \mathbf{H}_i\psi \cdot \mathbf{n} &= \psi, & \text{sur } \Gamma,\end{aligned}$$

dont la formulation variationnelle s'écrit : *Pour tout  $\psi \in \Psi$ , trouver  $\mathbf{H}_i\psi \in \mathbf{W}_i$ ,  $i = 1, 2$  solution de :*

$$\begin{aligned}(\text{div } \mathbf{H}_i\psi, \text{div } \mathbf{v}_i)_{\Omega_i} + \alpha^2 (\mathbf{H}_i\psi, \mathbf{v}_i)_{\Omega_i} &= 0, & \forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{W}_i^0, \\ \mathbf{H}_i\psi \cdot \mathbf{n} &= \psi, & \text{sur } \Gamma.\end{aligned}$$

On désigne par  $\lambda$  la valeur inconnue de la trace de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma$  à laquelle on associe les deux problèmes : *Pour  $i = 1, 2$  trouver  $\mathbf{w}_i \in \mathbf{W}_i$  solution de :*

$$\begin{aligned}-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}_i) + \alpha^2 \mathbf{w}_i &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} &= \lambda, & \text{sur } \Gamma.\end{aligned} \tag{2.47}$$

On peut affirmer que

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i^0 + \mathbf{u}_i^*,$$

avec  $\mathbf{u}_i^0$  et  $\mathbf{u}_i^*$  respectivement solutions de

$$\begin{aligned}-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_i^0) + \alpha^2 \mathbf{u}_i^0 &= \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i^0 \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_i^0 \cdot \mathbf{n} &= \lambda, & \text{sur } \Gamma,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_i^*) + \alpha^2 \mathbf{u}_i^* &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i^* \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_i^* \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

On reconnaît pour  $i = 1, 2$ , que  $\mathbf{u}_i^0$  est l'extension harmonique de  $\lambda$  sur  $\Omega_i$ . On la notera donc  $\mathbf{H}_i \lambda$ . On définit aussi  $\mathbf{G}_i \mathbf{f}$  à la place de  $\mathbf{u}_i^*$ .

En comparant (2.37)-(2.42) avec (2.47), on en déduit que

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i, \quad \text{pour } i=1,2, \text{ si et seulement si } \operatorname{div} \mathbf{w}_1 = \operatorname{div} \mathbf{w}_2 \text{ sur } \Gamma.$$

Grâce à cette dernière relation, nous allons pouvoir écrire que  $\lambda$  est la trace de la composante normale de la solution si et seulement si elle satisfait l'équation de Steklov-Poincaré à l'interface définie par :

$$S\lambda = \chi \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.48)$$

où

$$\chi := \operatorname{div} \mathbf{G}_2 \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{G}_1 \mathbf{f},$$

et  $S$  est l'opérateur de Steklov-Poincaré, qui est défini par

$$S\lambda := \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{H}_1 \lambda}_{S_1} - \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{H}_2 \lambda}_{S_2}.$$

La résolution du problème aux limites (2.35)-(2.36) revient donc à résoudre d'abord un problème sur le squelette et ensuite une famille de problèmes locaux.

L'équation (2.48) une fois écrite sous forme variationnelle conduit à un système algébrique symétrique dont la résolution pourra être faite par les algorithmes itératifs classiques. On note que si le choix porte sur l'algorithme de Richardson préconditionné par  $S_2$ , l'algorithme itératif n'est rien d'autre que celui défini par (2.43)-(2.45).

## Conclusion et perspectives

Dans cette section nous avons présenté un algorithme itératif entre sous-domaines pour étendre la résolution du problème (2.35)-(2.36) à des géométries complexes. Nous avons

interprété la décomposition de domaine sous forme d'un problème sur le squelette introduisant l'opérateur de Steklov-Poincaré.

La suite de ce travail consiste à analyser la formulation variationnelle et sa version discrète. Une étude de la matrice du complément de Schur et des préconditionneurs possibles reste à faire. Enfin l'extension de ce travail aux éléments spectraux est aussi à aborder.

Après nous être assurés que nous possédons un élément stable pour l'opérateur  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  nous avons validé notre travail par plusieurs applications concernant notamment la décomposition de Helmholtz.



## Chapitre 3

# Applications : Décomposition de Helmholtz

Soit  $\mathbf{f}$  une fonction de  $(L^2(\Omega))^n$ ,  $n = 2$  ou  $3$ . Notre objectif est de proposer une technique de haute précision pour effectuer numériquement la décomposition de Helmholtz. On rappelle qu'il s'agit de décomposer  $\mathbf{f}$  en une somme de  $\mathbf{u}^S$  et  $\mathbf{u}^I$  tels que :

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}^S + \mathbf{u}^I, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^S = 0, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}^I = 0. \quad (3.3)$$

Les conditions aux limites envisagées dans le cadre de ce travail sont :

$$\text{Dirichlet} : \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.4)$$

$$\text{Libre} : \operatorname{div} \mathbf{u}^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (3.5)$$

Les exposants  $S$  et  $I$  signifient respectivement solénoïdal et irrotationnel.

Puisque  $\operatorname{rot}(\mathbf{grad}\cdot) = 0$ , on cherche habituellement  $\mathbf{u}^I$  sous la forme :

$$\mathbf{u}^I = \mathbf{grad} p.$$

Notre objectif est de proposer des schémas de projection tels que les propriétés (3.2) et (3.3) soient satisfaites avec une précision de l'ordre du zéro machine indépendamment du maillage. Cette exigence étant utile dans une large gamme d'applications voire d'utilisation d'algorithmes d'intégrations numériques (ex : transport d'interface).

La décomposition est représentée schématiquement par la figure (3.1).

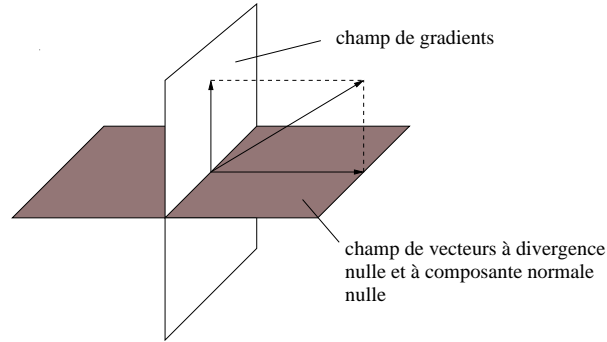


FIG. 3.1: Décomposition de Helmholtz d'un vecteur.

Il est naturel d'introduire l'opérateur de projection orthogonale  $\mathbb{P}$  qui transforme  $\mathbf{f}$  en sa partie à divergence nulle  $\mathbf{u}$ . D'après le théorème précédent,  $\mathbb{P}$  est bien défini et est un opérateur linéaire. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbb{P}\mathbf{f} + \mathbf{grad} p, \\ \mathbb{P}\mathbf{u} &= \mathbf{u}, \\ \mathbf{0} &= \mathbb{P}(\mathbf{grad} p).\end{aligned}$$

La décomposition de Helmholtz est présente dans une grande gamme de problèmes physiques. En élasticité, voir les travaux de Brezzi [Brezzi 86] et de Arnold [Arnold 89] sur la déformation d'une plaque mince soumise à une charge transverse. Dans la simulation d'écoulements de fluides incompressibles, le potentiel scalaire dans la décomposition de Helmholtz est habituellement relié au champ de pression, et le potentiel vecteur correspond à un champ de vitesse solénoïdale, ces deux quantités étant les inconnues présentes dans les équations de Navier-Stokes [Batchelor 67]. Les solveurs de Stokes et de Navier-Stokes découplent la plupart du temps le calcul de la vitesse et de la pression [Deville 02]. Cette forme de splitting génère dans un premier temps une vitesse qui n'est pas à divergence nulle mais qui possède la bonne vorticité. L'addition d'un gradient de pression à cette vitesse temporaire la rend à divergence nulle. Nous proposons deux manières complètement différentes permettant de réaliser cette décomposition. Elles utilisent toutes les deux les propriétés de l'opérateur  $-\mathbf{grad}(\text{div } \cdot)$ .

## 3.1 Technique de projection

Nous souhaitons réaliser la décomposition (3.1)-(3.3) muni de la condition limite (3.4). Une possibilité pour réaliser la décomposition de Helmholtz est de projeter le champ à décomposer  $\mathbf{f}$  successivement sur une base à divergence nulle, puis sur une base à rotationnel nul. L'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$  offre une telle possibilité. En effet, comme nous l'avons déjà souligné, son noyau est formé de vecteurs à divergence nulle tandis que son image est constituée de vecteurs à rotationnel nul.

### 3.1.1 Projection sur le noyau de l'opérateur $-\mathbf{grad}(\text{div})$

Dans un premier temps, nous allons tenter d'obtenir la partie solénoïdale  $\mathbf{u}^S$ . Pour cela, on va projeter  $\mathbf{f}$  sur le noyau de l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$  calculé grâce à l'élément stable que nous avons proposé. On considère donc l'ensemble des vecteurs solénoïdaux discrets :

$$\{\mathbf{w}_S^{(i)} \mid \text{div } \mathbf{w}_S^{(i)} = 0, \quad \mathbf{w}_S^{(i)} \cdot \mathbf{n} = 0\}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

avec  $I = (p-1)^2$ .  $\mathbf{u}^S$  peut être approché par

$$\mathbf{u}_S \approx \pi_S \mathbf{f} := \sum_{i=1}^I \alpha_i \mathbf{w}_S^{(i)},$$

où  $\pi_S \mathbf{f}$  désigne la projection de  $\mathbf{f}$  sur la base solénoïdale et les coefficients  $\alpha_i$  sont les inconnues du problème. On a :

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_I \approx \sum_{i=1}^I \alpha_i \mathbf{w}_S^{(i)} + \mathbf{u}_I. \quad (3.6)$$

En projetant (3.6) sur chaque  $\mathbf{w}_S^{(j)}$ , il vient :

$$(\mathbf{f}, \mathbf{w}_S^{(j)})_p^{GL} = \sum_{i=1}^I \alpha_i M_{ij}^S + (\mathbf{u}_I, \mathbf{w}_S^{(j)})_p^{GL}, \quad 1 \leq j \leq I, \quad (3.7)$$

avec

$$M_{ij}^S = (\mathbf{w}_S^{(i)}, \mathbf{w}_S^{(j)})_p^{GL}, \quad 1 \leq i, j \leq (p-1)^2.$$

Puisque  $\mathbf{u}_I \in R(\mathcal{A}_p)$  et  $\mathbf{w}_S^{(j)} \in K(\mathcal{A}_p)$ , en vertu de l'orthogonalité de ces deux espaces, le terme  $(\mathbf{u}_I, \mathbf{w}_S^{(j)})_p^{GL}$  présent dans (3.7) est identiquement nul et les coefficients  $\alpha_i$  sont solutions du système linéaire suivant

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i M_{ij}^S = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_S^{(j)})_p^{GL}, \quad 1 \leq j \leq I.$$



Une fois la partie solénoïdale obtenue, on obtient la partie non-solénoïdale par la relation  $\mathbf{u}_I \approx \mathbf{f} - \pi_S \mathbf{f}$ .

### 3.1.2 Projection sur l'image de l'opérateur $-\text{grad}(\text{div})$

Considérons maintenant comme base de l'image  $R(\mathcal{A}_p)$ , la base non-solénoïdale engendrée par l'ensemble  $\{\mathbf{w}_{NS}^{(k)}\}$  avec  $1 \leq k \leq K$  et  $K = p^2 - 1$ . La composante non-solénoïdale de  $\mathbf{f}$  peut être approchée par :

$$\mathbf{u}_I \approx \pi_{NS} \mathbf{f} := \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{w}_{NS}^{(k)}, \quad (3.8)$$

où les coefficients  $\beta_k$  sont les inconnues du problème. En insérant (3.8) dans la décomposition de Helmholtz de  $\mathbf{f}$  on obtient :

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{u}_S + \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{w}_{NS}^{(k)}.$$

La projection de cette relation sur chaque élément de la base non-solénoïdale conduit à

$$(\mathbf{f}, \mathbf{w}_{NS}^{(\ell)})_p^{GL} = (\mathbf{u}_S, \mathbf{w}_{NS}^{(\ell)})_p^{GL} + \sum_{k=1}^K \beta_k M_{k\ell}^{NS}, \quad 1 \leq \ell \leq K,$$

avec

$$M_{k\ell}^{NS} = (\mathbf{w}_{NS}^{(k)}, \mathbf{w}_{NS}^{(\ell)})_p^{GL} = \delta_{k\ell}, \quad 1 \leq k, \ell \leq K.$$

En utilisant à nouveau l'argument d'orthogonalité entre les bases discrètes solénoïdales et non-solénoïdales engendrant  $K(\mathcal{A}_p)$  et  $R(\mathcal{A}_p)$ , nous en concluons que la projection est donnée de manière explicite par :

$$\beta_k = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_{NS}^{(k)})_p.$$

Une fois la partie non-solénoïdale de  $\mathbf{f}$  déterminée, on peut déduire la partie solénoïdale grâce à la relation  $\mathbf{u}_S \approx \mathbf{f} - \pi_{NS} \mathbf{f}$ . Cette relation est valable seulement à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Sur la frontière, la condition  $\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n} = 0$  doit être imposée et la convergence est alors spectrale. Cela vient du fait que les vecteurs du spectre régulier issus de la formulation variationnelle primale vérifient les conditions limites  $\mathbf{w}_{NS} \cdot \mathbf{n} = 0$  fortement et ont un rotationnel qui ne tend que spectralement vers zéro.

### 3.1.3 Résultats numériques

Pour illustrer l'efficacité de ces approches de décomposition de Helmholtz, nous avons réalisé un test numérique sur le carré  $\Omega = ]-1, +1[^2$ . Comme exemple, nous avons étudié le cas  $\mathbf{f} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_I$  avec les composantes à divergence nulle et à rotationnel nul suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_S(x, y) &= (-\sin(\pi x) \cos(\pi y), \cos(\pi x) \sin(\pi y)), \\ \mathbf{u}_I(x, y) &= (\pi \cos(\pi(x+y)), \pi \cos(\pi(x+y))).\end{aligned}$$

Les deux composantes sont approchées respectivement par  $\mathbf{u}_{S_p}$  et  $\mathbf{u}_{I_p}$ . On se propose d'effectuer les projections sur le noyau et l'image de l'opérateur  $-\mathbf{grad}(\text{div})$  issu de la formulation variationnelle primale.

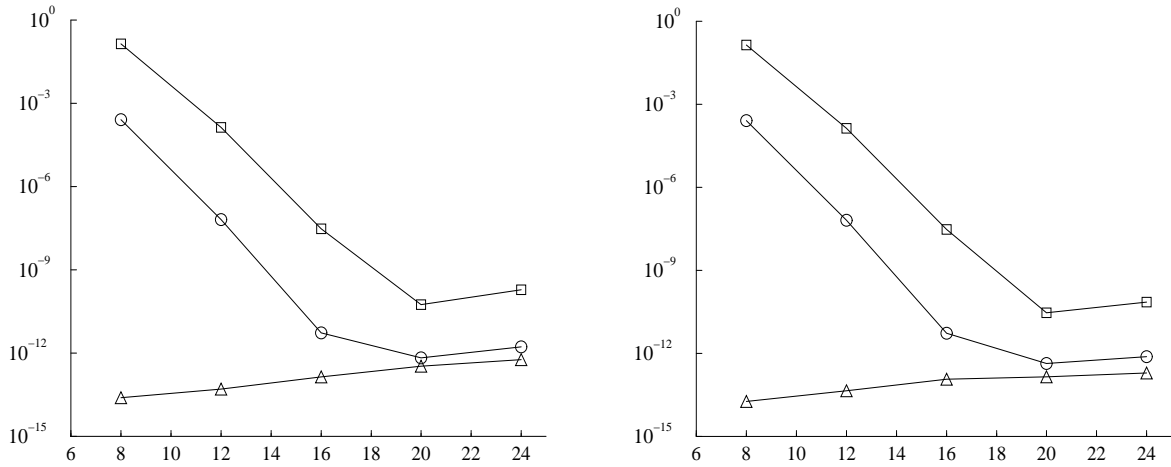


FIG. 3.2: Projections utilisant la formulation primale, normes  $L^2$  en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique. A gauche : projection sur le noyau. A droite : projection sur l'image. Pour les deux courbes, la correspondance est la suivante :  $\bigcirc := \|\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{S_p}\|_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $\square := \|\text{rot } \mathbf{u}_{I_p}\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\triangle := \|\text{div } \mathbf{u}_{S_p}\|_{L^2(\Omega)}$ .

La figure (3.2 à gauche) montre les résultats numériques obtenus par la projection de  $\mathbf{f}$  sur le noyau de  $K(\mathcal{A}_p)$ . Sur une échelle semi-logarithmique représentant l'erreur  $L^2$  en fonction du degré polynomial  $p$ , on observe la décroissance spectrale habituelle pour l'erreur sur la composante solénoïdale  $\|\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{S_p}\|_{(L^2(\Omega))^2}$  (voir les cercles) et pour  $\|\text{rot } \mathbf{u}_{I_p}\|_{L^2(\Omega)}$  (voir les carrés), tandis que  $\|\text{div } \mathbf{u}_{S_p}\|_{L^2(\Omega)}$  (voir les triangles) est proche du zéro machine. Ces résultats confirment les résultats attendus. La figure (3.2 à droite) donne la même information que la figure (3.2 à gauche), excepté le fait que les différentes quantités ont été calculées à l'aide de la base non-solénoïdale. Les résultats numériques

sont semblables.

Dans les 2 cas précédents,  $\text{rot } \mathbf{u}_{I_p}$  n'est pas identiquement nul mais  $\|\text{rot } \mathbf{u}_{I_p}\|_{L^2(\Omega)}$  décroît seulement spectralement vers zéro. Une manière d'obtenir une partie non-solénoïdale parfaitement irrotationnelle serait de considérer la base de vecteurs irrotationnels issus de la formulation variationnelle duale suivante : *Trouver*  $(\lambda^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}_*^+ \times (L^2(\Omega))^2$  et  $\varphi \in H_1(\Omega)/\mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\nabla\varphi, \mathbf{v}) &= \mathbf{0}, & \forall \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2, \\ (\mathbf{u}, \nabla q) &= \lambda^2(\varphi, q), & \forall q \in H_1(\Omega)/\mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'intérêt de cette formulation réside dans le fait que  $\mathbf{u} = \nabla\varphi$  partout dans le domaine, y compris au bord et donc la condition limite  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  n'est vérifiée que faiblement avec une convergence spectrale. Ainsi les vecteurs propres issus de cette formulation seront à rotationnel identiquement nul. On peut trouver plus de précisions dans [Ahusborde 07d]. On a ainsi exhibé deux nouvelles méthodes pour effectuer la décomposition de Helmholtz qui consistent à projeter le champ à décomposer soit sur le noyau, soit sur l'image de l'opérateur **-grad**(div). Les deux méthodes donnent des résultats similaires à savoir un champ parfaitement solénoïdal et un champ dont le rotationnel décroît spectralement vers zéro.

## 3.2 Projection vectorielle

Caltagirone et Breil [Caltagirone 99] ont développé une nouvelle méthode afin d'extraire la partie solénoïdale d'un champ de vecteur donné. Ils l'ont baptisé "projection vectorielle". Elle sert à corriger la vitesse lors de la résolution des équations de Navier-Stokes pour des écoulements incompressibles. Nous avons cherché à comprendre en quoi leur méthode pouvait être considérée comme une décomposition de Helmholtz. La projection vectorielle consiste à résoudre le problème suivant : *Soit*  $\mathbf{u}^*$  *un champ de vecteur donné, trouver un couple de champs de vecteur*  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  *tels que* :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^*) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}$  sont respectivement à divergence nulle et à rotationnel nul.

### 3.2.1 Problème continu et formulations variationnelles

Le problème continu que nous considérons s'écrit : *Trouver*  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  *tel que* :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.13)$$

Puisque  $\text{rot}(\mathbf{grad} \cdot) = 0$ , on remarque qu'une condition nécessaire pour qu'une solution au problème (3.12)-(3.13) existe, est que  $\text{rot} \mathbf{f} = 0$  et, par conséquent, on peut affirmer l'existence d'une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que :

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad} \varphi.$$

Cela nous conduit à reformuler le problème de la manière suivante : *Pour un champ*  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$ , *trouver*  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  *tel que* :

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \varphi, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.15)$$

Cette formulation est équivalente à la formulation duale qui s'écrit : *Pour un champ*  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$ , *trouver*  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  *et*  $\psi \in L_0^2(\Omega)$  *tels que* :

$$\mathbf{u} - \nabla \psi = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.16)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \varphi, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.18)$$

Cette formulation duale peut être réécrite comme une décomposition de Helmholtz classique. En effet, soit  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}^*$  deux champs de vecteurs tels que  $\nabla \cdot \mathbf{u}^* = \varphi$ ,  $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = 0$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*$ . Le problème (3.16)-(3.18) devient :

$$\mathbf{v} - \nabla \psi = \mathbf{u}^*, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.21)$$

Ainsi, la décomposition de Helmholtz du champ de vecteur  $\mathbf{u}^*$  peut être réalisée en utilisant soit la formulation primale (3.9)-(3.11), soit la formulation duale (3.19)-(3.21).

La formulation variationnelle du problème (3.14)-(3.15) s'écrit : *Trouver*  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  *tel que* :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w} \in H_0(\text{div}; \Omega). \quad (3.22)$$

La formulation variationnelle du problème (3.19)-(3.21) s'écrit quant à elle : *Trouver*  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  et  $\psi \in L_0^2(\Omega)$ , tels que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + b(\mathbf{w}, \psi) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w} \in H_0(\text{div}; \Omega), \quad (3.23)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (3.24)$$

où la forme bilinéaire  $b(\mathbf{v}, q)$  définie sur  $H_0(\text{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est donnée par (2.16).

### 3.2.2 Discrétisation stable

On utilise l'élément spectral stable  $\mathbf{X}_p(\Omega)$  défini par (2.24) pour la formulation primale (3.22). Le problème discret s'écrit alors : *Trouver*  $\mathbf{u}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega)$  tel que :

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_p, \nabla \cdot \mathbf{w}_p)_p^G = -(\varphi_p, \nabla \cdot \mathbf{w}_p)_p^G, \quad \forall \mathbf{w}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega). \quad (3.25)$$

On passe maintenant à la formulation discrète du problème dual (3.23)-(3.24). Comme on l'a déjà vu, un élément spectral stable pour résoudre ce problème est constitué de  $\mathbf{X}_p(\Omega)$  et  $M_p(\Omega)$  où  $M_p(\Omega)$  est défini par (2.29). Ainsi, l'approximation spectrale du problème sous sa formulation duale s'écrit : *Trouver*  $\mathbf{v}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega)$  et  $\psi_p \in M_p(\Omega)$  tels que :

$$(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p)_p^{GL} + (\psi_p, \nabla \cdot \mathbf{w}_p)_p^G = (\mathbf{u}_p^*, \mathbf{w}_p)_p^{GL}, \quad \forall \mathbf{w}_p \in \mathbf{X}_p(\Omega), \quad (3.26)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_p, q_p)_p^G = 0, \quad \forall q_p \in M_p(\Omega). \quad (3.27)$$

### 3.2.3 Résultats numériques

Afin d'illustrer numériquement l'équivalence et de comparer l'efficacité des deux approches de décomposition de Helmholtz, on réalise le test numérique suivant. L'exemple étudié correspond à  $\mathbf{u}^* = \mathbf{v} - \nabla \psi$  avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= (-\sin(\pi x) \cos(\pi y), \cos(\pi x) \sin(\pi y)), \\ \psi &= \sin(\pi(x + y)). \end{aligned}$$

Les grandeurs  $\mathbf{v}$  et  $\psi$  sont approchées par  $\mathbf{v}_p$  et  $\psi_p$ . La figure (3.3 à gauche) montre le calcul pour la formulation primale (3.25). Sur une échelle semi-logarithmique représentant l'erreur  $L^2$  en fonction du degré polynomial  $p$ , on observe la décroissance spectrale de l'erreur  $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\|_{(L^2(\Omega))^2}$  (voir les cercles), et de  $\|\text{rot}(\mathbf{u}_p^* - \mathbf{v}_p)\|_{L^2(\Omega)}$  (voir les carrés),

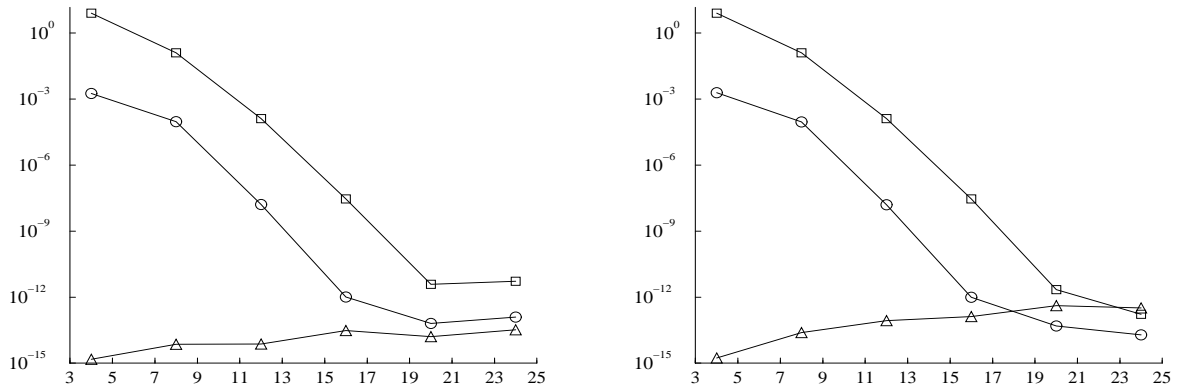


FIG. 3.3: Projection vectorielle, normes  $L^2$  en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique. A gauche : formulation primale (3.25). A droite : formulation duale (3.26)-(3.27). Pour les deux courbes, la correspondance est la suivante :  $\circ := \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\|_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $\square := \|\text{rot}(\mathbf{u}_p^* - \mathbf{v}_p)\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\triangle := \|\text{div} \mathbf{v}_p\|_{L^2(\Omega)}$

alors que  $\|\text{div} \mathbf{v}_p\|_{L^2(\Omega)}$  (voir les triangles) est proche du zéro machine. La figure (3.3 à droite) donne les mêmes informations que la figure (3.3 à gauche) mais les quantités ont été calculées en utilisant la formulation duale (3.26)-(3.27). Les résultats numériques sont les mêmes pour les deux approches.

Nous avons donc montré que la projection vectorielle qui figure dans [Caltagirone 99] était bien une décomposition de Helmholtz mise sous formulation primale. Dans [Ahusborde 07a], on peut trouver plus de détails sur cette méthode.

Il faut souligner que tout ce que nous avons vu jusque là est valable uniquement si la géométrie est cartésienne. Pour une géométrie non cartésienne, il faut considérer d'autres méthodes. Ainsi, dans la suite, nous proposons une méthode valable pour des géométries non-cartésiennes.



## Chapitre 4

# Une nouvelle méthode $hp$ pour les géométries non-cartésiennes

On présente une nouvelle méthode appelée la méthode COOL (COstraints Oriented Library). Cette méthode prend en compte les contraintes imposées par les différents opérateurs et évite ainsi la génération de solutions non physiques. Dans la méthode COOL, tous les termes dans les formulations variationnelles sont représentés par la même dépendance fonctionnelle et par la même régularité. Les contraintes externes comme la condition d'incompressibilité présente dans les équations de Navier-Stokes ou de Maxwell peuvent être satisfaites identiquement et éliminées algébriquement. Cela réduit le nombre de variables tout en assurant le calcul des bonnes solutions physiques. La méthode COOL satisfait automatiquement les contraintes internes qui apparaissent par exemple dans les opérateurs  $\mathbf{grad}(\text{div})$  et  $\mathbf{rot}(\text{rot})$  et ce quelle que soit la géométrie. Cette approche peut être appliquée à une grande gamme de problèmes physiques. Nous présentons des résultats obtenus pour l'étude du spectre de l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$ , le problème aux valeurs propres de Stokes ainsi que les équations de Navier-Stokes stationnaires et instationnaires.

La nouvelle approche repose sur l'utilisation d'une nouvelle famille de polynômes que nous allons présenter et étudier numériquement.

### 4.1 Une nouvelle base pour $\mathbb{P}_{p-1}(\Lambda)$

On introduit les  $p + 1$  polynômes  $g_i$  de degré  $p - 1$  définis par :

$$\int_{-1}^{+1} (g_i(x) - h_i(x)) x^j dx = 0, \quad 0 \leq i \leq p, \quad 0 \leq j \leq (p - 1).$$



Cette relation montre que les différences  $(g_i - h_i)_{i=0,\dots,p}$  sont proportionnelles à  $L_p$ . Plus exactement, on peut montrer que ces nouveaux polynômes sont donnés par la relation :

$$\begin{aligned} g_i(x) &= h_i(x) - \beta_i L_p(x), \\ \beta_i &= \frac{(h_i, L_p)}{(L_p, L_p)} = \frac{1}{(p+1) L_p(\xi_i)}, \quad 0 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Ils vérifient :

$$\begin{aligned} g_i(\zeta_j) &= h_i(\zeta_j), \quad 1 \leq j \leq p, \\ g'_i(\xi_j) &= h'_i(\xi_j), \quad 1 \leq j \leq (p-1). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que cette nouvelle famille de polynômes, en plus de former une base pour  $\mathbb{P}_{p-1}(\Lambda)$ , permet d'approcher spectralement des fonctions suffisamment régulières. Pour cela on considère pour une fonction donnée  $f$ , le polynôme d'interpolation de degré  $p$  défini par :

$$i_p f(x) = \sum_{j=0}^p f(\xi_j) h_j(x).$$

D'autre part, on définit  $f_{p-1}$  comme l'unique polynôme de degré  $p-1$  tel que :

$$f_{p-1}(x) = \sum_{j=1}^p \alpha_j g_j(x) \quad \text{et} \quad f_{p-1}(\zeta_i) = f(\zeta_i), \quad \forall i = 1 \dots p.$$

Les  $\alpha_j$  peuvent être fixés par les  $p$  égalités :

$$f(\zeta_i) = \sum_{j=1}^p g_j(\zeta_i) \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq p,$$

ce qui nécessite la résolution d'un système faisant intervenir la matrice de masse :

$$(g_j(\zeta_i))_{1 \leq i, j \leq p} = (h_j(\zeta_i))_{1 \leq i, j \leq p}.$$

Cette procédure a été testée pour approcher la fonction définie sur  $] -1, +1[$  par  $f(x) = \sin(x+2)$ . La figure (4.1) montre que l'erreur d'approximation, ici mesurée par la norme  $L^2(\Lambda)$  est du type spectrale.

Quand la fonction  $f$  est nulle au bord, on montre que les coefficients de sa décomposition sur la nouvelle base coïncident avec les valeurs de celle-ci aux noeuds de Gauss-Lobatto :

$$f_{p-1}(x) = \sum_{j=1}^p f(\xi_j) g_j(x) = \sum_{j=1}^{p-1} f(\xi_j) g_j(x).$$

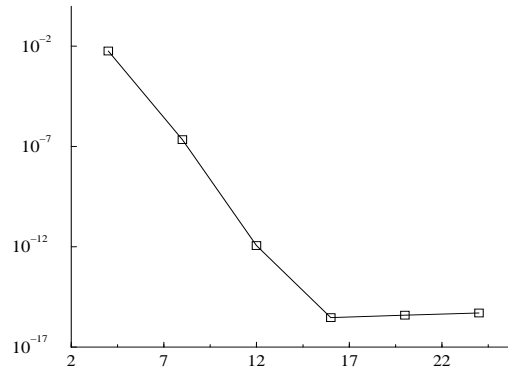


FIG. 4.1: Erreur  $\|f - f_{p-1}\|$  en norme  $L^2(\Lambda)$  en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique.

Cette conclusion est confirmée par la figure (4.2) où l'erreur d'approximation de la fonction  $f(x) = \sin((x^2 - 1) \times (x + 3))$  est présentée. Là aussi la convergence est du type spectrale.

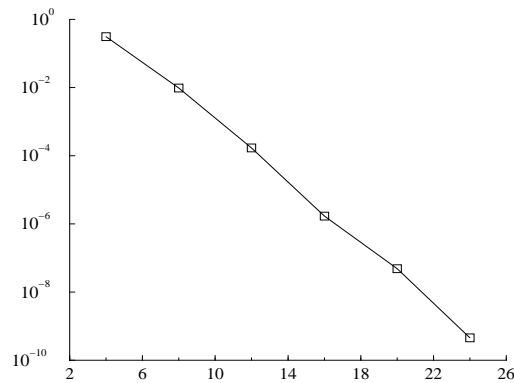


FIG. 4.2: Erreur  $\|f - f_{p-1}\|$  en norme  $L^2(\Lambda)$  en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique.

On souhaite étendre notre approche aux éléments spectraux. L'intervalle  $]-1,1[$  est divisé en  $N$  intervalles de même longueur. On définit alors  $\pi_h f$  comme l'unique fonction polynomiale par morceaux dont la restriction à chaque segment est le polynôme de degré  $p - 1$  construit grâce à la nouvelle base. La validation de cette procédure d'approximation est testée sur la fonction  $f(x) = \sin((x^2 - 1) \times (x + 3))$  et les résultats sont représentés

sur la figure (4.3) où nous avons tracé la fonction  $\pi_h f$  (rouge), l'interpolée de lagrange de degré  $p$  (noir) et enfin la fonction elle-même (bleu).

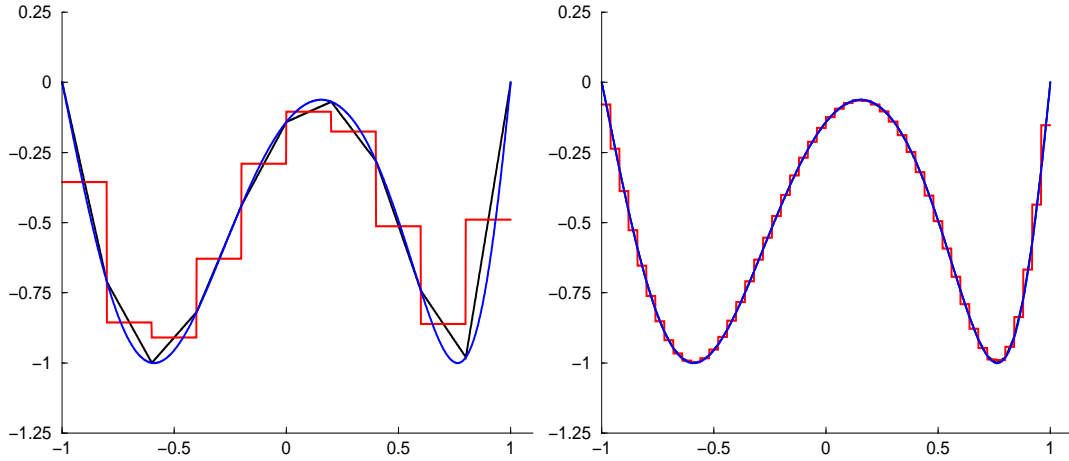


FIG. 4.3: Fonction  $f$  et ses interpolées. En bleu : fonction  $f$ . En rouge : fonction  $\pi_h f$ . En noir : interpolée de degré  $p$ . A gauche :  $p = 1$  et  $N = 50$ . A droite :  $p = 1$  et  $N = 50$ .

Enfin et dans le but de vérifier la qualité de l'approximation en fonction de  $N$  pour des valeurs de  $p$  données, nous avons présenté sur la figure (4.4) sur une échelle logarithmique l'erreur entre  $f$  et  $\pi_h f$  en fonction de  $N$  pour  $p = 1$  (à gauche) et  $p = 2$  (à droite). Dans les deux cas, on observe une décroissance algébrique en  $\mathcal{O}(N^{-p})$ .

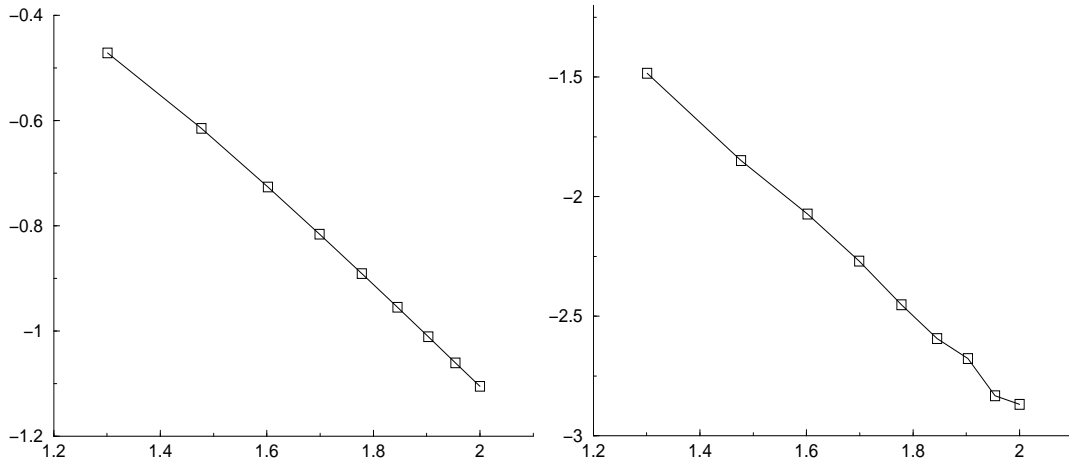


FIG. 4.4: Erreur  $\|f - \pi_h f\|$  en norme  $L^2(\Lambda)$  en fonction de  $N$  sur une échelle logarithmique. A gauche :  $p = 1$ . A droite :  $p = 2$ . ( $\mathcal{O}(N^{-p})$ ).

On a donc introduit une méthode d'approximation basée sur les polynômes  $g_i$  vérifiant les mêmes propriétés que les méthodes  $hp$  classiques.

On souhaite désormais étendre cette nouvelle procédure d'approximation au cas bidimensionnel. La famille des polynômes ( $g_i$ ) nous offrent trois possibilités (neuf en dimension 3) pour approcher une fonction  $f$  donnée. On définit :

$$\begin{aligned} f_p^{(0)}(x, y) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^{(0)} g_i(x) g_j(y), \\ f_p^{(1)}(x, y) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^{(1)} h_i(x) g_j(y), \\ f_p^{(2)}(x, y) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^p \alpha_{ij}^{(2)} g_i(x) h_j(y). \end{aligned} \quad (4.1)$$

On note que ces trois expressions ont des dépendances polynomiales différentes et leurs extensions aux éléments spectraux offrent des fonctions polynomiales de régularités différentes. De la sorte,  $f_p^{(0)}$  est de degré  $p - 1$  dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $f_p^{(1)}$  est de degré  $p$  dans la direction  $x$  et  $p - 1$  dans la direction  $y$ .  $f_p^{(2)}$  est de degré  $p$  dans la direction  $y$  et  $p - 1$  dans la direction  $x$ . Ainsi, on utilisera  $f_p^{(0)}$  pour représenter une grandeur qui n'est pas dérivée,  $f_p^{(1)}$  pour représenter une grandeur qui est dérivée selon la direction  $x$  et  $f_p^{(2)}$  pour représenter une grandeur qui est dérivée selon la direction  $y$ . Les coefficients dans (4.1) sont calculés à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_p^{(0)}(\zeta_k, \zeta_l) &= f(\zeta_k, \zeta_l), \quad 1 \leq k, l \leq p, \text{ pour les } \alpha_{ij}^{(0)}, \text{ ( pas de dérivation),} \\ f_p^{(1)}(\xi_k, \zeta_l) &= f(\xi_k, \zeta_l), \quad 0 \leq k \leq p, \quad 1 \leq l \leq p, \text{ pour les } \alpha_{ij}^{(1)} \text{ ( dérivation en } x), \\ f_p^{(2)}(\zeta_k, \xi_l) &= f(\zeta_k, \xi_l), \quad 1 \leq k \leq p, \quad 0 \leq l \leq p, \text{ pour les } \alpha_{ij}^{(2)} \text{ ( dérivation en } y). \end{aligned}$$

On précise à nouveau que si la fonction  $f$  s'annule aux bords du domaine, les 3 approximations ont les mêmes coefficients que l'interpolée classique :

$$\alpha_{ij}^{(0)} = \alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij}^{(2)} = f(\xi_i, \xi_j).$$

Pour s'assurer que ces approximations sont correctes, on réalise le test numérique suivant. On considère la fonction  $f(x, y) = \sin(2x + y)$  et on calcule les 3 approximations. On représente alors sur une échelle semi-logarithmique les erreurs  $L^2$  pour les 3 approximations en fonction de  $p$ . Dans les 3 cas, la convergence est spectrale.

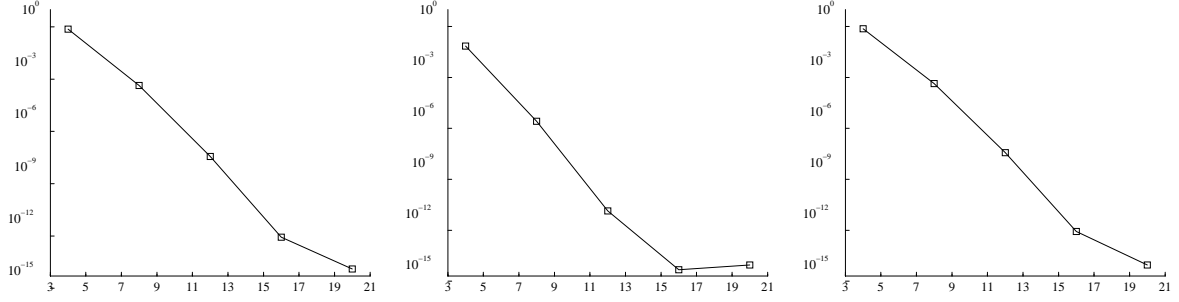


FIG. 4.5: Erreur en norme  $L^2(\Omega)$  en fonction de  $p$  sur une échelle semi-logarithmique. A gauche : cas  $f_p^{(0)}$ . Au centre : cas  $f_p^{(1)}$ . A droite : cas  $f_p^{(2)}$ .

## 4.2 Spectre de l'opérateur -grad(div)

### 4.2.1 Présentation de la méthode

On présente la nouvelle méthode  $hp$  non conforme sur l'étude du problème aux valeurs propres (2.1)-(2.2) résolu sur  $\Omega$  décomposé en  $N^2$  éléments. Il s'agit d'une extension de méthode  $h$  introduite dans [Gruber 85]. Pour une géométrie cartésienne, nous sommes conscients que les méthodes existantes sont suffisantes mais pour un souci de compréhension, nous présentons tout de même notre nouvelle méthode sur le domaine  $\Omega = ]-1, +1[^2$ . L'extension à une géométrie non-cartésienne est réalisée dans [Azaïez 07]. On rappelle la formulation primale du problème : Trouver  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega)$  tels que :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega). \quad (4.2)$$

L'intégrale  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  peut être développée sous la forme :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \, d\mathbf{x}.$$

Nous avons déjà vu que le choix naturel pour approcher  $\mathbf{u}_p$  à savoir :

$$\begin{aligned} u_{xp}(x, y) &\in \mathbb{P}_p(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_p(\Lambda), \\ u_{yp}(x, y) &\in \mathbb{P}_p(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_p(\Lambda), \end{aligned} \quad (4.3)$$

est instable et produit un effet de pollution spectrale. Pour obtenir correctement le couple ( $\lambda = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{u}_p = 0$ ), on modifie la formulation variationnelle. Au lieu de (4.2), on considère :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_{xp}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yp}^{(2)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xp}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yp}^{(2)}}{\partial y} \right) \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} (u_{xp}^{(0)} v_{xp}^{(0)} + u_{yp}^{(0)} v_{yp}^{(0)}) \, d\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Le nombre d'inconnues est passé de deux  $(u_{xp}, u_{yp})$  à six  $(u_{xp}^{(k)}, u_{yp}^{(k)}, k = 0, 1, 2)$  dans le cas général où toutes les dérivées partielles apparaissent dans l'opérateur. Notre but est d'approcher les nouvelles variables de manière que tous les termes dans l'opérateur aient la même dépendance fonctionnelle et la même régularité.

$$\begin{aligned} u_{rp}^{(0)}(x, y) &\in \mathbb{P}_{p-1}(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_{p-1}(\Lambda), \\ u_{rp}^{(1)}(x, y) &\in \mathbb{P}_p(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_{p-1}(\Lambda), \\ u_{rp}^{(2)}(x, y) &\in \mathbb{P}_{p-1}(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_p(\Lambda), \end{aligned}$$

$r$  pouvant être  $x$  ou  $y$ . Avec un tel choix :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_p \in \mathbb{P}_{p-1}(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_{p-1}(\Lambda),$$

et  $\nabla \cdot \mathbf{u}_p$  peut s'annuler identiquement. Ces nouvelles variables sont reliées aux variables initiales par les conditions de moment

$$\int_{\Omega} (u_{rp} - u_{rp}^{(k)}) \mu \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, 2\} \quad (r = x \text{ ou } y), \quad (4.5)$$

où  $\mu = x^\alpha y^\beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta = 0, 1, \dots, p-1$ .

Avec ce choix, tous les termes présents dans la formulation variationnelle et dans l'expression  $\nabla \cdot \mathbf{u}_p$  sont des fonctions polynomiales de degré  $p-1$  en  $x$  et  $y$ , discontinus sur les frontières entre les éléments.

On représente alors :

$$u_{rp}^{(0)}(x, y) = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N \sum_{i=\delta_{e1}}^p \sum_{j=\delta_{f1}}^p \bar{u}_{ij}^{ref} g_i(r_{ef}) g_j(s_{ef}), \quad (4.6)$$

$$u_{rp}^{(1)}(x, y) = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N \sum_{i=\delta_{e1}}^p \sum_{j=\delta_{f1}}^p \bar{u}_{ij}^{ref} h_i(r_{ef}) g_j(s_{ef}), \quad (4.7)$$

$$u_{rp}^{(2)}(x, y) = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N \sum_{i=\delta_{e1}}^p \sum_{j=\delta_{f1}}^p \bar{u}_{ij}^{ref} g_i(r_{ef}) h_j(s_{ef}). \quad (4.8)$$

$\delta_{e1}$  et  $\delta_{f1}$  sont les symboles de Kronecker et  $(r = x \text{ ou } y)$ . Les inconnues  $\bar{u}_{ij}^{ref}$  sont stockées dans un vecteur  $\bar{\mathbf{u}}$ . Il y a  $2(Np)^2$  variables pour  $\bar{\mathbf{u}}_p$  alors qu'il y a  $2(Np+1)^2$  variables pour  $\mathbf{u}_p$  défini par (4.3). La raison est que la fonction  $g(r)$  étant un polynôme de degré  $p-1$ , on doit éliminer certaines variables s'il n'y a pas de conditions limites en  $x$  sur

les bords inférieur ou supérieur et en  $y$  sur les bords droit ou gauche. Les variables du bord inférieur  $\bar{u}_{i0}^{re1}$  ou du bord gauche  $\bar{u}_{0j}^{1f}$  doivent être éliminées afin d'avoir des matrices régulières. Toutes les quantités dans (4.6)-(4.8) sont identiques aux points de Gauss. Le vecteur  $\bar{\mathbf{u}}_p$  a deux composantes. Elles sont définies aux points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) (voir coté gauche de la figure 4.8). Si on doit imposer des conditions de régularité, elles n'ont aucune signification physique et il faut utiliser les sommes décrites au-dessus. En utilisant ces expressions, il est facile de démontrer que les équations de moment (4.5) sont vérifiées. De plus, tous les termes présents dans la formulation variationnelle (4.4) sont des polynômes de degré  $p - 1$  discontinus sur la frontière entre les éléments.

## 4.2.2 Résultats numériques

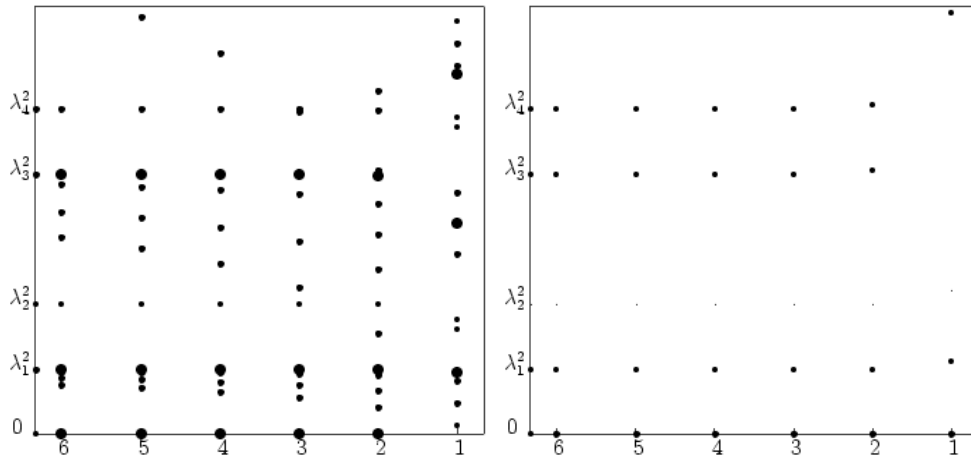


FIG. 4.6: Spectre de l'opérateur  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  pour  $N = 4$  en fonction de  $p$ . À gauche : calcul réalisé avec une méthode  $hp$  standard. À droite : calcul réalisé avec notre nouvelle méthode  $hp$ .

La figure (4.6) représente le spectre de l'opérateur  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  obtenu par une méthode  $hp$  classique (à gauche) et par notre nouvelle méthode COOL (à droite). Le nombre d'éléments est fixé à  $N = 4$  dans chaque direction et  $p$  varie entre 1 et 6. La taille des cercles distingue la multiplicité des valeurs propres. On voit que l'approche classique (à gauche) donne de très mauvais résultats. En effet, pour  $p = 1$ , il n'y a aucune valeur propre nulle. Celle-ci n'est pas captée et elle est remplacée par des valeurs propres non nulles qui sont fausses. De plus cette méthode génère un spectre qui ne correspond pas du tout à celui de l'opérateur  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$ . Au contraire, on peut voir que pour notre nouvelle

méthode (à droite) toutes les valeurs propres sont physiques. La valeur propre  $\lambda^2 = 0$  est obtenue avec la bonne multiplicité  $(Np - 1)^2$ . Pour  $p = 4$ , l'erreur relative pour les premières valeurs propres est de  $10^{-8}$ . On voit donc clairement que le spectre non physique a été remplacé par un spectre physique.

### 4.3 Elimination des contraintes

Les contraintes telles que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  sont souvent imposées par l'intermédiaire d'un terme de pénalisation [Girault 86] ou par une fonction de flux [Leriche 04]. Une autre méthode pour imposer une telle contrainte est de trouver une base solénoïdale comme nous l'avons fait pour la décomposition de Helmholtz. Cela donne un spectre de Stokes parfait. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que la matrice du problème aux valeurs propres est pleine et que cela rend impossible des calculs en 3D. Nous proposons donc une méthode alternative dans laquelle les matrices restent creuses.

On considère pour cela le problème aux valeurs propres de Stokes :

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \lambda^2 \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.11)$$

On doit résoudre le problème aux valeurs propres de Laplace restreint par la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Le gradient de pression  $\nabla p$  est un multiplicateur de Lagrange qui force la vitesse à être à divergence nulle. La principale difficulté de ce problème est de satisfaire la contrainte d'incompressibilité.

Les approches classiques satisfont généralement l'équation (4.9) avec autant d'équations que de degrés de liberté pour la vitesse tandis que la contrainte d'incompressibilité (4.10) n'est satisfaite que faiblement, c'est à dire avec moins d'équations que de degrés de liberté pour la divergence. Notre objectif est de favoriser la contrainte d'incompressibilité par rapport aux autres équations. Notre stratégie consiste à partager les degrés de liberté de  $\mathbf{u}$  de manière pertinente afin de satisfaire la contrainte d'incompressibilité avec autant d'équations que de degrés de liberté pour la divergence tandis que les autres équations ne sont satisfaites que de manière faible. Afin de rendre la compréhension de notre méthode plus aisée, on va la présenter tout d'abord sur un seul élément puis on l'étendra à la méthode des éléments spectraux.



### 4.3.1 Cas mono-domaine

Afin d'écrire le problème (4.9)-(4.11) sous formulation variationnelle, on définit l'espace :

$$\mathbf{X}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Le problème (4.9)-(4.11) s'écrit alors : *Trouver*  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega)$  et  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$  tels que :

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}(\Omega). \quad (4.12)$$

Compte tenu de la nature de  $\mathbf{X}(\Omega)$ , le gradient de pression disparaît et on reconnaît la formulation classique du laplacien.

#### Discrétisation

Un choix naturel pour l'espace d'approximation de  $\mathbf{u}_p$  est :

$$\mathbf{Y}_p = (\mathbb{P}_p(\Omega))^2 \cap \mathbf{X} = \{\mathbf{u}_p \in (\mathbb{P}_p(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{u}_p \in \mathbb{P}_p(\Omega)\} \cap \mathbf{X}.$$

Avec ce choix,  $\nabla \cdot \mathbf{u}_p \in \mathbb{P}_p(\Omega)$ . D'après nos travaux précédents, on souhaite construire un espace :

$$\mathbf{X}_p = \{\mathbf{u}_p \in (\mathbb{P}_p(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{u}_p \in \mathbb{P}_{p-1}(\Omega)\} \cap \mathbf{X}.$$

La solution  $\mathbf{u}_p$  est approchée par  $u_{rp}^{(0)}(x, y)$ ,  $u_{rp}^{(1)}(x, y)$  ou  $u_{rp}^{(2)}(x, y)$  selon la dépendance fonctionnelle et la régularité requise ( $r = x$  ou  $y$ ).

$$\begin{aligned} u_{rp}^{(0)}(x, y) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p u^{rp}(\xi_i, \xi_j) g_i(x) g_j(y), \\ u_{rp}^{(1)}(x, y) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p u^{rp}(\xi_i, \xi_j) h_i(x) g_j(y), \\ u_{rp}^{(2)}(x, y) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p u^{rp}(\xi_i, \xi_j) g_i(x) h_j(y). \end{aligned}$$

Avec un tel choix, l'espace  $\mathbf{X}_p$  devient :

$$\mathbf{X}_p = \{\mathbf{u}_p \in (\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2 \mid \frac{\partial u_{px}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_{py}^{(2)}}{\partial y} = 0\},$$

et la divergence de  $\mathbf{u}_p$  est bien un polynôme de degré  $p - 1$ . Ainsi, la divergence de  $\mathbf{u}_p$  est identiquement nulle si elle est orthogonale à tous les polynômes de  $\mathbb{P}_{p-1}(\Omega)$ .

$$\mathbf{X}_p = \left\{ \mathbf{u}_p \in (\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2 \mid \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_{px}}{\partial x} + \frac{\partial u_{py}}{\partial y} \right) q \, d\mathbf{x} = 0, \forall q \in \mathbb{P}_{p-1}(\Omega) \right\}.$$

Dans un premier temps, on souhaite déterminer la dimension de l'espace  $\mathbf{X}_p$ .

$$\dim \mathbf{X}_p = \dim (\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2 - N_2,$$

où  $N_2$  est le nombre d'équations nécessaire et suffisant pour assurer  $\nabla \cdot \mathbf{u}_p \equiv 0$ . Puisque  $\nabla \cdot \mathbf{u}_p \in \mathbb{P}_{p-1}(\Omega)$  alors  $N_2 \leq p^2$ .

En fait, compte tenu de la condition aux limites, (ici  $\mathbf{u}_p = 0$  sur  $\partial\Omega$ ), la divergence doit seulement être orthogonale à  $p^2 - 2$  fonctions tests puisque [Bernardi 97] :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_p L_0(x)L_0(y) \, d\mathbf{x} &= 0, \forall \mathbf{u}_p \in (\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2, \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_p L'_p(x)L'_p(y) \, d\mathbf{x} &= 0, \forall \mathbf{u}_p \in (\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2. \end{aligned}$$

Il faut donc  $N_2 = p^2 - 2$  fonctions test  $q$  pour imposer  $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_p q \, d\mathbf{x} = 0$ .

$$\dim \mathbf{X}_p = \dim (\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2 - N_2 = 2(p - 1)^2 - (p^2 - 2) = (p - 2)^2.$$

On note  $N_1 = (p - 2)^2$ . On souhaite désormais donner une caractérisation algébrique de  $\mathbf{X}_p$ .

### Caractérisation algébrique de $\mathbf{X}_p$

Afin d'être identiquement nulle, la divergence de  $\mathbf{u}_p$  doit être orthogonale à  $p^2 - 2$  polynômes appartenant à  $\mathbb{P}_{p-1}(\Omega)$ . En utilisant les fonctions de bases (1) pour  $\mathbb{P}_{p-1}(\Omega)$ , cela revient à dire que la divergence de  $\mathbf{u}_p$  doit être nulle en  $p^2 - 2$  points de Gauss. Cela conduit à un système matriciel  $D\mathbf{u}_p = 0$ .

$$N_2 = p^2 - 2 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{D} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{u}_p \\ \hline \end{array} = 0$$

$2(p-1)^2$

La matrice  $D$  est une matrice rectangulaire possédant  $p^2 - 2$  lignes correspondant aux points de Gauss et  $2(p - 1)^2$  colonnes correspondant aux inconnues  $\mathbf{u}_p$ . Chaque ligne de ce système traduit le fait que la divergence est nulle en un point de Gauss. On décompose alors  $D$  en  $D_1 \oplus D_2$  et  $\mathbf{u}_p$  en  $\mathbf{u}_{1p} \oplus \mathbf{u}_{2p}$ .

$$D = \begin{array}{|c|c|} \hline D_1 & D_2 \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{u}_p = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{u}_{1p} \\ \hline \mathbf{u}_{2p} \\ \hline \end{array}$$

Le système  $D\mathbf{u}_p = 0$  est équivalent à :

$$D\mathbf{u}_p = 0 \Rightarrow D_1\mathbf{u}_{1p} + D_2\mathbf{u}_{2p} = 0.$$

Par exemple,  $\mathbf{u}_{1p}$  contient les  $N_1$  premières valeurs de  $\mathbf{u}_p$  et par conséquent  $\mathbf{u}_{2p}$  contient les  $N_2$  valeurs restantes.

$$\begin{array}{c} N_2 \\ \boxed{D_1} \\ N_1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{u}_{1p} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} N_2 \\ \boxed{D_2} \\ N_2 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{u}_{2p} \\ \hline \end{array} = 0$$

Puisque les  $p^2 - 2$  lignes de la matrice  $D$  sont indépendantes, il existe au moins un choix tel que la matrice  $D_2$  soit inversible et on a donc :

$$\mathbf{u}_{2p} = -D_2^{-1}D_1\mathbf{u}_{1p}. \quad (4.13)$$

L'équation (4.13) est très importante puisqu'elle signifie que connaissant une partie  $\mathbf{u}_{1p}$  d'un vecteur, on peut calculer son complémentaire  $\mathbf{u}_{2p}$  afin que le vecteur soit à divergence nulle. A partir de ce dernier argument, on propose une méthode afin de construire une base de  $\mathbf{X}_p$

### Construction d'une base pour $\mathbf{X}_p$

Soit  $\mathbf{v}_p \in (IP_p^0(\Omega))^2$ , notre stratégie pour construire une base de  $\mathbf{X}_p$  consiste à combiner :

- une réduction de  $\mathbf{v}_p$  à  $\mathbf{v}_{1p}$  de taille  $N_1$ ,
- une extension à divergence nulle de  $\mathbf{v}_{1p}$  à  $\mathbf{w}_p = (\mathbf{v}_{1p}, \mathbf{v}_{2p})$  telle que  $\nabla \cdot \mathbf{w}_p = 0$ . Cette extension à divergence nulle est assurée par la multiplication de  $\mathbf{v}_{1p}$  par la matrice  $M$ .

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{I} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline -\mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{D}_1 \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{l} N_1 \\ N_2 \end{array}$$

FIG. 4.7: Matrice  $M$

La matrice  $M$  est une matrice rectangulaire comprenant deux blocs (voir figure (4.7)). Le premier bloc est une matrice carrée d'ordre  $N_1$  égale à l'identité. Le second bloc comprend  $N_2$  lignes et  $N_1$  colonnes. Il permet le passage de  $\mathbf{v}_{1p}$  à  $\mathbf{v}_{2p}$  afin que  $\nabla \cdot \mathbf{w}_p = 0$ . Ainsi, à chaque  $\mathbf{v}_p \in (\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2$ , on associe un unique vecteur  $\mathbf{w}_p$  de  $\mathbf{X}_p$ .

Le principe de construction de base pour  $\mathbf{X}_p$  consiste alors à :

- choisir  $N_1 = (p-2)^2$  vecteurs  $(\mathbf{v}_p^k)_{k=1..N_1}$  de la base de  $(\mathbb{P}_p^0(\Omega))^2$  (par exemple les  $(p-2)^2$  premiers),
- pour chacun de ces  $N_1$  vecteurs, considérer sa partie réduite notée  $\mathbf{v}_{1p}^k$  et de taille  $N_1$ ,
- considérer ensuite l'extension à divergence nulle  $(\mathbf{w}_p^k)_{k=1..N_1} = (M \mathbf{v}_{1p}^k)_{k=1..N_1}$ .

La famille des  $(\mathbf{w}_p^k)_{k=1..N_1}$  ainsi construite est une base de  $\mathbf{X}_p$ .

### Retour au problème discret

On cherche  $\mathbf{u}_p \in \mathbf{X}_p$  c'est à dire :

$$\mathbf{u}_p = \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_k \mathbf{w}_p^k.$$

La formulation variationnelle discrète s'écrit : *Trouver  $\mathbf{u}_p \in \mathbf{X}_p$  et  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que :*

$$\sum_{k=1}^{N_1} (\nabla \mathbf{w}_p^k, \nabla \mathbf{w}_p^i)_p \alpha_k = \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_1} (\mathbf{w}_p^k, \mathbf{w}_p^i)_p \alpha_k,$$

soit

$$\underline{\mathcal{S}}\underline{\alpha} = \lambda^2 \underline{\mathcal{M}}\underline{\alpha},$$

avec pour  $(1 \leq i, k \leq N_1)$ ,

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{S}}_{ik} &= (\nabla \mathbf{w}_p^k, \nabla \mathbf{w}_p^i)_p, \\ \underline{\mathcal{M}}_{ik} &= (\mathbf{w}_p^k, \mathbf{w}_p^i)_p. \end{aligned}$$

Ce système est équivalent à

$$M^T A M \mathbf{u}_{1p} = \lambda^2 M^T B M \mathbf{u}_{1p},$$

où  $A$  et  $B$  désignent respectivement la matrice du laplacien et la matrice de masse classiques. C'est ce système qui a été mis en oeuvre.

### 4.3.2 Extension aux éléments spectraux

On souhaite désormais étendre notre méthode aux éléments spectraux. Le choix des variables  $\mathbf{u}_{1p}$  et  $\mathbf{u}_{2p}$  est très important. Dans le cas des éléments spectraux  $N_2 = (Np)^2 - 2$  et  $N_1 = (Np - 2)^2$ . Notre objectif est d'utiliser notre méthode pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Pour inverser la matrice  $D_2$ , on réalise une décomposition LU et le choix de  $\mathbf{u}_{1p}$  et  $\mathbf{u}_{2p}$  est primordial pour la structure de cette matrice. A partir de l'égalité  $(Np)^2 - 2 = (N^2 - 1)p^2 + p^2 - 2$ , on décide de prendre  $p^2$  variables  $\mathbf{u}_{2p}$  dans chaque élément excepté dans l'élément du coin supérieur droit où on choisit  $p^2 - 2$  variables. Ce choix est représenté dans la figure (4.8).

On rappelle que les  $N_1$  variables  $\mathbf{u}_{1p}$  satisfont les équations de conservation de la quantité de mouvement tandis que les  $N_2$  variables  $\mathbf{u}_{2p}$  sont calculées à partir de  $\mathbf{u}_{1p}$  afin de satisfaire exactement la contrainte d'incompressibilité. Avec ce choix, la matrice  $D_2$  a une structure creuse (voir figure (4.9)), ce qui permet une décomposition LU par bloc. Chaque bloc carré de la matrice  $D_2$  correspond à un élément tandis que les structures rectangulaires correspondent aux variables sur le squelette.

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Spectre de Stokes

Pour valider notre stratégie d'élimination algébrique de la divergence, nous avons calculé le spectre du problème (4.12). Les valeurs propres et vecteurs propres sont obtenus

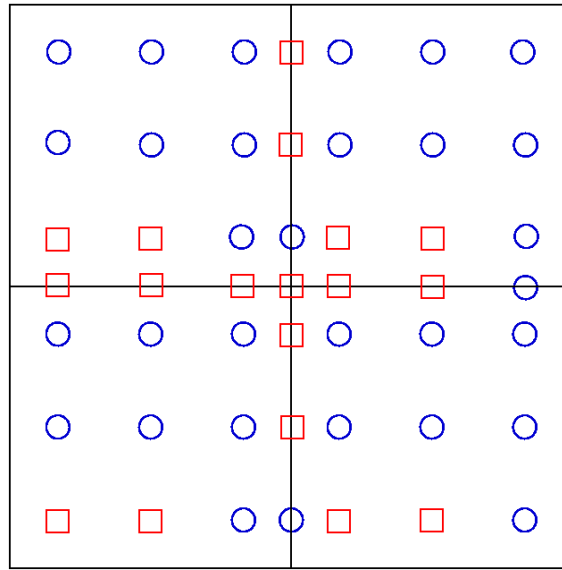


FIG. 4.8: Choix des variables  $\mathbf{u}_{1p}$  et  $\mathbf{u}_{2p}$ .  $N = 2$ ,  $p = 4$ . Les cercles bleus désignent les composantes éliminées  $\mathbf{u}_{2p}$ . Les carrés rouges désignent les variables restantes  $\mathbf{u}_{1p}$ . Chaque cercle ou carré contient deux variables correspondant à  $(u_{xp}, u_{yp})$ .

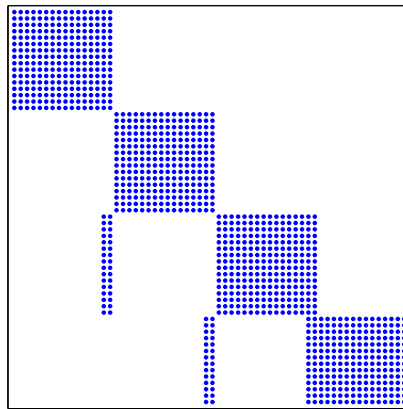


FIG. 4.9: Structure creuse de la matrice  $D_2$  et de sa décomposition LU pour  $(N = 2, p = 4)$ .

avec grande précision. On fixe le nombre de points de maillage  $Np = 40$ . La figure (4.10) montre la convergence de la première valeur propre  $\lambda_1^2 = 13.0861727921$  et la 73ème  $\lambda_{73}^2 = 301.8406425660$  vers leur valeurs théoriques issues de [Leriche 04].

Il a été montré théoriquement que les vecteurs propres ont une structure globale avec une série infinie de tourbillons de Moffatt dans les coins avec des amplitudes de plus en plus petites [Moffatt 64]. La figure (4.11 à droite) représente la composante  $u_x$  du 13ème

vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_{13}^2 = 69.769769316$ . L'amplitude est de 0.852. Le premier tourbillon de Moffatt dans le coin supérieur gauche de la géométrie a une amplitude de  $1.10^{-3}$ , tandis que le second tourbillon de Moffatt a une amplitude de  $2.10^{-6}$ . Ces amplitudes sont en accord avec la théorie.

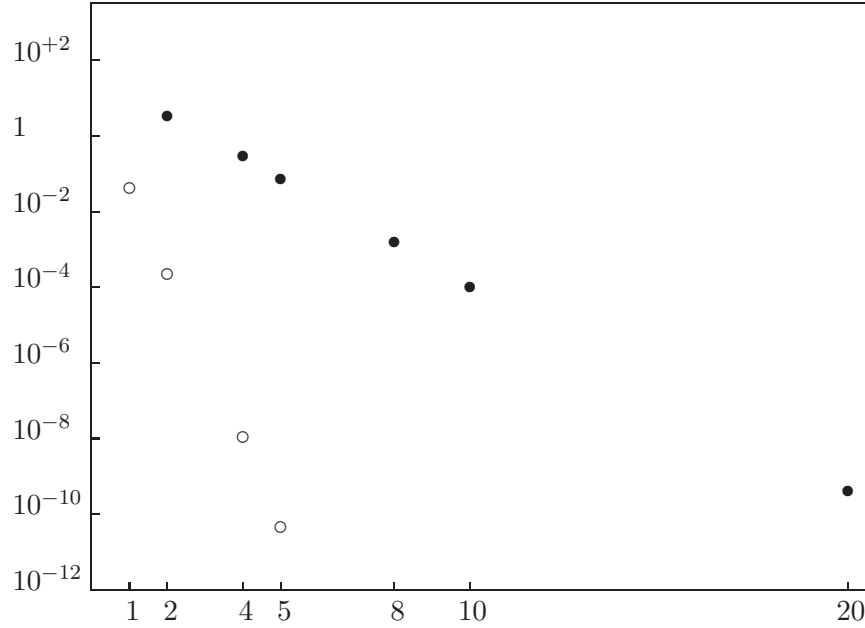


FIG. 4.10: Erreur relative pour la première  $\lambda_1^2 = 13.0861727921$  (cercles vides) et la 73ème  $\lambda_{73}^2 = 301.8406425660$  (cercles pleins) valeur propre de Stokes en fonction de  $p$  pour  $Np$  fixé à 40 sur une échelle semi-logarithmique.

#### 4.4.2 Problème de Stokes

Nous souhaitons désormais utiliser notre méthode afin de résoudre les équations de Navier-Stokes. Afin de vérifier l'efficacité de notre méthode pour résoudre ces équations, nous avons considéré dans un premier temps le problème de Stokes suivant : *Trouver*  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$  tel que :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

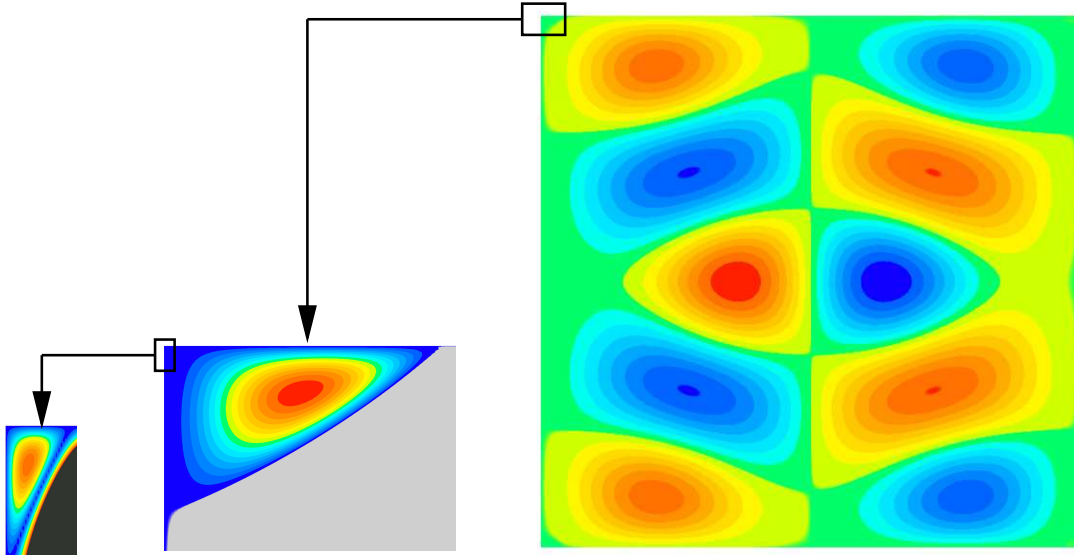


FIG. 4.11: Composante  $u_{px}$  du 13ème vecteur propre de Stokes. Les premiers (milieu) et seconds (gauche) tourbillons de Moffatt dans les coins sont montrés dans les zooms.

Avec la même stratégie que précédemment, on réduit le problème à  $\mathbf{u}_{1p}$  et le nouveau système matriciel s'écrit :

$$M^T A M \mathbf{u}_{1p} = M^T \mathbf{F}.$$

Malheureusement, la matrice  $M^T A M$  est mal conditionnée (pour  $N = p = 4$ ,  $C(M^T A M) = 18810$ ). Afin d'illustrer le mauvais conditionnement de cette matrice, on représente son évolution sur la figure (4.12). A gauche on trace l'évolution en fonction de  $p$  pour  $N = 2$  et à droite l'évolution en fonction de  $N$  pour  $p = 2$ . On constate un comportement en  $\mathcal{O}(N^4 p^7)$  alors que le conditionnement de la matrice du laplacien  $A$  évolue en  $\mathcal{O}(N^2 p^3)$ . Ce conditionnement est très élevé et on a donc besoin d'un préconditionneur.

Afin de confirmer le mauvais conditionnement de la matrice  $M^T A M$ , on réalise un test numérique en utilisant la solution analytique :

$$\mathbf{u} = ((1 - x^2)^2 y(1 - y^2), -(1 - y^2)^2 x(1 - x^2)).$$

Le tableau (4.1) représente le nombre d'itérations du solveur itératif en fonction de  $p$  et  $N$ . La première colonne représente le nombre d'itérations du gradient conjugué lorsque l'on utilise la matrice  $M^T A M$  et la deuxième colonne ce nombre lorsque l'on utilise la matrice  $A$ . On constate que le nombre d'itérations quand on utilise la matrice  $M^T A M$  est très important comparé à celui utilisé pour la matrice  $A$ . Cela confirme la nécessité d'avoir un préconditionneur afin d'accélérer la convergence du système itératif.



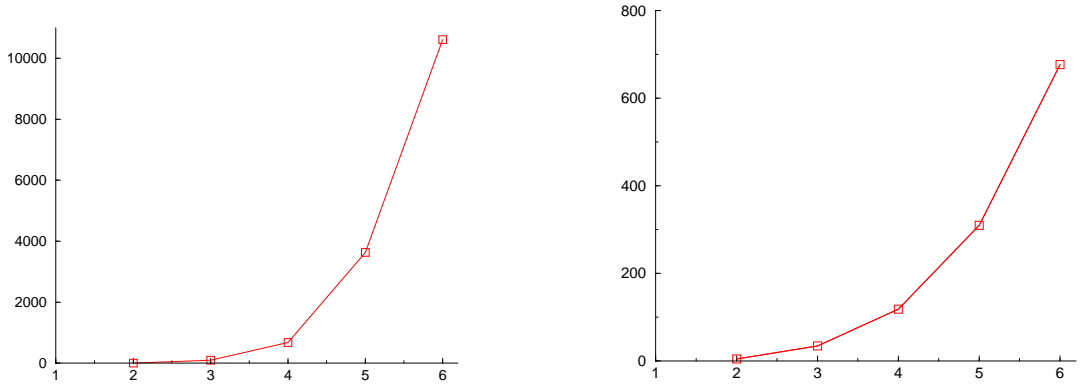


FIG. 4.12: Evolution du conditionnement. A gauche : évolution en fonction de  $p$  pour  $N = 2$ . A droite : évolution en fonction de  $N$  pour  $p = 2$ .

$p = N$	Stokes GC ( $M^T AM$ )	Laplacien GC ( $A$ )
3	59	16
4	289	34
5	925	62
6	2613	95

TAB. 4.1: Nombre d'itérations de la méthode itérative en fonction de  $N$  et  $p$ .

### 4.4.3 Equations de Navier-Stokes

Nous allons appliquer notre méthode pour résoudre les équations de Navier-Stokes. On considère le problème suivant formulé sur  $\Omega \times [0, t^*]$  : Trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega)$  tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times [0, t^*], \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, t^*], \\ \mathbf{u}(\cdot, t = 0) &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

où  $\text{Re}$  représente le nombre de Reynolds. La première difficulté consiste à traiter le terme non linéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ . On utilise pour cela un schéma d'ordre 2 explicite d'Adams-Bashforth. On divise l'espace d'intégration en temps  $[0, t^*]$  en  $m^*$  intervalles de longueur  $\Delta t = \frac{t^*}{m^*}$  et on définit  $t^m = m\Delta t$  pour tout  $m, 0 \leq m \leq m^*$ . On considère alors une

suite  $(\mathbf{u}^m)_{0 \leq m \leq m^*}$  qui approche  $(\mathbf{u}(\cdot, t^m))_{0 \leq m \leq m^*}$ . Admettant que  $(\mathbf{u}^k)_{0 \leq k \leq m}$  est connu, on cherche alors la vitesse  $\mathbf{u}^{m+1} \in \mathbf{X}(\Omega)$  en résolvant :

$$\frac{3\mathbf{u}^{m+1} - 4\mathbf{u}^m + \mathbf{u}^{m-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{f}^{m+1} - T_{NL}(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^{m-1}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u}^{m+1} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.15)$$

où  $T_{NL}(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^{m-1}) = 2((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^m - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^{m-1}$ .

Pour vérifier la précision de l'approximation, on résout les équations de Navier-Stokes instationnaires avec  $\text{Re} = 1$  et en utilisant la solution analytique suivante :

$$\mathbf{u} = (\sin(y) \cos(5t), \sin(x) \cos(5t)).$$

La figure (4.13) représente sur une échelle logarithmique l'erreur en norme sup au temps  $t = 1$  en fonction du pas de temps  $\Delta t$ . On fixe  $p = 6$  et  $N = 2$ . On retrouve bien l'ordre 2 de convergence temporelle attendu.

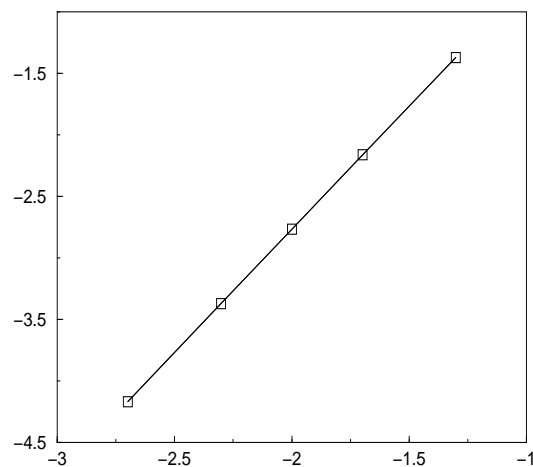


FIG. 4.13: Erreur en norme sup en fonction du pas de temps  $\Delta t$  sur une échelle logarithmique. La pente est proche de 2.

Afin de vérifier la convergence spatiale, nous considérons ensuite un exemple étudié par Kovasznay [Kovasznay 48]. On traite les équations de Navier-Stokes stationnaires sur un domaine rectangulaire  $\Omega = ]-0.5, 1[ \times ]-0.5, 1.5[$  avec la solution exacte suivante :

$$\mathbf{u} = \left( 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y), \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \right),$$

où  $\lambda = \frac{Re}{2} - \left(\frac{Re^2}{4} + 4\pi^2\right)^{\frac{1}{2}}$ , et  $Re = 40$ . A chaque pas de temps ( $\Delta t = 0.01$ ), on résout le problème (4.14)-(4.15) par la méthode COOL. La boucle en temps est interrompue quand le régime stationnaire est établi c'est-à-dire lorsque la différence entre deux vitesses successives est inférieure à un seuil donné :  $\max(|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m|) < 10^{-8}$ .

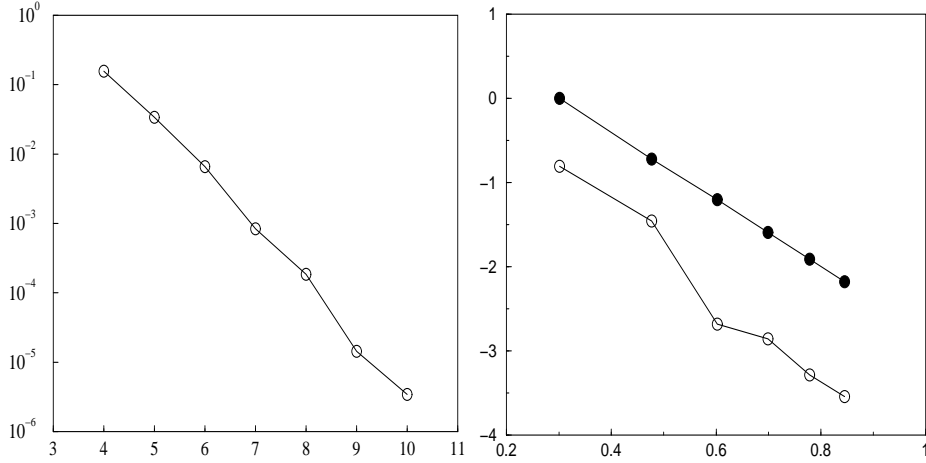


FIG. 4.14: Courbes de convergence pour le problème de Kovaszny. A gauche : erreur en fonction de  $p$  pour  $N = 2$  sur une échelle semi-logarithmique. A droite : erreur en fonction de  $N$  pour  $p = 4$  sur une échelle logarithmique. Les cercles vides représentent l'erreur numérique et les cercles pleins représentent le comportement de l'erreur attendue ( $\mathcal{O}(N^{-p})$ ).

La figure (4.14 à gauche) fournit sur une échelle semi-logarithmique l'évolution de l'erreur en norme sup en fonction de  $p$  pour  $N = 2$ . La décroissance exponentielle attendue est observée. La figure (4.14 à droite) représente sur une échelle logarithmique l'évolution de l'erreur en norme sup en fonction de  $N$  pour  $p = 4$ . On retrouve bien la décroissance attendue en  $\mathcal{O}(N^{-p})$ . Enfin, la figure (4.15) représente les lignes de courant du fluide pour  $p = 10$  et  $N = 2$ . Ce résultat est en accord complet avec [Kovaszny 48].

Enfin, nous souhaitons voir si notre méthode est adaptée pour traiter des problèmes physiques réels. Pour cela, on considère le cas de la cavité entraînée. L'écoulement dans une cavité fermée, dont la paroi supérieure est mobile, est un cas test classique qui a fait l'objet de nombreuses études numériques. Le problème est celui d'une cavité carrée dont la paroi supérieure glisse, entraînant par viscosité le fluide (voir figure (4.16)). La vitesse est régularisée, c'est à dire qu'elle est nulle aux coins supérieurs afin d'éviter tout phénomène

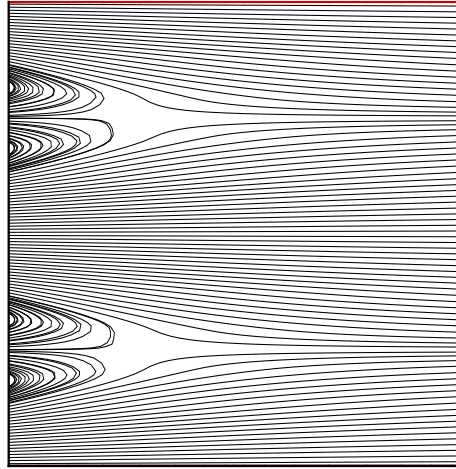


FIG. 4.15: Lignes de courant pour l'écoulement de Kovasznay.

de discontinuité et l'apparition d'oscillations de Gibbs.

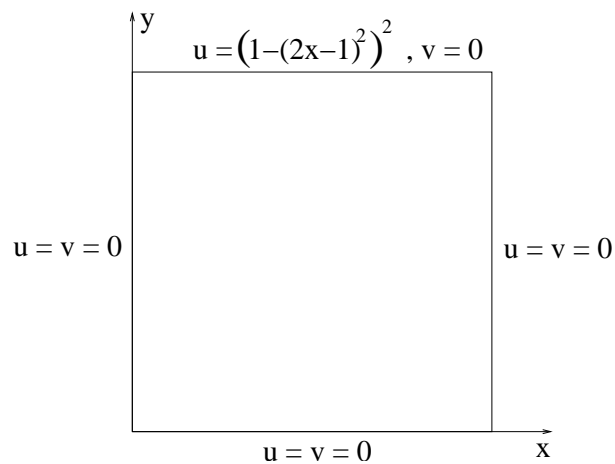


FIG. 4.16: Cavité entraînée.

Les calculs sont effectués pour différents nombres de Reynolds ( $Re = 100$ ,  $Re = 400$  et  $Re = 1000$ ) et comparés avec les résultats obtenus par Shen [Shen 87]. On représente alors les lignes de courant (voir figure (4.17)). On retrouve un tourbillon principal décentré qui occupe la majeure partie de la cavité. Dans les coins inférieurs de la cavité, des tourbillons secondaires apparaissent. Le tourbillon inférieur droit est le plus important, il se développe dès les plus bas Reynolds. Ces tourbillons se stabilisent pour des  $Re > 3000$ .

Les centres des tourbillons se déplacent en fonction du nombre de Reynolds, permettant ainsi à des tourbillons ternaires de se développer. Celui du tourbillon principal, proche de la paroi supérieure à faible Reynolds, se rapproche du centre de la cavité avec l'augmentation du Reynolds. Les centres des tourbillons secondaires ont tendance à s'éloigner des parois. Enfin, au delà d'un Reynolds critique, le régime devient turbulent et l'écoulement instationnaire.

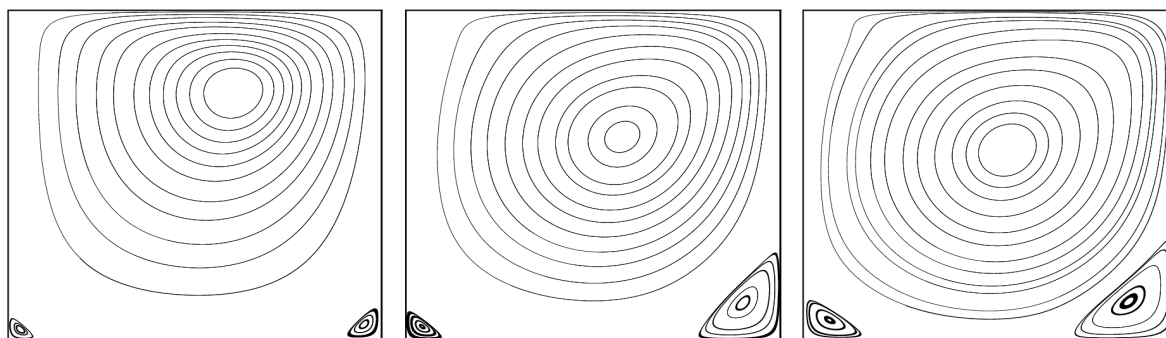


FIG. 4.17: Lignes de courant pour la cavité entraînée pour différents nombres de Reynolds. A gauche :  $Re = 100$ . Au centre :  $Re = 400$ . A droite :  $Re = 1000$ .

On calcule ensuite la fonction de courant. On note respectivement TP, TG et TD les valeurs de la fonction de courant au centre du tourbillon principal, au centre du tourbillon en bas à gauche et au centre du tourbillon en bas à droite. Le tableau (4.2) représente les différentes valeurs de TP, TG et TD en fonction du nombre de Reynolds. Les grandeurs entre parenthèses sont les valeurs calculées dans [Shen 87]. On constate qu'on est en parfait accord pour le tourbillon principal.

Reynolds	TP	TG	TD
100	0.08367 (0.08366)	-1.226E-6 (-1.266E-6)	-4.779E-6 (4.907E-6)
400	0.08573 (0.08573)	-2.723E-6 (-2.591E-6)	-2.361E-4 (-2.56E-4)
1000	0.08481 (0.08430)	-4.588E-5 (-5.149E-5)	-9.011E-4 (-8.817E-4)

TAB. 4.2: Valeurs de la fonction de courant au centre des tourbillons.

## Conclusion

Nous avons donc montré l'efficacité de notre nouvelle méthode en traitant différents problèmes physiques. Nous avons tout d'abord montré dans le cadre du spectre de l'opérateur  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  que notre approche évite tout phénomène de pollution spectrale, que le spectre converge exponentiellement vers le spectre analytique et que cette méthode peut s'appliquer sur des géométries cartésiennes ou non-cartésiennes. Dans le cadre du problème aux valeurs propres de Stokes, notre méthode d'élimination algébrique de la divergence donne des résultats satisfaisants dans le sens où on réduit le nombre d'inconnues du problème, que la contrainte d'incompressibilité est satisfaite fortement et que le spectre discret converge là aussi exponentiellement vers le spectre attendu. Enfin, nous avons appliqué avec succès notre méthode pour traiter les équations de Navier-Stokes stationnaires et instationnaires.



# Conclusion générale

Le but de cette thèse était d'étudier l'approximation de l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$  dans le cadre des méthodes spectrales et des éléments spectraux avec une extension aux techniques du type  $hp$ . La présence de cet opérateur dans divers domaines de la physique conjuguée au manque d'investigation dans le domaine des méthodes spectrales a été la principale motivation de ce sujet de recherche.

Nous nous sommes dans un premier temps focalisés sur l'étude du problème aux valeurs propres lié à cet opérateur, notre domaine d'étude étant le carré de référence. Nous avons envisagé deux types de conditions limites, la première de type glissement et une seconde dite "libre". Pour chacune de ces conditions aux limites nous avons étudié les conséquences de l'utilisation d'un élément spectral naturel mais non stable. Nous avons en particulier fait le lien entre la présence de modes parasites pour la formulation duale et le phénomène de pollution présent dans la formulation primale. Cette analyse du cas non stable nous a conduit à proposer un même élément spectral stable pour chacune des deux conditions limites. Nous avons montré que cet élément évite tout phénomène de pollution spectrale et produit un spectre discret possédant toutes les propriétés attendues (bon nombre de valeurs propres nulles, bon nombre de valeurs propres non nulles, caractère solénoïdal des vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles, caractère irrotationnel des vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles, convergence exponentielle du spectre non nul vers ses valeurs analytiques). Les expérimentations numériques ont été réalisées aussi bien en 2D qu'en 3D.

Afin d'élargir notre savoir faire à des géométries du type union de carrés ou de cubes, nous avons présenté un algorithme itératif du type Dirichlet-Neumann pour le Laplacien mais adapté à l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$ . La principale originalité réside dans l'identification des conditions de raccord entre les sous domaines. Nous avons ensuite interprété notre



problème de décomposition de domaine comme un problème de Steklov-Poincaré sur le squelette et notre algorithme itératif comme un schéma de Richardson pour résoudre la matrice de complément de Schur associée à notre opérateur. Les différents tests numériques ont montré l'efficacité ainsi que les limites d'une telle démarche.

Après nous être assurés de la précision et stabilité de notre discrétisation pour les deux conditions limites, nous avons envisagé plusieurs applications. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteur qui consiste à décomposer un champ quelconque en une somme d'un champ à divergence nulle muni d'une certaine condition limite et d'un champ à rotationnel nul. Nous avons étudié deux méthodes complètement différentes mais utilisant toutes les deux les propriétés de l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$ . La première méthode consiste à projeter le champ que l'on veut décomposer soit sur l'image de l'opérateur, soit sur son noyau. En effet l'image de l'opérateur est constituée de vecteur à rotationnel nul tandis que son noyau comporte des vecteurs à divergence nulle. Ainsi la projection sur le noyau nous donnera la partie solénoïdale et la projection sur l'image nous fournira la partie à rotationnel nul. Une autre méthode pour effectuer cette décomposition est d'utiliser l'opérateur  $\mathbf{grad}(\text{div})$  comme opérateur de projection afin d'extraire la partie solénoïdale du champ à décomposer. Nous avons notamment analysé cette "projection vectorielle" afin de comprendre son lien avec la décomposition de Helmholtz.

Tous nos résultats précédents n'étant valables que pour des domaines cartésiens, nous avons proposé une nouvelle méthode qui traite aussi bien les domaines cartésiens que non-cartésiens. Cette extension permet entre autre le traitement de géométries non convexes sur lesquelles plusieurs auteurs ont travaillé et proposé de multiples idées. Notre méthode repose essentiellement sur l'exploitation d'une base polynomiale introduite par Gruber et al [Gruber 85], que nous avons, à l'occasion de cette thèse, formalisée et étudiée numériquement. Cette nouvelle famille de polynômes nous a permis de mettre en place la méthode baptisée COOL (COstraints Oriented Library). Avec notre approche, tous les termes dans les formulations variationnelles possèdent la même régularité et le même degré polynomial. Ainsi, il n'y pas de phénomène de pollution spectrale et les contraintes internes sont satisfaites automatiquement. De plus, notre méthode nous permet de satisfaire identiquement les contraintes externes en les éliminant algébriquement. Nous avons validé cette stratégie d'élimination algébrique dans le cadre de l'étude du problème aux

valeurs propres de Stokes ainsi que pour la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires et instationnaires.

De nombreuses perspectives sont désormais envisageables dans le cadre du développement de la méthode COOL. Dans un premier temps, nous devons trouver des pré-conditionneurs qui accélèrent la convergence de nos systèmes itératifs. De plus, pour la simulation d'écoulements incompressibles, nous devons valider notre approche sur des cas test physiques et pas uniquement numériques. Un autre objectif est d'étendre la méthode COOL à des domaines tridimensionnels et à la contrainte  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ .



# Bibliographie

- [Achdou 03] Y. ACHDOU, C. BERNARDI & F. COQUEL. *A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations*. *Numerische Mathematik*, vol. 96, p. 17–42, 2003.
- [Agoshkov 85] V.I. AGOSHKOV & V.I. LEBEDEV. *Poincaré-Steklov operators and the methods of partition of the domain in variational problems*. *GI Marchuk*, vol. 2, p. 173–227, 1985.
- [Ahusborde 07a] E. AHUSBORDE, M. AZAÏEZ & J.P. CALTAGIRONE. *A primal formulation for the Helmholtz decomposition*. *Journal of Computational Physics*, vol. 225, p. 13–19, 2007.
- [Ahusborde 07b] E. AHUSBORDE, M. AZAÏEZ, M.O. DEVILLE & E.H. MUND. *Legendre Spectral Methods for the  $-\text{grad}(\text{div})$  Operator*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, p. 4538–4547, 2007.
- [Ahusborde 07c] E. AHUSBORDE, M. AZAÏEZ, M.O. DEVILLE & E.H. MUND. *Legendre Spectral Methods for the  $-\text{grad}(\text{div})$  Operator with free Boundary Conditions*. Soumis pour publication dans *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2007.
- [Ahusborde 07d] E. AHUSBORDE, M. AZAÏEZ, M.O. DEVILLE & R. GRUBER E.H. MUND. *Constructive Spectral Approaches for the Helmholtz Decomposition of a Vector Field*. *Applied Numerical Mathematics*, vol. doi :10.1016/j.apnum.2007.04.005, 2007.
- [Ahusborde 07e] E. AHUSBORDE, R. GRUBER, M. AZAÏEZ & M.L. SAWLEY. *Physics-conforming numerical constraints-oriented library method*. *Physical Review E*, vol. doi :10.1103/PhysRevE.75.056704, 2007.

- [Appert 75] K. APPERT, D. BERGER, R. GRUBER & J. RAPPAZ. *A new finite element approach to the normal mode analysis in MHD*. Journal of Computational Physics, vol. 18, p. 284–299, 1975.
- [Appert 82] K. APPERT, R. GRUBER, F. TROYON & J. VACLAVIK. *Excitation of global eigenmodes of the Alfvén wave in Tokamaks*. Plasma Physics, vol. 24, p. 903–919, 1982.
- [Arnold 89] D.N. ARNOLD & R.S. FALK. *A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 26, p. 1276–1290, 1989.
- [Assous 99] F. ASSOUS, P. CIARLET, P.A. RAVIART & E. SONNENDRÜCKER. *Characterization of the singular part of the solution of Maxwell's equations in a polyhedral domain*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 22, p. 485–499, 1999.
- [Azaïez 94] M. AZAÏEZ, C. BERNARDI & M. GRUNDMANN. *Spectral Method Applied to Porous Media*. East-West Journal of Numerical Mathematics, vol. 2, p. 91–105, 1994.
- [Azaïez 98] M. AZAÏEZ, F. BEN BELGACEM, M. GRUNDMANN & H. KHALLOUF. *Staggered grids hybrid-dual spectral element methods for second order elliptic problems. Application to high-order time splitting for Navier-Stokes equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 166, p. 183–199, 1998.
- [Azaïez 06] M. AZAÏEZ, M.O. DEVILLE, R. GRUBER & E.H. MUND. *On a Stable Spectral Element for the grad(div) Eigenvalue Problem*. Journal of Scientific Computing, vol. 27, p. 41–50, 2006.
- [Azaïez 07] M. AZAÏEZ, M.O. DEVILLE, R. GRUBER & E.H. MUND. *A new hp Method for the -grad(div) Operator in non-Cartesian Geometries*. Applied Numerical Mathematics, vol. doi :10.1016/j.apnum.2007.04.013, 2007.
- [Batchelor 67] G. BATCHELOR. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [Bathe 95] K.-J. BATHE, C. NITIKITPAIBOON & X. WANG. *A mixed displacement-based finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction*. Computers and Structures, vol. 56, p. 225–237, 1995.

- 
- [Bermúdez 95] A. BERMÚDEZ, R. DURAN, A. MUSCHIETTI, R. RODRÍGUEZ & J. SOLOMIN. *Finite element vibration analysis of fluid-solid systems without spurious modes*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 32, p. 1280–1295, 1995.
- [Bernardi 97] C. BERNARDI & Y. MADAY. Spectral Methods in Handbook of Numerical Analysis . P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North-Holland, 1997.
- [Boffi 97] D. BOFFI, F. BREZZI & L. GASTALDI. *On the convergence of eigenvalues for mixed formulations*. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., vol. 25, p. 131–154, 1997.
- [Boffi 98] D. BOFFI, F. BREZZI & L. GASTALDI. *Mixed Finite Elements for Maxwell's Eigenproblem : the Question of Spurious Modes*. World Scientific, p. 180–187, 1998.
- [Boffi 99] D. BOFFI, R.G. DURAN & L. GASTALDI. *A remark on spurious eigenvalues in a square*. Applied Mathematics Letters, vol. 12, p. 107–114, 1999.
- [Boffi 00a] D. BOFFI, F. BREZZI & L. GASTALDI. *On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form*. Mathematics of computation, vol. 69, p. 121–140, 2000.
- [Boffi 00b] D. BOFFI, C. CHINOSI & L. GASTALDI. *Approximation of grad-div operator in non-convex domains*. Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol. 1, p. 27–38, 2000.
- [Boffi 00c] D. BOFFI, C. CHINOSI & L. GASTALDI. *Penalized approximation of the vibration frequencies of a fluid in a cavity*. Computing and Visualization in Science, vol. 3, p. 19–23, 2000.
- [Boffi 00d] D. BOFFI & L. GASTALDI. *On the "-grad div+s curl rot" operator*. In Computational fluid and solid mechanics, First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, p. 1526–1529, 2000.
- [Boffi 01] D. BOFFI, M. FARINA & L. GASTALDI. *On the approximation of Maxwell's eigenproblem in general 2D domains*. Computers & Structures, vol. 79, p. 1089–1096, 2001.
- [Boffi 06] D. BOFFI, M. COSTABEL, M. DAUGE & L. DEMKOWICKZ. *Discrete compactness for the hp version of rectangular edge finite elements*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 44, p. 979–1004, 2006.

- [Bossavit 98] A. BOSSAVIT. *Computational Electromagnetism* . Academic Press, 1998.
- [Botsis 06] J. BOTSIS & M.O. DEVILLE. *Mécanique des milieux continus*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
- [Brezzi 86] F. BREZZI & M. FORTIN. *Numerical approximations of Mindlin-Reissner plate*. *Mathematics of Computation*, vol. 47, p. 151–158, 1986.
- [Brezzi 91] F. BREZZI & M. FORTIN. *Mixed and hybrid finite element methods* . Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Caltagirone 99] J.P. CALTAGIRONE & J. BREIL. *Sur une méthode de projection vectorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes*. *Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris*, vol. 327, p. 1179–1184, 1999.
- [Canuto 88] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI & T. A. ZANG. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Chassaing 00] P. CHASSAING. *Mécanique des fluides : éléments d'un premier parcours*. CEPADUES-Editions, 2000.
- [Chen 90] H. CHEN & R. TAYLOR. *Vibration analysis of fluid-solid systems using a finite element displacement formulation*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, p. 683–698, 1990.
- [Descloux 81] J. DESCLOUX, M. LUSKIN & J.RAPPAZ. *Approximation of the spectrum of closed operators : the determination of normal modes of a rotating basin*. *Mathematics of Computation*, vol. 36, p. 137–154, 1981.
- [Deville 02] M.O. DEVILLE, P.F. FISCHER & E.H. MUND. *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow* . Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Dhia 01] A.S. BONNET BEN DHIA, G. LEGENDRE & E. LUNÉVILLE. *Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme*. *Comptes Rendus De L Academie De Sciences Serie Iib Mecanique*, vol. 329, p. 601–606, 2001.
- [Fortin 83] M. FORTIN & R. GLOWINSKI. *Augmented Lagrangian Methods* . North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [Galbrun 31] H. GALBRUN. *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence* . Gauthier-Villars, Paris, 1931.

- 
- [Gill 82] A.E. GILL. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, New York, 1982.
- [Girault 86] V. GIRAULT & P. RAVIART. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Gottlieb 77] D. GOTTLIEB & S.A. ORSZAG. *Numerical analysis of spectral methods : Theory and applications*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1977.
- [Gruber 85] R. GRUBER & J. RAPPAZ. *Finite Element Methods in Linear Ideal MHD*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Guermond 06] J. L. GUERMOND, P. MINEV & J. SHEN. *An Overview of Projection Methods for Incompressible Flows*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, p. 6011–6045, 2006.
- [Hamdi 78] M.A. HAMDI, Y. OUSSET & G. VERCHERY. *A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 13, p. 139–150, 1978.
- [Karniadakis 99] G.E. KARNIADAKIS & S.J. SHERWIN. *Spectral/hp element methods for cfd (numerical mathematics and scientific computation)*. Oxford University Press, 1999.
- [Kovaszny 48] L. I. G. KOVASZNAY. *Laminar flow behind two-dimensional grid*. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 44, p. 58–62, 1948.
- [Landau 63] L. D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ. *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon, Oxford, 1963.
- [Legendre 03] G. LEGENDRE. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement. Analyse mathématique et numérique des équations de Galbrun*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003.
- [Leriche 04] E. LERICHE & G. LABROSSE. *Stokes eigenmodes in square domain and the stream function-velocity correlation*. *Journal of Computational Physics*, vol. 200, p. 489–511, 2004.
- [Moffatt 64] H.K. MOFFATT. *Viscous and resistive eddies near a sharp corner*. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 18, p. 489–511, 1964.



- [Nédélec 80] J.C. NÉDÉLEC. *Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* . Numerische Mathematik, vol. 35, p. 315–341, 1980.
- [Nédélec 82] J.C. NÉDÉLEC. *Eléments finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans  $\mathbb{R}^3$* . Numerische Mathematik, vol. 39, p. 97–112, 1982.
- [Peyret 02] R. PEYRET. Spectral methods for incompressible viscous flow. Springer, Berlin, 2002.
- [Quarteroni 99] A. QUARTERONI & A. VALLI. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations . Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [Raviart 77] P.A. RAVIART & J.M. THOMAS. *A mixed finite element method for second order elliptic problems*. Mathematical Aspects of the Finite Element Methods, vol. 606 of Lecture Notes in Mathematics, p. 292–315, 1977.
- [Roberts 91] J.E. ROBERTS & J.M. THOMAS. *Mixed and Hybrid Methods*. Handbook of Numerical Analysis, Volume II : Finite Element Methods (Part 1), p. 523–639, 1991.
- [Shen 87] J. SHEN. *Résolution numérique des équations de Stokes et Navier-Stokes par les méthodes spectrales*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud, 1987.
- [Troyon 83] F. TROYON, R. GRUBER, H. SAURENMANN, S. SEMENZATO & S. SUCCI. *MHD limits to plasma confinement*. Plasma Physics, vol. 26, p. 209–215, 1983.

# Legendre Spectral Methods for the -grad(div) Operator <sup>1</sup>

E. Ahusborde <sup>a</sup>, M. Azaïez <sup>a</sup>, M.O. Deville <sup>b</sup>, E.H. Mund <sup>c,d</sup>

<sup>a</sup>*TREFLE (UMR CNRS 8508), ENSCPB, 33607 Pessac (France)*

<sup>b</sup>*Laboratory of Computational Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015 Lausanne (Switzerland)*

<sup>c</sup>*Service de Métrologie Nucléaire, ULB, 1050 Brussels (Belgium)*

<sup>d</sup>*Unité de Thermodynamique, UCL, 1348 Louvain-La-Neuve (Belgium)*

---

## Abstract

This paper describes two Legendre spectral methods for the  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  eigenvalue problem in  $\mathbb{R}^2$ . The first method uses a single grid resulting from the  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_N$  discretization in primal and dual variational formulations. As is well-known, this method is unstable and exhibits spectral ‘pollution’ effects: increased number of singular eigenvalues, and increased multiplicity of some eigenvalues belonging to the regular spectrum. Our study aims at the understanding of these effects. The second spectral method is based on a staggered grid of the  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_{N-1}$  discretization. This discretization leads to a stable algorithm, free of spurious eigenmodes and with spectral convergence of the regular eigenvalues/eigenvectors towards their analytical values. In addition, divergence-free vector fields with sufficient regularity properties are spectrally projected onto the discrete kernel of  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$ , a clear indication of the robustness of this algorithm.

*Key words:* -grad(div) operator, spectral methods, spurious eigenvalues, stable element, staggered grids.

---

## 1 Introduction

This study deals with the Legendre spectral approximation of the  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  eigenvalue problem

---

<sup>1</sup> Article accepté pour publication dans Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

in a bounded open domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  with Lipschitzian border. Here  $\mathbf{n}$  denotes the outer unit normal along the boundary  $\partial\Omega$ . For the sake of simplicity we assume that  $\Omega$  is the reference domain  $(-1, +1)^2$ .

The  $-\mathbf{grad}(\text{div})$  operator appears in many mathematical problems aimed at modelling physical phenomena. Let us consider a non exhaustive list of examples.

In continuum mechanics, the general principles that govern the elaboration of the constitutive relationships lead to an expression of the Cauchy stress tensor involving scalar functions of the invariants related to the relevant kinematics tensors. In particular, the first invariant defined as the trace of these tensors is the divergence of a vector field, namely the divergence of the velocity field in viscous Newtonian compressible fluid mechanics and the divergence of the displacement vector in linear infinitesimal elasticity. When the constitutive equations are plugged into the momentum conservation law, the divergence of the stress tensor produces a term of the  $-\mathbf{grad}(\text{div})$  form in the Navier-Stokes equations for fluid flow problems and in the Navier equations for solid mechanics problems [21,27].

For the particular case of viscous incompressible fluids, one way to impose the incompressibility constraint consists in mimicking the compressible Navier-Stokes equations by a direct penalization of the pressure which is replaced by a constant times the divergence of the velocity field [22].

Two more examples concern fluid and solid mechanics, respectively, in special modelling cases. The first case is the ideal ocean wave problem without Coriolis force and in absence of turbulent friction [26]. The second problem is the deformation of a thin elastic clamped plate [3,19].

In electromagnetism, the four Maxwell equations may be divided in two sets of two equations. The first one treats the electrical displacement and the magnetic field as variables. The related equations are non homogeneous. The second set has the magnetic induction and the electrical field as basic variables and contains homogeneous equations. When solutions to the Maxwell equations are sought in terms of vector and scalar potentials, the second set of equations is automatically satisfied. The first set becomes the governing equations expressed with the potentials. One of these equations has a  $\mathbf{curl}(\text{curl})$  operator which is classically replaced via a well known vector identity by the Laplacian and the  $\mathbf{grad}(\text{div})$  operator, clearly a landmark of the Maxwell equations [10].

Magnetohydrodynamics theory combines the Navier-Stokes and Maxwell equations. However in some cases the plasma is considered as inviscid and the ideal linear magnetohydrodynamics equations lead to the investigation of the stability behavior of a fusion plasma device (see [2,28]).

The analytical solution of problem (1.1)-(1.2) produces an eigenvalue spectrum made of two parts: a solenoidal part corresponding to zero eigenvalues associated to eigenvectors that are divergence free everywhere in  $\Omega$  and a curl-free part with enumerable nonzero eigenvalues. This is the consequence of the Helmholtz decomposition that states that every vector field may be decomposed as the sum of a rotational component which is obviously solenoidal and a curl-free part that may be related to the gradient of a scalar potential.

The numerical computation of (1.1)-(1.2) by, say, linear finite elements brings dismal results as spurious eigenvalues show up inducing spectrum ‘pollution’. These concepts will be made clear further in the core of the text. It turns out that the accurate computation of the **grad** (div ) eigenvalue problem therefore deserves investigation. The numerical study carried in this paper closely follows work performed on the Stokes equation during the eighties [9], and on the Darcy problem [5] for the construction of stable spectral element schemes. In both cases the authors identified the potential presence of spurious modes and introduced stable numerical schemes in Babuška-Brezzi’s sense. We use a similar approach for Eqs (1.1)-(1.2). Several methods have been proposed to analyze these equations in the low-order and *hp* finite element context. We supply a non-exhaustive list of references dedicated to the **−grad** (div ) operator (see [4,11,12,13,14,15,16,17,18,24]). To our knowledge the present work is the first attempt for Eqs (1.1)-(1.2) of such a study in the present spectral framework. We show that, although the problem is set in primal variational formulation, spurious eigenvalues may be triggered with polluting effects. Once the generation of these spurious modes has been understood, we propose a stable spectral scheme.

The **grad**(div) operator being closely related to the **curl**(curl) operator, we refer the reader to the references [29], [23] and [20] where a similar line of reasoning leads to the identification of the spurious eigensolutions. Furthermore an *hp* adaptive rectangular edge element is proposed that provides optimal convergence results and is free of spurious behaviour.

The paper is organized as follows. In Section 2, the mathematical problem is set up and the analytical solution is given. Section 3 presents both variational formulations. The primal formulation corresponds to a minimization problem of the energy, while the dual formulation solves a saddle-point problem. The spectral discretizations of the the weak formulations are fully undertaken in Section 4. The first spectral approach is a single grid  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_N$  method. This method is unstable and performs badly. The second spectral approach based on a staggered grid  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_{N-1}$  technique is better and avoids all the pitfalls of the previous scheme. Section 5 discusses the numerical results and Section 6 concludes the paper.

Before starting the numerical analysis of problem (1.1)-(1.2), we want to emphasize that another boundary condition could be applied that writes  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ . In this paper however, we shall uniquely deal with the strong condition (1.2).

## 2 The Mathematical Problem

We are interested in spectral solutions to the self-adjoint elliptic eigenvalue problem (1.1)-(1.2). The spectrum of this problem contains a singular and a regular part. Any divergence-free velocity field  $\mathbf{u}_S$  (i.e. such that  $\operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0$ ) satisfying the boundary condition (1.2) is an eigenfunction associated to the eigenvalue  $\lambda^2 = 0$ .

With regard to the non-singular spectrum, one can show the existence of an infinite enumerable set of nonzero eigenvalues with associated curl-free eigenfunctions  $\mathbf{u}_I$ . Since  $\operatorname{curl}(\mathbf{grad} \cdot) \equiv \mathbf{0}$  we notice indeed that a necessary condition for the existence of a solution to problem (1.1)-(1.2) with  $\lambda^2 \neq 0$  is that  $\operatorname{curl} \mathbf{u}_I = 0$ . This leads to restate the basic problem as:

$$-\mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2.3)$$

Equation (2.2) is equivalent to state the existence of a scalar function  $\varphi(x, y)$  such that:

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \varphi. \quad (2.4)$$

Henceforth one concludes easily that the regular eigenvalue problem (2.1)-(2.3) is equivalent to the Laplace eigenvalue problem with Neumann boundary conditions:

$$-\Delta \varphi = \lambda^2 \varphi, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2.6)$$

Using standard analytical techniques one can show that on the reference domain  $\Omega$  the non-zero eigenvalues are:

$$\lambda_{k,\ell}^2 = \frac{\pi^2}{4}(k^2 + \ell^2), \quad k, \ell = 0, 1, \dots, \quad (2.7)$$

with associated eigenfunctions depending on the parity of  $k$  and  $\ell$ :

- For  $k, \ell$  odd

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.8)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.9)$$

- For  $k$  odd and  $\ell$  even

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.10)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = -\ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.11)$$

- For  $k$  even and  $\ell$  odd

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = -k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.12)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.13)$$

- For  $k, \ell$  even

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.14)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right). \quad (2.15)$$

Incidentally, we notice that the sets of indices  $(k, 0)$  and  $(0, k)$  refer to the same eigenvalue  $\lambda_k^2 = k^2\pi^2/4$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) with two linearly independent (and tensorizable) eigenvectors that may be cast  $(\varphi'_k(x), 0)^T$  and  $(0, \varphi'_k(y))^T$  respectively,  $\varphi_k$  denoting the solution to the one-dimensional eigenvalue problem:

$$-\varphi_k''(r) = \lambda_k^2 \varphi_k(r), \quad -1 < r < +1, \quad (2.16)$$

$$\varphi'_k(\pm 1) = 0. \quad (2.17)$$

This remark will be used later on in Section 4.

### 3 Variational Formulations of the Eigenvalue Problem

The basic eigenvalue problem (1.1)-(1.2) may be tackled by two variational formulations requiring both the introduction of the functional space

$$X = \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad (3.1)$$

where the space  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  is defined for vector functions  $\mathbf{v}$  by

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.2)$$

The primal variational formulation corresponds to a Galerkin projection method and may be stated as: *Find*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  and  $\mathbf{u} \in X$  such that:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in X, \quad (3.3)$$

where  $\mathbb{R}^+$  denotes the set of positive real numbers, including zero. From this variational statement we note that for  $\lambda^2 = 0$  we obtain  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  almost everywhere showing that vector fields  $\mathbf{u}$  satisfying this property belong to the nullspace of  $-\mathbf{grad}(\operatorname{div})$ .

The dual variational formulation corresponds to a saddle-point problem that writes: *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^+ \times X$  and  $\varphi \in M = L^2(\Omega)$  such that:

$$\mathbf{u} - \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\lambda^2 \varphi, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (3.6)$$

Remark that according to (2.2) and the boundary condition (3.6),  $\operatorname{curl} \mathbf{u} = \mathbf{0}$  only in the open domain  $\Omega$ . Among the available weak formulations (see e.g. [5] and [1]) we choose (to be consistent with (3.3)) the formulation where  $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  and  $\varphi \in L^2(\Omega)$ . The dual formulation therefore becomes: *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^+ \times X$ , and  $\varphi \in M = L^2(\Omega)$  such that:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\varphi, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in X, \quad (3.7)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = -\lambda^2 (\varphi, q), \quad \forall q \in M. \quad (3.8)$$

As  $q$  belongs to  $L^2(\Omega)$  we can choose  $q = \operatorname{div} \mathbf{v}$ . Equation (3.8) can then be rewritten as

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) = -\lambda^2 (\varphi, \operatorname{div} \mathbf{v}) = \lambda^2 (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

which corresponds to the relationship (3.3). As a conclusion we find that every solution to the variational problem in dual formulation (3.7)-(3.8) is also solution to the variational problem in primal formulation.

## 4 Spectral Discretisations of the weak Formulations

We first introduce some notation and reminders. Let  $\Sigma_{GLL} = \{(\xi_i, \rho_i); 0 \leq i \leq N\}$  and  $\Sigma_{GL} = \{(\zeta_i, \omega_i); 1 \leq i \leq N\}$  respectively denote the sets of Gauss-Lobatto-Legendre and Gauss-Legendre quadrature nodes and weights associated to polynomials of degree  $N$ . These quantities are such that on  $\Lambda := ]-1, +1[$

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^{+1} \Phi(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j) \rho_j, \quad (4.1)$$

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^{+1} \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \Phi(\zeta_j) \omega_j, \quad (4.2)$$

where  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  denotes the space of polynomials with degree  $\leq N$ . We recall that the nodes  $\xi_i$  ( $0 \leq i \leq N$ ) are solution to  $(1-x^2)L'_N(x) = 0$  where  $L_N$  denotes the Legendre polynomial of degree  $N$ , whereas  $\zeta_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) are solution to  $L_N(x) = 0$  (see [25]).

The canonical polynomial interpolation basis  $h_i(x) \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$  built on  $\Sigma_{GLL}$  is given by the relationships:

$$h_i(x) = -\frac{1}{N(N+1)} \frac{1}{L_N(\xi_i)} \frac{(1-x^2)L'_N(x)}{(x-\xi_i)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.3)$$

with the elementary cardinality property

$$h_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq N, \quad (4.4)$$

where  $\delta_{ij}$  is Kronecker's delta symbol. We further introduce the canonical polynomial interpolation basis  $\tilde{h}_j(x) \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$  built on  $\Sigma_{GL}$

$$\tilde{h}_j(x) = \frac{1}{L'_N(\zeta_j)} \frac{L_N(x)}{(x-\zeta_j)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4.5)$$

The functions (4.5) satisfy the same cardinality property (4.4) with respect to the GL nodes  $\zeta_j$ .

#### 4.1 A natural though unstable spectral method

A natural choice for the approximation of  $\mathbf{u}$  is a polynomial of degree less or equal to  $N$  in both space directions. We are led to define the following discrete approximation space :

$$X_N = \mathbb{P}_N(\Omega)^2 \cap X = \mathbb{P}_N^0(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N(\Lambda) \times \mathbb{P}_N(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$$

where the symbol  $\otimes$  denotes the usual tensor product and  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$  is the set of polynomials of degree less or equal to  $N$  satisfying homogeneous Dirichlet boundary conditions on  $\Lambda$ . The discrete primal problem writes: Find  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  and  $\mathbf{u}_N = (u_{xN}, u_{yN})^T \in X_N$  solutions to:



$$\mathcal{A}_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) := (\operatorname{div} \mathbf{u}_N, \operatorname{div} \mathbf{v}_N)_N = \lambda^2 (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N \quad (4.6)$$

where  $(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N := (u_{xN}, v_{xN})_N + (u_{yN}, v_{yN})_N$  and  $(\cdot, \cdot)_N$  denotes the discrete inner product defined by

$$(\psi, \varphi)_N := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \psi(\xi_i, \xi_j) \varphi(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j.$$

Using the basis functions (4.3) on a two-dimensional GLL tensor product grid, one gets approximations for the velocity components  $u_x(x, y)$  and  $u_y(x, y)$ :

$$u_{xN}(x, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{\ell=0}^N u_{k\ell}^x h_k(x) h_\ell(y), \quad (4.7)$$

$$u_{yN}(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{\ell=1}^{N-1} u_{k\ell}^y h_k(x) h_\ell(y), \quad (4.8)$$

where  $u_{k\ell}^x$  (resp.  $u_{k\ell}^y$ ) denotes  $u_x(\xi_k, \xi_\ell)$  (resp.  $u_y(\xi_k, \xi_\ell)$ ), and the boundary conditions have been included in the expansions.

Let us introduce three sets of elementary matrix operators, building blocks of the algebraic eigenvalue problem stemming from (4.6):

- (1) The first operator is the elementary  $(N+1) \times (N+1)$  diagonal mass matrix  $M$  associated to the GLL interpolation basis  $\{h_i\}_{i=0}^N$ :

$$M = \{M_{ij} = (h_i, h_j)_N\}_{i,j=0}^N, \quad (h_i, h_j)_N := \sum_{\ell=0}^N h_i(\xi_\ell) h_j(\xi_\ell) \rho_\ell. \quad (4.9)$$

- (2) The second operator is the elementary  $(N+1) \times (N+1)$  stiffness matrix  $K$  associated to the set of functions  $\{h_i\}_{i=0}^N$

$$K = \{K_{ij} = (h'_i, h'_j)_h\}_{i,j=0}^N, \quad (h'_i, h'_j)_h := \sum_{\ell=0}^N h'_i(\xi_\ell) h'_j(\xi_\ell) \rho_\ell. \quad (4.10)$$

- (3) Finally, the third operator is the elementary semi-stiffness matrix  $\widehat{K}$  associated to the GLL interpolation basis. This  $(N+1) \times (N+1)$  operator has two forms transpose of each other, a left form ( $\ell$ ) and a right form ( $r$ ) that write:

$$\widehat{K}^\ell = \{\widehat{K}^{\ell}_{ij} = (h'_i, h_j)_N\}_{i,j=0}^N, \quad (h'_i, h_j)_N := \sum_{\ell=0}^N h'_i(\xi_\ell) h_j(\xi_\ell) \rho_\ell, \quad (4.11)$$

$$\widehat{K}^r = \{\widehat{K}^r_{ij} = (h_i, h'_j)_N\}_{i,j=0}^N, \quad (h_i, h'_j)_N := \sum_{\ell=0}^N h_i(\xi_\ell) h'_j(\xi_\ell) \rho_\ell. \quad (4.12)$$

The algebraic eigenvalue problem induced by (4.6) now writes :

$$\mathcal{K}_N \mathbf{U} = \lambda^2 \mathcal{M}_N \mathbf{U}, \quad (4.13)$$

where the subscript  $N$  stands for ‘natural’. The stiffness- and mass matrices  $\mathcal{K}_N$  and  $\mathcal{M}_N$  have two-by-two block structures

$$\mathcal{K}_N = \begin{pmatrix} K^{xx} & K^{yx} \\ K^{xy} & K^{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} M^{xx} & 0 \\ 0 & M^{yy} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

The elementary two-dimensional stiffness and mass matrices  $K^{rs}$ ,  $M^{rs}$  ( $r, s = x, y$ ) in (4.13) are obtained by tensor products of the elementary mass-, stiffness-, and semi-stiffness matrices (4.9)-(4.12) :

$$\begin{aligned} M^{xx} &= M \otimes M, & M^{yy} &= M \otimes M, \\ K^{xx} &= K \otimes M, & K^{yy} &= M \otimes K, \\ K^{yx} &= \widehat{K}^r \otimes \widehat{K}^\ell, & K^{xy} &= \widehat{K}^\ell \otimes \widehat{K}^r. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Implementation of the boundary conditions sets the size of these matrices to  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ . The vector of unknowns  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_y]^T$  is split into two parts containing  $u_{k\ell}^x$  and  $u_{k\ell}^y$ , the degrees of freedom (boundary conditions excluded) defining  $u_{xN}(x, y)$  and  $u_{yN}(x, y)$  respectively. These degrees of freedom are put in the usual bottom-left to top-right numbering.

The algebraic eigenvalue problem (4.13) gives  $2(N^2 - 1)$  eigenvalues and associated eigenvectors corresponding to the degrees of freedom in  $X_N$ . We are particularly interested in predicting the size of  $\mathcal{N}_N$ , nullspace of the discretized  $-\mathbf{grad}$  (div) operator. As the primal variational formulation provides the full spectrum (i.e. both the singular and the regular eigenvalues), we first consider the dual formulation that gives essentially the regular part of the spectrum. We therefore evaluate in the first place the number of degrees of freedom involved in the discrete dual formulation. Consider the problem : *Find*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\mathbf{u}_N = (u_{xN}, u_{yN})^T \in X_N$  and  $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$  *solution to:*

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N + (\varphi_N, \text{div } \mathbf{v})_N = 0, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N, \quad (4.16)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_N, q_N)_N = -\lambda^2 (\varphi_N, q_N)_N, \quad \forall q_N \in \mathbb{P}_N(\Omega). \quad (4.17)$$

Here,  $\mathbb{R}_*^+$  denotes the set of strictly positive real numbers.

Solving (4.16)-(4.17) one observes the generation of four zero eigenvalues. Normally, there should be only one singular eigenvalue corresponding to the constant mode of the Laplace-Neumann eigenvalue problem (2.5)-(2.6). These four singular eigenvalues are

spurious (see [6,7]). Their associated eigenvectors  $\mathbf{u}_N$  are such that  $\mathbf{u}_N = \mathbf{grad} \varphi_N$ , with

$$\varphi_N \in \{1, L_N(x), L_N(y), L_N(x)L_N(y)\}.$$

Actually, the first mode corresponds to a physical property of the scalar field.

Let  $\mathcal{R}_N$  denote the range of the discretized operator  $-\mathbf{grad}(\text{div})$ :

$$\mathcal{R}_N = \{\mathbf{u}_N \in H(\text{div}, \Omega) \mid \text{curl} \mathbf{u}_N = 0, \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$

The presence of the spurious eigenmodes reduces the dimension of  $\mathcal{R}_N$  to  $(N+1)^2 - 4$ . Since  $\dim(\mathcal{R}_N) + \dim(\mathcal{N}_N) = 2(N^2 - 1)$ , it turns out that  $\dim(\mathcal{N}_N) = (N-1)^2$ .

The size of  $\mathcal{N}_N$  can also be predicted considering the discretized primal variational problem (4.13). Actually the size of the nullspace is equal to  $2(N^2 - 1) - p$ , where  $p$  denotes the size of the range of  $\mathcal{K}_N$ , that is the number of true constraints in the set of linear equations

$$\mathcal{K}_N \mathbf{U} = 0, \tag{4.18}$$

identities excluded. It turns out that  $p = (N+1)^2 - 4$ , since (4.18) results from the problem: *Find*  $\mathbf{u}_N = (u_{xN}, u_{yN})^T \in X_N$  *such that*:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_N, \nabla \cdot \mathbf{v}_N)_N = 0, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N. \tag{4.19}$$

Obviously, putting  $\text{div} \mathbf{v}_N$  equal to any of the four spurious modes, one gets an identity. For instance if  $\text{div} \mathbf{v}_N = L_N(x) L_N(y)$ , (4.19) becomes:

$$\left( \frac{\partial u_{xN}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yN}}{\partial y}, L_N(x) L_N(y) \right)_N \equiv 0, \tag{4.20}$$

identically equal to zero because of the orthogonality property of Legendre polynomials. Using the value of  $p$  one gets anew  $\dim(\mathcal{N}_N) = 2(N^2 - 1) - (N+1)^2 + 4 = (N-1)^2$ .

The spurious modes have also an important feature with regard to the range  $\mathcal{R}_N$ . In Section 2 we remarked that the set of indices  $(k, 0)$  and  $(0, k)$  give eigenvalues of multiplicity 2. It happens that with the  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N(\Lambda) \times \mathbb{P}_N(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$  discretization the multiplicity of such eigenvalues is raised from 2 to 4. This can be explained easily through the following argument, fully developed for the  $(k, 0)$  component.

Let  $\lambda_k^2$  and  $\mathbf{u}_{kN} = (\varphi_k'(x), 0)^T$  denote such an eigenvalue and associated eigenvector,  $\varphi_k$  being solution to the (discretized) one-dimensional eigenvalue problem (2.16)-(2.17).

One can easily show that  $\mathbf{u}_{kN}^* := (\varphi'_k(x) L_N(y), 0)$ , although *not* an analytical eigenvector of  $-\mathbf{grad}(\text{div})$ , is a numerical eigenvector solution to (4.6) associated to  $\lambda_k^2$ , *i.e.* to the regular part of the  $-\mathbf{grad}(\text{div})$  spectrum. Putting  $\mathbf{u}_{kN}^*$  into the primal variational formulation one gets :  $\forall \mathbf{v}_N \in X_N$

$$(\text{div } \mathbf{u}_{kN}^*, \text{div } \mathbf{v}_N)_N = (\varphi''_k(x) L_N(y), \text{div } \mathbf{v}_N)_N, \quad (4.21)$$

$$= -\lambda_k^2 \left( \varphi_k(x) L_N(y), \frac{\partial v_{xN}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yN}}{\partial y} \right)_N, \quad (4.22)$$

$$= \lambda_k^2 ((\varphi'_k(x) L_N(y), v_{xN})_N + (\varphi_k(x) L'_N(y), v_{yN})_N), \quad (4.23)$$

$$= \lambda_k^2 (\varphi'_k(x) L_N(y), v_{xN})_N, \quad (4.24)$$

$$= \lambda_k^2 (\mathbf{u}_{kN}^*, \mathbf{v}_N)_N, \quad (4.25)$$

establishing the result. The transition from (4.23) to (4.24) stems from the fact that  $(\varphi_k(x) L'_N(y), v_{yN})_N \equiv 0$  as a result of the numerical quadrature on the GLL grid.

Simultaneously, one verifies that

$$\text{curl } \mathbf{u}_{kN}^* = -\varphi'_k(x) L'_N(y). \quad (4.26)$$

The right-hand side of this relationship is *not* identically equal to zero, and hence  $\mathbf{u}_{kN}^*$  is *not* an analytical eigenvector. To be an analytical eigenvector it should indeed be curl-free. However  $\text{curl } \mathbf{u}_{kN}^*$  vanishes on the interior nodes of the GLL grid, and on the boundary nodes it is equal to  $-\varphi'_k(\xi_i) L'_N(\pm 1)$  for  $i = 0, \dots, N$ . For increasing values of  $N$  the latter quantity behaves like  $\mathcal{O}(N^2)$ . Although strictly not curl-free,  $\mathbf{u}_{kN}^*$  is curl-free inside the domain, in the collocation sense.

As a conclusion with regard to the first numerical scheme, we remark that the four spurious modes have a double effect. Firstly, they increase the size of the nullspace of the discrete  $-\mathbf{grad}(\text{div})$  operator. Secondly, they ‘pollute’ its range by modifying artificially the multiplicity of some regular eigenvalues whose associated eigenvectors are wrong. One way to eliminate this perturbation consists in evaluating all eigenvectors at the nodes of the Gauss-Legendre quadrature grid. Another way to avoid the spurious mode effects is to use the stabilized *hp* method described in [8].

The numerical results displayed on Fig. 1 illustrate the effects of the pollution on the eigenmode, and of the filtering obtained by interpolation on the GL grid. The figure shows the  $x$ -component of the vector field for the eigenvector corresponding to  $\lambda_{4,0}^2$  computed with  $N = 44$ . As  $\ell = 0$  the computation is sensitive to the spurious mode induced by  $L_N$ . The pollution effect is clearly visible on left-part of the figure where the computation performed on the GLL grid has nothing in common with the analytical solution (see Eqs (2.14)-(2.15)). The right-part of the figure shows that once the computation of the eigenvectors is performed on the GL grid by an interpolation process, the pollution effect is eliminated. This is a clear proof of the filtering efficiency.

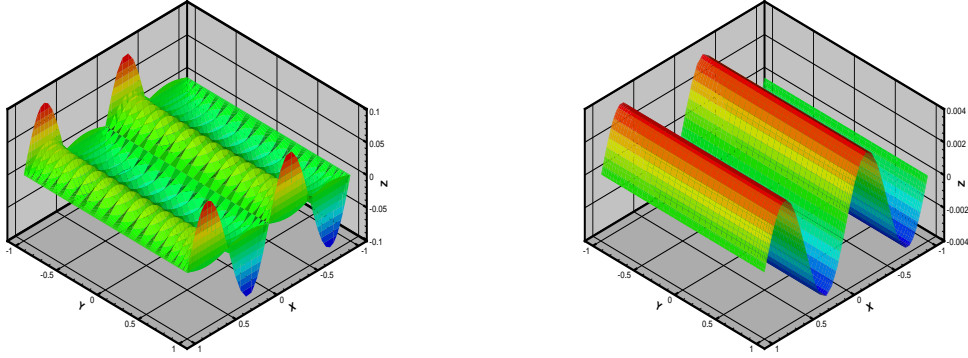


Figure 1. Computation of the  $x$ -component of the eigenvector associated to the eigenvalue  $\lambda_{4,0}^2$  computed with the unstable spectral method ( $N = 44$ ). The left-part of the figure displays the computation performed on the GLL grid. The right-part shows the result after filtering on the GL grid.

Figure 2 exhibits the curl of the same eigenvector computed with  $N = 44$  on the GLL grid. One observes clearly significant errors at the boundary while inside the domain the magnitude of the curl is identically equal to zero.

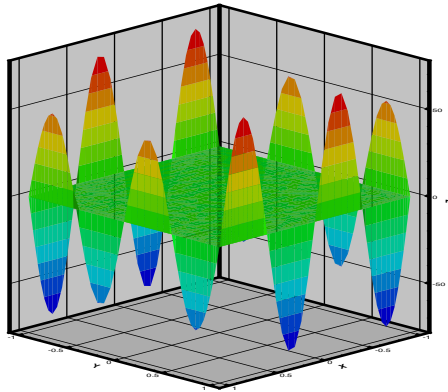


Figure 2. Curl of the eigenvector associated to the eigenvalue  $\lambda_{4,0}^2$  computed with the unstable spectral method ( $N = 44$ ) on the GLL grid.

## 4.2 A stable and optimal spectral method

In order to avoid the presence of the detrimental spurious modes that were identified in the previous section we suggest another discretization scheme for the problem in primal formulation (3.3). We consequently introduce the polynomial space:

$$\mathbf{Y}_N(\Omega) = (\mathbb{P}_N(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)) \times (\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N(\Lambda)). \quad (4.27)$$

The polynomial space  $X_N$  approximating  $X$  can be obtained as a subspace of  $X$  defined by

$$X_N = \mathbf{Y}_N(\Omega) \cap X = \mathbb{P}_N^0(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda) \times \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N^0(\Lambda).$$

The discrete problem in primal variational formulation now becomes: *Find*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  and  $\mathbf{u}_N \in X_N(\Omega)$  such that:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_N, \nabla \cdot \mathbf{v}_N)_N^{GL} = \lambda^2 (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GLL}, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N(\Omega). \quad (4.28)$$

Using the basis functions (4.3) and (4.5) the velocity components write

$$u_{xN}(x, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{\ell=1}^N u_{k\ell}^x h_k(x) \tilde{h}_\ell(y), \quad (4.29)$$

$$u_{yN}(x, y) = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^{N-1} u_{k\ell}^y \tilde{h}_k(x) h_\ell(y). \quad (4.30)$$

Using these expansions and the appropriate Gaussian quadrature rules recalled earlier gives the right-hand side of (4.28):

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GLL} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N u_{xN}(\xi_i, \zeta_j) v_{xN}(\xi_i, \zeta_j) \rho_i \omega_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N u_{yN}(\zeta_i, \xi_j) v_{yN}(\zeta_i, \xi_j) \omega_i \rho_j, \end{aligned} \quad (4.31)$$

and for any couple of scalar fields  $p, q$ :

$$(p, q)_N^{GL} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (pq)(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j. \quad (4.32)$$

Superscripts GLL and GL have been introduced to recall that (4.31) involves both the GL and GLL quadrature rules while (4.32) involves only the GL rule.

We again introduce some sets of elementary matrix operators, building blocks of the algebraic eigenvalue problem derived from (4.28):

- (1) Two elementary mass matrices are appropriate in this case,  $M^{GL}$  and  $M^G$  associated respectively to the GLL and GL interpolation bases.  $M^{GL}$  is a  $(N+1) \times (N+1)$  operator with components given by (4.9), while  $M^G$  is a  $N \times N$  matrix with components:

$$M^G = \{M_{ij}^G = (\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)_N\}_{i,j=1}^N, \quad (\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)_N := \sum_{\ell=1}^N \tilde{h}_i(\zeta_\ell) \tilde{h}_j(\zeta_\ell) \omega_\ell. \quad (4.33)$$

- (2) The elementary  $(N+1) \times (N+1)$  stiffness matrix  $K$  associated to the set of GLL basis functions  $\{h_i\}_{i=0}^N$  is the same as (4.10).  
(3) The third operator is the elementary semi-stiffness matrix  $\widehat{K}$  associated to the GLL and GL interpolation bases. This operator has two forms transpose of each other; a  $(N+1) \times N$  left form ( $\ell$ ), and a  $N \times (N+1)$  right form ( $r$ ) that write:

$$\widehat{K}^\ell = \{\widehat{K}_{ij}^\ell = (h'_i, \tilde{h}_j)_N\}_{i,j}, \quad (h'_i, \tilde{h}_j)_N := \sum_{\ell=1}^N h'_i(\zeta_\ell) \tilde{h}_j(\zeta_\ell) \omega_\ell, \quad (4.34)$$

$$\widehat{K}^r = \{\widehat{K}_{ij}^r = (\tilde{h}_i, h'_j)_N\}_{i,j}, \quad (\tilde{h}_i, h'_j)_N := \sum_{\ell=1}^N \tilde{h}_i(\zeta_\ell) h'_j(\zeta_\ell) \omega_\ell. \quad (4.35)$$

Notice that according to the results (4.1)-(4.2) all inner products in these elementary matrices (with the exception of  $M^{GL}$ ) are exact.

The algebraic eigenvalue problem now writes :

$$\mathcal{K}_P \mathbf{U} = \lambda^2 \mathcal{M}_P \mathbf{U}, \quad (4.36)$$

where the subscript  $P$  stands for ‘primal’. The stiffness- and mass matrices  $\mathcal{K}_P$  and  $\mathcal{M}_P$  have two-by-two block structures similar to those given by (4.14)-(4.15):

$$\mathcal{K}_P = \begin{pmatrix} K^{xx} & K^{yx} \\ K^{xy} & K^{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_P = \begin{pmatrix} M^{xx} & 0 \\ 0 & M^{yy} \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

with

$$\begin{aligned} M^{xx} &= M^{GL} \otimes M^G, & M^{yy} &= M^G \otimes M^{GL}, \\ K^{xx} &= K \otimes M^G, & K^{yy} &= M^G \otimes K, \\ K^{yx} &= \widehat{K}^r \otimes \widehat{K}^\ell, & K^{xy} &= \widehat{K}^\ell \otimes \widehat{K}^r. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Taking the boundary conditions into account the building blocks of  $\mathcal{K}_P$  and  $\mathcal{M}_P$  are square matrices of size  $N(N-1)$ . The spectrum of (4.36) therefore contains  $2N(N-1)$

eigenvalues.

Again the problem arises to determine how many eigenvalues should belong to the singular spectrum (*i.e.* the dimension of the nullspace  $\mathcal{N}_P$ ) and how many should belong to the regular spectrum (*i.e.* the dimension of the range  $\mathcal{R}_P$ ). Using the same argument as before, we look again at the size of the nullspace of  $\mathcal{K}_P$ , equal here to  $2N(N-1) - p$ , where  $p$  is the true number of constraints in the set of linear equations

$$\mathcal{K}_P \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (4.39)$$

identities excluded. The lack of spurious modes is such that  $p = N^2 - 1$ . It therefore turns out that  $\dim(\mathcal{N}_P) = (N-1)^2$ , and  $\dim(\mathcal{R}_P) = (N^2 - 1)$ .

Notice that this spectral method, stable in primal formulation, is also stable in dual formulation as shown in [7].

## 5 Numerical Results

Extensive computations have been performed in two and three dimensions. They show the accuracy of the stable Legendre spectral method introduced in this work. We separate the discussion of the results commenting first the results obtained for the regular spectrum, and afterwards those obtained for the singular spectrum.

Figure 3 shows the relative error on the four lowest eigenvalues of multiplicity one, *i.e.*  $\lambda_{k,k}^2$  with  $k = 1 \dots 4$ , on a semi-logarithmic scale as a function of  $N$ . As might be expected the error decrease is exponential in all cases with increasing error levels for increasing values of  $k$ .

Figure 4 shows the  $L^2$  error norm of the four eigenvectors associated to the eigenvalues displayed on Fig. 3, on a semi-logarithmic scale as a function of  $N$ . Again, the error decrease is spectral in all cases. However, round-off occurs at a slightly higher level than for the computation of the eigenvalues.

Since they belong to  $\mathcal{R}_P$ , range of the discrete  $-\mathbf{grad}(\text{div})$  operator, these eigenvectors should be curl-free at least inside the domain. We recall that on the boundary only  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  is enforced. Increasing the value of  $N$  though, the discrepancy with zero on the boundary should disappear. This is illustrated on Fig. 5 showing the  $L^2$  norm of  $\text{curl } \mathbf{u}_{k,k}$  for  $k = 1 \dots 4$  evaluated along the boundary  $\partial\Omega$ . They vanish exponentially.

One reaches similar conclusions for the numerical results obtained in the 3D case. Here the domain is  $] -1, +1[^3$ . The 2D discretization is readily extended to 3D using the tensor properties of the basis. Computations have been made of the approximation errors on the eigenvalues



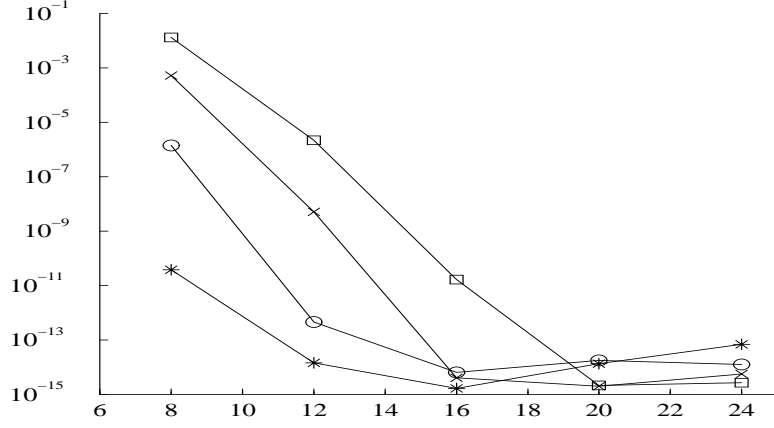


Figure 3. Relative error as a function of  $N$  on the four lowest eigenvalues of multiplicity one  $\lambda_{kk}^2$  with  $k = 1, \dots, 4$ . The correspondence is the following: \* ( $k = 1$ ), o ( $k = 2$ ),  $\times$  ( $k = 3$ ),  $\square$  ( $k = 4$ ).

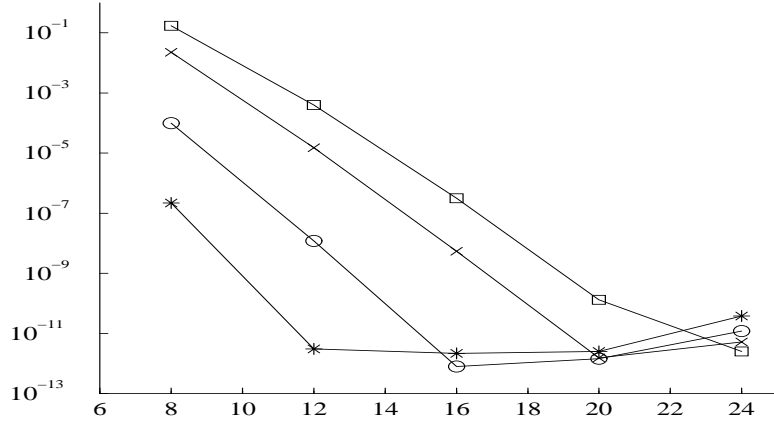


Figure 4.  $L^2$  error norm as a function of  $N$  on the four eigenvectors  $\mathbf{u}_{kk}$  associated to  $\lambda_{kk}^2$  with  $k = 1, \dots, 4$ . The correspondence is the following: \* ( $k = 1$ ), o ( $k = 2$ ),  $\times$  ( $k = 3$ ),  $\square$  ( $k = 4$ ).

$$\lambda_{kkk}^2 = \frac{3\pi^2}{4} k^2, \quad k = 1, 2,$$

and associated eigenvectors

$$\begin{aligned} u_x^{111}(x, y, z) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right), \\ u_y^{111}(x, y, z) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right), \\ u_z^{111}(x, y, z) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \end{aligned}$$

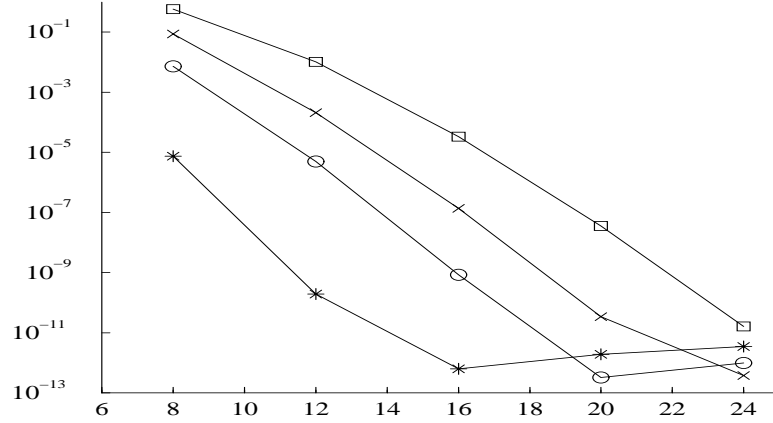


Figure 5.  $L^2$  norm of  $\text{curl } \mathbf{u}_{kk}$  along  $\partial\Omega$  as a function of  $N$ . The correspondence is the following: \* ( $k = 1$ ),  $\circ$  ( $k = 2$ ),  $\times$  ( $k = 3$ ),  $\square$  ( $k = 4$ ).

and

$$\begin{aligned} u_x^{222}(x, y, z) &= 2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z), \\ u_y^{222}(x, y, z) &= 2 \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z), \\ u_z^{222}(x, y, z) &= 2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z), \end{aligned}$$

that are shown on Figs 6 and 7. More specifically, Fig. 6 displays on a semi-logarithmic scale the relative error on the two lowest eigenvalues of multiplicity one (*i.e.*  $\lambda_{kkk}^2$  with  $k = 1, 2$ ), as a function of  $N$ . As might be expected the error decrease is exponential in all cases with increasing error levels for increasing values of  $k$ .

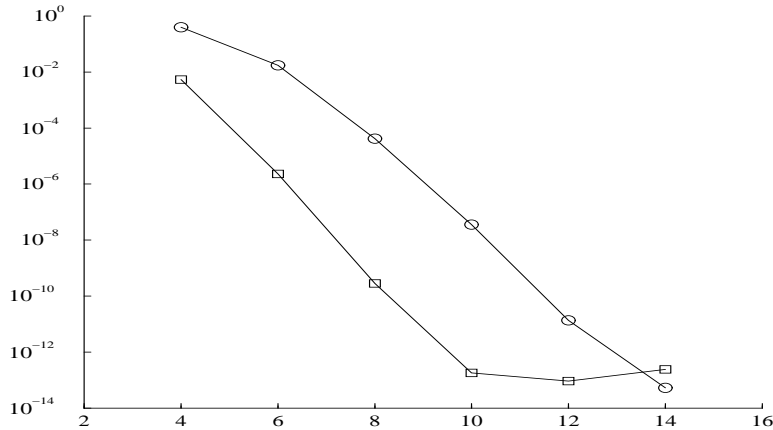


Figure 6. Relative error as a function of  $N$  on the two lowest eigenvalues of multiplicity one  $\lambda_{kkk}^2$  with  $k = 1, 2$ . The correspondence is the following:  $\square$  ( $k = 1$ ),  $\circ$  ( $k = 2$ ).

Figure 7 shows on the same semi-logarithmic scale, the  $L^2$  error norm of the associated eigenvectors. Again, the error decrease is spectral in all cases. However, round-off occurs

at a slightly higher level than for the eigenvalues computation. All these results show

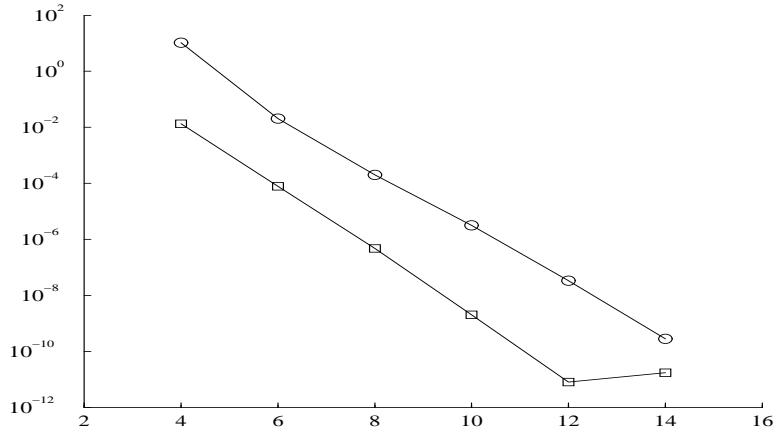


Figure 7.  $L^2$  error norm as a function of  $N$  on the two eigenvectors  $\mathbf{u}_{k k k}$  associated to  $\lambda_{k k k}^2$  with  $k = 1, 2$ . The correspondence is the following:  $\square$  ( $k = 1$ ),  $\circ$  ( $k = 2$ ).

that with regard to the regular spectrum the stable spectral method behaves as expected and proves its efficiency and optimality for spectrum resolution.

Let us now come to the singular part of the spectrum. Here, benchmarking the numerical solution is more difficult since it is impossible to compare numerical eigenvectors to any analytical counterpart because these are unknown. However, we are able to look at certain well-defined properties that should be verified *a priori*. For instance, the elements of the numerical kernel should be identically divergence-free. Also, the projection of any given divergence-free vector field onto the numerical kernel should converge to the original one with increasing values of  $N$ . One might even expect spectral convergence of this projection when the given divergence-free field has sufficient regularity properties. Our numerical experiments show that these two conditions are met.

With regard to the ‘divergence-free’ character of the singular eigenvectors set, we have evaluated discrete kernels with increasing values of  $N$ . In each case we computed the  $L^2$  norm of the divergence of their elements and took the maximum. Table 5 shows the evolution of this maximum as a function of  $N$ . The results are perfectly coherent. The slight departure from round-off may be attributed to conditioning problems.

$N$	8	12	16	20	24
$\max \ \operatorname{div} \mathbf{u}_{S N}\ _{L^2}$	5.90(-15)	7.42(-15)	1.74(-14)	5.48(-14)	1.08(-13)

Lastly, we considered  $\mathbf{u}_S^*(x, y) := (-\sin \pi x \cos \pi y, \cos \pi x \sin \pi y)^T$  a solenoidal vector field, and projected  $\mathbf{u}_S^*$  onto the span of the discrete kernel  $\mathcal{K}_P$ . Denoting this projection by  $\mathbf{u}_{S N}^*$  we evaluated the error  $\|\mathbf{u}_S^* - \mathbf{u}_{S N}^*\|_{L^2}$  for increasing values of  $N$ . The result is

shown on Fig. 8. The error decay again is spectral despite a slightly deteriorating value of  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  with increasing  $N$ .

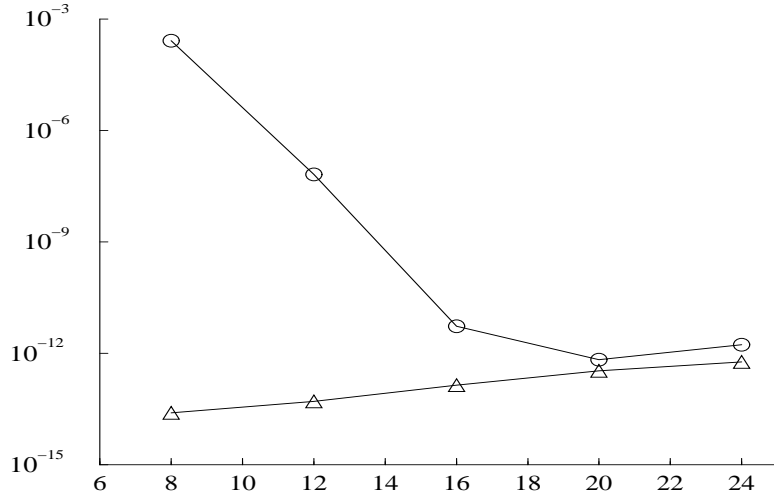


Figure 8. Projection  $\mathbf{u}_{S_N}^*$  of a given solenoidal field  $\mathbf{u}_S^*$ , onto  $\mathcal{K}_P$ . The figure displays  $\|\mathbf{u}_S^* - \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  (o), and  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  ( $\Delta$ ) as a function of  $N$ .

Once again, this 2D result extends to 3D computations with the application of the same projection procedure onto the kernel of the vector field  $\mathbf{u}_S^*(x, y, z) := (\sin(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z), \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z), -2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z))^T$ . We notice that the projection is a spectral approximation of the continuous field. Figure 9 illustrates the spectral decay with increasing values of  $N$ .

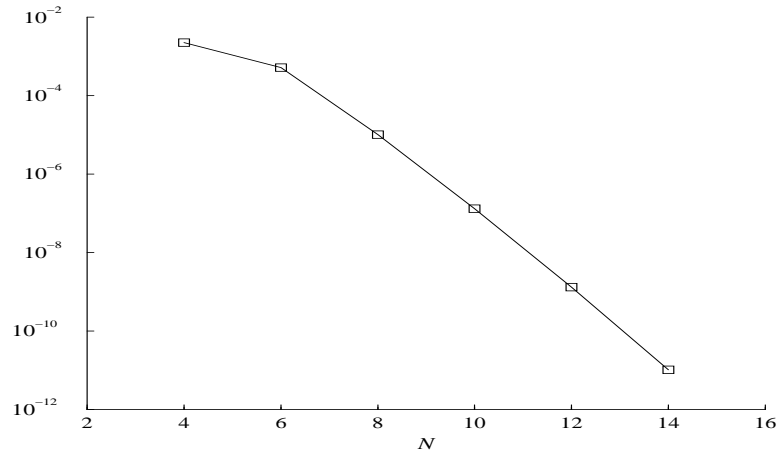


Figure 9. Projection  $\mathbf{u}_{S_N}^*$  of a given solenoidal field  $\mathbf{u}_S^*$ , onto  $\mathcal{K}_P$ . The figure displays  $\|\mathbf{u}_S^* - \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  (□) as a function of  $N$ .

This is perhaps the most significant result obtained in this work since nothing allows an *a priori* claim that the discrete kernel  $\mathcal{K}_P$  should exhibit this property.

## 6 Conclusion

This work had two basic motivations: an understanding of the spurious modes triggered by the use of single collocation grids, and (its corollary) the search for staggered grids to avoid such undesirable consequences. Numerical tests convincingly show that we reached both aims. In particular we have succeeded in building a discrete kernel for the basic operator that has the property of being solenoidal down to numerical round-off, fulfilling the boundary conditions in the strong sense, and such that any given solenoidal vector field can be spectrally projected. Such basis functions might be used for constructive purposes in various types of applications such as Helmholtz decomposition and Stokes eigenvalue problem.

Further work should address the extension to spectral elements and to preconditioning techniques.

## Acknowledgments

The research covered by this paper started when MOD was on sabbatical leave from EPFL and visiting “Service de Métrologie Nucléaire” at ULB.

## References

- [1] Achdou Y., Bernardi C., and Coquel F., *Finite Volume for the Darcy Equation. A Posteriori Error Estimates*, Numer. Math., **96**, 17–42, 2003.
- [2] Appert K., Berger D., Gruber R., and Rappaz J., *A new finite element approach to the normal mode analysis in MHD*, J. Comp. Phys., **18**, 284–299, 1975.
- [3] Arnold D.N., and Falk R.S., *A Uniformly Accurate Finite Element Method for the Reissner-Mindlin Plate*, SIAM J. Numer. Anal., **26**, 1276–1290, 1989.
- [4] Arnold D.N., Falk R.S., and Winther R., *Preconditioning in  $H(\text{div})$  and Applications*, Math. Comp., **66**, 957–984, 1997.
- [5] Azaïez M., Bernardi C., and Grundmann M., *Spectral Method Applied to Porous Media*, East–West J. Numer. Math., **2**, 91–105, 1994.
- [6] Azaïez M., Ben Belgacem F., Grundmann M., and Khallouf H., *Staggered Grids Hybrid-dual Spectral Element Method for Second-Order Elliptic Problems. Application to High-Order time Splitting for Navier-Stokes Equations*, CMAME, **166**, 183–199, 1998.
- [7] Azaïez M., Deville M.O., Gruber R., and Mund E.H., *On a Stable Spectral Element for the  $\text{grad}(\text{div})$  Eigenvalue Problem*, J. SCI. Comput., 27, pp. 41-50, 2006.
- [8] Azaïez M., Deville M.O., Gruber R., and Mund E.H., *A new hp Method for the  $-\text{grad}(\text{div})$  Operator in non-Cartesian Geometries*, to appear in Appl. Numer. Math., 2007.

- [9] Bernardi C., and Maday Y., *Spectral Methods*, in *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. V edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North-Holland, 209–485, 1997.
- [10] Bossavit A., *Computational Electromagnetism*, Academic Press (1998).
- [11] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *On the Convergence of Eigenvalues for Mixed Formulations*, *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **25**, 131–154, 1997.
- [12] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *Mixed Finite Elements for Maxwell’s Eigenproblem: the Question of Spurious Modes*, in ENUMATH97, (H.G. Bock, F. Brezzi, R. Glowinski, G. Kanschat, Y.A. Kuznetsov, J. Périaux, R. Rannacher, Eds), World Scientific, 180–187, 1998.
- [13] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *On the Problem of Spurious Eigenvalues in the Approximation of Linear Elliptic Problems in Mixed Form*, *Math. Comp.*, **69**, 121–140, 2000.
- [14] Boffi D., Chinosi C., and Gastaldi L., *Approximation of grad-div Operator in non-Convex Domains*. *Comp. Model. Eng. Sci.*, **1**, 27–38, 2000.
- [15] Boffi D., Chinosi C., and Gastaldi L., *Penalized Approximation of the Vibration Frequencies of a Fluid in a Cavity*. *Comput. Visual Sci.*, **3**, 19–23, 2000.
- [16] Boffi D., Duran R.G., and Gastaldi L., *A Remark on Spurious Eigenvalues in a Square*, *Appl. Math. Letters*, **12**, 107–114, 1999.
- [17] Boffi D., Farina M., and Gastaldi L., *On the Approximation of Maxwell’s Eigenproblem in General 2D Domains*, *Computers & Structures*, **79**, 1089–1096, 2001.
- [18] Boffi D., and Gastaldi L., *On the “-grad div+s curl rot” Operator*, in “Computational Fluid and Solid Mechanics”, First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 12-15, K.J. Bathe editor, 1526–1529, 2001.
- [19] Brezzi F., and Fortin M., *Numerical Approximations of Mindlin-Reissner Plates*, *Math. Comp.*, **47**, 151–158, 1986.
- [20] Boffi D, Costabel M., Dauge M., and Demkowicz L., *Discrete compactness for the hp version of rectangular edge finite elements*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **44**, No 3, pp. 979-1004, 2006.
- [21] Brezzi F., and Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [22] Caltagirone J.P., and Breil J., *Sur une méthode de projection vectorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **327**, Série II b, 1179–1184, 1999.
- [23] Costabel M. and Dauge M. *Computation of resonance frequencies for Maxwell equations in non smooth domains*. *Lecture Notes in computational science and engineering* Vol. 31, Springer 2003.
- [24] Descloux J., Luskin M., and Rappaz J., *Approximation of the Spectrum of Closed Operators: the Determination of Normal Modes of a Rotating Basin*, *Math. Comp.*, **36**, 137–154, 1981.

- [25] Deville M.O., Fischer P.F., and Mund E.H., *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [26] Gill A.E., *Atmosphere-Ocean Dynamics*, International Geophysics Series, Academic Press, New York, 1982.
- [27] Girault V., and Raviart P., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [28] Gruber R., and Rappaz, J., *Finite Element Methods in Linear Ideal MHD*, Springer Series in Computational Physics, Springer, Berlin, 1985.
- [29] Monk P., Wang Y., and Szabo B., Computing cavity models using the p-version of the finite element method. *IEEE Transaction on Magnetics*, **32**, pp. 1934-1940, 1996.

# Legendre Spectral Methods for the $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$ Operator with free Boundary Conditions<sup>1</sup>

E. Ahusborde<sup>a</sup>, M. Azaïez<sup>a</sup>, M.O. Deville<sup>b</sup>, E.H. Mund<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup>*TREFLE (UMR CNRS 8508), ENSCPB, 33607 Pessac (France)*

<sup>b</sup>*Laboratory of Computational Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015 Lausanne (Switzerland)*

<sup>c</sup>*Service de Métrologie Nucléaire, ULB, 1050 Brussels (Belgium)*

<sup>d</sup>*Unité de Thermodynamique, UCL, 1348 Louvain-La-Neuve (Belgium)*

---

## Abstract

This paper extends previous studies of the application of Legendre spectral methods to the  $\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  eigenvalue problem on a quadrangular domain in  $\mathbb{R}^2$ . The extension focuses on natural boundary conditions. Spectral approximations based on primal and dual variational approaches are built using Gaussian quadrature rules both on single (i.e.  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_N$ ) and staggered (i.e.  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_{N-1}$ ) grids. The single grid approximation is unstable and exhibits ‘spectral pollution’ effects such as increased number of singular eigenvalues and increased multiplicity of some regular eigenvalues. The approximation on the staggered grid leads to a stable algorithm, free of spurious eigenmodes and with spectral convergence of the regular eigenvalues/eigenvectors towards their analytical values.

*Key words:*  $-\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  operator, spectral methods, spurious eigenvalues, stable element, staggered grids.

---

## 1 Introduction

This study deals with the Legendre spectral approximation of the  $\mathbf{grad}(\mathbf{div})$  eigenvalue problem with natural boundary conditions

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup> Article soumis pour publication dans SIAM Journal of Scientific Computing.



in a bounded open domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  with Lipschitzian border. For the sake of simplicity we assume that  $\Omega$  is the reference domain  $\widehat{\Omega} := (-1, +1)^2$ .

The **grad** (div) operator enters into different domains of applied physics and engineering such as solid and fluid mechanics, Maxwell equations, magnetohydrodynamics problems, etc. In [1] a list of the domains of applications is presented. We wish here to emphasize the use of the **grad** (div) operator in order to regularize and stabilize the Stokes solvers. The reader is referred to Olshanskii *et al.* [11] and the papers cited therein. Another domain of application concerns the Galbrun equation [10]. This is a wave type equation where the Laplacian operator is replaced by **grad** (div).

Finally, it has also a close connection with the classical Helmholtz decomposition property of a general vector field into solenoidal and curl-free parts. The solution of the **grad** (div) eigenvalue problem still deserves careful attention because, as is well known, approximation techniques may be prone to the generation of spurious eigenmodes. The **grad** (div) operator being closely related to the **curl**(curl) operator, we refer the reader to the references [14], [8] and [5] where a similar line of reasoning leads to the identification of the spurious eigensolutions. Furthermore an *hp* adaptive rectangular edge element is proposed that provides optimal convergence results and is free of spurious behavior.

We have analyzed in two previous papers the application of Legendre spectral methods on the **grad** (div) eigenvalue problem with strong boundary conditions (i.e. of type  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ). Basically, we used primal (see [1]) and dual (see [3]) variational approaches and showed that while on a single  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_N$  grid there are indeed spurious eigenmodes, one gets a stable spectrum using a staggered  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_{N-1}$  grid with spectral convergence of the eigenvalues (and associated eigenvectors) belonging to the regular spectrum, to their analytical values. The previous studies led to an understanding of the spurious modes (number, nature, ...). The purpose of the present paper is to reach the same understanding for the eigenvalue problem (1.1)-(1.2).

First, we want to show that the boundary condition (1.2) is a natural one. Multiplying the left-hand side of Eq. (1.1) by a test vector field  $\mathbf{v}$  and integrating by parts over  $\Omega$ , one gets

$$-\int_{\Omega} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = -\int_{\partial\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Clearly, for the strong boundary condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ , the test vector field  $\mathbf{v}$  should have a zero normal component along the boundary, while for test vector fields  $\mathbf{v}$  that do not satisfy this condition,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  is a natural boundary condition.

The paper is organized as follows. In Section 2, the mathematical problem is set up and the analytical solution is given. Section 3 presents both variational formulations.

The primal formulation corresponds to a minimization problem of the energy, while the dual formulation solves a saddle-point problem. The spectral discretizations of the weak formulations are fully undertaken in Section 4. The first spectral approach is a single grid  $\mathcal{P}_N \otimes \mathcal{P}_N$  method. This method is unstable and performs badly. The second spectral approach based on a  $\mathcal{P}_N \otimes \mathcal{P}_{N-1}$  staggered grid technique is better and avoids all the pitfalls of the previous scheme. Section 5 discusses the numerical results and opens some new perspective on the application of the dual variational approach to the classical Laplace problem with non smooth boundary data. Finally, Section 6 concludes the paper.

## 2 The Mathematical Problem

We are interested in spectral solutions to the self-adjoint elliptic eigenvalue problem (1.1)-(1.2). The spectrum of this problem contains a singular and a regular part. Any divergence-free velocity field  $\mathbf{u}_S$  (i.e. such that  $\operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0$ ) satisfying the boundary condition (1.2) is an eigenfunction associated to the eigenvalue  $\lambda^2 = 0$ .

With regard to the non-singular spectrum, one can show the existence of an infinite enumerable set of nonzero eigenvalues with associated curl-free eigenfunctions  $\mathbf{u}_I$ . Since  $\operatorname{curl}(\mathbf{grad} \cdot) \equiv \mathbf{0}$  we notice indeed that a necessary condition for the existence of a solution to problem (1.1)-(1.2) with  $\lambda^2 \neq 0$  is that  $\operatorname{curl} \mathbf{u}_I = 0$ . This leads to restate the basic problem as:

$$-\mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2.3)$$

Equation (2.2) is equivalent to state the existence of a scalar function  $p(x, y)$  (called ‘pressure’ in the sequel) such that:

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} p. \quad (2.4)$$

Henceforth one concludes easily that the regular eigenvalue problem (2.1)-(2.3) is equivalent to the Laplace eigenvalue problem with Dirichlet boundary conditions:

$$-\Delta p = \lambda^2 p, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.5)$$

$$p = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2.6)$$

Using standard analytical techniques one can show that on the reference domain  $\Omega$  the

non-zero eigenvalues are:

$$\lambda_{k,\ell}^2 = \frac{\pi^2}{4}(k^2 + \ell^2), \quad k, \ell = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

with associated eigenfunctions depending on the parity of  $k$  and  $\ell$ :

- For  $k, \ell$  odd

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.8)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.9)$$

- For  $k$  odd and  $\ell$  even

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = -k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.10)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.11)$$

- For  $k$  even and  $\ell$  odd

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.12)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = -\ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.13)$$

- For  $k, \ell$  even

$$u_x^{k,\ell}(x, y) = k \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right), \quad (2.14)$$

$$u_y^{k,\ell}(x, y) = \ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{2}y\right). \quad (2.15)$$

### 3 Variational Formulations of the Eigenvalue Problem

We start by specifying some notations. Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  denote a Lipschitz domain with generic point  $\mathbf{x}$  and boundary  $\partial\Omega$ . Bold Latin letters like  $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{0} \dots$ , indicate vector valued quantities, while the capital ones (e.g.  $H, \dots$ ) are functional sets involving vector fields. We endow the classical Lebesgue space of square integrable functions  $L^2(\Omega)$  with

the inner product:

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \psi \, d\mathbf{x}.$$

Let also  $L_0^2(\Omega)$  denote the closed subspace of zero averaged functions. We shall need the standard Sobolev space  $H^m(\Omega)$ ,  $m \geq 1$  with the norm:

$$\|\psi\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

where  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  is a multi-index in  $\mathbb{N}^2$  and the symbol  $\partial^\alpha$  represents a partial derivative.

The basic eigenvalue problem (1.1)-(1.2) may be tackled by two variational formulations requiring both the introduction of the functional space  $H(\operatorname{div}, \Omega)$

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.1)$$

endowed with the natural norm

$$\|\mathbf{w}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \left( \|\mathbf{w}\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

The primal variational formulation corresponds to a Galerkin projection method and may be stated as: *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^+ \times H(\operatorname{div}, \Omega)$  *such that*:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad (3.3)$$

where  $\mathbb{R}^+$  denotes the set of positive real numbers, including zero. From this variational statement we note that for  $\lambda^2 = 0$  we obtain  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  almost everywhere showing that vector fields  $\mathbf{u}$  satisfying this property belong to the nullspace of  $\mathbf{grad}(\operatorname{div})$ .

The dual variational formulation corresponds to a saddle-point problem that writes: *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}, p) \in \mathbb{R}^+ \times H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  *such that*:

$$\mathbf{u} - \mathbf{grad} p = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\lambda^2 p, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.5)$$

$$p = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (3.6)$$

One can easily show that this weak formulation requires no more *a priori* regularity on the pressure than  $p \in L^2(\Omega)$  and  $p = 0$  on  $\partial\Omega$ . The last equality must be taken in the

weak sense. Problem (3.4)-(3.6) then becomes: Find  $(\lambda^2, \mathbf{u}, p) \in \mathbb{R}^+ \times H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  such that

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + b(\mathbf{w}, p) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad (3.7)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = -\lambda^2 \int_{\Omega} p q \, d\mathbf{x}, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (3.8)$$

The bilinear form  $b(\cdot, \cdot)$  defined over  $H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  is given by:

$$b(\mathbf{w}, q) = + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}) q \, d\mathbf{x}.$$

There is a natural equivalence between the strong (3.4)-(3.6) and weak (3.7)-(3.8) problems and it is easily checked that the bilinear form  $b(\cdot, \cdot)$  satisfies an inf-sup condition with a positive constant  $\beta$  such that:  $\forall q \in L^2(\Omega)$ ,

$$\sup_{\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega)} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

#### 4 Spectral Discretizations of the weak Formulations

We first introduce some notations and reminders. Let  $\Sigma_{GLL} = \{(\xi_i, \rho_i); 0 \leq i \leq N\}$  and  $\Sigma_{GL} = \{(\zeta_i, \omega_i); 1 \leq i \leq N\}$  respectively denote the sets of Gauss-Lobatto-Legendre and Gauss-Legendre quadrature nodes and weights associated to polynomials of degree  $N$ . These quantities are such that on  $\Lambda := ]-1, +1[$

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^{+1} \Phi(\xi) \, d\xi = \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j) \rho_j, \quad (4.1)$$

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^{+1} \Phi(\zeta) \, d\zeta = \sum_{j=1}^N \Phi(\zeta_j) \omega_j, \quad (4.2)$$

where  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  denotes the space of polynomials with degree  $\leq N$ . We recall that the nodes  $\xi_i$  ( $0 \leq i \leq N$ ) are solution to  $(1-x^2)L'_N(x) = 0$  where  $L_N$  denotes the Legendre polynomial of degree  $N$ , whereas  $\zeta_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) are solution to  $L_N(x) = 0$  (see [9]).

The canonical polynomial interpolation basis  $h_i(x) \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$  built on  $\Sigma_{GLL}$  is given by the relationships:

$$h_i(x) = -\frac{1}{N(N+1)} \frac{1}{L_N(\xi_i)} \frac{(1-x^2)L'_N(x)}{(x-\xi_i)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.3)$$

with the elementary cardinality property

$$h_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq N, \quad (4.4)$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker's delta symbol. We further introduce the canonical polynomial interpolation basis  $\tilde{h}_j(x) \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$  built on  $\Sigma_{GL}$

$$\tilde{h}_j(x) = \frac{1}{L'_N(\zeta_j)} \frac{L_N(x)}{(x - \zeta_j)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4.5)$$

The functions (4.5) satisfy the same cardinality property (4.4) with respect to the GL nodes  $\zeta_j$ .

#### 4.1 A natural though unstable spectral method

A natural choice for the approximation of  $\mathbf{u}$  is a polynomial of degree less or equal to  $N$  in both space directions. We are led to define the following discrete approximation space :

$$H_N = \mathbb{P}_N(\Omega)^2 \cap H(\text{div}, \Omega).$$

The discrete primal problem writes: *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}_N) \in \mathbb{R}^+ \times H_N$  *solutions to:*

$$\mathcal{A}_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) := (\text{div } \mathbf{u}_N, \text{div } \mathbf{v}_N)_N = \lambda^2 (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N, \quad \forall \mathbf{v}_N \in H_N \quad (4.6)$$

where  $(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N := (u_{xN}, v_{xN})_N + (u_{yN}, v_{yN})_N$  and  $(\cdot, \cdot)_N$  denotes the discrete inner product defined by

$$(\psi, \varphi)_N := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \psi(\xi_i, \xi_j) \varphi(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j.$$

Using the basis functions (4.3) on a two-dimensional GLL tensor product grid, one gets approximations for the velocity components  $u_x(x, y)$  and  $u_y(x, y)$ :

$$u_{xN}(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{\ell=0}^N u_{k\ell}^x h_k(x) h_\ell(y), \quad (4.7)$$

$$u_{yN}(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{\ell=0}^N u_{k\ell}^y h_k(x) h_\ell(y), \quad (4.8)$$

where  $u_{k\ell}^x$  (resp.  $u_{k\ell}^y$ ) denotes  $u_x(\xi_k, \xi_\ell)$  (resp.  $u_y(\xi_k, \xi_\ell)$ ).

Let us introduce three sets of elementary matrix operators, building blocks of the algebraic eigenvalue problem stemming from (4.6):

- (1) The first operator is the elementary  $(N + 1) \times (N + 1)$  diagonal mass matrix  $M$  associated to the GLL interpolation basis  $\{h_i\}_{i=0}^N$ :

$$M = \{M_{ij} = (h_i, h_j)_N\}_{i,j=0}^N, \quad (h_i, h_j)_N := \sum_{\ell=0}^N h_i(\xi_\ell) h_j(\xi_\ell) \rho_\ell. \quad (4.9)$$

- (2) The second operator is the elementary  $(N + 1) \times (N + 1)$  stiffness matrix  $K$  associated to the set of functions  $\{h_i\}_{i=0}^N$

$$K = \{K_{ij} = (h'_i, h'_j)_h\}_{i,j=0}^N, \quad (h'_i, h'_j)_N := \sum_{\ell=0}^N h'_i(\xi_\ell) h'_j(\xi_\ell) \rho_\ell. \quad (4.10)$$

- (3) Finally, the third operator is the elementary semi-stiffness matrix  $\widehat{K}$  associated to the GLL interpolation basis. This  $(N + 1) \times (N + 1)$  operator has two forms transpose of each other, a left form ( $\ell$ ) and a right form ( $r$ ) that write:

$$\widehat{K}^\ell = \{\widehat{K}_{ij}^\ell = (h'_i, h_j)_N\}_{i,j=0}^N, \quad (h'_i, h_j)_N := \sum_{\ell=0}^N h'_i(\xi_\ell) h_j(\xi_\ell) \rho_\ell, \quad (4.11)$$

$$\widehat{K}^r = \{\widehat{K}_{ij}^r = (h_i, h'_j)_N\}_{i,j=0}^N, \quad (h_i, h'_j)_N := \sum_{\ell=0}^N h_i(\xi_\ell) h'_j(\xi_\ell) \rho_\ell. \quad (4.12)$$

The algebraic eigenvalue problem induced by (4.6) now writes :

$$\mathcal{K}_N \mathbf{U} = \lambda^2 \mathcal{M}_N \mathbf{U}, \quad (4.13)$$

where the subscript  $N$  stands for ‘natural’. The stiffness- and mass matrices  $\mathcal{K}_N$  and  $\mathcal{M}_N$  have two-by-two block structures

$$\mathcal{K}_N = \begin{pmatrix} K^{xx} & K^{yx} \\ K^{xy} & K^{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} M^{xx} & 0 \\ 0 & M^{yy} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

The elementary two-dimensional stiffness and mass matrices  $K^{rs}$ ,  $M^{rs}$  ( $r, s = x, y$ ) in (4.13) are obtained by tensor products of the elementary mass-, stiffness-, and semi-stiffness matrices (4.9)-(4.12) :

$$\begin{aligned} M^{xx} &= M \otimes M, & M^{yy} &= M \otimes M, \\ K^{xx} &= K \otimes M, & K^{yy} &= M \otimes K, \\ K^{yx} &= \widehat{K}^r \otimes \widehat{K}^\ell, & K^{xy} &= \widehat{K}^\ell \otimes \widehat{K}^r. \end{aligned} \quad (4.15)$$

With natural boundary conditions the size of these matrices after assembly is  $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ . The vector of unknowns  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_y]^T$  is split into two parts containing  $u_{k\ell}^x$  and  $u_{k\ell}^y$ , the degrees of freedom defining  $u_{xN}(x, y)$  and  $u_{yN}(x, y)$  respectively, put in the usual bottom-left to top-right ordering.

The algebraic eigenvalue problem (4.13) gives  $2(N+1)^2$  eigenvalues and associated eigenvectors corresponding to the degrees of freedom in  $H_N$ . We are particularly interested in predicting the size of  $\mathcal{N}_N$ , nullspace of the discretized **grad** (div) operator. As the primal variational formulation provides the full spectrum (i.e. both the singular and the regular eigenvalues), we first consider the dual formulation that gives essentially the regular part of the spectrum. We therefore evaluate in the first place the number of degrees of freedom involved in the discrete dual formulation. Consider the problem : *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}_N, p_N) \in \mathbb{R}_*^+ \times H_N \times \mathbb{P}_N(\Omega)$  *solution to*:

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N + b_N(\mathbf{v}_N, p_N) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_N \in H_N, \quad (4.16)$$

$$b_N(\mathbf{u}_N, q_N) = -\lambda^2 (p_N, q_N)_N, \quad \forall q_N \in \mathbb{P}_N(\Omega). \quad (4.17)$$

Here,  $\mathbb{R}_*^+$  denotes the set of strictly positive real numbers and the discrete bilinear form  $b_N$  is defined by : For all  $\mathbf{v}_N \in H_N$  and  $q_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$

$$b_N(\mathbf{v}_N, q_N) := (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, q_N)_N = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \operatorname{div} \mathbf{v}_N(\xi_i, \xi_j) q_N(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j. \quad (4.18)$$

In order to quantify the nonzero eigenvalues corresponding to the analytical eigenmodes established in Section 2, we start with the characterization of the pressure spurious modes. These are defined as a scalar field  $q_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$  such that

$$b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = 0, \quad \forall \mathbf{w}_N \in H_N.$$

They can be deduced from the spurious modes of the standard Stokes problem that can be found in the literature (see [4], Theorem 24.1) or from the spurious modes of the Darcy problem (see [2]).

**Lemma 1** : The space of polynomials  $q_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$  such that

$$b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = 0, \quad \forall \mathbf{w}_N \in H_N, \quad (4.19)$$

reduces to the single element  $L_N(x) \otimes L_N(y)$  in  $\mathbb{R}^2$  and  $L_N(x) \otimes L_N(y) \otimes L_N(z)$  in  $\mathbb{R}^3$ .

**Proof** : One can easily check that among the set of Stokes or Darcy spurious modes the only ones verifying (4.19) are  $\alpha L_N(x) \otimes L_N(y)$ , where  $\alpha$  is an arbitrary nonzero constant.

Let us take  $\alpha = 1$  and consider  $q_N(x, y) = L_N(x)L_N(y)$ . Then, for every  $\mathbf{v}_N = (v_{xN}, v_{yN}) \in H_N$



$$b_N(\mathbf{v}_N, q_N) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N L_N(\xi_i) L_N(\xi_j) (\partial_x v_{xN}(\xi_i, \xi_j) + \partial_y v_{yN}(\xi_i, \xi_j)) \rho_i \rho_j \quad (4.20)$$

$$= \sum_{j=0}^N \left( \int_{-1}^1 L_N(x) L_N(\xi_j) \partial_x v_{xN}(x, \xi_j) dx \right) \rho_j \quad (4.21)$$

$$+ \sum_{i=0}^N \left( \int_{-1}^1 L_N(\xi_i) L_N(y) \partial_y v_{yN}(\xi_i, y) dy \right) \rho_i. \quad (4.22)$$

The trial function  $\mathbf{v}_N$  can be expanded as

$$v_{xN}(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N v_{xij} L_i(x) L_j(y) \quad \text{with} \quad \partial_x v_{xN}(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^N \hat{v}_{xij} L_i(x) L_j(y),$$

and

$$v_{yN}(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N v_{yij} L_i(x) L_j(y) \quad \text{with} \quad \partial_y v_{yN}(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-1} \hat{v}_{yij} L_i(x) L_j(y).$$

Substituting the expressions of  $\partial_x v_{xN}(x, y)$  and  $\partial_y v_{yN}(x, y)$  in (4.20) and using the orthogonality properties of the Legendre polynomials, one easily gets

$$b_N(\mathbf{v}_N, q_N) = 0.$$

The inconvenience of this (unique) spurious mode lies in the fact that it generates a numerical kernel spoiling the eigenvectors of the curl-free spectrum.

Let  $\mathcal{R}_N$  denote the range of the discretized operator  $\mathbf{grad}(\text{div})$  :

$$\mathcal{R}_N = \{\mathbf{u}_N \in H(\text{div}, \Omega) \mid \text{curl } \mathbf{u}_N = 0 \quad \text{in } \Omega\}.$$

The presence of the spurious eigenmode reduces the dimension of  $\mathcal{R}_N$  to  $(N+1)^2 - 1$ . Since  $\dim(\mathcal{R}_N) + \dim(\mathcal{N}_N) = 2(N+1)^2$ , it turns out that  $\dim(\mathcal{N}_N) = (N+1)^2 + 1$ .

According to (2.7), the number of nonzero eigenvalues approximated with polynomial degree  $N$  should be equal to  $N^2$ . Actually, as discussed hereabove, the number of nonzero eigenvalues is equal to  $(N+1)^2 - 1$ . The extra  $2N$  eigenvalues as shown below correspond to modes induced by the lack of stability of the discretization.

Consider the one-dimensional counterpart of problem (2.5)-(2.6) with  $\lambda_k^2$  and  $\varphi_k(x)$  respectively eigenvalue and associated eigenvector of the discretized problem with polynomial degree  $N$  ( $\lambda_k^2 \approx k^2 \pi^2/4$ ). One can easily show that

$$\mathbf{u}_{kN}^* := (\varphi_k'(x) L_N(y), 0), \quad (4.23)$$

although *not* an analytical eigenvector of  $\mathbf{grad}(\text{div})$  in  $\mathbb{R}^2$  is a numerical eigenvector solution to (4.6) associated to  $\lambda_k^2$ , i.e. lies within the regular part of the  $\mathbf{grad}(\text{div})$  spectrum. Introducing  $\mathbf{u}_{kN}^*$  into the primal variational formulation one gets :  $\forall \mathbf{v}_N \in H_N$

$$\begin{aligned} (\text{div } \mathbf{u}_{kN}^*, \text{div } \mathbf{v}_N)_N &= (\varphi_k''(x) L_N(y), \text{div } \mathbf{v}_N)_N, \\ &= -\lambda_k^2 \left( \varphi_k(x) L_N(y), \frac{\partial v_{xN}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yN}}{\partial y} \right)_N, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_k^2 (\varphi_k'(x) L_N(y), v_{xN})_N, \\ &= \lambda_k^2 (\mathbf{u}_{kN}^*, \mathbf{v}_N)_N, \end{aligned} \quad (4.25)$$

establishing the result. The transition from (4.24) to (4.25) stems from the fact that  $(\varphi_k(x) L_N(y), \partial v_{yN}/\partial y)_N \equiv 0$  as a result of orthogonality of the Legendre polynomials.

Simultaneously, one verifies that in  $\mathbb{R}^2$

$$\text{curl } \mathbf{u}_{kN}^* = -\varphi_k'(x) L_N'(y). \quad (4.26)$$

The right-hand side of this relationship is *not* identically equal to zero, and hence  $\mathbf{u}_{kN}^*$  is *not* an analytical eigenvector. To be an analytical eigenvector it should indeed be curl-free. However  $\text{curl } \mathbf{u}_{kN}^*$  vanishes on the interior nodes of the GLL grid, and on the boundary nodes it behaves like  $\mathcal{O}(N^2)$ . Although strictly not curl-free,  $\mathbf{u}_{kN}^*$  is curl-free inside the domain, in the collocation sense.

This proof has been given for the one-dimensional problem along the  $x$ -axis. By symmetry it should also be considered along the  $y$ -axis. Hence,  $2N$  nonzero eigenvalues can be identified that do not approximate the analytical eigenvalues (2.7) but result from the lack of stability of the  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_N$  scheme.

As a conclusion with regard to the first numerical scheme, we remark that the spurious mode has a double effect. Firstly, it increases the size of the nullspace of the discrete  $\mathbf{grad}(\text{div})$  operator. Secondly, it ‘pollutes’ its range by providing false eigenvalues associated to false eigenvectors. One way to eliminate this false spectrum consists in evaluating all eigenvectors at the nodes of the Gauss-Legendre quadrature grid.

The numerical results displayed on Fig. 1 illustrate the lack of relevance of the  $2N$  eigenmodes identified above. The figure shows the  $x$ -component of the eigenvector field corresponding to  $\lambda_1^2 (\approx \pi^2/4)$  computed with  $N = 24$ . High frequency oscillations are visible on the left part of the figure. Interpolating this eigenvector on the GL grid gives round-off establishing the consistency of the identification of  $\mathbf{u}_{kN}^*$  (4.23).

Figure 2 exhibits the curl of the same eigenvector computed with  $N = 24$  on the GLL grid. One observes clearly significant errors at the boundary while inside the domain the magnitude of the curl is identically equal to zero.

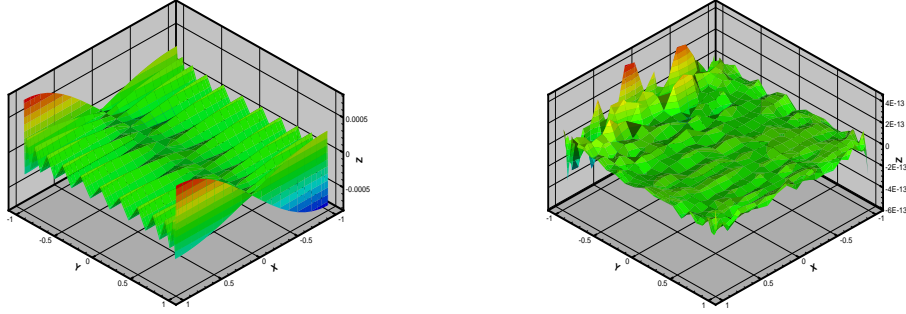


Figure 1. Computation of the  $x$ -component of the eigenvector associated to the eigenvalue  $\lambda_1^2 (\approx \pi^2/4)$  computed with the unstable spectral method ( $N = 24$ ). The left-part of the figure displays the computation performed on the GLL grid. The right-part shows the result after filtering on the GL grid.

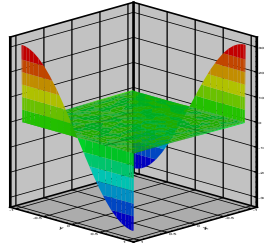


Figure 2. Curl of the eigenvector associated to the eigenvalue  $\lambda_1^2 (\approx \pi^2/4)$  computed with the unstable spectral method ( $N = 24$ ) on the GLL grid.

#### 4.2 A stable and optimal spectral method

In order to avoid the presence of the nonphysical mode identified in the previous section we suggest another discretization scheme for the problem in primal formulation (3.3). We consequently introduce the polynomial space  $X_N(\Omega)$  defined by

$$X_N(\Omega) = \mathcal{P}_N(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_{N-1}(\Lambda) \times \mathcal{P}_{N-1}(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_N(\Lambda).$$

The discrete problem in primal variational formulation now becomes: *Find*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$  and  $\mathbf{u}_N \in X_N(\Omega)$  such that:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_N, \nabla \cdot \mathbf{v}_N)_N^{GL} = \lambda^2 (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GLL}, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N(\Omega). \quad (4.27)$$

Using the basis functions (4.3) and (4.5) the velocity components write

$$u_{xN}(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{\ell=1}^N u_{k\ell}^x h_k(x) \tilde{h}_\ell(y), \quad (4.28)$$

$$u_{yN}(x, y) = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=0}^N u_{k\ell}^y \tilde{h}_k(x) h_\ell(y). \quad (4.29)$$

Using these expansions and the appropriate Gaussian quadrature rules recalled earlier gives the right-hand side of (4.27):

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GLL} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N u_{xN}(\xi_i, \zeta_j) v_{xN}(\xi_i, \zeta_j) \rho_i \omega_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N u_{yN}(\zeta_i, \xi_j) v_{yN}(\zeta_i, \xi_j) \omega_i \rho_j, \end{aligned} \quad (4.30)$$

and for any couple of scalar fields  $p, q$ :

$$(p, q)_N^{GL} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (pq)(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j. \quad (4.31)$$

Superscripts GLL and GL have been introduced to recall that (4.30) involves both the GL and GLL quadrature rules while (4.31) involves only the GL rule.

We again introduce some sets of elementary matrix operators, building blocks of the algebraic eigenvalue problem derived from (4.27):

- (1) Two elementary mass matrices are appropriate in this case,  $M^{GL}$  and  $M^G$  associated respectively to the GLL and GL interpolation bases.  $M^{GL}$  is a  $(N+1) \times (N+1)$  operator with components given by (4.9), while  $M^G$  is a  $N \times N$  matrix with components:

$$M^G = \{M_{ij}^G = (\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)_N\}_{i,j=1}^N, \quad (\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)_N := \sum_{\ell=1}^N \tilde{h}_i(\zeta_\ell) \tilde{h}_j(\zeta_\ell) \omega_\ell. \quad (4.32)$$

- (2) The elementary  $(N+1) \times (N+1)$  stiffness matrix  $K$  associated to the set of GLL basis functions  $\{h_i\}_{i=0}^N$  is the same as (4.10).
- (3) The third operator is the elementary semi-stiffness matrix  $\widehat{K}$  associated to the GLL and GL interpolation bases. This operator has two forms transpose of each other; a  $(N+1) \times N$  left form ( $\ell$ ), and a  $N \times (N+1)$  right form ( $r$ ) that write:

$$\widehat{K}^\ell = \{\widehat{K}_{ij}^\ell = (h'_i, \tilde{h}_j)_N\}_{i,j}, \quad (h'_i, \tilde{h}_j)_N := \sum_{\ell=1}^N h'_i(\zeta_\ell) \tilde{h}_j(\zeta_\ell) \omega_\ell, \quad (4.33)$$

$$\widehat{K}^r = \{\widehat{K}_{ij}^r = (\widetilde{h}_i, h'_j)_N\}_{i,j}, \quad (\widetilde{h}_i, h'_j)_N := \sum_{\ell=1}^N \widetilde{h}_i(\zeta_\ell) h'_j(\zeta_\ell) \omega_\ell. \quad (4.34)$$

Notice that according to the results (4.1)-(4.2) all inner products in these elementary matrices (with the exception of  $M^{GL}$ ) are exact.

The algebraic eigenvalue problem now writes :

$$\mathcal{K}_P \mathbf{U} = \lambda^2 \mathcal{M}_P \mathbf{U}, \quad (4.35)$$

where the subscript  $P$  stands for ‘primal’. The stiffness- and mass matrices  $\mathcal{K}_P$  and  $\mathcal{M}_P$  have two-by-two block structures similar to those given by (4.14)-(4.15):

$$\mathcal{K}_P = \begin{pmatrix} K^{xx} & K^{yx} \\ K^{xy} & K^{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_P = \begin{pmatrix} M^{xx} & 0 \\ 0 & M^{yy} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

with

$$\begin{aligned} M^{xx} &= M^{GL} \otimes M^G, & M^{yy} &= M^G \otimes M^{GL}, \\ K^{xx} &= K \otimes M^G, & K^{yy} &= M^G \otimes K, \\ K^{yx} &= \widehat{K}^r \otimes \widehat{K}^\ell, & K^{xy} &= \widehat{K}^\ell \otimes \widehat{K}^r. \end{aligned} \quad (4.37)$$

The building blocks of  $\mathcal{K}_P$  and  $\mathcal{M}_P$  are square matrices of size  $N(N+1)$ . The spectrum of (4.35) therefore contains  $2N(N+1)$  eigenvalues.

Again the problem arises to determine how many eigenvalues should belong to the singular spectrum (*i.e* the dimension of the nullspace  $\mathcal{N}_P$ ) and how many should belong to the regular spectrum (*i.e* the dimension of the range  $\mathcal{R}_P$ ). Using the same argument as before, we look again at the size of the nullspace of  $\mathcal{K}_P$ , equal here to  $2N(N+1) - p$ , where  $p$  is the true number of constraints in the set of linear equations

$$\mathcal{K}_P \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (4.38)$$

identities excluded. The lack of spurious modes is such that  $p = N^2$ . It therefore turns out that  $\dim(\mathcal{N}_P) = N^2 + 2N$ , and  $\dim(\mathcal{R}_P) = N^2$ .

## 5 Numerical Results

Extensive computations have been performed in two and three dimensions. They show the accuracy of the stable Legendre spectral method introduced in this work. We sep-

arate the discussion of the results commenting first the results obtained for the regular spectrum, and afterwards those obtained for the singular spectrum.

Figure 3 shows the relative error on the four lowest eigenvalues, *i.e.*  $\lambda_{kk}^2$  with  $k = 1 \dots 4$ , on a semi-logarithmic scale as a function of  $N$ . As might be expected the error decrease is exponential in all cases with increasing error levels for increasing values of  $k$ .

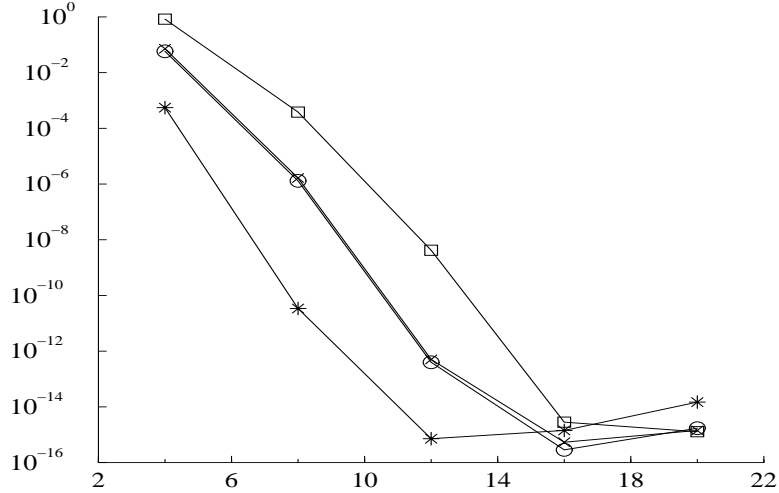


Figure 3. Relative error as a function of  $N$  on the four lowest eigenvalues. The correspondence is the following:  $*$  :=  $\lambda_1$  ( $\pi^2/2$ ),  $o$  :=  $\lambda_2$  ( $5\pi^2/4$ ),  $x$  =  $\lambda_3$  ( $2\pi^2$ ) and  $\square$  =  $\lambda_4$  ( $10\pi^2/4$ ).

Figure 4 shows the  $L^2$  error norm of the four eigenvectors associated to the eigenvalues displayed on Fig. 3, on a semi-logarithmic scale as a function of  $N$ . Again, the error decrease is spectral in all cases. However, round-off occurs at a slightly higher level than for the computation of the eigenvalues.

Since they belong to  $\mathcal{R}_P$ , range of the discrete **grad** (div) operator, these eigenvectors should be curl-free at least inside the domain. We recall that on the boundary  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  is weakly enforced. Increasing the value of  $N$  though, the discrepancy with zero on the boundary should disappear. This is illustrated on Fig. 5 showing the  $L^2$  norm of their curl.

One reaches similar conclusions for the numerical results obtained in the 3D case. Here the domain is  $] -1, +1[^3$ . The 2D discretization is readily extended to 3D using the tensor properties of the basis. Computations have been made of the approximation errors on the eigenvalues

$$\lambda_{kkk}^2 = \frac{3\pi^2}{4} k^2, \quad k = 1, 2,$$

and associated eigenvectors

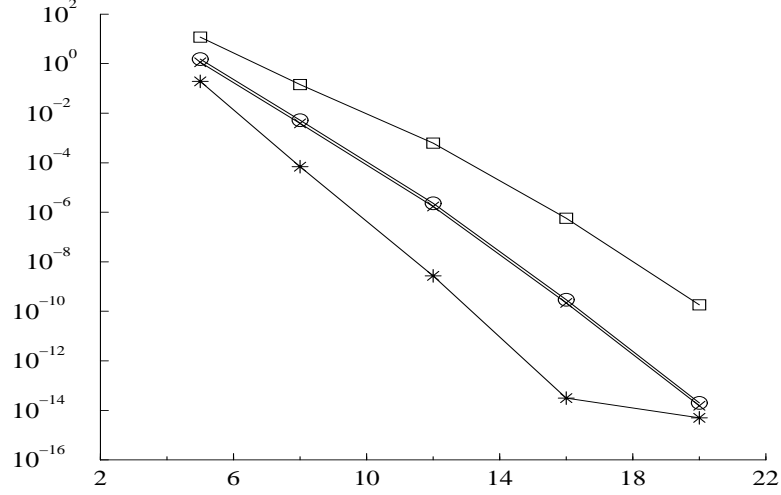


Figure 4.  $L^2$  error norm as a function of  $N$  on the four eigenvectors associated to the four lowest eigenvalues. The correspondence is the following:  $*$  :=  $\lambda_1$  ( $\pi^2/2$ ),  $o$  :=  $\lambda_2$  ( $5\pi^2/4$ ),  $\times$  =  $\lambda_3$  ( $2\pi^2$ ) and  $\square$  =  $\lambda_4$  ( $10\pi^2/4$ ).

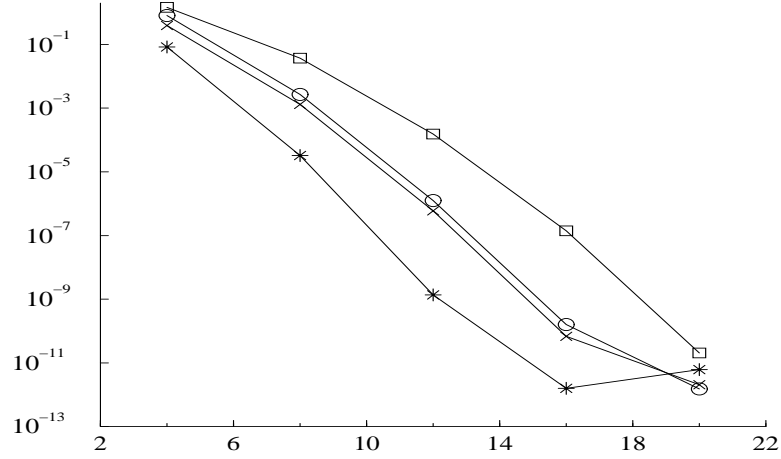


Figure 5.  $L^2$  norm of curl of the eigenvectors associated to the four lowest eigenvalues as a function of  $N$ . The correspondence is the following:  $*$  :=  $\lambda_1$  ( $\pi^2/2$ ),  $o$  :=  $\lambda_2$  ( $5\pi^2/4$ ),  $\times$  =  $\lambda_3$  ( $2\pi^2$ ) and  $\square$  =  $\lambda_4$  ( $10\pi^2/4$ ).

$$u_x^{111}(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right),$$

$$u_y^{111}(x, y, z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right),$$

$$u_z^{111}(x, y, z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)$$

and

$$\begin{aligned} u_x^{222}(x, y, z) &= 2 \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z), \\ u_y^{222}(x, y, z) &= 2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z), \\ u_z^{222}(x, y, z) &= 2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z), \end{aligned}$$

that are shown on Figs 6 and 7. More specifically, Fig. 6 displays on a semi-logarithmic scale the relative error on the two lowest eigenvalues of multiplicity one (*i.e.*  $\lambda_{kkk}^2$  with  $k = 1, 2$ ), as a function of  $N$ . As might be expected the error decrease is exponential in all cases with increasing error levels for increasing values of  $k$ .

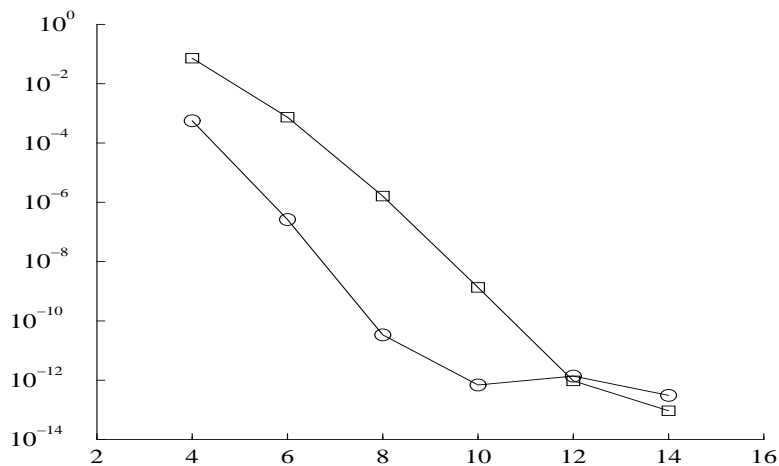


Figure 6. Relative error as a function of  $N$  on the two lowest eigenvalues of multiplicity one  $\lambda_{kkk}^2$  with  $k = 1, 2$ . The correspondence is the following:  $\circ$  ( $k = 1$ ),  $\square$  ( $k = 2$ ).

Figure 7 shows on the same semi-logarithmic scale, the  $L^2$  error norm of the associated eigenvectors. Again, the error decrease is spectral in all cases. However, round-off occurs at a slightly higher level than for the eigenvalues computation.

All these results show that with regard to the regular spectrum the stable spectral method behaves as expected and proves its efficiency and optimality for spectrum resolution.

Let us now come to the singular part of the spectrum. Here, benchmarking the numerical solution is more difficult since it is impossible to compare numerical eigenvectors to any analytical counterpart because these are unknown. However, we are able to look at certain well-defined properties that should be verified *a priori*. For instance, the elements of the numerical kernel should be identically divergence-free. Also, the projection of any given divergence-free vector field onto the numerical kernel should converge to the original one with increasing values of  $N$ . One might even expect spectral convergence of this projection when the given divergence-free field has sufficient regularity properties. Our numerical experiments show that these two conditions are met.



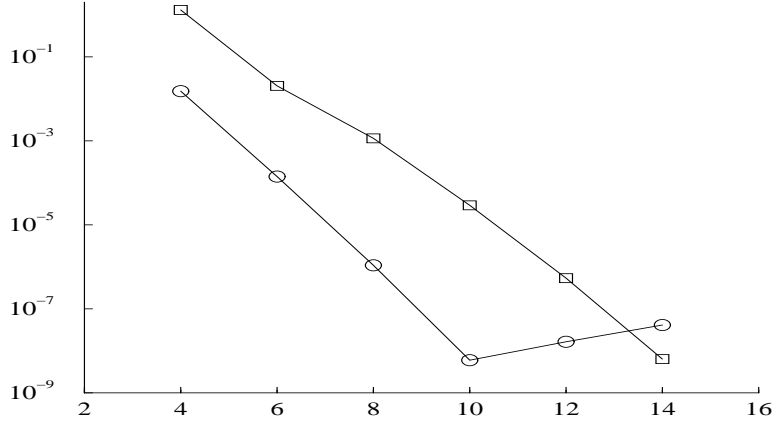


Figure 7.  $L^2$  error norm as a function of  $N$  on the two eigenvectors  $\mathbf{u}_{k k k}$  associated to  $\lambda_{k k k}^2$  with  $k = 1, 2$ . The correspondence is the following:  $\circ$  ( $k = 1$ ),  $\square$  ( $k = 2$ ).

With regard to the ‘divergence-free’ character of the singular eigenvectors set, we have evaluated discrete kernels with increasing values of  $N$ . In each case we computed the  $L^2$  norm of the divergence of their elements and took the maximum. Table 5 shows the evolution of this maximum as a function of  $N$ . The results are perfectly coherent. The slight departure from round-off may be attributed to conditioning problems.

$N$	4	8	12	16	20	24
$\max \ \operatorname{div} \mathbf{u}_{S N}\ _{L^2}$	2.12(-15)	7.61(-15)	1.61(-15)	3.94(-14)	6.01(-14)	1.23(-13)

Lastly, we have considered  $\mathbf{u}_S^*(x, y) := (-\sin \pi x \cos \pi y, \cos \pi x \sin \pi y)^T$  a solenoidal vector field, and projected  $\mathbf{u}_S^*$  onto the span of the discrete kernel  $\mathcal{K}_P$ . Denoting this projection by  $\mathbf{u}_{S N}^*$  we evaluated the error  $\|\mathbf{u}_S^* - \mathbf{u}_{S N}^*\|_{L^2}$  for increasing values of  $N$ . The result is shown on Fig. 8. The error decay again is spectral despite a slightly deteriorating value of  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_{S N}^*\|_{L^2}$  with increasing  $N$ .

Once again, this 2D result extends to 3D computations with the application of the same projection procedure onto the kernel of the vector field  $\mathbf{u}_S^*(x, y, z) := (\sin(x) \cos(y) \cos(z), \cos(x) \sin(y) \cos(z), -2 \cos(x) \cos(y) \sin(z))^T$ .

We notice that the projection is a spectral approximation of the continuous field. Figure 9 illustrates the spectral decay with increasing values of  $N$ .

This is a significant result since nothing allows an *a priori* claim that the discrete kernel  $\mathcal{K}_P$  should exhibit the property.

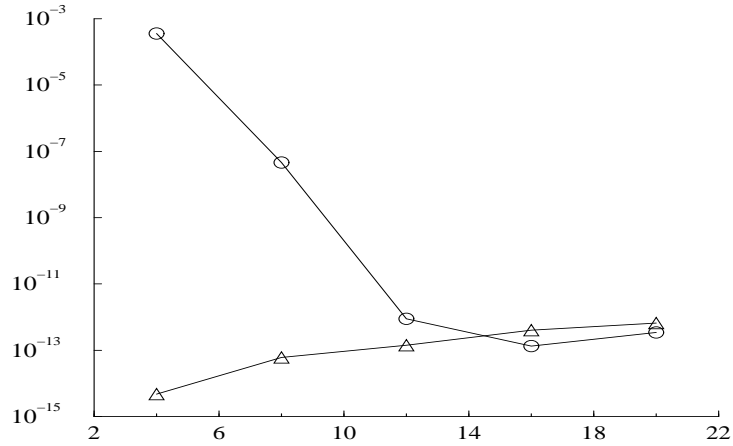


Figure 8. Projection  $\mathbf{u}_{S_N}^*$  of a given solenoidal field  $\mathbf{u}_S^*$ , onto  $\mathcal{K}_P$ . The figure displays  $\|\mathbf{u}_S^* - \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  (○), and  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  (△) as a function of  $N$  in the 2D case.

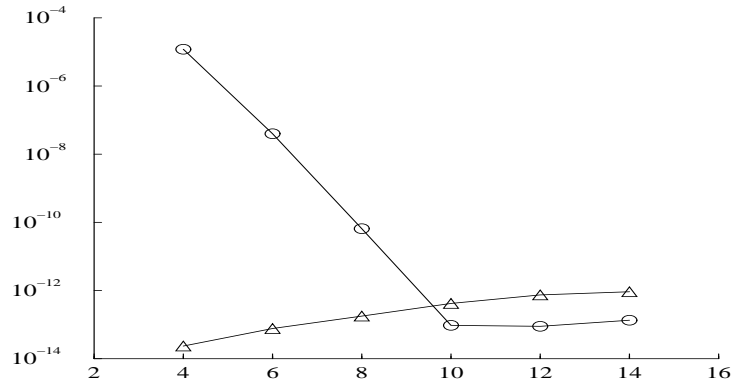


Figure 9. Projection  $\mathbf{u}_{S_N}^*$  of a given solenoidal field  $\mathbf{u}_S^*$ , onto  $\mathcal{K}_P$ . The figure displays  $\|\mathbf{u}_S^* - \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  (○), and  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_{S_N}^*\|_{L^2}$  (△) as a function of  $N$  in the 3D case.

### 5.1 Application to the Helmholtz decomposition

Before we conclude the paper we want to throw some new light on the classical Helmholtz decomposition data using the stable element based on the  $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_{N-1}$  grid developed in Section 4.2

Consider the continuous problem : For a given data  $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$  find a velocity field  $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  and pressure scalar field  $p \in L^2(\Omega)$  such that

$$\mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.39)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.40)$$

$$p = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (5.41)$$

This problem can be put in a Laplacian formulation: *Find*  $p \in L^2(\Omega)$  *such that*

$$\begin{aligned} \Delta p &= \operatorname{div} \mathbf{f}, & \text{in } \Omega, \\ p &= 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.42)$$

All these relationships must be considered in the weak sense. Notice that the regularity of  $p$  is lowered from  $H^1(\Omega)$  for problem (5.42) to  $L^2(\Omega)$  for problem (5.39)-(5.41).

In weak formulation problem (5.39)-(5.41) becomes: *Find*  $(\mathbf{u}, p) \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  *such that:*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad (5.43)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (5.44)$$

Taking into account all previous results it seems quite natural to select the polynomial space  $X_N(\Omega)$  for the velocity and  $\mathcal{P}_{N-1}(\Omega)$  for the pressure.

The discretized problem may now be stated as: *Find*  $(\mathbf{u}_N, p_N) \in X_N(\Omega) \times \mathcal{P}_{N-1}(\Omega)$  *such that:*

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N)_N - b(\mathbf{w}_N, p_N) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_N)_N, \quad \forall \mathbf{w}_N \in \mathbf{X}_N(\Omega), \quad (5.45)$$

$$b(\mathbf{u}_N, q_N) = 0, \quad \forall q_N \in \mathcal{P}_{N-1}(\Omega). \quad (5.46)$$

From a practical point of view, and since the degree of  $q_N \times \operatorname{div} \mathbf{w}_N$  is equal to  $(2N-2)$ , the integral terms  $b(\mathbf{w}_N, q_N)$  is computed exactly using either the Gauss quadrature formula (4.31), or the mixed GLL quadrature scheme (4.30).

The main interest of the spectral element presented in this work lies in the absence of undesirable eigenmodes and in the fact that it ensures a uniform (with respect to  $N$ ) *inf-sup* condition on the variational form  $b(\cdot, \cdot)$  as we now show.

**Lemma 2 :** A uniform *inf-sup* condition on  $b(\cdot, \cdot)$  holds:

$$\sup_{\mathbf{w}_N \in \mathbf{X}_N(\Omega)} \frac{b(\mathbf{w}_N, q_N)}{\|\mathbf{w}_N\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \beta \|q_N\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q_N \in \mathcal{P}_{N-1}(\Omega), \quad (5.47)$$

with a constant  $\beta > 0$  that does not depend on  $N$ .

**Proof:** The proof of property (5.47) rests upon a result in [4] (Chap. 4, Lemma 4.4) with some slight modifications due to the fact that the normal velocity component is

not vanishing over  $\partial\Omega$ . For any  $q_N \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)$  expanded over the Legendre basis:

$$q_N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} q_{mn} L_m(x) L_n(y).$$

We set

$$w_N(x, y) = - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=n+1}^{N-1} q_{mn} \frac{L_{m+1} - L_{m-1}}{2m+1}(x) L_n(y), \quad (5.48)$$

and

$$t_N(x, y) = - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^n q_{mn} L_m(x) \frac{L_{n+1} - L_{n-1}}{2n+1}(y) + q_{00} L_1(y). \quad (5.49)$$

It is an easy matter to check that  $\mathbf{w}_N = (w_N, t_N)$  belongs to  $X_N(\Omega)$ , that  $\operatorname{div} \mathbf{w}_N = q_N$ , and that

$$\left\| \frac{\partial w_N}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial t_N}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|q_N\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Finally, applying Poincaré inequality to  $w_N$  in the  $x$ -direction and Poincaré–Wirtinger inequality to  $t_N$  in the  $y$ -direction achieves the proof that:

$$b(\mathbf{w}_N, q_N) \geq \beta' \|q_N\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}_N\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}.$$

Hence the lemma. □

The spectral element used here provides the following estimation: Using Brezzi abstract theory of saddle–point problems ([6], [7]) together with the previous Lemma and following Sacchi Landriani and Vandeven [16] when approximating divergence–free vector fields with divergence–free polynomials, we derive an error estimation result.

**Theorem 1 :** Assume the exact solution of problem (5.45)–(5.46) is in  $(H^s(\Omega))^2 \times H^s(\Omega)$  and the data  $\mathbf{f}$  belongs to  $(H^s(\Omega))^2$ ,  $s > 1$ , then

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq CN^{-s} (\|\mathbf{u}\|_{(H^s(\Omega))^2} + \|p\|_{H^s(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{(H^s(\Omega))^2}).$$

We illustrate this theorem by a numerical experiment on the square  $\Omega = ]-1, 1[^2$ , to measure the accuracy of the method. The data  $\mathbf{f}$  corresponds to the analytic solution provided by:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -\sin(\pi x) \cos(\pi y), \\ u_y(x, y) &= \cos(\pi x) \sin(\pi y), \\ p(x, y) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y). \end{aligned}$$

The exact solution  $(\mathbf{u}, p)$  is approximated by  $(\mathbf{u}_N, p_N)$  in two ways: (a) Solving the mixed formulation on the staggered grids, and (b) in writing down a Dirichlet-Poisson problem on the pressure  $p$  which is then discretized by classical spectral method (see [9], [4]). The behavior of the error for  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N)$  with respect to the  $(L^2(\Omega))^2$ -norm and for  $(p - p_N)$  with respect to the  $L^2(\Omega)$ -norm are plotted respectively in Fig. 10 and Fig. 11 where a linear-logarithmic scale is adopted. As long as we attempt to approximate analytic solutions by high degree polynomials it is well known that the convergence rate of Theorem 1 becomes of exponential order, meaning that the errors decay like  $\rho^N$  with  $\rho \in ]0, 1[$ . The representative curves of Fig. 10 and Fig. 11 confirm these trends.

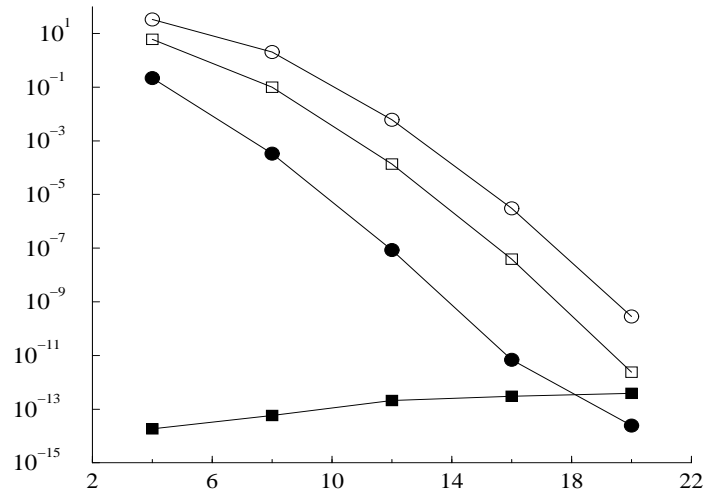


Figure 10. Convergence of the residual  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{(L^2(\Omega))^2}$  (circles) and  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}$  (squares) as a function of  $N$ . Open symbols correspond to the Poisson solver. Full symbols correspond to the dual approach.

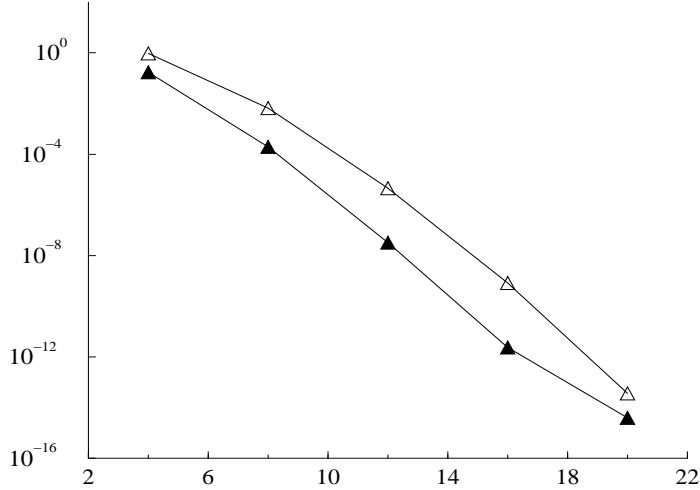


Figure 11. Convergence of the residual  $\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)}$  as a function of  $N$ . The open triangles correspond to the Poisson solver and the black ones to the dual approach.

We remark that in the regular case, both solvers provide similar results for the pressure while a larger difference appears for the velocity, the mixed spectral element providing several more exact significant figures for the same value of  $N$ . In addition  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}$  for the mixed spectral element is equal to round-off.

## 5.2 Extension to spectral element method

The last part is devoted to the extension of our mixed spectral element to more general geometries, using the domain decomposition concept (see [12]). Assume that  $\Omega$  is the union of quadrangular elements  $\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k$ . For simplification, we consider only rectilinear elements with edges collinear to the  $x$  or  $y$  axis, that is

$$\Omega_k = ]c_k, c'_k[ \times ]d_k, d'_k[.$$

The generalization to curved subdomains is done using the arguments developed in [13]. The partition is conforming in the sense that the intersection of two adjacent elements is either a vertex, a whole edge (or a whole face). The discrete subspaces  $\mathcal{X}_N(\Omega) \subset H(\operatorname{div}, \Omega)$  and  $M_N(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  are chosen to be

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_N(\Omega) &= \left\{ \mathbf{w}_N \in H(\operatorname{div}, \Omega), \mathbf{w}_N^k = \mathbf{w}_{N|\Omega_k} \in X_N(\Omega_k) \right\} \\ \mathcal{M}_N(\Omega) &= \left\{ q_N \in L^2(\Omega), q_N^k = q_{N|\Omega_k} \in \mathcal{P}_{N-1}(\Omega_k) \right\}. \end{aligned}$$

Note that the normal component of the velocity is continuous across the elemental boundaries while the pressure is completely discontinuous there.

In our numerical experiment the domain  $\Omega$  is L-shaped and the solution has a much lower regularity. Fig. 12 exhibits the L-shaped domain partitioned into 3 subdomains with the GLL grids corresponding to  $N = 28$ .

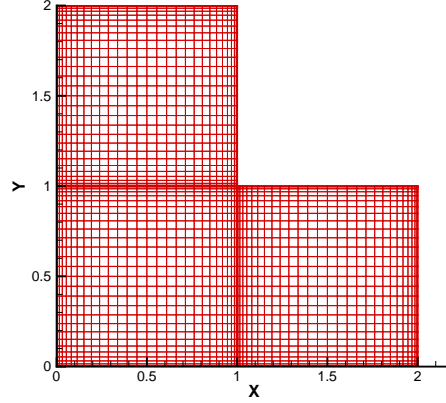


Figure 12. L-shaped domain: Anatomy of the decomposition.

The right-hand side  $\mathbf{f}$  is chosen such that the exact solution writes

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -\sin(\pi x) \cos(\pi y), \\ u_y(x, y) &= \cos(\pi x) \sin(\pi y), \\ p(x, y) &= (xy)^{5/2}(1-x)(2-x)(1-y)(2-y). \end{aligned}$$

Notice that the pressure belongs to  $H^{3-\epsilon}(\Omega)$  with  $\epsilon > 0$ . This entails the fact the convergence will be limited by this regularity. To invert the discrete problem we resort to the Dirichlet-Neumann iterative solver (see [15]).

Fig. 13 displays the convergence of the residuals  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{(L^2(\Omega))^2}$  and  $\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)}$  on a log-log scale with the same convention as before for the symbols. Again we observe a higher improvement in accuracy switching from the Poisson solver to the mixed spectral element for the velocity field, than for the pressure field.

Fig. 14 illustrates the isovalues of the approximated pressure computed with  $N = 24$ . One notes the continuity of the solution through the interfaces between the subdomains

## 6 Conclusion

This work had two basic motivations: an understanding of the spurious modes triggered by the use of single collocation grids, and (its corollary) the search for staggered grids to

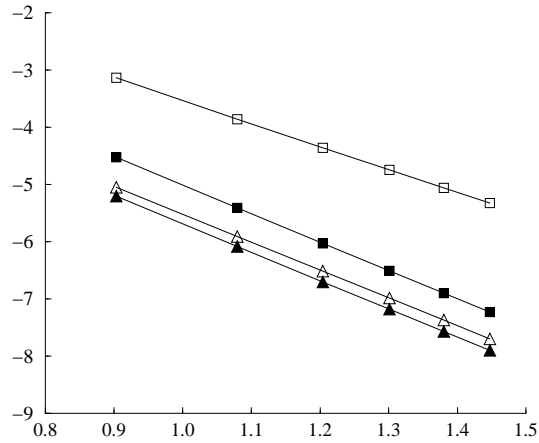


Figure 13. Convergence of the residual  $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_N\|_{(L^2(\Omega))^2}$  (squares) and  $\|p-p_N\|_{L^2(\Omega)}$  (triangles) as a function of  $N$ . Open symbols correspond to the Poisson solver. Full symbols correspond to the dual approach.

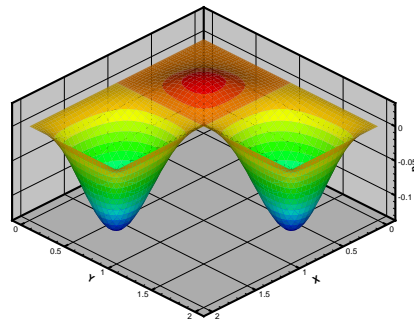


Figure 14. Isovalues of the approximated pressure computed with  $N = 28$

avoid such undesirable consequences. Numerical tests convincingly show that we reached both aims. In particular we have succeeded in building a discrete kernel for the basic operator that has the property of being solenoidal down to numerical round-off, fulfilling the boundary conditions in a weak sense, and such that any given solenoidal vector field can be spectrally projected. Such basis functions might be used for constructive purposes in various types of applications such as Helmholtz decomposition and Stokes eigenvalue problem.

### Acknowledgments

The research covered by this paper started when EHM was visiting laboratoire TREFLE as invited professor at the university of Bordeaux I in May 2006. This author kindly acknowledges the hospitality of ENSCPB



## References

- [1] Ahusborde E., Azaïez M., Deville M.O., and Mund E.H., Legendre Spectral Methods for the **-grad** (div) Operator, submitted for publication in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- [2] Azaïez M., Bernardi C., and Grundmann M., Spectral Method Applied to Porous Media, *East–West J. Numer. Math.*, **2**, 91–105, 1994.
- [3] Azaïez M., Deville M.O., Gruber R., and Mund E.H., On a Stable Spectral Element for the **grad** (div) Eigenvalue Problem, *J. Sci. Comput.*, 27, pp. 41-50, 2006.
- [4] Bernardi C., and Maday Y., *Spectral Methods*, in *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. V edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North-Holland, 209–485, 1997.
- [5] Boffi D, Costabel M., Dauge M., and Demkowickz L., Discrete compactness for the *hp* version of rectangular edge finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 44, No 3, pp. 979-1004, 2006.
- [6] Brezzi F., On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arizing from Lagrange Multipliers, *R.A.I.R.O. Anal. Numér.*, **8** R2, 129–151, (1974).
- [7] Brezzi F., and Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [8] Costabel M. and Dauge M., Computation of resonance frequencies for Maxwell equations in non smooth domains. *Lecture Notes in computational science and engineering* Vol. 31, Springer 2003.
- [9] Deville M.O., Fischer P.F., and Mund E.H., *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [10] Galbrun H., *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence*, Gauthier-Villars, Paris, France, 1931.
- [11] Olshanskii M. A., and Reusken A., Grad-Div Stabilisation for Stokes Equations, *Math of Comp.*, **73** N° 248, p 1699-1718, 2003.
- [12] Maday Y. and Patera A. T., *Spectral Element Method for Navier-Stokes Equations*, in A. K. Noor and J.T. Oden, editors, *State-of-the-Art-Surveys in Computational Mechanics*, p. 71-143, ASME, New York, 1989.
- [13] Maday Y. and Rønquist E. R., Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coefficients and deformed geometries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **80**, pp 91-115, 1990.
- [14] Monk P., Wang Y., and Szabo B., Computing cavity models using the p-version of the finite element method. *IEEE Transaction on Magnetics*, **32**, pp. 1934-1940, 1996.
- [15] Quarteroni A. and Valli A., *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* Oxford University Press 1999.
- [16] Sacchi-Landriani G. and Vandeven H., Polynomial Approximation of Divergence-free Functions, *Math. Comp.*, **52**, pp. 103–130, 1989.

# Constructive Spectral Approaches for the Helmholtz Decomposition of a Vector Field <sup>1</sup>

E. Ahusborde <sup>a</sup>, M. Azaïez <sup>a</sup>, M.O. Deville <sup>b</sup>, R. Gruber <sup>b</sup>,  
E.H. Mund <sup>c,d</sup>

<sup>a</sup>*TREFLE (UMR CNRS 8508), ENSCPB, 33607 Pessac (France)*

<sup>b</sup>*Laboratory of Computational Engineering, EPFL, 1015 Lausanne (Switzerland)*

<sup>c</sup>*Service de Métrologie Nucléaire, ULB, 1050 Brussels (Belgium)*

<sup>d</sup>*Unité de Thermodynamique, UCL, 1348 Louvain-La-Neuve (Belgium)*

---

## Abstract

This paper presents spectral approaches on staggered grids to extract the solenoidal (i.e. divergence free) and non-solenoidal (i.e. curl free or, gradient of a scalar field) components of a given vector field. Basically, the vector field is described using a polynomial expansion  $(\mathbb{P}_N^0 \otimes \mathbb{P}_{N-1}) \times (\mathbb{P}_{N-1} \otimes \mathbb{P}_N^0)$  on a GLL/GL-GL/GLL mesh, and the scalar field is computed using a polynomial expansion  $\mathbb{P}_{N-1} \otimes \mathbb{P}_{N-1}$  on the GL/GL grid. These approaches use the same spectral element and consist in a projection either onto the kernel of the  $-\text{grad}(\text{div})$  operator, or onto its range. Two variational formulations are presented and studied to approximate the divergence free and the curl free parts of the spectrum. Each one is well adapted to ensure the expected constraints. The approaches are detailed and illustrated by several numerical examples.

*Key words:* Helmholtz decomposition,  $\text{grad}(\text{div})$  operator, spectral element, eigenvalue problem, divergence free, curl free, primal and dual formulation

---

## 1 Introduction

The Helmholtz decomposition of a general vector field  $\mathbf{F} = \text{grad}\varphi + \text{curl}\mathbf{A}$  into the gradient of a scalar potential  $\varphi$  and the curl of a zero-divergence vector potential  $\mathbf{A}$  is a classical problem in applied and computational physics [24,21]. Application areas include (among others) electromagnetism, linear elasticity and fluid mechanics. A closed form of this decomposition may be obtained for infinite domains through Biot-Savart

---

<sup>1</sup> Article publié dans Applied Numerical Mathematics.

type integrals. In finite domains, however such an approach is no longer feasible and computational solutions are the only practical way to perform this decomposition.

With regard to elasticity, work by Brezzi and Fortin [15], and by Arnold and Falk [5] used the Helmholtz decomposition theorem for the study of the Reissner-Mindlin plate model. With regard to incompressible fluid flows, the scalar potential in the Helmholtz decomposition is usually related to the pressure field  $p$ , and the vector potential corresponds to the solenoidal velocity field  $\mathbf{u}_S$  both quantities being involved in the Navier-Stokes equations [6]. Stokes and Navier-Stokes solvers decouple most of the time the computation of the velocity and pressure fields [20]. The family of correction-pressure time splitting methods [22] generates first a tentative velocity field that is not incompressible but contains the right vorticity. The addition of a pressure gradient to this temporary velocity (equivalent to Helmholtz decomposition) makes it divergence free [18,26]. Another approach resorts to pressure penalization [17]. Finally, the Green's function method (either in velocity-pressure or in vorticity variables) or the influence matrix technique organizes a way to set up the Helmholtz decomposition in order to achieve a solenoidal field including the boundary (see, for instance [23]).

Consider a *given* vector field  $\mathbf{f}$  defined in some domain  $\Omega$  with boundary  $\partial\Omega$ . The Helmholtz decomposition writes (see [21], Theorem 3.2, p.40):

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_I, \quad (1.1)$$

the (unknown) solenoidal component  $\mathbf{u}_S$  satisfying the equations

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}_S = 0, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

the complement  $\mathbf{u}_I$  being such that:

$$\text{curl } \mathbf{u}_I := \nabla \times \mathbf{u}_I = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (1.3)$$

with unspecified boundary conditions. Our objective is to obtain discrete vector fields satisfying the constraints (1.2)-(1.3), hopefully to round-off accuracy. A key element of such a decomposition would be the projection of the left-hand side of (1.1) onto either divergence-free, or curl-free bases if these were easy to obtain. Building such bases however is not a trivial task. Fortunately the grad(div) operator offers such a possibility, its kernel being made of divergence-free velocity fields while its range is spanned by curl-free vector fields. Section 2 of the paper recalls the spectral properties of the grad(div) operator, introduces the right function spaces for the solution to the continuous problem and sets the eigenvalue problem in primal and dual variational formulations (see for instance [3,4]). In Section 3 we put the grad(div) eigenvalue problem in discrete forms using a stable Legendre spectral element [3,4] and we build finite dimensional solenoidal

and non-solenoidal bases, respectively from the primal-, and from the primal and dual variational formulations. The solenoidal base spans the kernel of the discrete grad(div) operator, while the non-solenoidal base spans its range. Both bases are used to implement the projection techniques and hence, to perform the Helmholtz decomposition in a constructive way (as mentioned in the title). Section 4 discusses the numerical results obtained for a variety of vector fields and tries to identify the most efficient projection technique in terms of accuracy. In Section 5, we apply the Helmholtz decomposition to unsteady Stokes calculations. Finally, Section 6 draws the conclusion of this work.

## 2 Variational formulations of the -grad(div) eigenvalue problem

The continuous eigenvalue problem reads: *Find  $\mathbf{u}$  and the scalar  $\lambda^2$  such that:*

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.2)$$

in the bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) with Lipschitzian border. Here  $\mathbf{n}$  denotes the outer unit normal along the boundary. For the sake of commodity we shall assume  $\Omega$  is the reference domain  $]-1, +1[^d$ . Several methods have been proposed to analyse the problem (2.1)-(2.2), we supply a non-exhaustive list of papers dedicated to the  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$  operator [1,7,8,9,10,11,12,13,14,19]

The eigenvalue spectrum contains two parts: a regular part with enumerable nonzero eigenvalues and associated curl-free eigenvectors, and a singular part where all eigenvalues are equal to zero and the associated eigenfunctions are divergence-free velocity fields, *i.e.* satisfy the condition  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  everywhere inside  $\Omega$ . On the reference domain in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\widehat{\Omega} = [-1, +1]^2$  one can easily show that the nonsingular eigenvalues  $\lambda_{k,\ell}^2$  are

$$\lambda_{k,\ell}^2 = \frac{\pi^2}{4}(k^2 + \ell^2), \quad k, \ell = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

with associated eigenvectors  $\mathbf{u}_{k,\ell}(x, y)$ , tensor products of trigonometric functions depending on the parity of the indices  $k, \ell$ . Let us incidentally mention that, instead of (2.2), another boundary condition may be applied to problem (2.1) namely  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  along  $\partial\Omega$ . We shall restrict the present analysis to the problem (2.1)-(2.2) in  $\mathbb{R}^2$ . In order to state the problem in variational form we introduce the relevant spaces of functions.

Let  $H(\text{div}, \Omega)$  denote the space (see [16])

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{w} \in (L^2(\Omega))^2; \text{div } \mathbf{w} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (2.4)$$

endowed with the natural norm

$$\|\mathbf{w}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \left( \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

The admissible space for the velocity  $\mathbf{u}$  in problem (2.1)-(2.2) is a subspace of  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ :

$$X(\Omega) = \{\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega); \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \quad (2.6)$$

Equipped with the norm (2.5),  $X(\Omega)$  is a Hilbert space [21].

One obtains the primal (or, energy) variational formulation of problem (2.1)-(2.2) by taking the inner product of (2.1) with any  $\mathbf{v} \in X(\Omega)$ . After integration by parts the eigenvalue problem becomes: *Find*  $\mathbf{u} \in X(\Omega)$  *and*  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  *such that*

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in X(\Omega). \quad (2.7)$$

We can use this expression to recall some fundamental properties of the  $\operatorname{grad}(\operatorname{div})$  eigenfunctions. Firstly, with regard to the singular eigenvalues any element  $\mathbf{u}$  belonging to the kernel  $K(\mathcal{A})$  is such that

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.8)$$

*i.e.*  $K(\mathcal{A})$  is made of vector fields that are solenoidal almost everywhere. Hence, these vector fields should be appropriate candidates for the approximation of the solenoidal component of  $\mathbf{f}$ .

Secondly, with regard to the regular eigenspectrum one can easily show that the eigenvectors spanning the range  $R(\mathcal{A})$  and corresponding to different eigenvalues are orthogonal both with respect to the Euclidian inner product and to the  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  inner product corresponding to the norm (2.5), that is:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k + \operatorname{div} \mathbf{u}_j \operatorname{div} \mathbf{u}_k) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall j \neq k. \quad (2.9)$$

Finally, one can show that any eigenvector  $\mathbf{u}_S \in K(\mathcal{A})$  is orthogonal to  $R(\mathcal{A})$ , and that  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  can be uniquely decomposed into

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = K(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A}). \quad (2.10)$$

Any nonsingular solution of (2.1)-(2.2) necessarily has vanishing curl since for any scalar field  $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} p) = 0$ . One is therefore naturally tempted to uncouple the second-order

problem (2.1) into a set of first-order equations, starting point of the dual formulation:  
*Find a vector field  $\mathbf{u}$ , a scalar field  $p$  and  $\lambda^2$  that verify*

$$\mathbf{u} - \text{grad } p = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.11)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = -\lambda^2 p, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.13)$$

in the distribution sense.

Using the function space  $X(\Omega)$  defined by (2.6), the eigenvalue problem (2.11)-(2.13) may be set in weak form requiring no more *a priori* regularity on the pressure than  $p \in L^2(\Omega)$  (see [16,25]) : *Find  $(\lambda^2, \mathbf{u}, p) \in \mathbb{R}^+ \times X(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  such that:*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + b(\mathbf{w}, p) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in X(\Omega), \quad (2.14)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = -\lambda^2 \int_{\Omega} p q \, d\mathbf{x}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (2.15)$$

where the bilinear form  $b(\mathbf{w}, q)$  defined over  $X(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  is given by:

$$b(\mathbf{w}, q) = + \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{w}) q \, d\mathbf{x}, \quad (2.16)$$

and  $L_0^2(\Omega)$  denotes the  $L^2(\Omega)$  subspace of functions having zero average values.

The variational formulation (2.14)-(2.15) is that of a saddle-point problem. There is a natural equivalence between the strong (2.11)-(2.13) and weak (2.14)-(2.15) problems and one checks easily that the bilinear form  $b(\cdot, \cdot)$  satisfies an inf-sup condition with a positive constant  $\beta$  (see [16,25]) such that:

$$\sup_{\mathbf{w} \in X(\Omega)} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (2.17)$$

The choice of  $X(\Omega)$  is consistent with the primal variational formulation yielding a velocity field satisfying identically the boundary conditions, but unable to reproduce a curl-free field in the strong sense.

Enhancing the regularity of the pressure field, the dual variational formulation (2.14)-(2.15) can be slightly modified into: *Find  $(\lambda^2, \mathbf{u}, p) \in \mathbb{R}^+ \times (L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  such that:*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (L^2(\Omega))^2, \quad (2.18)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} - \lambda^2 \int_{\Omega} p q \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Selecting a pressure in  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  allows a relaxation on the velocity regularity such that although it belongs to  $(L^2(\Omega))^2$ , the velocity equals a pressure gradient almost everywhere in  $\Omega$ .

Applied to problems with enough regularity properties, the dual variational formulations (2.14)-(2.15) and (2.18)-(2.19) are strictly equivalent. Later on we shall observe that it is no longer the case with their discrete versions.

### 3 Helmholtz Decomposition based on a Stable Spectral Element

In practice we replace the infinite dimensional problem (2.7) by a finite dimensional one. Let  $\mathcal{P}_N(\Omega)$  represent the set of all polynomials of degree less or equal to  $N$  in the two space variables. We formally denote  $X_N(\Omega)$  the velocity space that is a subspace of  $\mathcal{P}_N(\Omega) \times \mathcal{P}_N(\Omega) \cap X(\Omega)$ . The finite dimensional primal variational problem writes: *Find  $\mathbf{u}_N \in X_N(\Omega)$  and  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  such that*

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) := \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_N \nabla \cdot \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N(\Omega). \quad (3.1)$$

Let  $\Lambda = ]-1, +1[$  denote the open unit reference interval. For any integer  $N$ ,  $\mathcal{P}_N(\Lambda)$  represents the set of all polynomials of degree  $\leq N$  on  $\Lambda$  and  $\mathcal{P}_N^0(\Lambda)$  coincides with  $\mathcal{P}_N(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$ . In [4] we show that a stable and optimal spectral element scheme exists to solve (3.1). It uses a GLL/GL-GL/GLL mesh for the two components of the velocity field and corresponds to

$$X_N(\Omega) = (\mathcal{P}_N^0(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_{N-1}(\Lambda)) \times (\mathcal{P}_{N-1}(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_N^0(\Lambda)). \quad (3.2)$$

Since spectral element methods make an extensive use of Gaussian quadrature rules, we recall the basic properties of the Gauss-Legendre (GL) and Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) quadrature schemes.

- GL quadrature rule: a unique set of  $N$  nodes  $\tau_j$  and associated coefficients  $\omega_j$  exists ( $\tau_j \in \Lambda$ ,  $\omega_j > 0$ , real,  $1 \leq j \leq N$ ) such that

$$\forall \Phi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^N \Phi(\tau_j) \omega_j. \quad (3.3)$$

The nodes  $\tau_j (1 \leq j \leq N)$  are solution to  $L_N = 0$  where  $L_N$  denotes the Legendre polynomial of degree  $N$ .

- GLL quadrature rule: let  $\xi_0 = -1$  and  $\xi_N = 1$ . A unique set of nodes  $\xi_j \in \Lambda$ , ( $1 \leq j \leq (N - 1)$ ) and  $(N + 1)$  real, positive coefficients  $\rho_j$  exist, such that

$$\forall \Phi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j) \rho_j. \quad (3.4)$$

The nodes  $\xi_j$  ( $0 \leq j \leq N$ ) are solution to  $(1 - \xi^2)L'_N = 0$ .

Introducing these quadrature rules into (3.1) leads to the discrete problem: *Find*  $\mathbf{u}_N \in X_N(\Omega)$  and  $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  such that

$$\mathcal{A}_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) := (\nabla \cdot \mathbf{u}_N, \nabla \cdot \mathbf{v}_N)_N^G = \lambda^2 (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GL}, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N(\Omega), \quad (3.5)$$

with, for instance:

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GL} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N (u_x v_x)(\xi_i, \tau_j) \rho_i \omega_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N (u_y v_y)(\tau_i, \xi_j) \omega_i \rho_j, \quad (3.6)$$

and for any couple of scalar fields  $p, q$ :

$$(p, q)_N^G = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (p q)(\tau_i, \tau_j) \omega_i \omega_j. \quad (3.7)$$

Superscripts GL and G have been introduced to recall that (3.6) involves both the GL and GLL quadrature rules while (3.7) involves only the GL rule.

The nature of  $X_N(\Omega)$  and of the Gaussian quadrature entails that the properties of the kernel and range of the (continuous) bilinear form  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  given in Section 2 are readily carried to the kernel and range of the discrete bilinear form  $\mathcal{A}_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)$ . As a consequence,  $\text{div } \mathbf{u}_N$  can identically vanish to represent solenoidal velocity fields which is precisely the property one is looking for in the Helmholtz decomposition.

Problem (3.5) leads to an algebraic eigenvalue problem  $\mathcal{K}_P \mathbf{w} = \lambda^2 \mathcal{M}_P \mathbf{w}$  where  $\mathcal{K}_P$  and  $\mathcal{M}_P$  denote the (symmetric) stiffness and mass matrices, the index  $P$  referring to the “primal” formulation. This problem has  $2N(N - 1)$  eigenmodes  $\{\lambda^2, \mathbf{w}\}$  corresponding to the degrees of freedom in (3.2). The stiffness and mass matrices have two-by-two block structures, namely

$$\mathcal{K}_P = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{yx} \\ K_{xy} & K_{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_P = \begin{pmatrix} M_{xx} & 0 \\ 0 & M_{yy} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

where  $K_{xx}$  and  $K_{yy}$  denote the classical stiffness matrices similar to the discretisation of the Laplacian operator, and  $K_{xy}$  and  $K_{yx}$  (transpose of each other) result from the



weak formulation of the mixed derivatives present in the  $\text{grad}(\text{div})$  operator. The mass matrices  $M_{xx}$  and  $M_{yy}$  are diagonal.

One can show that a subset of  $(N - 1)^2$  eigenvalues are singular (i.e  $\lambda_i^2 = 0, 1 \leq i \leq (N - 1)^2$ ) with associated solenoidal eigenvectors such that  $\text{div } \mathbf{w}_i = 0$ , within round-off accuracy. This number is easily understandable if again, we remark that the divergence of the velocity field belongs to  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ , and hence involves  $(N - 1)^2$  degrees of freedom. In the sequel we shall denote these singular eigenmodes as

$$\{\lambda_S^{(j)2}, \mathbf{w}_S^{(j)}\}, \quad 1 \leq j \leq (N - 1)^2. \quad (3.9)$$

The remaining  $(N^2 - 1)$  eigenmodes approximate the non-solenoidal part of the spectrum with eigenvalues exhibiting spectral convergence towards (2.3). For the sake of convenience, we shall denote these eigenmodes as

$$\{\lambda_{NS}^{(j)2}, \mathbf{w}_{NS}^{(j)}\}, \quad 1 \leq j \leq (N^2 - 1). \quad (3.10)$$

The non-solenoidal eigenvectors  $\mathbf{w}_{NS}^{(j)}$  exhibit also asymptotic spectral convergence towards their analytical counterpart. However, it turns out that the curl of the non-solenoidal eigenvectors is not identically equal to zero (as it should), the local discrepancy being particularly important near the domain boundaries (see [4]). To underline the difference,  $\mathbf{w}_I^{(j)}$  will be used exclusively in the sequel to denote identically curl-free vectors.

We now switch to the discrete form of the dual variational formulation (2.14)-(2.15). Again, the infinite dimensional saddle-point problem is replaced by a finite dimensional one and the question arises of the choice of appropriate polynomial spaces for the velocity and pressure fields. As proved in [3], a stable spectral element is made of  $X_N(\Omega)$  and  $M_N(\Omega)$  respectively for the velocity and pressure fields, where:

$$M_N(\Omega) := \mathbb{P}_{N-1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega). \quad (3.11)$$

Consequently, the spectral approximation of (2.14)-(2.15) reads: *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}_N, p_N) \in \mathbb{R}^+ \times X_N(\Omega) \times M_N(\Omega)$  such that

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GL} + (p_N, \nabla \cdot \mathbf{v}_N)_N^G = 0, \quad \forall \mathbf{v}_N \in X_N(\Omega), \quad (3.12)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_N, q_N)_N^G + \lambda^2 (p_N, q_N)_N^G = 0, \quad \forall q_N \in M_N(\Omega). \quad (3.13)$$

Here we have used the same convention than in (3.6) whereby  $(\cdot, \cdot)_N^{GL}$  denotes the inner product of vector fields evaluated with Gaussian quadrature on the GLL/GL-GL/GLL grid. Similarly,  $(\cdot, \cdot)_N^G$  denotes the inner product of scalar quantities defined on the Gauss-Legendre grid corresponding to  $\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)$ .

The construction of the algebraic eigenvalue problem is described in [3]. It turns out that the velocity components  $\mathbf{u}_N$  may be easily eliminated in terms of the pressure and one ends with

$$\mathcal{K}_D p = \lambda^2 \mathcal{M}_D p, \quad (3.14)$$

eigenvalue problem with stiffness ( $\mathcal{K}_D$ ) and mass ( $\mathcal{M}_D$ ) matrices of size  $N^2$ , the index  $D$  referring to “dual”. The eigenvalue problem is solved in two stages. First, one diagonalizes (3.14) to get the pressure eigenmodes. Once a pressure eigenmode is computed, the associated velocity field is obtained using (3.12). We remark that this relationship delivers only a pressure gradient in the weak sense. Along the border the velocity field satisfies the  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  condition identically. However,  $\text{curl } \mathbf{u}$  will only decrease spectrally to zero.

As a conclusion, the dual variational formulation (3.12)-(3.13) captures an approximation of the lowest  $(N^2 - 1)$  non-solenoidal eigenmodes  $(\lambda^2, \mathbf{u})$  of the basic problem.

For the sake of completeness, before introducing the Helmholtz decomposition by spectral projection techniques we briefly discuss the discretization of the second dual variational formulation (2.18)-(2.19). Given the modified regularity of the basic spaces, the discrete problem becomes: *Find*  $(\lambda^2, \mathbf{u}_N, p_N) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{P}_N(\Omega))^2 \times M_N(\Omega)$  such that

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N^{GL} - (\nabla p_N, \mathbf{v}_N)_N^G = 0, \quad \forall \mathbf{v}_N \in (\mathbb{P}_N(\Omega))^2, \quad (3.15)$$

$$(\mathbf{u}_N, \nabla q_N)_N^G - \lambda^2 (p_N, q_N)_N^G = 0, \quad \forall q_N \in M_N(\Omega). \quad (3.16)$$

The stability of this second formulation is presented in [2]. It’s interest lies in the fact that, in contrast with the first one, the range  $R(\mathcal{A}_N)$  is made of truly curl-free vectors since we have  $\mathbf{u}_N = \nabla p_N$  everywhere in the domain, including the boundary. The boundary condition  $\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n} = 0$  however is only weakly satisfied with spectral convergence. Both algebraic eigenvalue problems resulting from (3.12)-(3.13) and from (3.15)-(3.16) will be solved using the same numerical strategy.

On the basis of these two variational approaches and spectral element approximation of the -grad(div) eigenvalue problem, we are able now to tackle the Helmholtz decomposition problem in some new way.

### 3.1 Projection onto the -grad(div) kernel

Consider the set of solenoidal vector fields, spectral element approximations of the -grad(div) kernel in the primal variational formulation on a GLL/GL-GL/GLL grid with polynomial functions  $(\mathbb{P}_N^0 \otimes \mathbb{P}_{N-1}) \times (\mathbb{P}_{N-1} \otimes \mathbb{P}_N^0)$

$$\{\mathbf{w}_S^{(i)} \mid \text{div } \mathbf{w}_S^{(i)} = 0, \quad \mathbf{w}_S^{(i)} \cdot \mathbf{n} = 0\}, \quad 1 \leq i \leq I, \quad (3.17)$$

with  $I = (N - 1)^2$ . The solenoidal component of  $\mathbf{f}$  may be approximated by

$$\mathbf{u}_S \approx \pi_S \mathbf{f} := \sum_{i=1}^I \alpha_i \mathbf{w}_S^{(i)}, \quad (3.18)$$

where  $\pi_S \mathbf{f}$  denotes the projection of  $\mathbf{f}$  onto the solenoidal basis, the coefficients  $\alpha_i$  being the unknowns of the problem. One has:

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_I \approx \sum_{i=1}^I \alpha_i \mathbf{w}_S^{(i)} + \mathbf{u}_I. \quad (3.19)$$

Projecting (3.19) onto each  $\mathbf{w}_S^{(j)}$  gives:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{w}_S^{(j)})_N^{GL} = \sum_{i=1}^I \alpha_i M_{ij}^S + (\mathbf{u}_I, \mathbf{w}_S^{(j)})_N^{GL}, \quad 1 \leq j \leq I, \quad (3.20)$$

with

$$M_{ij}^S = (\mathbf{w}_S^{(i)}, \mathbf{w}_S^{(j)})_N^{GL}, \quad 1 \leq i, j \leq (N - 1)^2. \quad (3.21)$$

Since  $\mathbf{u}_I \in R(\mathcal{A}_N)$  and  $\mathbf{w}_S^{(j)} \in K(\mathcal{A}_N)$ , in virtue of the orthogonality of these spaces, the second term in the right-hand side of (3.20) is identically equal to zero and the unknown coefficients  $\alpha_i$  are solutions to the linear system

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i M_{ij}^S = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_S^{(j)})_N^{GL}, \quad 1 \leq j \leq I. \quad (3.22)$$

Once the solenoidal part of the vector field is known, determination of the non-solenoidal part is trivial since  $\mathbf{u}_I \approx \mathbf{f} - \pi_S \mathbf{f}$ .

The reader should remember that the primal variational formulation is the only one giving access to a solenoidal basis satisfying both constraints of zero divergence and boundary conditions. Hence, the procedure outlined in this subsection is unique. This is not the case for the projection onto the range  $R(\mathcal{A}_N)$  where several approaches are possible as we discuss in the next subsection.

### 3.2 Projection onto the $-\text{grad}(\text{div})$ range

Let us now consider a basis for the range  $R(\mathcal{A}_N)$ . We have seen that several approaches exist to construct such a basis: primal and dual variational approaches, and in the

latter case two possibilities yielding either a spectrally convergent curl-free basis or an identically curl-free one. For the time being we shall indiscriminately denote the related basis as “non-solenoidal” ones. At the end of the paragraph and in the discussion about the numerical results we shall stress the differences depending on their origin.

Consider the non-solenoidal basis spanned by the set  $\{\mathbf{w}_{NS}^{(k)}\}$ , with  $1 \leq k \leq K$ , and  $K = N^2 - 1$ . The non-solenoidal component of  $\mathbf{f}$  can be approximated through

$$\mathbf{u}_I \approx \pi_{NS} \mathbf{f} := \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{w}_{NS}^{(k)}, \quad (3.23)$$

where again the coefficients  $\beta_k$  are the unknowns of the problem. Inserting (3.23) in the Helmholtz decomposition of  $\mathbf{f}$  one gets:

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{u}_S + \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{w}_{NS}^{(k)}. \quad (3.24)$$

Projecting this relationship onto each element of the non-solenoidal basis, leads to

$$(\mathbf{f}, \mathbf{w}_{NS}^{(\ell)})_N^{GL} = (\mathbf{u}_S, \mathbf{w}_{NS}^{(\ell)})_N^{GL} + \sum_{k=1}^K \beta_k M_{k\ell}^{NS}, \quad 1 \leq \ell \leq K, \quad (3.25)$$

with

$$M_{k\ell}^{NS} = (\mathbf{w}_{NS}^{(k)}, \mathbf{w}_{NS}^{(\ell)})_N^{GL} = \delta_{k\ell}, \quad 1 \leq k, \ell \leq K. \quad (3.26)$$

Using anew the orthogonality argument between the solenoidal and non-solenoidal discrete basis spanning  $K(\mathcal{A}_N)$  and  $R(\mathcal{A}_N)$ , we conclude that the projection is explicitly given by:

$$\beta_k = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_{NS}^{(k)})_N. \quad (3.27)$$

Once the non-solenoidal part of  $\mathbf{f}$  has been determined, the temptation would be to derive the solenoidal part from the relationship  $\mathbf{u}_S \approx \mathbf{f} - \pi_{NS} \mathbf{f}$ , exact counterpart of that given at the end of paragraph 3.1. This procedure is legitimate in the whole domain (boundary included) provided the non-solenoidal basis has been built using the dual variational formulation (3.15)-(3.16). The convergence of the solenoidal calculation is spectral. If instead the non-solenoidal basis has been obtained using the primal variational formulation or the dual variational formulation (3.12)-(3.13), the relationship  $\mathbf{u}_S \approx \mathbf{f} - \pi_{NS} \mathbf{f}$  is correct only *inside* the  $\Omega$  domain. On the boundary, the  $\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n} = 0$  condition must be enforced and, provided this is done, the convergence is spectral.

## 4 Numerical Results

To illustrate and compare the efficiency of these approaches of the Helmholtz decomposition, we have made several numerical experiments in the square  $\Omega = ]-1, +1[^2$  assessing the accuracy of the different methods. As a first example we studied the case  $\mathbf{f} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_I$  with the following divergence- and curl-free components:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_S(x, y) &= (-\sin(\pi x) \cos(\pi y), \cos(\pi x) \sin(\pi y)), \\ \mathbf{u}_I(x, y) &= (\pi \cos(\pi(x + y)), \pi \cos(\pi(x + y))).\end{aligned}\tag{4.1}$$

The two components are approximated respectively by  $\mathbf{u}_{S N}$  and  $\mathbf{u}_{I N}$  as outlined in Section 3. As is well known, the SE approximation error of analytical functions converges exponentially towards zero as  $\rho^N$  where  $N$  is the polynomial degree and  $\rho \in ]0, 1[$ . We expect the same error behavior in the present case.

Fig. 1 exhibits the numerical performance obtained through projection of  $\mathbf{f}$  onto the kernel  $K(\mathcal{A}_N)$  in the primal variational formulation. On a semi-logarithmic scale for the  $L^2$  error as a function of the polynomial degree  $N$ , one observes the typical spectral decay of the error on the solenoidal component  $\|\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{S N}\|_2$  (see circles), and of  $\|\text{curl } \mathbf{u}_{I N}\|_2$  (see squares), while  $\|\text{div } \mathbf{u}_{S N}\|_2$  (see triangles) is nearly round-off. These results are very much in line with what has been outlined previously.

We showed in Section 3 that the finite dimensional space  $X_N(\Omega)$  can be uniquely decomposed into

$$X_N(\Omega) = K(\mathcal{A}_N) \oplus R(\mathcal{A}_N).\tag{4.2}$$

This relationship strongly suggests to approximate the solenoidal part of  $\mathbf{f}$  through a projection onto the non-solenoidal basis obtained using the primal variational formulation and applying the strategy discussed at the end of paragraph 3.2. Fig. 2 gives the same information as Fig. 1 except for the fact that the various quantities have been computed according to the last remark. The numerical results are quite close to those displayed on Fig. 1 emphasizing the fact that the quality of the approximation is almost the same, whatever the initial projection. This conclusion is illustrated in Table 1.

N	8	12	16	20	24
$\ \mathbf{u}_S - (\mathbf{f} - \pi_{NS}\mathbf{f})\ _2$	2.00E-14	1.10E-13	3.46E-13	7.82E-13	1.86E-12

Table 1:  $\|\mathbf{u}_S - (\mathbf{f} - \pi_{NS}\mathbf{f})\|_2$  evolution as a function of the polynomial degree  $N$ .

Since it appears that the basis of  $R(\mathcal{A}_N)$  delivers a Helmholtz decomposition as accurate as that obtained through projection onto  $R(\mathcal{A}_N)$ , it seems natural to perform the same projection using the basis of  $R(\mathcal{A}_N)$  computed through the dual variational approach

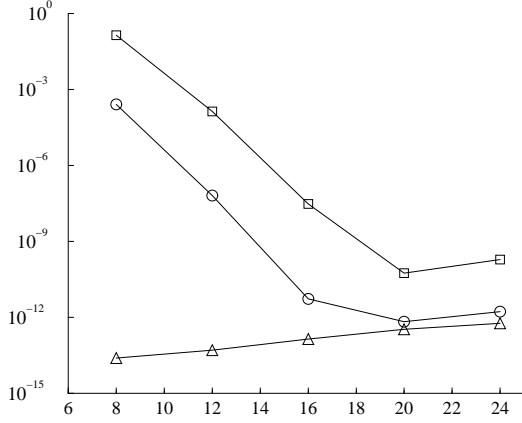


Figure 1. Projection onto the kernel  $K(\mathcal{A}_N)$ . Semi-logarithmic plot for the  $L^2$  error as a function of the polynomial degree  $N$ .  $\circ := \|\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{S_N}\|_2$ ,  $\square := \|\text{curl } \mathbf{u}_{I_N}\|_2$  and  $\triangle := \|\text{div } \mathbf{u}_{S_N}\|_2$ .

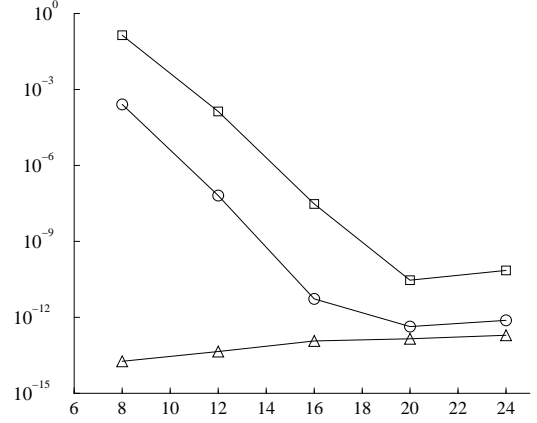


Figure 2. Projection onto the range  $R(\mathcal{A}_N)$ . Semi-logarithmic plot for the  $L^2$  error as a function of the polynomial degree  $N$ .  $\circ := \|\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{S_N}\|_2$ ,  $\square := \|\text{curl } \mathbf{u}_{I_N}\|_2$  and  $\triangle := \|\text{div } \mathbf{u}_{S_N}\|_2$ .

(2.14)-(2.15). This is the object of Fig. 3. Again, the information displayed on the figure is the same as that exhibited on Figs 1 and 2. The error decays are the same with smaller error levels. Presumably the accuracy gain must be attributed to the ‘quality’ of the non-solenoidal basis obtained by the dual approach.

In all previous cases  $\text{curl } \mathbf{u}_{I_N}$  was not identically zero but only with spectrally decaying to zero  $\|\text{curl } \mathbf{u}_{I_N}\|_2$ . The dual variational formulation (3.15)-(3.16) produces such curl-free projection. Fig. 4 shows that  $\|\text{curl } \mathbf{u}_{I_N}\|_2$  is equal to zero with numerical round-off (see squares). The error on the curl-free component  $\|\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_{I_N}\|_2$  decays spectrally to zero (see circles). Finally,  $\|\text{div } \mathbf{u}_{S_N}\|_2$  here is not identically equal to zero but has spectral convergence towards zero.

Summarizing the results obtained with the first example we can conclude the following:

- The projections onto the kernel  $K(\mathcal{A}_N)$  and range  $R(\mathcal{A}_N)$  lead to equivalent and spectrally convergent numerical results.
- The basis provided by the projection onto the range  $R(\mathcal{A}_N)$  in the dual variational formulation (3.12)-(3.13) is slightly more accurate.
- The projection onto the range in the dual variational formulation (3.15)-(3.16) gives a curl-free  $\mathbf{u}_{I_N}$ .
- With regard to computational cost, we want to stress the fact that a projection onto the kernel  $K(\mathcal{A}_N)$  is roughly equivalent to the projection onto the range  $R(\mathcal{A}_N)$ .

Putting aside the diagonalization computer cost, the interest of the method lies in the fact that (once the diagonalization has been performed) its cost is equivalent to that of an inner product.

- The projection error in this constructive method is strongly induced by the accuracy of the eigenvalues and eigenvectors. Low values of  $N$  yield poor accuracy for higher

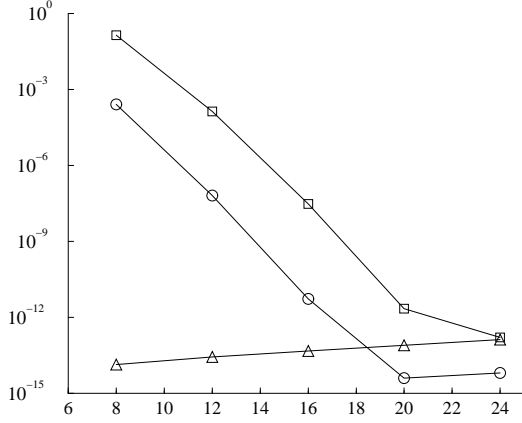


Figure 3. Projection using the divergence free basis of the dual formulation (3.12)-(3.13). Semi-logarithmic plot for the  $L^2$  error as a function of the polynomial degree  $N$ .  $\circ := \|\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{S,N}\|_2$ ,  $\square := \|\text{curl } \mathbf{u}_{I,N}\|_2$  and  $\triangle := \|\text{div } \mathbf{u}_{S,N}\|_2$ .

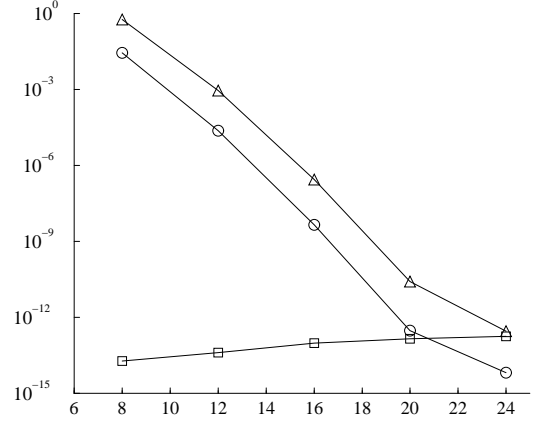


Figure 4. Projection using the curl-free basis of the dual formulation (3.15)-(3.16). Semi-logarithmic plot for the  $L^2$  error as a function of the polynomial degree  $N$ .  $\circ := \|\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_{I,N}\|_2$ ,  $\square := \|\text{curl } \mathbf{u}_{I,N}\|_2$  and  $\triangle := \|\text{div } \mathbf{u}_{S,N}\|_2$ .

eigenmodes but, as  $N$  increases spectral convergence drives the result.

These conclusions allow to consider a new computation strategy made of two projections. Firstly, one evaluates the curl-free component  $\mathbf{u}_{I,N}$  by using the formulation (3.15)-(3.16). The second projection delivers the solenoidal component  $\mathbf{u}_{S,N}$  using the formulation (3.12)-(3.13). Both results are then added to ‘synthesize’ the given vector field  $\mathbf{f}$ . Clearly, the feasibility of this strategy depends on the regularity of  $\mathbf{f}$  since one must have  $\mathbf{u}_S \in H(\text{div}, \Omega)$  and  $\mathbf{u}_I \in (L^2(\Omega))^2$ . The second example illustrates the soundness of this approach.

We consider the vector field  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$  with Cartesian components

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 50(\tanh(20y) + 1) + 1, \\ f_y(x, y) &= 50(\tanh(20x) + 1) + 1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

to which we apply the two projections strategy.

Table 2 gives  $\|\text{div } \mathbf{u}_{S,N}\|_2$  and  $\|\text{curl } \mathbf{u}_{I,N}\|_2$  as a function of the polynomial degree  $N$ . As expected, the norms remain close to round-off *independently* of  $N$ . Fig. 5 exhibits the  $L^2$  relative error  $\|\mathbf{f} - (\mathbf{u}_{S,N} + \mathbf{u}_{I,N})\|_2 / \|\mathbf{f}\|_2$ . We observe a tendency to converge to zero as a function of  $N$ . This ‘spectral’ convergence is slow due to the nature of the vector field to decompose (4.3).

N	8	12	16	20	24
$\ \text{curl } \mathbf{u}_{IN}\ _2$	8.03E-13	1.49E-12	3.09E-12	6.42E-12	9.40E-12
$\ \text{div} \mathbf{u}_{SN}\ _2$	5.93E-13	8.51E-13	2.04E-12	4.54E-12	7.85E-12

Table 2:  $\|\text{curl } \mathbf{u}_{IN}\|_2$  and  $\|\text{div} \mathbf{u}_{SN}\|_2$  evolutions versus the polynomial degree  $N$

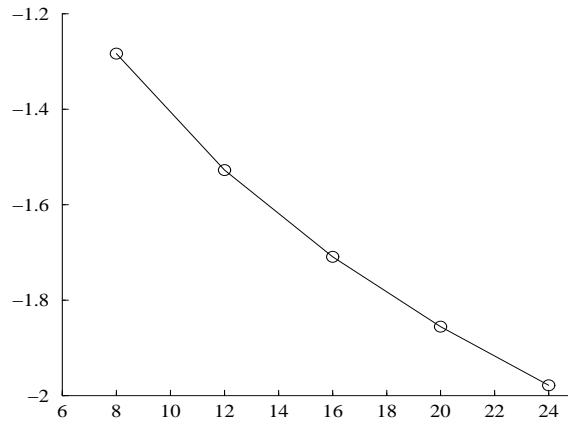


Figure 5. Semi-logarithmic plot for the  $L^2$  error as a function of the polynomial degree  $N$ .  $\bigcirc := \|\mathbf{f} - \mathbf{u}_{SN} - \mathbf{u}_{IN}\|_2$ .

## 5 Helmholtz decomposition and unsteady Stokes problems

The last example deals with unsteady Stokes problems. The use of time splitting schemes involves a projection step which is nothing else than an Helmholtz decomposition. We want to probe the effects of the two projections approach introduced in Section 4 on the accuracy of the decomposition.

We consider a two-dimensional square cavity filled with an incompressible fluid having volumic mass  $\rho$  and dynamic viscosity  $\mu$ . The flow is driven by a prescribed body force  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Pressure  $p(\mathbf{x}, t)$  and velocity  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  satisfy the time dependent Stokes equations

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega \times [0, t^*], \quad (5.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times [0, t^*], \quad (5.2)$$

where  $\Omega$  denotes the cavity domain  $] - 1, +1[^2$  and  $t^*$  the time span of the transient. We apply Dirichlet boundary conditions on the velocity

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega}, \quad \forall t \in [0, t^*], \quad (5.3)$$

with the initial condition  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ .



We apply the Goda pressure correction time integration scheme which consists in splitting the Stokes system into two stages, a diffusion prediction and a pressure correction [22]. The time interval  $[0, t^*]$  is divided into  $M$  equidistant time steps of length  $\Delta t = \frac{t^*}{M}$ . The approximate velocity and pressure fields at time  $t^m := m\Delta t$  ( $m = 0, \dots, M$ ) are denoted  $\mathbf{u}^m(\mathbf{x})$  and  $p^m(\mathbf{x})$  respectively. Assuming all quantities are known up to  $t^m$ , the solution at  $t^{m+1}$  results from the diffusion prediction step: *Find  $\mathbf{u}_*^{m+1}$  such that*

$$\rho \frac{\frac{3}{2} \mathbf{u}_*^{m+1} - 2 \mathbf{u}^m + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{m-1}}{\Delta t} - \mu \Delta \mathbf{u}_*^{m+1} + \nabla p^m = \mathbf{f}^{m+1}, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u}_*^{m+1} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (5.5)$$

followed by the pressure correction step: *Find  $\mathbf{u}^{m+1}$  and  $p^{m+1}$  such that*

$$\rho \frac{\frac{3}{2} \mathbf{u}^{m+1} - \frac{3}{2} \mathbf{u}_*^{m+1}}{\Delta t} + \nabla(p^{m+1} - p^m) = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{u}^{m+1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (5.8)$$

One will notice that the coefficients in the left-hand side of (5.4) and of (5.6) correspond to a second-order backward Euler scheme.

Looking carefully at (5.6)-(5.8) one realizes that these equations correspond exactly to the Helmholtz decomposition of the auxiliary velocity field  $\mathbf{u}_*^{m+1}$  resulting from the diffusion prediction step, into

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}^{m+1} + \nabla \psi = \mathbf{u}_*^{m+1}, & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{m+1} = 0, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u}^{m+1} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

with

$$p^{m+1} = p^m + \frac{3}{2} \frac{\rho}{\Delta t} \psi. \quad (5.10)$$

To assess our spectral Helmholtz decomposition scheme we have performed some computations with an unsteady exact solution of Eqs (5.1)-(5.3) corresponding to

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (-\cos(\pi y) \sin(\pi x) \cos(\omega t), \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\omega t)), \quad (5.11)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \sin(x + y + \omega t). \quad (5.12)$$

To reduce the space discretization error as much as possible, the polynomial degree has

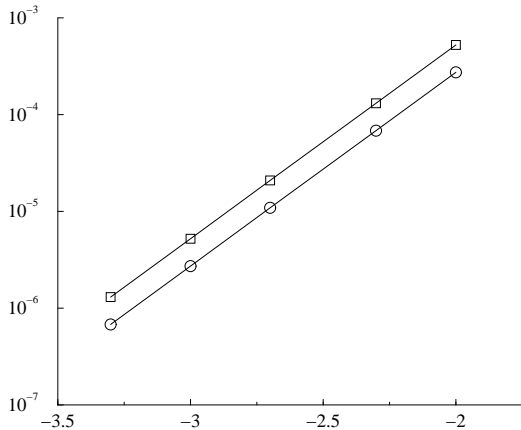


Figure 6. Logarithmic plot for the  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^M\|_2$  error as a function of the time step.  $\circ$  := classical approach,  $\square$  := our approach.

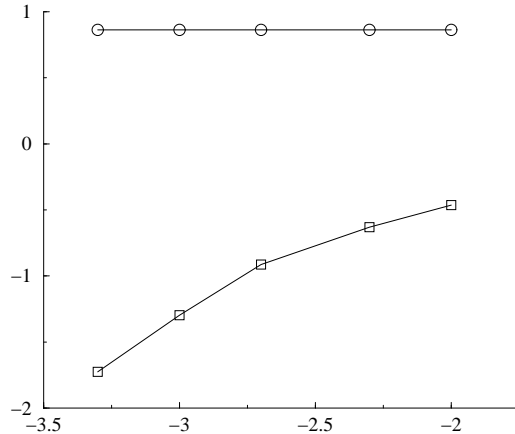


Figure 7. Logarithmic plot for the  $\|\nabla p - \nabla p_N^M\|_2$  error as a function of the time step.  $\circ$  := classical approach,  $\square$  := our approach.

been fixed to  $N = 24$ . Other relevant data of the computation are: time span  $t^* = 1$ ,  $\omega = 5$ ,  $\rho = \mu = 1$  and time steps in the range  $10^{-2} \leq \Delta t \leq 5 \cdot 10^{-4}$ .

The projection step has been performed in two different ways: The present spectral decomposition approach and the classical one (*i.e* a Poisson-Neumann computation for the pressure) used as a reference.

Figs. 6 and 7 display the  $L^2$  errors  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^M\|_2$  and  $\|\nabla p - \nabla p_N^M\|_2$  at the end of the transient ( $t = 1$ ) as a function of the time-step for both the standard- and the present approaches. One can see that the improvement of the present decomposition over the classical one is significant with regard to the pressure gradient computation. Presumably, this can be attributed to the nature of the non-solenoidal basis and to the use of the variational formulation (3.15)-(3.16).

## 6 Conclusion

We have shown that the spectral properties of the -grad(div) operator offer an efficient tool for the Helmholtz decomposition problem. Various approaches have been presented and tested that were based either on the projection onto the kernel of the operator or onto its range. As a conclusion we may claim that an optimal strategy consists in performing the Helmholtz decomposition using two projections. The first one must be done onto the range of the operator using the dual variational approximation (in first form) in order to obtain the solenoidal component of the given field. The second one is performed onto the range of the operator using the dual variational approximation operator (in second form) in order to obtain the curl-free component of the given field. The calculations performed on the unsteady Stokes problem in a square cavity clearly

show an improvement in the accuracy of the pressure gradient compared to classical computations.

## Acknowledgments

The second and fifth authors gratefully acknowledge the financial support from respectively the ERCOFTAC visitor program and the Fonds National de la Recherche Scientifique (FNRS), Belgium.

## References

- [1] Arnold D.N., Falk R.S. and Winther R., *Preconditioning in  $H(\text{div})$  and Applications*, Math. Comp., **66**, 957–984, 1997.
- [2] Azaïez M., Bernardi C., and Grundmann M., *Spectral Method Applied to Porous Media*, East–West J. Numer. Math., **2**, 91–105, 1994.
- [3] Azaïez M., Gruber R., Deville M.O., and Mund E.H., *On a stable spectral element for the  $\text{grad}(\text{div})$  eigenvalue problem*, to appear in Journal of Scientific Computing, 2005.
- [4] Ahusborde E., Azaïez M., Deville M.O., and Mund E.H., *Legendre Spectral Methods for the  $-\text{grad}(\text{div})$  Operator*, submitted to CMAME, 2006.
- [5] Arnold D.N., and Falk R.S., *A uniformly accurate finite element method for the Reissner–Mindlin plate*, SIAM J. Numer. Anal., **26**, 1276–1290, 1989.
- [6] Batchelor G., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [7] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *On the convergence of eigenvalues for mixed formulations*. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **25**, 131–154, 1997.
- [8] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *Mixed finite elements for Maxwell’s eigenproblem: the question of spurious modes*. World Scientific, 180–187, 1998.
- [9] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form*. Math. Comp., **69**, 121–140, 2000.
- [10] Boffi D., Duran R.G., and Gastaldi L., *A remark on spurious eigenvalues in a square*. Appl. Math. Letters, Vol. 12, 107–114, 1999.
- [11] Boffi D., Chinosi C., and Gastaldi L., *Approximation of  $\text{grad-div}$  operator in non-convex domains*. CMES, Comp. Model. Eng. Sci., **1**, 27–38, 2000.
- [12] Boffi D., Chinosi C., and Gastaldi L., *Penalized approximation of the vibration frequencies of a fluid in a cavity*. Comput. Visual Sci., **3**, 19–23, 2000.

- [13] Boffi D., Farina M., and Gastaldi L., *On the approximation of Maxwell's eigenproblem in general 2D domains*. Computers & Structures, **79**, 1089–1096, 2001.
- [14] Boffi D., and Gastaldi L., *On the "-grad div+s curl rot" operator*. In Computational fluid and solid mechanics, First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 12-15, K.J. Bathe editor, 1526–1529, 2001.
- [15] Brezzi F., and Fortin M., *Numerical approximations of Mindlin-Reissner Plates*, Math. Comp., **47**, 151–158, 1986.
- [16] Brezzi F., and Fortin M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [17] Caltagirone J.P., and Breil J., *Sur une méthode de projection vectorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **327**, Série II b, 1179–1184, 1999.
- [18] Chorin A.J., *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*, Math. Comput., **22**, 745–762, 1968.
- [19] Descloux J., Luskin M. and Rappaz J., *Approximation of the spectrum of closed operators: the determination of normal modes of a rotating basin*, Math. Comp., **36**, 137–154, 1981.
- [20] Deville M.O., Fischer P.F., and Mund E.H., *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [21] Girault V., and Raviart P., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [22] Goda K., *A Multistep Technique with Implicit Difference Schemes for Calculating Two and Three dimensional Cavity Flows*, J. Comput. Physics, **30**, 76–95, 1979.
- [23] Ingber M.S., and Kempka S.N., *A Galerkin implementation of the generalized Helmholtz decomposition for vorticity formulations*, J. Comp. Phys., **169**, 215–237, 2001.
- [24] Morse P., and Feshbach H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [25] Roberts J.E., and Thomas J.-M., *Mixed and Hybrid Methods*, in *Handbook of Numerical Analysis, Volume II: Finite Element Methods (Part 1)*, P.G. Ciarlet and J.L Lions Eds, 523–639, 1991.
- [26] Témam R., *Sur l'approximation de la solution de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires I, II*, Arch. Rat. Mech. Anal., **32**, 135–153, 377–385, 1969.



# A primal formulation for the Helmholtz decomposition<sup>1</sup>

E. Ahusborde<sup>a</sup>, M. Azaïez<sup>a</sup>, Jean-Paul Caltagirone<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*TREFLE (UMR CNRS 8508), ENSCPB, 33607 Pessac (France)*

---

## Abstract

In 1999, Jean-Paul Caltagirone and Jérôme Breil have developed in their paper [*C.R. Acad. Sci. Paris*, **327**, *Série II b*, 1179–1184] a new method to compute a divergence-free velocity. They have used the **grad**(div) operator to extract the solenoidal part of a given vector field. In this contribution we explain how this method can be considered as a real Helmholtz decomposition and we present a stable approximation in the framework of spectral methods. Numerical results are presented to illustrate the efficiency of this approach.

*Key words:* grad(div) operator, stable approximation, Helmholtz decomposition.

---

## 1 Introduction

The approximation of the **grad**(div) operator pervades many applied physics domains. Besides the ideal ocean wave problem without Coriolis force and no friction [15], it arises in the Maxwell equations [11] and in the Navier-Stokes equations for fluid flow problems when using a penalty formulation for the incompressibility condition [14]. The problem also arises in the ideal linear magneto hydrodynamics equations when computing the stability behavior of a fusion plasma device [16]. Another original application of this operator was introduced by J.P. Caltagirone and J. Breil in their paper [13] where they used this operator to extract from a given velocity field its solenoidal part. These authors had christened it *vector projection* which consists in solving the following problem: Let  $\mathbf{u}^*$  be a non-divergence free velocity field, find a couple of vector fields  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  such that

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^*), \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*, \quad \text{in } \Omega, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup> Article publié dans *Journal of Computational Physics*.

where  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{u}$  are respectively divergence-free and curl-free. Here  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) is a simply connected and bounded domain with Lipschitzian border.  $\mathbf{n}$  denotes the outer unit normal along the boundary.

The objective of this note is on the one hand to explain how the previous system can be considered as a Helmholtz decomposition step and on the other hand to present a stable discretization in the framework of spectral methods. We end this note by presenting a relevant numerical experiment.

*Some notations.*— The symbol  $L^2(\Omega)$  stands for the usual Lebesgue space and  $H^1(\Omega)$ , the Sobolev space, involves all the functions that are, together with their gradient, in  $L^2(\Omega)$ . The  $\mathcal{C}(\Omega)$  denotes the space of continuous functions defined in  $\Omega$ .

## 2 Continuous problems and their variational formulations

In order to write the continuous problem in its variational form we introduce the relevant spaces of functions.

Let  $H(\text{div}, \Omega)$  denote the space (see [12])

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{w} \in (L^2(\Omega))^d; \text{div } \mathbf{w} \in L^2(\Omega) \right\},$$

endowed with the natural norm

$$\|\mathbf{w}\|_{H(\text{div}, \Omega)} = \left( \|\mathbf{w}\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 + \|\text{div } \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

The continuous problem we consider reads: *Find  $\mathbf{u}$  in  $H(\text{div}, \Omega)$  such that:*

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.5)$$

where  $\mathbf{f}$  is a given data.

Since  $\text{curl}(\mathbf{grad} \cdot) \equiv \mathbf{0}$  we notice that a necessary condition for the existence of a solution to problem (2.4)-(2.5) is that  $\text{curl } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  and by consequence we can state the existence of a function  $\varphi(x, y)$  such that

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad} \varphi.$$

This leads to restate the basic problem as: *For a given  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$ , find  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$  such that*

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla\varphi, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.7)$$

where  $L_0^2(\Omega)$  denotes the  $L^2(\Omega)$  subspace of functions having zero average values. This formulation is equivalent to the dual one that reads: *For a given  $\varphi \in L_0^2(\Omega)$  find  $\mathbf{u} \in X(\Omega)$  and  $\psi \in L_0^2(\Omega)$  such that:*

$$\mathbf{u} - \nabla\psi = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.8)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \varphi, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.10)$$

where

$$X(\Omega) = \{\mathbf{w} \in H(\text{div}, \Omega); \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

This dual formulation can be rewritten as a classical Helmholtz decomposition, indeed : Let  $\mathbf{u}^*$  and  $\mathbf{v}$  be two vector fields such that  $\nabla \cdot \mathbf{u}^* = \varphi$ ,  $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = 0$  and  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*$ . The problem (2.8)-(2.10) then becomes: *Find  $\mathbf{v} \in X(\Omega)$  and  $\psi$  in  $L_0^2(\Omega)$  such that*

$$\mathbf{v} - \nabla\psi = \mathbf{u}^*, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2.13)$$

Consequently the Helmholtz decomposition of the vector field  $\mathbf{u}^*$  can be achieved using either the primal formulation (1.1)-(1.3) or its equivalent dual one (2.11)-(2.13).

*Variational formulation*—One obtains the primal variational formulation of problem (2.6)-(2.7) by taking the inner product of (2.6) with any  $\mathbf{w} \in X(\Omega)$ . After integration by parts the problem becomes: *Find  $\mathbf{u} \in X(\Omega)$  such that:*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in X(\Omega). \quad (2.14)$$

We do likewise to write the variational formulation of the dual problem (2.11)-(2.13) and we get : *Find  $(\mathbf{v}, \psi) \in X(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  such that*

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + b(\mathbf{w}, \psi) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w} \in X(\Omega), \quad (2.15)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (2.16)$$

where the bilinear form  $b(\mathbf{w}, q)$  defined over  $X(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  is given by:



$$b(\mathbf{w}, q) = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}) q \, d\mathbf{x}.$$

The variational formulation (2.15)-(2.16) is that of a saddle-point problem. One checks easily that the bilinear form  $b(\cdot, \cdot)$  satisfies an inf-sup condition with a positive constant  $\beta$  (see [12,17]) such that:

$$\sup_{\mathbf{w} \in X(\Omega)} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

### 3 Stable discretization

Providing a stable approximation of the primal and dual problem is a difficult task. Consequently we supply a non-exhaustive list of references dedicated to this question in the framework of spectral methods [3] and finite element approximation [5,6,7,8,9,10]. Concerning the finite volume context one can see [13].

The equivalence between the two variational formulations (2.14) and (2.15)-(2.16) brings us to propose a stable discretization. For the sake of clarity we will suppose from now that  $d = 2$  and  $\Omega$  is a square  $] -1, +1[^2$  and we limit ourself to the spectral approximation.

Let  $\mathcal{P}_N(\Omega)$  represent the set of all polynomials of degree less or equal to  $N$  with respect to each space variables. We denote  $X_N(\Omega)$  the velocity space that is a subspace of  $(\mathcal{P}_N(\Omega) \times \mathcal{P}_N(\Omega)) \cap X(\Omega)$ . The finite dimensional primal variational of (2.14) writes: *Find  $\mathbf{u}_N \in X_N(\Omega)$  such that*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_N \nabla \cdot \mathbf{w}_N \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi_N \operatorname{div} \mathbf{w}_N \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w}_N \in X_N(\Omega). \quad (3.17)$$

For any integer  $N$ ,  $\mathcal{P}_N(\Lambda)$  represents the set of all polynomials of degree  $\leq N$  on  $\Lambda = ] -1, +1[$  and  $\mathcal{P}_N^0(\Lambda)$  coincides with  $\mathcal{P}_N(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$ . Since spectral methods make an extensive use of Gaussian quadrature rules, we recall the basic properties of the Gauss-Legendre (GL) and Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) quadratures schemes.

- GL quadrature rule: A unique set of  $N$  nodes  $\tau_j$  and associated coefficients  $\omega_j$  exist ( $\tau_j \in \Lambda$ ,  $\omega_j > 0$ , real,  $1 \leq j \leq N$ ) such that

$$\forall \Phi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \Phi(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^N \Phi(\tau_j) \omega_j.$$

The nodes  $\tau_j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) are solutions to  $L_N = 0$  where  $L_N$  denotes the Legendre polynomial of degree  $N$ .

- GLL quadrature rule: Let  $\xi_0 = -1$  and  $\xi_N = 1$ . A unique set of nodes  $\xi_j \in \Lambda$ , ( $1 \leq j \leq N-1$ ) and  $(N+1)$  real, positive coefficients  $\rho_j$  exist, such that

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j) \rho_j.$$

The nodes  $\xi_j$  ( $0 \leq j \leq N$ ) are the solutions to  $(1 - \xi^2)L'_N = 0$ .

We also introduce the canonical polynomial interpolation basis  $h_i(x) \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$  built on the GLL nodes and given by the relationships:

$$h_i(x) = -\frac{1}{N(N+1)} \frac{1}{L_N(\xi_i)} \frac{(1-x^2)L'_N(x)}{(x-\xi_i)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (3.18)$$

with the elementary cardinality property

$$h_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq N, \quad (3.19)$$

where  $\delta_{ij}$  is Kronecker's delta symbol. We further introduce the canonical polynomial interpolation basis  $\tilde{h}_j(x) \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$  built on GL nodes

$$\tilde{h}_j(x) = \frac{1}{L'_N(\zeta_j)} \frac{L_N(x)}{(x-\zeta_j)}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.20)$$

The functions (3.20) satisfy the same property (3.19) with respect to the GL nodes  $\zeta_j$ .

In [3] we have shown that a stable and optimal spectral scheme exists to solve (3.17). It uses a GLL/GL-GL/GLL mesh for the two components of the velocity field and corresponds to : *Find*  $\mathbf{u}_N \in X_N(\Omega)$  such that

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_N, \nabla \cdot \mathbf{w}_N)_N^G = -(\varphi_N, \text{div } \mathbf{w}_N)_N^G, \quad \forall \mathbf{w}_N \in X_N(\Omega), \quad (3.21)$$

with, for instance:

$$X_N(\Omega) = (\mathbb{P}_N^0(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)) \times (\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N^0(\Lambda))$$

and for any couple of scalar fields  $p, q$ :

$$(p, q)_N^G = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (pq)(\tau_i, \tau_j) \omega_i \omega_j. \quad (3.22)$$

Using the basis functions (3.18) and (3.20) the velocity components write

$$u_{xN}(x, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{\ell=1}^N u_{k\ell}^x h_k(x) \tilde{h}_\ell(y), \quad (3.23)$$

$$u_{yN}(x, y) = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^{N-1} u_{k\ell}^y \tilde{h}_k(x) h_\ell(y). \quad (3.24)$$

where  $u_{k\ell}^x$  (resp.  $u_{k\ell}^y$ ) denotes  $u_x(\xi_k, \zeta_\ell)$  (resp.  $u_y(\zeta_k, \xi_\ell)$ ), and the boundary conditions have been included in the expansions.

Problem (3.21) leads to an algebraic problem

$$\mathcal{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.25)$$

where  $\mathcal{K}$  denotes the (symmetric) stiffness matrix. The stiffness matrix has two-by-two block structures, namely

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{yx} \\ K_{xy} & K_{yy} \end{pmatrix},$$

where  $K_{xx}$  and  $K_{yy}$  denote the classical stiffness matrices similar to the discretization of the Laplacian operator, and  $K_{xy}$  and  $K_{yx}$  (transpose of each other) result from the weak formulation of the mixed derivatives present in the grad(div) operator. The quantities  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{F}$  represent respectively the vector with the nodal values as the unknowns and the data  $-(\varphi_N, \text{div } \mathbf{w}_N)_N^G$ .

We now switch to the discrete form of the dual variational formulation (2.15)-(2.16). As proved in [3], a stable spectral element to solve this problem is made of  $X_N(\Omega)$  and  $M_N(\Omega)$  respectively for the "velocity" ( $\mathbf{v}$ ) and "pressure" ( $\psi$ ) fields, where:

$$M_N(\Omega) := \mathbb{P}_{N-1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

Consequently, the spectral approximation of (2.15)-(2.16) reads: *Find*  $(\mathbf{v}_N, \psi_N) \in X_N(\Omega) \times M_N(\Omega)$  such that

$$(\mathbf{v}_N, \mathbf{w}_N)_N^{GL} + (\psi_N, \nabla \cdot \mathbf{w}_N)_N^G = (\mathbf{u}^*_N, \mathbf{w}_N)_N^{GL}, \quad \forall \mathbf{w}_N \in X_N(\Omega), \quad (3.26)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_N, q_N)_N^G = 0, \quad \forall q_N \in M_N(\Omega). \quad (3.27)$$

One can easily verify (see [2,1]) that :

**Lemma :** The following uniform inf-sup condition on  $b(., .)$  holds:  $\forall q_N \in M_N(\Omega)$ ,

$$\sup_{\mathbf{w}_N \in X_N(\Omega)} \frac{b(\mathbf{w}_N, q_N)}{\|\mathbf{w}_N\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \beta' \|q_N\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.28)$$

The constant  $\beta' > 0$  does not depend on  $N$ .

The implementation of the discrete variational problem (3.26)-(3.27) induces a symmetric algebraic system :

$$M_N \mathbf{U} + D_N \Psi = \mathbf{F}, \quad (3.29)$$

$$D_N^T \mathbf{U} = 0. \quad (3.30)$$

The vector  $\mathbf{U}$  contains the velocity degrees of freedom on the staggered grids, while  $\Psi$  represents the discrete values of  $\psi_N$  on GL grid. The diagonal mass matrix  $M_N$  is associated with the discrete inner product

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N)_N^{GL} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N (u_x w_x)(\xi_i, \tau_j) \rho_i \omega_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N (u_y w_y)(\tau_i, \xi_j) \omega_i \rho_j. \quad (3.31)$$

The rectangular matrix  $D_N$  corresponds to the discretization of the variational form  $(\nabla \cdot \mathbf{v}_N, q_N)_N^G$ . In (3.29)  $\mathbf{F}$  represents the quantity  $(\mathbf{u}_N^*, \mathbf{w}_N)_N^{GL}$ .

The algebraic system (3.29)-(3.30) is solved using the Uzawa algorithm: One eliminates the velocity from (3.29) that is then inserted in (3.30)

$$D_N^T M_N^{-1} D_N \Psi = D_N^T M_N^{-1} \mathbf{F}.$$

The existence of the solution of the algebraic square system (3.25) is ensured by the fact that the second member is in the range of the discrete operator. This property must be numerically checked before any resolution. In addition one can verify that the image is orthogonal to the kernel and thus their intersection is reduced to the null vector. The latter property makes it possible to ensure the uniqueness of the solution at least when the system is solved by an iterative method of the Krylov type (Conjugate Gradient in our case) while starting the iterative algorithm by an initial guess in the range (zero for example).

## 4 Numerical results

To illustrate the equivalence and compare the efficiency of the two approaches of the Helmholtz decomposition, we have carried out numerical experiments in the square  $\Omega = ]-1, +1[^2$  assessing the accuracy of the two methods. As example we studied the case  $\mathbf{u}^* = \mathbf{v} - \nabla \psi$  with:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= (-\sin(\pi x) \cos(\pi y), \cos(\pi x) \sin(\pi y)), \\ \psi &= -\sin(\pi(x + y)). \end{aligned}$$

The two components  $\mathbf{v}$  and  $\psi$  are approximated respectively by  $\mathbf{v}_N$  and  $\psi_N$ . As is well known, the spectral approximation error of analytical functions converges exponentially towards zero as  $\rho^N$  where  $N$  is the polynomial degree and  $\rho \in ]0, 1[$  (see[4]). We expect the same error behavior in the present case.

Figure 1 exhibits the computation for the primal formulation (3.21). On a semi-logarithmic scale for the  $L^2$  error as a function of the polynomial degree  $N$ , one observes the typical spectral decay of the error  $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_N\|_{(L^2(\Omega))^2}$  (see circles), and of  $\|\text{curl}(\mathbf{u}_N^* - \mathbf{v}_N)\|_{L^2(\Omega)}$  (see squares), while  $\|\text{div} \mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)}$  (see triangles) is nearly zero machine.

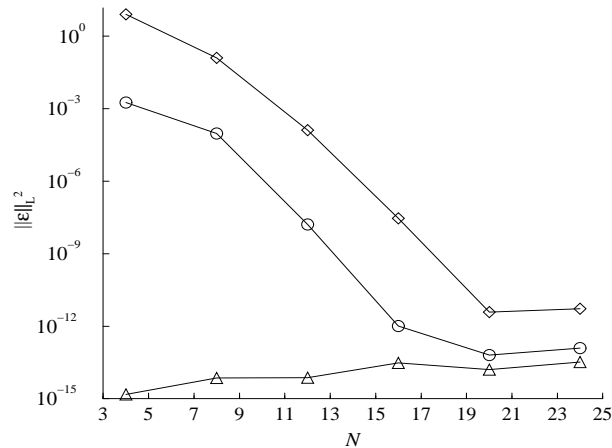


Figure 1. semi-logarithmic plot for the  $L^2$  error as a function of  $N$  using the primal formulation.  $\circ := \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_N\|_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $\diamond := \|\text{curl}(\mathbf{u}_N^* - \mathbf{v}_N)\|_{L^2(\Omega)}$  and  $\triangle := \|\text{div} \mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)}$ .

Figure 2 gives the same information as Figure 1 except for the fact that the various quantities have been computed with the dual formulation (3.26)-(3.27). The numerical results are quite close to those displayed on Figure 1.

The method we used to solve the algebraic system (3.25) is the CG (Conjugate Gradient) algorithm. Table 1 gives the number of iterations needed to converge up to  $10^{-14}$ . This

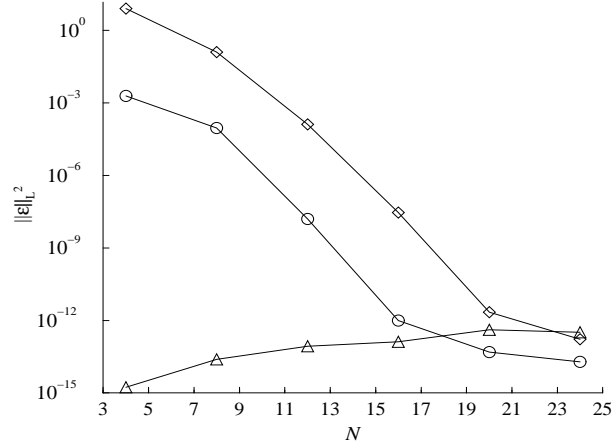


Figure 2. semi-logarithmic plot for the  $L^2$  error as a function of  $N$  using the dual formulation.  $\circ := \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_N\|_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $\diamond := \|\text{curl}(\mathbf{u}_N^* - \mathbf{v}_N)\|_{L^2(\Omega)}$  and  $\triangle := \|\text{div } \mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)}$

number remains low which makes the primal approach attractive.

N	4	8	12	16	20	24
CG	2	7	7	7	4	9

Table 1. Number of iterations used by CG to solve (3.25)

## 5 Conclusion

We have shown that the  $\mathbf{grad}(\text{div})$  operator offers an efficient tool for the Helmholtz decomposition of a vector field. We have proposed two ways to carry out this decomposition: We can use either the primal formulation or the dual one. The calculations performed on analytical functions for both formulations give similar results and clearly show the accuracy of the method.

Acknowledgment: The authors wish to thank the referees for many constructive comments that improved this paper.

## References

- [1] Azaïez M., Ben Belgacem F., Grundmann M., and Khallouf H., *Staggered Grids Hybrid-dual Spectral Element Method for Second-Order Elliptic Problems. Application to High-Order time Splitting for Navier-Stokes Equations*, CMAME, **166**, 183–199, 1998.

- [2] Azaïez M., Bernardi C., and Grundmann M., *Spectral Method Applied to Porous Media*, East–West J. Numer. Math., **2**, 91–105, 1994.
- [3] M. Azaïez, R. Gruber, M. O. Deville and E. H. Mund – *On a Stable Spectral Method for the grad(div) Eigenvalue Problem*. Journal of Scientific Computing, Vol. 27, **1**, pp 41–50, 2006.
- [4] Bernardi C., and Maday Y., *Spectral Methods*, in *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. V edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North-Holland, 209–485, 1997.
- [5] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *On the convergence of eigenvalues for mixed formulations*. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **25**, 131–154 ,1997.
- [6] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *Mixed finite elements for Maxwell’s eigenproblem: the question of spurious modes*. World Scientific, 180–187, 1998.
- [7] Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L., *On the Problem of Spurious Eigenvalues in the Approximation of Linear Elliptic Problems in Mixed Form*, Math. Comp., **69**, 121–140, 1999.
- [8] Boffi D. , Chinosi C., and Gastaldi L., *Approximation of grad-div operator in non-convex domains*. CMES, Comp. Model. Eng. Sci., **1** , 27–38, 2000.
- [9] Boffi D., Duran R.G. , and Gastaldi L., *A remark on spurious eigenvalues in a square*. Appl. Math. Letters, Vol. 12, 107–114, 1999.
- [10] Boffi D., Farina M., and Gastaldi L., *On the approximation of Maxwell’s eigenproblem in general 2D domains*. Computers & Structures, **79**, 1089–1096, 2001.
- [11] Bossavit A., *Computational Electromagnetism*, Academic Press (1998).
- [12] Brezzi F., and Fortin M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [13] Caltagirone J.P., and Breil J., *Sur une méthode de projection vectorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **327**, Série II b, 1179–1184, 1999.
- [14] Fortin M., and Glowinski R., *Augmented Lagrangian Methods*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [15] Gill A.E., *Atmosphere-Ocean Dynamics*, International Geophysics Series, Academic Press, New York, 1982.
- [16] Gruber R., and Rappaz, J., *Finite Element Methods in Linear Ideal MHD*, Springer Series in Computational Physics, Springer, Berlin, 1985.
- [17] Roberts J.E., and Thomas J.-M., *Mixed and Hybrid Methods*, in *Handbook of Numerical Analysis, Volume II: Finite Element Methods (Part 1)*, P.G. Ciarlet and J.L Lions Eds, 523–639, 1991.

# The new physics-conforming numerical COOL method <sup>1</sup>

E. Ahusborde <sup>a</sup>, R. Gruber <sup>b</sup> M. Azaïez <sup>a</sup>, M.L. Sawley <sup>b</sup>

<sup>a</sup>*TREFLE (UMR CNRS 8508), ENSCPB, 33607 Pessac (France)*

<sup>b</sup>*Laboratory of Computational Engineering, EPFL, 1015 Lausanne (Switzerland)*

---

## Abstract

A new, general numerical method for solving partial differential equations, called the COOL (COstraints Oriented Library) method, is presented. This *hp* approach takes into account the underlying nature of the corresponding physical problem, and thus avoids the generation of non-physical solutions. In the COOL method, all terms in a variational form are represented by the same functional dependence and by the same regularity, thus eliminating regularity constraints imposed by standard numerical methods. External constraints, such as the incompressibility condition appearing in the Maxwell or Navier-Stokes equations, can then be satisfied identically and are eliminated algebraically. This reduces the number of variables, and leads to well-conditioned matrix problems. The consequence is that only physically relevant solutions remain. The COOL method also satisfies automatically internal constraints, such as occur for the grad(div) and curl(curl) operators, and this for any geometry. This approach can be applied to a wide range of physical problems, including fluid flows, electromagnetics, material sciences, ideal linear magnetohydrodynamic stability analysis, and Alfvén wave heating of fusion plasmas. Results obtained by applying the COOL method to the grad(div) and curl(curl) operators, the Stokes problem, and the steady and unsteady Navier-Stokes equations are presented.

---

## 1 Introduction

A wide range of physical phenomena can be described by mathematical models based on a set of coupled partial differential equations. A well-known example is the Laplace operator, which arises in many physical problems. This operator is easy to approximate using existing numerical methods. Some operators, however, pose more significant problems, in particular those that are restricted by physical constraints such as arise from

---

<sup>1</sup> Article publié dans Physical Review E.



material properties. For example, in most applications, water can be treated as incompressible; mathematically its flow velocity  $\mathbf{u}$  must satisfy the incompressibility condition  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Current numerical methods can only approximate this condition. As a consequence, the numerical compressibility of water is much greater than its real physical value. For some operators, such as the grad(div), curl(curl) and magnetohydrodynamic (MHD) operators, the solution is restricted by internal constraints that are an integral part of the solution, and are difficult to satisfy numerically. If these strong internal conditions cannot be satisfied precisely, so-called spectral pollution [8] appears and the numerical approach does not stably converge to the physical solution. The reason is that due to regularity constraints imposed by standard numerical approximation methods, the energy cannot reach the minimum required by the physics. In fact, current numerical methods satisfy the boundary conditions strongly, the operator equations and the constraints only weakly.

The COOL (COntstraints Oriented Library) method has been developed based on an entirely different approach. It is a fundamentally new, mathematically non-conforming numerical method. The idea is to satisfy strongly the constraints and the operator equations, and the boundary conditions only weakly. This implies that this method exactly satisfies external material and internal physical constraints. In addition, each term in the variational form is represented with the same polynomial degree and with the same regularity across element borders. For all cases, the COOL method has the same convergence properties as the established mathematically-conforming approximation methods [7] or the spectral method [5]. The COOL approach is an  $hp$  method with a general mix of spatial mesh refinement ( $h \approx \frac{1}{N}$ , where  $N$  is the number of intervals in each spatial direction) and with a degree  $p$  of polynomial basis functions that approximate the solution in each of the  $N^2$  elements of the two-dimensional geometries considered here. The special case of  $p = 1$  corresponds to a non-conforming finite element method [8], while  $N = 1$  corresponds to a new kind of spectral method with the same convergence properties as the standard spectral method.

When applying a numerical method to a physical problem, one should be concerned about non-physical eigensolutions that can couple with the physical ones, especially for time-evolutionary problems. Due to this concern, it is important to consider the application of numerical methods to eigenvalue problems and demand that only physically relevant eigensolutions are obtained, and to a high degree of precision. If this is assured, the calculated physical solution can not be affected by the coupling of spurious modes.

The present paper provides a description of the underlying basis of the COOL method for 2D geometries, together with some illustrative examples of its application to different physical problems. The grad(div) problem is presented to show that the spectrum computed using the COOL method is unpolluted even for non-Cartesian meshes, the Stokes problem is a good example to demonstrate that the method exactly satisfies  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  and that this condition can be eliminated algebraically. Finally, the unsteady and steady Navier-Stokes equations illustrate how the method is adjusted to run efficiently when iterative sparse matrix solvers are used.

## 2 Types of spatial operators

In the description of physical phenomena by partial differential equations, we shall distinguish between three different types of spatial operators described in the following sub-sections.

### 2.1 Type I: Laplace operator

The stationary Laplace operator (also called the Poisson equation) can be written as

$$-\nabla \cdot (k(\mathbf{r}, u) \nabla u) = S(\mathbf{r}, u) \quad \text{for } \mathbf{r} \in \Omega, \quad (2.1)$$

restricted by boundary conditions at the border  $\partial\Omega$  of the domain  $\Omega$ . Here,  $\mathbf{r}$  is the spatial position and  $u$  is an unknown scalar function. The coefficient  $k(\mathbf{r}, u)$  is generally positive. The source term  $S(\mathbf{r}, u)$  can be complex.

The best known physical phenomenon described by the Laplace operator is the heat equation for which  $k = 1$  and  $S = 0$ . Other phenomena described by a Type I operator are the Schrödinger equation in material science and chemistry, electrostatic potentials, diffusion in chemistry or neutronics, the pressure equation in incompressible fluid flows, the Darcy equation for porous media, solidification processes, and the ideal MHD equilibrium of tokamaks.

All sufficiently regular finite element, finite difference, finite volume, *hp* or spectral methods can solve the Poisson equation within a discretization error that approaches zero according to well-established convergence laws. Thus, there is no need to develop a new numerical approximation method to solve Type I operator problems. The matrices are in general well conditioned, and fast converging iterative matrix solvers can be applied.

### 2.2 Type II: Externally-constrained operators

The incompressible Navier-Stokes equations, the Stokes problem, and some special cases of Maxwell's equations are of this type. The numerical specificities of these equations can be represented by the Stokes eigenvalue problem:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{u} - \nabla p && \text{for } \mathbf{r} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, && \text{for } \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, && \text{for } \mathbf{r} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

It is required to compute the eigensolution (eigenvalues and eigenmodes) of the Laplace operator restricted by the incompressibility condition  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . The pressure term  $\nabla p$  forces the eigenmode to satisfy  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

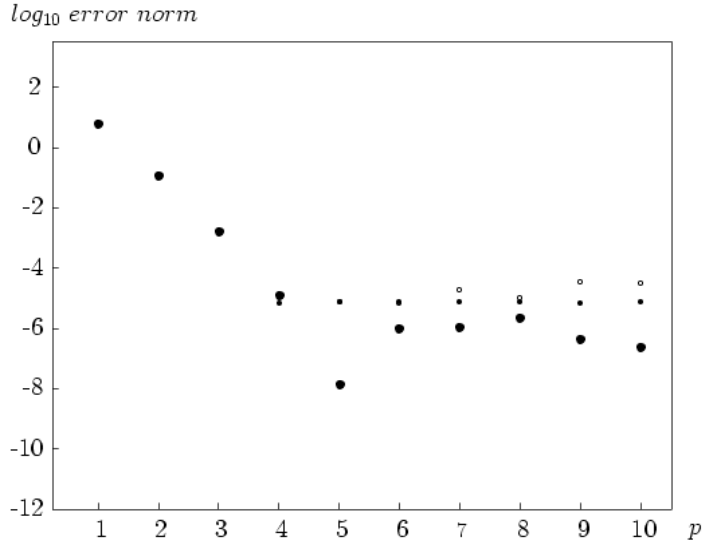


Figure 1. Convergence plots obtained using the penalty method for the first Stokes mode ( $\lambda^2 = 13.086173$ ) as a function of the polynomial order  $p$  with fixed  $N = 4$  for  $\alpha = 10^5$  (small  $\bullet$ ),  $\alpha = 10^6$  (large  $\bullet$ ) and  $\alpha = 10^7$  ( $\circ$ ).

Mathematically-conforming numerical methods cannot exactly reproduce the external incompressibility constraint of the Type II class of problems, they only provide an approximation. As a consequence, for example, an incompressible fluid computed using a conforming numerical method becomes slightly compressible. Most of the current numerical approaches used to solve the 2D Stokes problem (2.2) are based either on a penalty method with two variables per mesh point (i.e. the two velocity components) or on the Raviart-Thomas approach with three variables per mesh point (i.e. the two velocities and the pressure) [7]. The problems arising from these approaches are illustrated in Fig. 1 in which the lowest eigenvalue of eqs (2.2) is plotted for the penalty method in which the pressure is set to  $p = \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}$ , where  $\alpha$  is the Lagrange multiplier. One can see that the choice of  $\alpha$  leads to slightly different convergence behaviours. For double precision arithmetic,  $\alpha = 10^6$  appears to give the best convergence results. With an increasing polynomial degree to represent the eigenfunction, the eigenvalue converges exponentially as expected for  $p \leq 5$ . Increasing  $p$  further does not improve the accuracy of the eigenvalue, with the precision limited to  $10^{-6}$ . We note here that the limit in precision for the incompressibility condition is of the order of  $\sqrt{\alpha}$ , thus  $\nabla \cdot \mathbf{u} \approx 10^{-3}$ . Another problem with this popular approach is the appearance of a second class of eigensolutions, the Laplace spectrum multiplied by  $\alpha$ . This solution, which is not shown in Fig. 1, leads to an ill-conditioned matrix, with a condition number  $C \approx 10^9$  for  $N = p = 4$ , and consequently to poor convergence of sparse matrix solvers.

It is possible to satisfy the incompressibility condition precisely by applying the curl operator to the first equation of (2.2) and introducing a stream function. The Stokes problem is then described by a double Laplacian [10]. The calculated spectrum is precise, but the computing time is high due to the ill-conditioned resulting matrix. In fact, this precise spectrum is presented in [10] and is used to validate our new COOL approach.

Maxwell's equations are another example of an externally-constrained operator problem. Since it is also internally constrained, we consider this example further in the next sub-section.

### 2.3 Type III: Operators with internal constraints

Type III operators contain physical constraints embedded in the operator. A typical example is the grad(div) eigenvalue problem:

$$\begin{aligned} -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \lambda^2 \mathbf{u}, & \text{for } \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{for } \mathbf{r} \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.3}$$

representing, for instance, the ideal ocean wave equations [4]. For a 2D geometry, there are two classes of eigensolutions. The incompressible solenoidal modes are infinitely degenerate with  $\lambda^2 = 0$  and  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . This is the class of modes that give fundamental problems when trying to represent it numerically. The second class of irrotational modes are represented by a discrete spectrum with eigenmodes satisfying  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ .

Plasma waves are also described by a Type III operator problem [6]:

$$\begin{aligned} -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} &= \lambda^2 \mathbf{u}, & \text{for } \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= 0, & \text{for } \mathbf{r} \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.4}$$

In 2D, the spectrum of this problem is identical to that described by eqs (2.3).

Other Type III operators include the ideal linear MHD equations that describe the stability properties of a tokamak [8], and the Maxwell equations [3]. If the vacuum magnetic field  $\mathbf{B}$  satisfies the initial condition  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  at time  $t = 0$ , the Maxwell equations automatically satisfy  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  for all  $t > 0$ . If one imposes  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  at all  $t$ , the Maxwell equations are also a Type II operator.

The numerical approximation of this type of operator is very difficult. For Cartesian geometries it is possible to choose a staggered grid and different conforming elements for the different vector components [2,6,8]. However, if the mesh is not Cartesian, this approach fails due to insufficient regularity of the approximating basis. If a standard approach is then chosen, so-called spectral pollution appears [8]. The class of infinitely

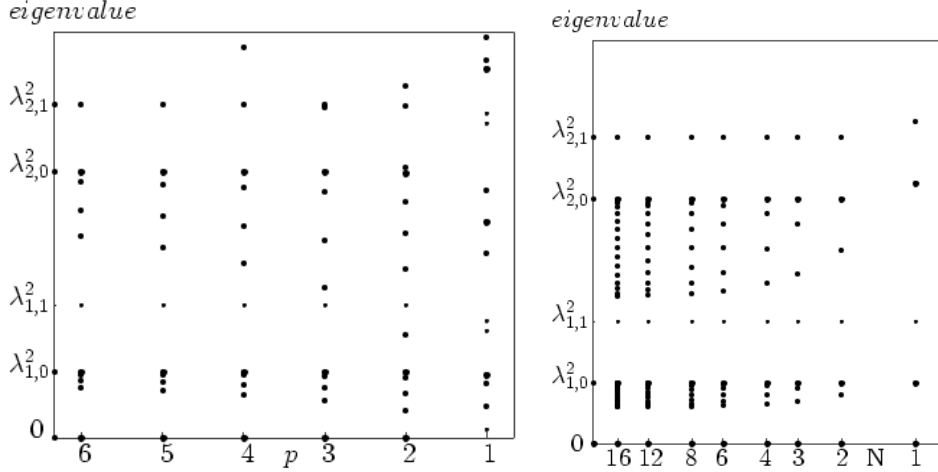


Figure 2. The dependence of the grad(div) and curl(curl) spectra computed using a standard  $hp$  method with  $p$  for fixed  $N = 4$  (left), and with  $N$  for fixed  $p = 4$  (right). The size of the circles distinguish between single, double, and quadruple or higher degenerate eigenvalues. The two lower indexes of the eigenvalue denote the mode numbers in  $x$  and  $y$  directions.

degenerate divergence-free eigensolutions expands to a discrete spectrum that changes with  $N$  and  $p$ .

This behaviour is illustrated in Fig. 2. The left side of Fig. 2 shows the spectrum for the grad(div) operator calculated using the standard conforming  $hp$  elements in a non-Cartesian geometry [5]. The number of spatial mesh elements is  $N = 4$  in both directions, and the polynomial degree is varied between  $p = 1$  and  $p = 6$ . We note that the solenoidal class of modes should consist of an infinitely degenerate mode with an eigenvalue  $\lambda^2 = 0$ . For  $p=1$  (conforming bilinear finite elements), there is no such eigenvalue, and all the discrete modes of the solenoidal degenerate spectrum are unphysical. For  $p > 1$ , there are  $N^2(p-1)^2$  degenerate eigenvalues with  $\lambda^2=0$ , but also  $(Np-1)^2 - N^2(p-1)^2 - 3$  unphysical polluting modes are observed. The irrotational eigenvalues converge exponentially with  $p$  towards the analytical solution. Some of these eigenvalues, however, have incorrect multiplicities. The polluting eigensolutions have eigenvalues that lie below those of the irrotational eigensolutions with one wave number equal to zero; thus the first discrete eigenvalue  $\lambda_{1,0}^2 = 1$  corresponds to eigensolutions with mode numbers (0,1) and (1,0), and the third eigenvalue ( $\lambda_{2,0}^2 = 4$ ) with mode numbers (0,2) and (2,0). With increasing  $p$ , these unphysical eigenvalues approach the physical one, and the physical and unphysical modes then become increasingly coupled.

The right side of Fig. 2 again shows the polluted spectrum, this time as a function of  $N$ , fixing  $p = 4$ . One recognizes the presence of continuous spectra below the discrete irrotational modes for which one of the mode numbers in  $x$  or  $y$  direction is equal to zero. Two of those spectra can be recognized below the (0,1) and (1,0) and the (0,2) and (2,0) modes. These continuous spectra are unphysical, but are part of the numerical spectrum. In particular, the incorrect degeneracy of the eigenfunction with a mode number 0 in the  $x$  or  $y$  directions (4 instead of 2) couples the two physical modes of

the irrotational spectrum with unphysical modes from the solenoidal class of modes. If such a numerical approach is used for a time-dependent calculation, it is possible that the physical modes couple with unphysical modes, and the resulting solution can be strongly affected.

For a general non-Cartesian geometry, the only conforming approach that is able to compute correctly the spectrum of the grad(div) operator (2.3) is that based on edge elements, while surface elements represent well the spectrum of the curl(curl) operator [3]. These methods have been formulated for  $p = 1$ . We note, however, that edge elements are not suited to solve eqs (2.2), since they are not sufficiently regular to approximate the Laplace operator.

We have shown that in certain circumstances, mathematically-conforming elements can be adapted to the physics of problems represented by different types of operators. However, in many cases this is not possible, and the approximated solution can then differ significantly from the physical solution. The new COOL method has been developed to compute with high precision the spectra of all Type I - III operators, satisfying the constraints exactly, for both Cartesian and non-Cartesian geometries.

### 3 The new non-conforming $hp$ approach

The new (mathematically) non-conforming  $hp$  method COOL (COntstraint Oriented Library) for solving partial differential equations is presented here by means of the grad(div) eigenvalue problem (2.3) solved on the square  $\Omega = [-1, +1]^2$  cut into  $N^2$  elements. The variational form can be written as: *Find  $\mathbf{u}$  sufficiently regular and  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  at the boundary  $\partial\Omega$  such that*

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad (3.1)$$

$\forall \mathbf{v}$  sufficiently regular. This quadratic, or primal, form has the advantage that if  $\lambda^2 = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$ , and no additional tests on the eigenmodes are needed as in [2]. The integral  $\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  may be expanded as

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \, d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Normally, one would choose [5]

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &\in \pi_p^1(x) \otimes \pi_p^1(y) \\ u_y(x, y) &\in \pi_p^1(x) \otimes \pi_p^1(y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

where  $\pi_p^1$  denotes an approximating polynomial of degree  $p$  with a square integrable first order derivative. With such a choice, however, the number of degenerate modes with  $\lambda^2 = 0$  does not correspond to the expected number of degrees of freedom. Specifically, for  $p=1$  (corresponding to bilinear finite elements) there is no such mode (see Fig. 2 left); in addition, unphysical eigensolutions are calculated as previously described.

To obtain the couple ( $\lambda^2 = 0, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) correctly, we modify the variational formulation. Instead of (3.1)-(3.2) we consider

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_y^{(2)}}{\partial y} \right) d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \left( u_x^{(0)} v_x^{(0)} + u_y^{(0)} v_y^{(0)} \right) d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

The number of unknowns has been extended from two ( $u_x, u_y$ ) to six ( $u_x^{(k)}, u_y^{(k)}, k = 0, 1, 2$ ) for the most general case when all the partial derivatives appear in the operator. The goal is now to approximate the new variables such that all terms in the operator have the same functional dependencies and the same regularities:

$$\begin{aligned} u_r^{(0)}(x, y) &\in \pi_{p-1}^0(x) \otimes \pi_{p-1}^0(y) \\ u_r^{(1)}(x, y) &\in \pi_p^1(x) \otimes \pi_{p-1}^0(y) \\ u_r^{(2)}(x, y) &\in \pi_{p-1}^0(x) \otimes \pi_p^1(y). \end{aligned} \quad (3.5)$$

The upper index 0 of  $\pi$  denotes a square integrable property, and  $r$  denotes  $x$  or  $y$ . With such a choice

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \in \pi_{p-1}^0(x) \otimes \pi_{p-1}^0(y), \quad (3.6)$$

and  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  can vanish identically when required. These new variables are related to the initial variables by momentum conditions:

$$\int_{\Omega} (u_r - u_r^{(k)}) \mu d\mathbf{x} = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, 2\} \quad r = x \text{ or } y, \quad (3.7)$$

where  $\mu = x^\alpha y^\beta$ , with  $\alpha$  and  $\beta = 0, 1, \dots, p-1$ .

Let us introduce two canonical polynomial basis functions

$$h_j(r) = -\frac{1}{p(p+1)} \frac{1}{L_p(\xi_j)} \frac{(1-r^2) L_p'(r)}{(r-\xi_j)}, \quad -1 \leq r \leq +1, \quad 0 \leq j \leq p, \quad (3.8)$$

$$g_j(r) = h_j(r) - \frac{L_p(r)}{(p+1)L_p(\xi_j)}, \quad -1 \leq r \leq +1, \quad 0 \leq j \leq p, \quad (3.9)$$

where  $L_p$  is the Legendre polynomial of degree  $p$ ,  $L'_p$  its derivative with respect to  $r$ , and  $\xi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, p$ , are the zeros of  $(1 - r^2)L'_p(r) = 0$ . Since  $L_p(r)$  is zero at the Gauss points  $\zeta_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , we have  $h_j(\zeta_i) = g_j(\zeta_i)$ . The function  $h_j(r)$  is a polynomial of degree  $p$ , continuous across element borders. It is used to represent derivatives that are polynomials of degree  $p - 1$ , discontinuous across element borders. The function  $g_j(r)$  is a polynomial of degree  $p - 1$ , discontinuous across element borders, and is used to represent variations in directions without derivatives. As a consequence, each term in the variational form and in the  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  term (3.6) are polynomials of degree  $p - 1$  in  $x$  and  $y$ , discontinuous across element borders.

We can then approximate

$$u_r^{(0)}(x, y) = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N \sum_{i=\delta_{e1}}^p \sum_{j=\delta_{f1}}^p \bar{u}_{ij}^{ref} g_i(x_{ef}) g_j(y_{ef}) \quad (3.10)$$

$$u_r^{(1)}(x, y) = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N \sum_{i=\delta_{e1}}^p \sum_{j=\delta_{f1}}^p \bar{u}_{ij}^{ref} h_i(x_{ef}) g_j(y_{ef}) \quad (3.11)$$

$$u_r^{(2)}(x, y) = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N \sum_{i=\delta_{e1}}^p \sum_{j=\delta_{f1}}^p \bar{u}_{ij}^{ref} g_i(x_{ef}) h_j(y_{ef}) . \quad (3.12)$$

Here,  $\delta_{e1}$  and  $\delta_{f1}$  are the Kronecker symbols and the index  $r$  denotes  $x$  or  $y$ . There are  $2(Np)^2$  variables for  $\bar{\mathbf{u}}$ , whereas there are  $2(Np + 1)^2$  variables for  $\mathbf{u}$  defined in (3.3). The reason is that the function  $g(r)$  is a polynomial of degree  $p - 1$ , implying that one has to eliminate variables if there is no boundary condition at the lower or upper border in  $x$  or at the left or right border in  $y$ . The lower border variables  $\bar{u}_{i0}^{ye1}$  or the left side variables  $\bar{u}_{0j}^{x1f}$  have then to be eliminated to obtain regular matrices. All the quantities in (3.10)-(3.12) are identical at the Gauss points. The dependent variables  $\bar{\mathbf{u}}$  have two vector components. They are defined at the Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) points (see Fig 3 left). If one has to impose regularity conditions, these components have no physical meaning, only the sum defined before. Using these expressions one can easily verify that the moment equations (3.7) are satisfied. In addition, all the terms in the variational form (3.4) are polynomials of degree  $p - 1$  with a jump across the element borders.

## 4 Satisfying external constraints using the COOL method

### 4.1 Elimination of $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

Constraints such as  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  are often imposed through a penalty function [7] or by introducing a stream function [10]. Another way to impose such a constraint is to find a precisely divergence-free basis as the eigenmodes that form the kernel of the grad(div)



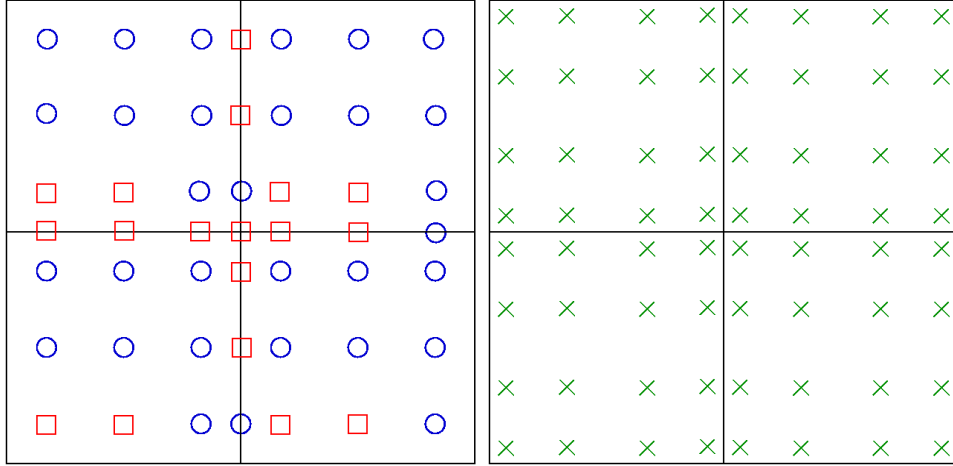


Figure 3. (Color online) Left: Position of the variables  $\bar{\mathbf{u}}$  at the GLL points for  $N = 2$ ,  $p = 4$ . The circles (blue) denote the eliminated components  $\mathbf{u}_2$  and the squares (red) the remaining variables  $\mathbf{u}_1$ . Note that each circle or square contains two variables corresponding to the local  $(\bar{u}_x, \bar{u}_y)$  components. There are no variables needed on the boundary, since  $\bar{\mathbf{u}} = 0$  there. Right: The Gauss points (green crosses) for the integration and elimination of the  $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$  conditions.

operator. This leads to a perfect Stokes spectrum. The drawback of this method is that the matrices of the eigenvalue problem are full, making it inapplicable to real-world 3D problems. We shall present an alternative method in which the matrices remain sparse.

The 2D Stokes eigenvalue problem (2.2) in variational form can be written as: *Find  $\mathbf{u}$  sufficiently regular satisfying  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , and  $\mathbf{u} = 0$  on  $\partial\Omega$  and the real quantity  $\lambda$  such that*

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}. \quad (4.1)$$

This problem has  $N_{var} = 2(Np - 1)^2$  variables. It is solved in two steps applying the new constraint-oriented, non-conforming  $hp$  method COOL. First,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  is imposed at the  $(Np)^2$  Gauss points (see Fig. 3 right), leading to one algebraic equation per Gauss point. This equation includes all variables in the element. Due to the boundary conditions, in the present case  $\mathbf{u} = 0$ , two of these linear equations are linearly dependent. Thus, one can eliminate  $N_2 = (Np)^2 - 2$  variables that are combined in  $\mathbf{u}_2$  (see Fig. 3 left). The remaining  $N_1 = (Np - 2)^2$  variables are included in  $\mathbf{u}_1$ . Note that  $N_{var} = N_1 + N_2$ . The  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  equations expressed at the  $N_2$  Gauss points can then be written in matrix form:

$$D_1 \mathbf{u}_1 + D_2 \mathbf{u}_2 = 0. \quad (4.2)$$

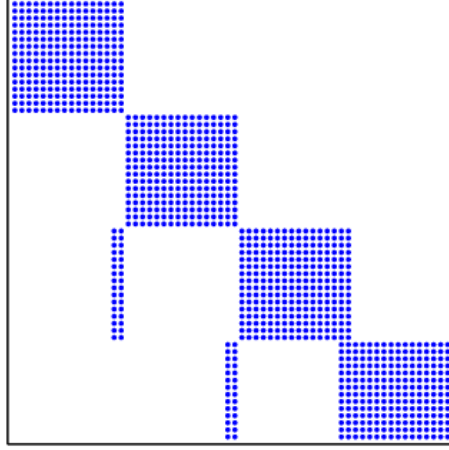


Figure 4. The sparsity pattern of  $D_2$  and its decomposition matrices  $L$  and  $U$  for  $N=2$  and  $p=4$ . The rank of the entire matrices is  $(Np)^2 - 2 = 62$ . All matrix blocks have a rank of  $p^2 = 16$ , except the last block that has a rank of  $p^2 - 2 = 14$ . The white parts in the matrix are filled with zeros.

Here,  $D_1$  is a matrix with  $N_2$  rows and  $N_1$  columns and  $D_2$  has  $N_2$  rows and  $N_2$  columns. Then,

$$\mathbf{u}_2 = -D_2^{-1}D_1\mathbf{u}_1. \quad (4.3)$$

leading to an algebraic matrix condition between the initial  $\bar{\mathbf{u}}$  variables and the new remaining variables  $\mathbf{u}_1$ :

$$\bar{\mathbf{u}} = M\mathbf{u}_1. \quad (4.4)$$

The matrix

$$M = \begin{pmatrix} I \\ -D_2^{-1}D_1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

has  $N_{var}$  rows and  $N_1$  columns. Instead of inverting matrix  $D_2$ , it is decomposed into

$$D_2 = LU, \quad (4.6)$$

keeping unchanged the sparsity pattern of  $D_2$  shown in Fig. 4.

The initial eigenvalue problem

$$A\mathbf{u} = \lambda^2 B\mathbf{u}, \quad (4.7)$$

$p = N$	<i>Laplacian</i>	<i>Stokes</i>	<i>Stokes</i>
	$A$	$M^T AM$	$N^T AM$
3	16	59	29
4	34	289	54
5	62	925	118
6	95	2613	189

Table 1

Number of iterations required for the Laplacian matrix  $A$  (left), the symmetric Stokes matrix  $M^T AM$  (center) and the new Stokes matrix  $N^T AM$  (right).

derived from eq. (4.1) then becomes

$$M^T AM \mathbf{u}_1 = \lambda^2 M^T B M \mathbf{u}_1 . \quad (4.8)$$

The multiplication by  $M^T$  from the left guarantees that the generalized eigenvalue problem remains symmetric.

#### 4.2 Condition numbers of the matrix problems

The condition number of the matrix  $(M^T B M)^{-1} M^T A M$  is  $C = 900$  for  $N = 4$  and  $p = 4$ . In the case of the generalized eigenvalue problem of a Laplace operator, the matrix  $B^{-1} A$  has a condition number  $C = 4220$  for  $N = 4$  and  $p = 4$ . This means that the Stokes eigenvalue problem is better conditioned than the Laplace eigenvalue problem.

When applying this method to time-dependent problems, the condition number of the Laplacian matrix  $A$  is important. This condition number is  $C = 130$ , sufficiently well conditioned to use a conjugate gradient (CG) method, even without preconditioning. On the other hand, the condition number of the matrix  $M^T A M$  is  $C = 357323$ . This is almost the square of the condition number for the Stokes eigenvalue problem. We note that the matrix multiplication by  $M^T$  is not a sparse matrix operation.

To overcome these problems, it is proposed to multiply the initial matrix problem (4.7) from the left hand side with a general matrix  $N^T$  instead of multiplying by  $M^T$ . For instance, for the unsteady Navier-Stokes problem presented later, the initial problem

$$A M \mathbf{u}_1 = \mathbf{f} \quad (4.9)$$

becomes

$$N^T A M \mathbf{u}_1 = N^T \mathbf{f} . \quad (4.10)$$

The simplest choice for  $N^T$  is

$$N = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

With such a transformation matrix, the condition number of  $N^T AM$  for  $N = 4$  and  $p = 4$  becomes  $C = 3008$ . This matrix is no longer symmetric and positive definite, but unsymmetric and thus requires the use of a bi-conjugate gradient (BiCG) iterative matrix solver demanding twice as many operations as the CG solver. For this test case, the number of necessary CG and BiCG iteration steps without preconditioning is shown in Table 1. It is seen that a time-dependent Stokes problem requires twice as many iteration steps as a stationary Laplacian, whereas many more iteration steps are needed for the symmetric Stokes problem.

The new matrix problem can be solved iteratively with sparse matrix operations. The  $N^T A$  multiplication is trivial. It implies that all the rows of  $A$  below row number  $N_1$  can be set to zero, and the number of operations therefore diminishes. To accelerate further the iteration process, the identity matrix in  $N^T$  could be replaced by a preconditioner.

### 4.3 Application to the Stokes eigenvalue problem

The Stokes spectrum is discrete in nature, similar to that of the Laplace operator. There are no singular eigenvalues, thus the spectrum cannot be polluted. To demonstrate the efficiency of the COOL method to solve externally-constrained problems, we apply it to this well-known spectrum. The eigenvalues and eigenmodes are found with high precision, and no modes other than the Stokes modes are found. The total number of mesh points in both directions is fixed at  $Np = 40$ . Figure 5 shows the convergence behaviour of the first ( $\lambda_1^2 = 13.0861727921$ ) and the 73rd ( $\lambda_{73}^2 = 301.8406425660$ ) eigenvalues to machine precision with 10 decimal places. The calculation of the eigenvalues is observed to converge exponentially. We note that for  $p = 20$  all 10 decimal places of the calculated eigenvalues correspond to those reported in [10].

It has been shown theoretically that the eigenmodes have a global structure with an infinite series of Moffatt corner vortices of increasingly smaller amplitudes [11]. For the 13th eigenmode with  $\lambda_{13}^2 = 69.769769316$ , the  $u_x$  component of the eigensolution is shown on the right side of Fig. 6 using one element and  $p = 32$ . The amplitude of this global structure is 0.852. The first Moffatt vortex in the left upper corner of the geometry has an amplitude of  $10^{-3}$ , while the second Moffatt corner vortex has an amplitude of  $2 \cdot 10^{-6}$ , this being close to machine precision. The detection of the third Moffatt corner vortex would necessitate quadruple precision arithmetic.

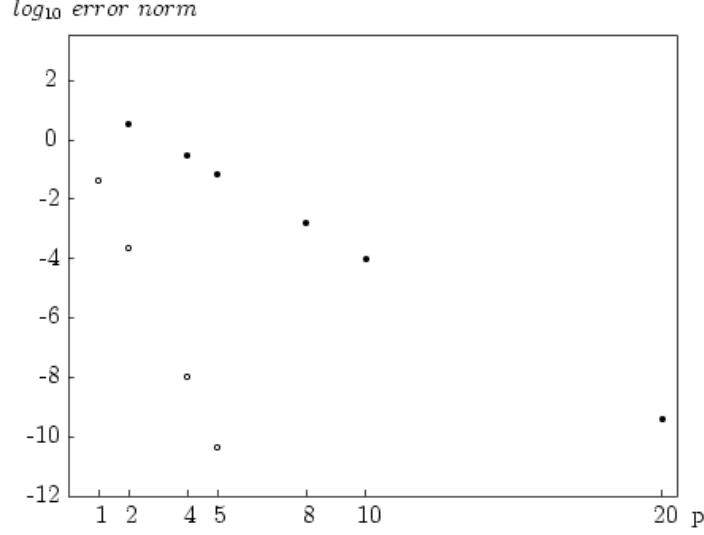


Figure 5. Convergence plots for the first ( $\lambda_1^2 = 13.0861727921$ , open circles) and the 73rd ( $\lambda_{73}^2 = 301.8406425660$ , closed circles) Stokes modes obtained using the COOL method with a constant value of  $Np = 40$ . In both cases, exponential convergence is observed until machine precision is achieved.

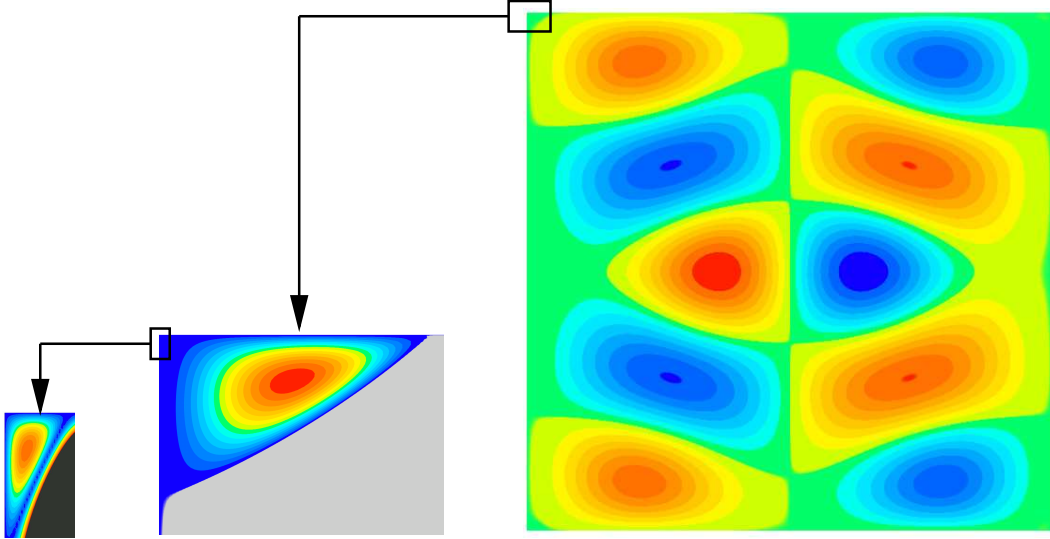


Figure 6. (Color online) The  $u_x$  component of the 13th eigenmode computed using the COOL method. The first and second Moffatt corner vortices are shown in the inserts at the center and left, respectively. The sign of the eigenmode structure changes from subdomain (red/yellow) to subdomain (blue/green).

## 5 The COOL method applied to internal constraints

The eigensolution of operators with internal constraints include infinitely-degenerate finite value eigenvalues. These can exhibit an infinite degeneracy as for the grad(div) operator (2.3), an accumulation point, or a continuous spectrum as for ideal linear

MHD [8]. Accurate determination of these degeneracies can only be achieved if the numerical method is able to satisfy the constraints identically. Otherwise, the approximated solution will not stably converge towards the physical one, and spectral pollution occurs as shown in Fig. 2.

In the COOL method, all terms of the operator have the same functional dependence and the same regularities across the element borders. The sum of terms can then identically vanish. As a consequence, the COOL method always automatically satisfies internal constraints even though one cannot always analytically recognize them. The ideal linear MHD problem in a complex geometry is such an example where the COOL method reveals its full power.

### 5.1 The $\text{grad}(\text{div})$ and $\text{curl}(\text{curl})$ eigenvalue problems

Figure 7 shows the spectra of the  $\text{grad}(\text{div})$  and  $\text{curl}(\text{curl})$  operators obtained by applying the COOL method. The number of intervals is fixed at  $N=4$ , and  $p$  varies between 1 and 6 as in Fig. 2 left. All modes calculated are physical. The eigenvalue  $\lambda^2 = 0$  is obtained with the expected  $(Np - 1)^2$  fold degeneracy. For  $p=4$ , eight decimal places are correct for the lowest eigenvalues. The convergence in  $p$  is exponential. This figure is to be compared with Fig. 2 left. One clearly recognizes that the original unphysical spectrum has been replaced by a physical spectrum. This is the case for both Cartesian and non-Cartesian geometries.

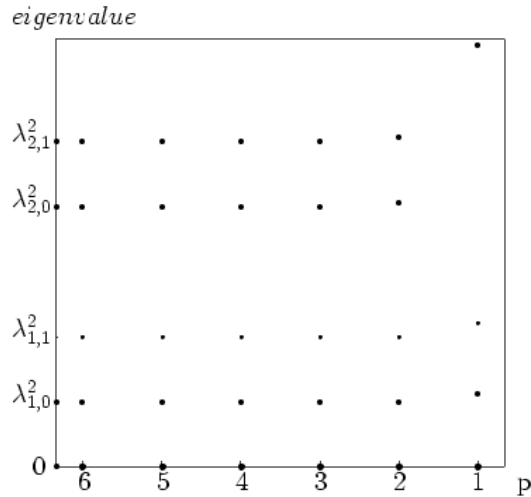


Figure 7. The dependence on  $p$  of the  $\text{grad}(\text{div})$  and  $\text{curl}(\text{curl})$  spectra computed using the COOL method for fixed  $N = 4$ . The two lower indexes of the eigenvalue denote the mode numbers in x and y directions.

## 5.2 The ideal linear MHD equations

The ideal linear MHD operator, which describes the stability and Alfvén wave heating properties of fusion plasmas in tokamaks or stellarators, includes two continuous spectra with complex internal constraints. To improve precision, magnetic flux surfaces have to be well represented. This implies that any mathematically-conforming method is definitely not suited for this operator. The COOL method for  $p = 1$  is not only able to predict correctly the stability behaviours of tokamaks [12] but also Alfvén wave heating mechanisms [1] (resonance absorption of a global mode by the continuum) used to heat fusion reactor experiments.

## 6 Applications to unsteady and steady Navier-Stokes problems

To examine the COOL method applied to the unsteady Navier-Stokes problem, we consider the equations set on  $\Omega \times [0, t^*]$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega \times [0, t^*], \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times [0, t^*], \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \times [0, t^*], \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, t = 0) = 0, \quad \text{in } \Omega. \quad (6.4)$$

The numerical method begins with the treatment of the non-linear term  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  involved in the material derivative of the velocity,  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} (= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})$ . The scheme adopted here is the classical explicit second-order Adams-Bashforth algorithm. In order to specify our scheme, we divide the time interval of integration  $[0, t^*]$  into  $m^*$  subdivisions of length  $\Delta t = \frac{t^*}{m^*}$ , and define  $t^m = m\Delta t$ , for any  $m, 0 \leq m \leq m^*$ . We shall compute a sequence  $(\mathbf{u}^m)_{0 \leq m \leq m^*}$  in a recurrent way that approximate in some sense  $(\mathbf{u}(\cdot, t^m))_{0 \leq m \leq m^*}$ . Assuming  $(\mathbf{u}^k)_{0 \leq k \leq m}$  to be known, we then determine the velocity  $\mathbf{u}^{m+1}$  by solving

$$\frac{3\mathbf{u}^{m+1} - 4\mathbf{u}^m + \mathbf{u}^{m-1}}{2\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{f}^{m+1} - NLN(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^{m-1}) \quad \text{in } \Omega, \quad (6.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{u}^{m+1} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (6.7)$$

where  $NLN(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^{m-1}) = 2((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^m - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})^{m-1}$ .

To check the dependence of the accuracy with respect to the temporal approximation, we solve the unsteady Navier-Stokes equations with  $\nu = 1$  having the following analytical solution:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(y) \cos(5t) \\ \sin(x) \cos(5t) \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Values of  $p = 6$  and  $N = 2$  have been chosen for the computation. In Fig. 8 is presented, on a logarithmic scale, the error with respect to the discrete maximum norm at time  $t = 1$ . The expected second-order decrease of the error with the number of timesteps  $N_t$  is observed.

The second example presented here was first studied by Kovasznay in 1948 [9], and

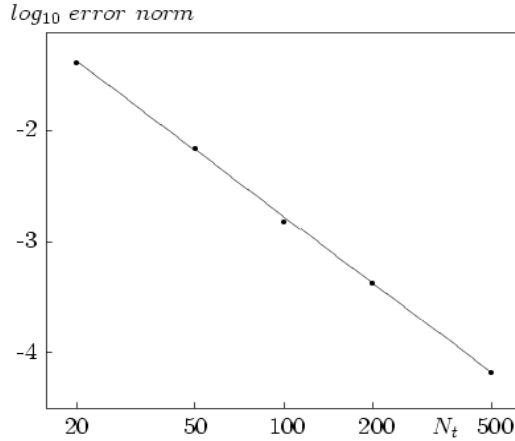


Figure 8. Convergence plot obtained for the unsteady Navier-Stokes solution using the COOL method. The straight line corresponds to quadratic convergence with the number of time steps  $N_t$ .

represents laminar flow behind a 2D grid. We consider the resolution of the steady Navier-Stokes equations on the rectangular domain  $\Omega = (-0.5, 1) \times (-0.5, 1.5)$ , with the exact solution given by

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \\ \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

where  $\lambda = \frac{Re}{2} - (\frac{Re^2}{4} + 4\pi^2)^{\frac{1}{2}}$ , and  $Re$  is the Reynolds number which has a value of 40. The solution, shown in Fig. 9, can be obtained as the limit (when  $t \rightarrow +\infty$ ) of the unsteady Navier-Stokes equations, starting for instance from a zero initial condition. At each time step (for  $\Delta t = 0.01$ ), the semi-discrete generalized Stokes problem (6.5)-(6.7) is solved using the COOL method. The time marching is terminated when the steady regime is established, that is when the difference between the velocities computed at two consecutive time steps is less than a pre-defined tolerance,  $\max(|\mathbf{u}_{ij}^{m+1} - \mathbf{u}_{ij}^m|) < 1 \times 10^{-8}$ .

Figure 10 left presents, in a semi-logarithmic plot, the dependence of the maximum norm error with respect to  $p$ , fixing  $N = 2$ . Due to the infinitely smooth nature of  $\mathbf{u}$ , the expected exponential decrease in the error is observed. In Fig. 10 right is presented, in a logarithmic plot, the dependence of the maximum norm error with respect to  $N$ , fixing  $p = 4$ . The expected algebraic  $\mathcal{O}(N^{-p})$  decrease is observed.



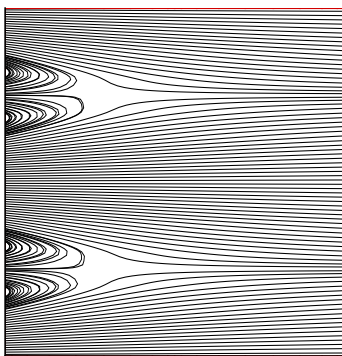


Figure 9. Streamlines computed for the Kovaszny flow problem on the rectangular domain  $\Omega = (-0.5, 1) \times (-0.5, 1.5)$ . These results are in complete agreement with eq. (6.9).

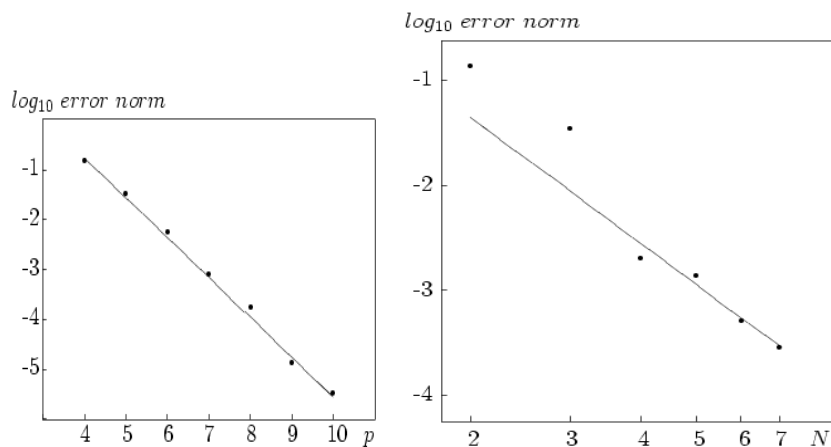


Figure 10. Convergence plot for Kovaszny solution with respect to  $p$  (left) and  $N$  (right).

## 7 Conclusions

A new, general numerical method for solving partial differential equations has been presented. This method differs from existing methods in that it conforms exactly to the physical constraints imposed. This results in a number of advantages, which have been illustrated by the application of the method to different physical problems.

### The COOL method for externally-constrained problems

The strengths of the COOL method applied to problems with external constraints are:

- The number of dependent variables in the 2D Stokes problem reduces from three  $(u_x, u_y, p)$  to one  $(u_1)$  component, and the matrix problem is thus much smaller.
- Only Stokes modes are obtained.
- The  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  is satisfied exactly, and thus the material constraints are exactly

reproduced.

- The matrix  $M$  has a sparsity pattern similar to  $A$ , and thus computations can be performed in a fully parallel manner.
- The condition number of the  $(M^T B M)^{-1} M^T A M$  matrix is smaller than for the Laplace problem  $B^{-1} A$ .
- The eigensolution of the 2D Stokes spectrum converges exponentially in  $p$  as for conforming  $hp$  methods [5].
- The COOL method is valid for Cartesian and non-Cartesian geometries.

### **The COOL method for internally-constrained problems**

The strengths of the COOL method applied to problems with internal constraints are:

- There is no spectral pollution [8].
- The COOL method automatically adapts to the underlying physics and reproduces it correctly.
- The eigensolution of the 2D spectra converges exponentially in  $p$  as for conforming  $hp$  methods [5].
- The COOL method is valid for Cartesian and non-Cartesian geometries.
- The COOL method can be applied to the primal and to the dual variational form [2] without leading to spectral pollution.

### **The COOL method for time-dependent problems**

The strengths of the COOL method applied to time-dependent constraint problems are:

- Constraints are exactly satisfied.
- The number of variables is reduced to the number that the physics imposes.
- Using  $N^T$  as the transformation matrix, the overall matrix problem reduces in size and enables sparse matrix operations.
- The condition number of  $N^T A M$  is of the same order of magnitude as for the Laplace operator.
- Only physically relevant solutions are obtained, thus coupling to unphysical modes is impossible.

Given the generality of the COOL method and the numerous advantages it provides for the resolution of externally- and internally-constrained problems of both stationary and unsteady nature, it is foreseen that this method will find application to partial differential equations arising in a wide range of physical problems.

### **Acknowledgments**

Special thanks to Prof. Michel Deville for his very constructive remarks on the paper and to Prof. Ernest Mund for his help in the formulation of the COOL method.

## References

- [1] K. Appert, R. Gruber, F. Troyon, and J. Vaclavik, *Excitation of discrete Alfvén waves in tokamaks*, Plasma Phys. **24** (1982) 903-919.
- [2] D. Boffi, F. Brezzi, and L. Gastaldi, *On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form*, Math. Comp. **69** (1999) 121-140.
- [3] A. Bossavit, *Computational Electromagnetism*, (Academic Press, New York, 1998).
- [4] J. Descloux, M. Luskin, and J. Rappaz, *Approximation of the spectrum of closed operators: the determination of normal modes of a rotating basin*, Math. Comp. **36** (1981) 137-154.
- [5] M.O. Deville, P.F. Fischer, and E.H. Mund, *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [6] M.-C. Festeau-Barrioz and E.S. Weibel, *Large amplitude solutions of the nonlinear wave equation for an ideal, cold three-fluid plasma*, Comp. Phys. Comm. **27** (1982) 11-23.
- [7] V. Girault and P. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Series in Computational Mathematics, (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [8] R. Gruber and J. Rappaz, *Finite Element Methods in Linear Ideal MHD*, Springer Series in Computational Physics, (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [9] L.I.G. Kovasznay, *Laminar flow behind a two-dimensional grid*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **44**, (1948), 58-62.
- [10] E. Leriche and G. Labrosse, *Stokes eigenmodes in a square domain and the stream function-velocity correlation*, J. Comp. Phys., **200** (2004) 489-511.
- [11] H.K. Moffatt, *Viscous and resistive eddies near a sharp corner*, J. Fluid Mech. **18** (1964) 1-18.
- [12] F. Troyon, R. Gruber, H. Saurenmann, S. Semenzato, and S. Succi, *MHD limits to plasma confinement*, Plasma Phys. **26** (1983) 209-215.

# MÉTHODE D'ORDRE ÉLEVÉ POUR L'OPÉRATEUR $-\text{GRAD}(\text{DIV}(\cdot))$ ET APPLICATIONS.

## Résumé :

Dans cette thèse, nous avons apporté une contribution dans l'approximation de l'opérateur  $\text{grad}(\text{div})$  par des méthodes spectrales et des méthodes  $hp$  avec une extension aux techniques de décomposition de domaine. Dans un premier temps, nous avons proposé un élément spectral stable pour différents types de conditions limites. Cet élément spectral n'étant utilisable que pour des géométries simples et cartésiennes, nous avons alors proposé une nouvelle méthode permettant son extension aux géométries complexes, non cartésiennes et qui s'adapte aux contraintes physiques des problèmes traités. Ces contraintes peuvent être externes comme la contrainte d'incompressibilité que l'on retrouve dans le problème de Navier-Stokes ou bien internes, c'est à dire incluses dans la nature de l'opérateur. Des tests numériques portant sur la décomposition de Helmholtz et la résolution des équations de Navier-Stokes ont été réalisés afin de valider ce travail.

## Mots-clefs :

Méthode des éléments spectraux, Navier-Stokes, écoulements incompressibles, opérateur  $\text{grad}(\text{div})$ , problème aux valeurs propres, pollution spectrale, modes parasites, élément spectral stable.

# HIGH ORDER METHOD FOR THE $-\text{GRAD}(\text{DIV}(\cdot))$ OPERATOR AND APPLICATIONS.

## Abstract :

The purpose of this work was to contribute to the approximation of the  $\text{grad}(\text{div})$  operator by spectral methods and  $hp$  methods. Firstly, we have proposed a stable spectral element for several boundary conditions. This method is only efficient for simple and cartesian geometries. For non-cartesian geometries, we have proposed a new  $hp$  approach. This  $hp$  approach takes into account the underlying nature of the corresponding physical problem, avoids the generation of non-physical solutions and satisfies exactly the constraints. These constraints can be external constraints as the incompressibility constraint in the Navier-Stokes equations or internal constraints, such as occur for the  $\text{grad}(\text{div})$  operator. Results obtained by applying our new method to the  $\text{grad}(\text{div})$  operator, the Stokes problem, and the steady and unsteady Navier-Stokes equations are presented.

## Key-words :

Spectral element method, Navier-Stokes, incompressible flows, eigenvalue problem, spectral pollution, spurious modes.