

N° d'ordre : 3201

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

Par **Guillaume HUET**

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

**Fronts d'onde ultrasonores à la surface d'un milieu semi infini anisotrope :
théorie des rayons réels et complexes.**

Soutenue le 12 Juillet 2006

Après avis de :

M^{me} A.S. BONNET, Directeur de recherche CNRS, ENSTA
M. B. COLLET, Professeur, Université Paris VI

Rapporteurs

Devant la Commission d'examen formée de :

MM. J.C. BATSALE, Professeur, ENSAM
M. DESCHAMPS, Directeur de recherche CNRS, LMP
A. KISELEV, Professeur, Steklov Math Institute
O. PONCELET, Chargé de recherche CNRS, LMP

Président
Examineurs

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe Propagation Acoustique Ultrasons Laser du Laboratoire de Mécanique Physique de l'Université Bordeaux 1.

Je tiens à remercier Monsieur Didier Desjardins, Professeur de l'Université Bordeaux 1, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Madame Anne-Sophie Bonnet, Directeur de Recherche CNRS à l'ENSTA, ainsi qu'à Monsieur Bernard Collet, Professeur de l'Université Paris VI, pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes sincères remerciements à Monsieur Jean-Christophe Batsale, Professeur à l'ENSAM de Bordeaux, pour avoir présidé le jury de soutenance.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Aleksei Kiselev, Professeur au Steklov Math Institute, non seulement pour sa participation au jury de thèse mais aussi pour l'accueil qu'il m'a réservé lors de mon séjour à Saint-Petersbourg.

Je remercie très vivement Monsieur Marc Deschamps, Directeur de Recherche CNRS, pour son accueil au sein de l'équipe PAUL. Je le remercie pour avoir encadré mes travaux et s'être montré disponible tout au long de la thèse. Il m'a beaucoup apporté, tant au niveau scientifique qu'au niveau des rencontres qu'il m'a permis de réaliser au travers de plusieurs déplacements.

Je remercie le professeur Menglu Qian, Yongdong Pan, Clément Rossignol, Qian Cheng et Mathieu Perthon pour les résultats expérimentaux présentés dans cette thèse.

Ces années de thèse n'auraient pas été les mêmes sans la présence de trois personnes qui ont beaucoup compté pour moi. Je tiens ainsi à remercier Christophe Aristegui qui a mis en place un coaching de tout les instants d'une efficacité redoutable, « c'est clair », je le remercie pour l'ensemble de ses conseils ainsi que pour sa bienveillance, Olivier Poncelet pour l'aide qu'il m'a apportée en informatique et en connaissance des ondes ultrasonores, pour sa pédagogie, ses goûts musicaux et sa générosité, Alexander Shuvalov, pour son aide concernant les développements mathématiques, pour son extravagance, sa sagesse ainsi que son soutien.

Remerciements

Je remercie également toutes les personnes qui ont rendu les années passées au Laboratoire de Mécanique Physique les plus agréables possibles et tout particulièrement : Jérôme, Raynald, Cécile, Sylvain, Clément, Anis, Mathieu, Jérémy, Marion, Thomas (les deux), Ludovic, Stass, Mihai, Nicolai, Michel, Éric, Olivier, Jean-Pierre, Guillaume, Matthieu, Marie, Hinde, Céline, Sandrine, Cathy et Béatrice.

Pour finir je remercie ma famille et mes proches pour tout ce qu'ils m'apportent.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	9
- Chapitre I -	
Préliminaires.....	13
I.1 Introduction.....	15
I.2 Propagation d'ondes planes dans un milieu infini	15
I.3 Courbe des lenteurs de phase et vitesse de l'énergie des ondes planes de volume	17
I.3.1 Courbe des lenteurs de phase	17
I.3.2 Vitesse de l'énergie.....	18
I.3.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes planes de volume à partir de leur courbe des lenteurs de phase	20
I.4 Réponse impulsionnelle de la surface libre d'un demi espace anisotrope assujetti à une source ponctuelle à sa surface	23
I.4.1 Présentation du problème, expression de la fonction de Green	24
I.4.2 Calcul de la fonction de Green, à la surface d'un demi espace, par la méthode de Cagniard-de Hoop	26
I.4.3 Calcul de la fonction de Green, à la surface d'un demi espace, par décomposition en ondes planes transitoires et intégration numérique	34
I.5 Principe de Fermat	38
I.5.1 Principe de Fermat en optique	38
I.5.2 Principe de Fermat appliqué à l'évaluation de l'arrivée de fronts d'onde à la surface d'un milieu anisotrope.....	40
I.6 Conclusion	43
- Chapitre II -	
Rayons complexes appliqués aux ondes planes de volume.....	45
II.1 Introduction	47
II.2 Présentation du problème	47
II.3 Polynôme de Christoffel.....	48
II.3.1 Expression du polynôme de Christoffel	49
II.3.2 Solutions du polynôme de Christoffel paramétré en coordonnées polaires	52
II.4 Relations énergétiques.....	54
II.4.1 Énergie potentielle.....	54
II.4.2 Énergie cinétique	56
II.4.3 Relations énergétiques et célérité de l'énergie	56
II.5 Onde plane de volume homogène	57
II.5.1 Résolution du polynôme de Christoffel paramétré en coordonnées cartésiennes ..	57
II.5.2 Relation entre lenteurs de phase et de l'énergie, transposée à la géométrie de notre problème.....	58
II.5.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes rasantes homogènes	59
II.6 Onde plane de volume hétérogène.....	66
II.6.1 Onde hétérogène, bivecteur	66

II.6.2 Bilan énergétique	67
II.6.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes rasantes hétérogènes	69
II.7 Synthèse des résultats	72
II.8 Conclusion	74

- Chapitre III -

Rayons complexes appliqués aux ondes de Rayleigh	75
III.1 Introduction	77
III.2 Onde de Rayleigh	77
III.3 Polynôme de Rayleigh	79
III.3.1 Équation de Christoffel	80
III.3.2 Condition de surface libre	81
III.3.3 Expression du polynôme de Rayleigh	84
III.3.4 Solutions du polynôme de Rayleigh	87
III.4 Relations énergétiques	91
III.4.1 Énergie potentielle	92
III.4.2 Énergie cinétique	92
III.4.3 Relation entre la lenteur de phase et la partie réelle du vecteur de Poynting	93
III.5 Onde de Rayleigh homogène	94
III.5.1 Relation entre lenteur de phase et lenteur de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène	95
III.5.2 Polynôme de Rayleigh	97
III.5.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogènes	99
III.6 Onde de Rayleigh hétérogène	107
III.6.1 Relation entre la lenteur de phase et la direction de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène et de la pseudo onde de Rayleigh	107
III.6.2 Calcul des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène et de la pseudo onde de Rayleigh	109
III.7 Synthèse des résultats	119
III.8 Conclusion	121

- Chapitre IV -

Résultats expérimentaux	123
IV.1 Introduction	125
IV.2 Mode opératoire	125
IV.3 Résultats	126
IV.4 Conclusion	133
Conclusion	135
Bibliographie	137
Annexe A	143
Annexe B	149
Annexe C	157
Annexe D	161
Annexe E	163

Introduction

L'étude fondamentale des ondes ultrasonores a été initiée par Christoffel pour les ondes de volume [Christoffel (1877)] et par Rayleigh pour les ondes de surface [Rayleigh (1885)]. Les ondes de volume sont solution de l'équation du mouvement dans un milieu infini. Leurs caractéristiques sont uniquement dépendantes des propriétés du matériau au sein duquel elles se propagent et de leur direction de propagation. Cette relation directe fait de ces ondes un outil très efficace pour la caractérisation de matériau et pour l'imagerie des défauts de structures. L'étude des ondes de surface et plus particulièrement de l'onde de Rayleigh fut tout d'abord investie dans le cadre de la géophysique pour l'étude des séismes. La perspective de son utilisation dans des applications électroniques précéda ces recherches et elle est à présent utilisée dans de nombreux appareils de la vie courante. Cette onde qui se propage à l'interface d'un milieu est très rapidement atténuée dans sa profondeur et en revanche faiblement atténuée le long de sa surface. Elle peut donc parcourir de longues distances ce qui justifie son utilisation dans le contrôle non destructif de la surface de grandes structures.

La théorie des ondes planes, étudiée depuis de nombreuses années, est très efficace et souvent suffisante dans la résolution de problèmes d'acoustique linéaire. La propagation des ondes planes homogènes est bien connue pour un grand nombre de problèmes mettant en jeu différents types de milieux et de conditions limites. Ces ondes sont décrites par des lenteurs de phase réelles. Cependant ce concept est restrictif car il ne permet pas le traitement de phénomènes pour lesquels une décroissance spatiale de l'amplitude de l'onde plane intervient. Il a donc été généralisé par l'introduction des ondes planes hétérogènes qui sont caractérisées par des lenteurs de phase complexes. La propagation de ces ondes est donnée par la partie réelle de leur lenteur de phase et leur atténuation par la partie imaginaire. Ce formalisme permet de traiter de nouveaux problèmes tels que la propagation d'ondes planes dans un milieu dissipatif. Il convient de plus parfaitement à la description de l'onde de Rayleigh qui se propage à la surface d'un milieu et qui est atténuée dans sa profondeur.

Pour des milieux anisotropes, les fronts des ondes se propagent à la vitesse de l'énergie qui est différente de la vitesse de phase. Pour de tels milieux, ces fronts peuvent posséder des structures en forme de corne de croissant. Ce point a incité de nombreuses études que ce soit à travers le calcul et l'analyse de la surface des rayons acoustiques [Every (1981); Every et al. (1984)], par le calcul de la fonction de Green ou par l'analyse de la focalisation des phonons [Taylor et al. (1969); Maris (1970); Taylor et al. (1971); Hurley et Wolfe (1985); Sugawara et al. (2002)]. Aux extrémités de la corne apparaît une concentration du flux d'énergie induisant un effet dénommé diffraction interne. Il a pour conséquence la génération d'un front se propageant depuis la pointe de la corne. Des mesures expérimentales de fronts d'onde mettent

très clairement en évidence ces phénomènes [Every et al. (1990); Mourad et Castagnède (1993)].

À partir de la construction géométrique des rayons, il est possible de calculer la courbe des vitesses de l'énergie d'une onde. Elle repose sur la courbe des lenteurs de phase dont les normales donnent la direction du flux d'énergie. Cette méthode basée sur le concept des ondes planes homogènes ne décrit pas le phénomène de diffraction situé au niveau des cornes. Cependant une méthode de calcul des vitesses de l'énergie d'ondes planes hétérogènes est réalisable. Ces vitesses, pour le cas d'ondes planes rasantes, décrivent les fronts qui sont générés par diffraction [Deschamps et Poncelet (2002)]. L'objectif de cette thèse est de l'adapter aux ondes de Rayleigh.

Le chapitre 1 pose les notions nécessaires à la compréhension des deux chapitres suivants. Ainsi des résultats classiques sur la théorie des ondes planes sont tout d'abord présentés : leur équation de propagation dans un milieu infini, la définition de la vitesse de l'énergie ainsi qu'une méthode de calcul de cette dernière basée sur les propriétés de la courbe des lenteurs de phase. La réponse élastodynamique de la surface d'un milieu semi infini anisotrope soumise à une force impulsionnelle est ensuite introduite. Son calcul peut être réalisé à partir de la méthode de Cagniard-de Hoop. Cette méthode est décrite succinctement. Elle présente l'intérêt de donner une forme semi analytique de la réponse élastodynamique qui met en relief un critère caractérisant les temps d'arrivée des fronts de l'onde de Rayleigh. Ce critère est essentiel à la mise en place de la méthode amenant au calcul des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh présenté dans le troisième chapitre. Une méthode de calcul de la réponse élastodynamique basée sur la décomposition en ondes planes transitoires est décrite. Le résultat de son calcul est illustré. Il servira de comparaison aux résultats obtenus dans les chapitres 2 et 3. Finalement le principe de Fermat issu de l'optique est adapté au cadre de l'acoustique. Il généralise aux ondes de volume le critère caractérisant les temps d'arrivée des fronts de l'onde de Rayleigh présenté précédemment. Le principe de Fermat approché est également introduit. Tous deux sont utilisés dans les chapitres 2 et 3 pour calculer les vitesses de l'énergie des ondes de volume et de l'onde de Rayleigh.

Le second chapitre donne une méthode de calcul des vitesses de l'énergie des ondes de volume homogènes. Ces ondes sont décrites à partir des solutions de l'équation de Christoffel qui sont réelles. La méthode proposée consiste à appliquer le principe de Fermat pour calculer ces vitesses selon une direction de l'énergie fixée a priori. Cependant les résultats obtenus ne décrivent, pour un milieu anisotrope, que partiellement les phénomènes physiques observés expérimentalement. Des mesures expérimentales montrent en effet que les formes d'onde en corne de croissant sont prolongées par un front qui se propage par diffraction et qui n'est pas décrit par la théorie des rayons classique. La notion d'onde plane hétérogène est alors introduite. Une telle onde est décrite par une solution complexe du polynôme de Christoffel. Ses vitesses sont calculées en appliquant le principe de Fermat approché. Elles complètent

celles associées aux ondes homogènes pour donner une description plus complète des phénomènes physiques.

Le chapitre 3 reprend la méthode introduite dans le chapitre précédent pour l'onde de Rayleigh et la pseudo onde de Rayleigh. Les vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène sont calculées en appliquant le principe de Fermat. À l'instar des ondes de volume homogènes, les résultats ainsi obtenus ne décrivent pas les fronts d'onde générés par diffraction au niveau des cornes de la forme d'onde. Ces derniers sont donc calculés à partir des solutions complexes du polynôme de Rayleigh, qui définissent l'onde de Rayleigh hétérogène, par application du principe de Fermat approché. La pseudo onde de Rayleigh, par nature hétérogène, est traitée comme l'onde de Rayleigh hétérogène.

Le chapitre 4 présente les résultats de mesures expérimentales du déplacement vertical de la surface d'un mono cristal de cuivre généré par une source LASER appliquée à sa surface. Ces résultats qui mettent clairement en évidence les fronts d'onde diffractés sont comparés à ceux obtenus dans les chapitres précédents.

- Chapitre I -

Préliminaires

I.1 Introduction.....	15
I.2 Propagation d'ondes planes dans un milieu infini.....	15
I.3 Courbe des lenteurs de phase et vitesse de l'énergie des ondes planes de volume.....	17
I.3.1 Courbe des lenteurs de phase	17
I.3.2 Vitesse de l'énergie.....	18
I.3.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes planes de volume à partir de leur courbe des lenteurs de phase	20
I.4 Réponse impulsionnelle de la surface libre d'un demi espace anisotrope assujetti à une source ponctuelle à sa surface	23
I.4.1 Présentation du problème, expression de la fonction de Green	24
I.4.2 Calcul de la fonction de Green, à la surface d'un demi espace, par la méthode de Cagniard-de Hoop	26
I.4.3 Calcul de la fonction de Green, à la surface d'un demi espace, par décomposition en ondes planes transitoires et intégration numérique	34
I.5 Principe de Fermat	38
I.5.1 Principe de Fermat en optique	38
I.5.2 Principe de Fermat appliqué à l'évaluation de l'arrivée de fronts d'onde à la surface d'un milieu anisotrope.....	40
I.6 Conclusion	43

I.1 Introduction

Ce chapitre introduit des résultats nécessaires à la compréhension des deux chapitres suivants. Dans la première partie, les solutions en onde plane de volume de l'équation du mouvement pour un milieu anisotrope infini sont décrites. Ces ondes sont caractérisées par leur courbe des lenteurs de phase qui contrairement à la courbe des vitesses de phase présente l'intérêt de donner directement la direction de transport de l'énergie. La seconde partie présente la fonction de Green. Une description succincte de la méthode de Cagniard-de Hoop introduit un critère de caractérisation des fronts de l'onde de Rayleigh. Puis un calcul de cette fonction reposant sur la méthode de décomposition en ondes planes transitoires est décrite. Les résultats obtenus pour le cas d'un mono cristal de cuivre seront par la suite comparés aux résultats obtenus aux chapitres 2 et 3. La dernière partie généralise la caractérisation d'arrivée des fronts d'onde aux ondes planes de volume par l'introduction du principe de Fermat issu de l'optique et adapté ici à l'acoustique.

I.2 Propagation d'ondes planes dans un milieu infini

Un milieu continu élastique anisotrope non viscoélastique infini repéré par un système d'axes orthonormés $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ est considéré. Un ébranlement le traversant entraîne le déplacement de particules qui le composent autour de leur position d'équilibre. Le déplacement dans la direction du vecteur \mathbf{x}_i , u_i , de chaque point du solide de coordonnées $\mathbf{M} = (x_1, x_2, x_3)$ varie en fonction du temps t :

$$u_i = u_i(\mathbf{M}, t). \quad (1.1)$$

Sa dérivée partielle par rapport à la variable temps conduit à la vitesse particulière dont les composantes sont :

$$v_i = v_i(\mathbf{M}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Dans le cas où aucun effort extérieur ni aucune source excitatrice ne sont exercés sur le solide, l'expression de l'équation du mouvement résultant de la loi fondamentale de la dynamique est donnée par :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.3)$$

où ρ est la densité du solide et σ_{ij} représente les composantes du tenseur des contraintes, tenseur de rang 2. Les composantes du tenseur des déformations ε_{ij} sont définies par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.4)$$

Dans l'hypothèse des petites déformations, le comportement interne d'un solide élastique est décrit par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.5)$$

Elle relie le tenseur des contraintes à celui des déformations par l'intermédiaire du tenseur de rang 4 des rigidités élastiques dont les composantes sont notées c_{ijkl} . Dans ces équations et dans tout ce travail, la convention d'Einstein pour la répétition des indices est utilisée avec $i, j, k, l = (1, 2, 3)$. Le couplage des équations (1.4) et (1.5) ainsi que la symétrie du tenseur des rigidités sur les indices k et l , $c_{ijkl} = c_{ijlk}$, conduisent à l'expression du tenseur des contraintes en fonction du déplacement suivante :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (1.6)$$

En tenant compte de cette nouvelle expression et de l'équation (1.3), l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (1.7)$$

Elle correspond à un système de trois équations différentielles du second ordre dont une solution exprimée sous la forme d'une onde plane progressive est :

$$u_i = A P_i e^{i\omega(t - S_j x_j)}. \quad (1.8)$$

Dans cette expression la grandeur scalaire A et le vecteur unitaire polarisation \mathbf{P} représentent respectivement l'amplitude et la direction du déplacement de la particule. La pulsation ω est égale à $2\pi f$ où f est la fréquence de l'onde. Le vecteur lenteur de phase \mathbf{S} correspond à l'inverse de la vitesse à laquelle doit se déplacer un observateur pour voir la vibration dans le même état de phase : $\omega(t - S_j x_j) = c^{te}$. En introduisant le vecteur unitaire normal au plan de phase, $\mathbf{n}_\theta = (n_1, n_2, n_3)$, les composantes de la lenteur de phase sont égales à : $S_j = S n_j$ où S représente le module de cette lenteur. Le report de l'expression (1.8) dans l'équation (1.7) conduit alors à l'équation de Christoffel :

$$\Gamma_{il} P_l = \frac{\rho}{S^2} P_i, \quad (1.9)$$

où $\Gamma_{il} = c_{ijkl} n_j n_k$ sont les composantes de la matrice de Christoffel. Les grandeurs ρ/S^2 et \mathbf{P} sont respectivement valeur propre et vecteur propre de la matrice $\mathbf{\Gamma}$. Pour une direction \mathbf{n}_θ , trois lenteurs de phase sont solution de l'équation :

$$\left| \Gamma - \frac{\rho}{S^2} \mathbf{I} \right| = 0, \quad (1.10)$$

dans laquelle le symbole $|\cdot|$ et la matrice \mathbf{I} représentent le déterminant et la matrice identité. Cette équation exprime la condition de compatibilité des trois équations homogènes (1.9). La matrice Γ est symétrique, ses valeurs propres sont donc positives et ses vecteurs propres orthogonaux. Parmi les trois ondes planes vérifiant l'équation (1.10), celle dont la polarisation est la plus proche du vecteur \mathbf{n}_θ est l'onde quasi-longitudinale notée L . Les deux autres sont les ondes quasi-transversales notées TV pour transversale à polarisation verticale et TH pour transversale à polarisation horizontale. Ces notations prendront un sens dans le chapitre suivant dans lequel on considèrera des ondes de volume se propageant parallèlement à une interface. Les polarisations des ondes TV et TH seront alors l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à cette interface.

I.3 Courbe des lenteurs de phase et vitesse de l'énergie des ondes planes de volume

I.3.1 Courbe des lenteurs de phase

La surface des lenteurs de phase est le lieu, tracé à partir d'une origine, lorsque la direction de propagation varie, de l'extrémité du vecteur lenteur de phase. Elle est calculée en résolvant l'équation (1.10) pour différentes directions de propagation \mathbf{n}_θ . Dans le cas d'un milieu isotrope dont les propriétés sont invariantes quelque soit la direction de propagation, ces surfaces sont des sphères. Elles prennent des formes plus complexes pour un milieu anisotrope. La surface des lenteurs de phase du mode TH , pour le cas d'un mono cristal de cuivre dont la symétrie est cubique, est représentée à la figure I-1.

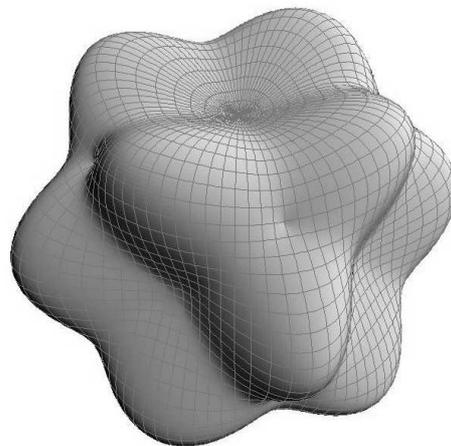


figure I-1 Surface des lenteurs de phase du mode TH d'un mono cristal de cuivre.

Des courbes des lenteurs de phase sont présentées en abondance dans le livre de Musgrave [Musgrave (1970)] et des surfaces des lenteurs de phase peuvent être trouvées aux références [Abbudi et Barnett (1991); Gundersen (1991); Wang (1992)]. Cette surface présente l'intérêt de fournir la vitesse de phase mais surtout la direction du transport de l'énergie car la vitesse de l'énergie est en tout point normale à cette surface [Auld (1973); Dieulesaint et Royer (1974)].

I.3.2 Vitesse de l'énergie

Afin d'introduire les notions nécessaires à la définition de la vitesse de l'énergie, la loi de conservation de l'énergie est tout d'abord présentée. Son expression locale, en tout point du solide est :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(e_c + e_p) + \frac{\partial J_i}{\partial x_i}. \quad (1.11)$$

Le premier terme est la dérivée par rapport au temps du travail des forces mécaniques définie par :

$$w = f_i u_i, \quad (1.12)$$

où f_i représente la densité des forces appliquées. Le deuxième et le troisième terme expriment la variation par rapport au temps de la densité d'énergie cinétique e_c et de la densité d'énergie potentielle e_p par unité de volume. En introduisant l'exposant barre représentant le conjugué d'une grandeur complexe, l'expression de ces deux densités d'énergie est :

$$e_c = \frac{1}{2} \rho v_i \bar{v}_i \quad \text{et} \quad e_p = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}. \quad (1.13)$$

Le dernier terme est la divergence du vecteur de Poynting instantané \mathbf{J} défini par :

$$J_i = -\sigma_{ij} \bar{v}_j. \quad (1.14)$$

En désignant respectivement par :

$$W = \int_V w dV, \quad E_c = \int_V e_c dV \quad \text{et} \quad E_p = \int_V e_p dV,$$

le travail des sources, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle contenus dans un volume V de matière, l'expression de la conservation de l'énergie au sein de ce volume est :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(E_c + E_p) + \int_{\Sigma} J_i l_i d\Sigma. \quad (1.15)$$

Le dernier terme est obtenu en appliquant la formule de Green-Ostrogradski après intégration sur le volume de la divergence du vecteur de Poynting. Σ est la surface limitant le volume V et les grandeurs l_i sont les composantes du vecteur unitaire normale à cette surface. La

relation (1.15) met en évidence que la puissance due aux forces extérieures est partiellement emmagasinée par le volume sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle, partiellement rayonnée vers l'extérieur. La puissance rayonnée correspond au flux du vecteur de Poynting à travers la surface Σ .

Le problème considéré ne tient compte d'aucun effort extérieur ni d'aucune source excitatrice, le travail des forces appliquées est donc nul. La relation (1.15) peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = - \int_{\Sigma} J_i l_i d\Sigma. \quad (1.16)$$

Le volume de matière considéré est au repos jusqu'à l'arrivée d'une perturbation brisant son équilibre. La dérivée temporelle de l'énergie mécanique n'est plus alors nulle entraînant une dissipation d'énergie vers l'extérieur du volume. Le passage d'un ébranlement dans un solide s'accompagne donc d'un transport de l'énergie. La célérité de l'énergie associée représente la distance parcourue par l'énergie élastique pendant l'unité de temps. En introduisant la notation $\langle (\cdot) \rangle$ représentant la moyenne temporelle définie par :

$$\langle (\cdot) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt, \quad (1.17)$$

où T désigne la période, cette vitesse est par définition égale au rapport de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting par la moyenne temporelle de la densité d'énergie volumique du matériau [Hayes (1977)] :

$$\mathbf{c}_e = \frac{\langle \mathbf{J} \rangle}{\langle e_c + e_p \rangle}. \quad (1.18)$$

Les densités d'énergie e_c et e_p sont des grandeurs réelles correspondant au produit de deux sinusoides de même pulsation. Leur moyenne temporelle satisfait les relations [Dieulesaint et Royer (1974)] :

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{4} \rho v_i \bar{v}_i, \quad (1.19)$$

et :

$$\langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}. \quad (1.20)$$

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donnée par la relation [Auld (1973)] :

$$\langle J_i \rangle = -\frac{1}{2} \sigma_{ij} \bar{v}_j. \quad (1.21)$$

Un paquet d'ondes se déplaçant dans la direction \mathbf{n}_θ , a un champ de déplacement de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \mathbf{P}(k) e^{i(\omega t - k \mathbf{n}_\theta \cdot \mathbf{M})} dk . \quad (1.22)$$

Dans cette expression, le vecteur $\mathbf{k} = k \mathbf{n}_\theta$ est le nombre d'onde. Ce paquet d'ondes est une somme infinie d'ondes balayant pour une direction de phase donnée l'ensemble des nombres d'onde. La contribution de chacune de ces ondes dépend de leurs amplitudes elles-mêmes fonction du nombre d'onde. La vitesse de transport de l'énergie de ce paquet d'ondes est définie par la vitesse de groupe dont l'expression est :

$$\mathbf{c}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} . \quad (1.23)$$

Dans le cas d'une onde plane monochromatique non dispersive (il existe une relation linéaire entre le nombre d'onde et la pulsation) et en l'absence de dissipation, la vitesse de l'énergie et la vitesse de groupe sont égales [Zil'bergleit et Kopilevich (1980)]. En présence de dispersion qui s'exprime par une relation non linéaire entre le nombre d'onde et la pulsation, la relation (1.23) est non triviale. Ceci ne concerne pas notre propos et nous considérerons une onde plane non dispersive caractérisée par la relation $\mathbf{k} = \omega \mathbf{S}$. La dissipation peut s'exprimer sous deux formes : par un milieu absorbant ou par des ondes atténuées. Le premier cas est appliqué en prenant en compte des constantes de rigidité complexes ce qui ne sera pas le cas de notre problème. Le second fait intervenir un nombre d'onde, ou une lenteur de phase, complexes. On parle alors d'onde hétérogène dont l'amplitude est atténuée par la partie imaginaire de l'une des deux grandeurs précitées. Ce cas de figure sera traité dans les deux chapitres suivants et la vitesse du transport de l'énergie de ce type d'ondes y sera alors discutée.

I.3.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes planes de volume à partir de leur courbe des lenteurs de phase

Le calcul des célérités de l'énergie des ondes planes de volume, basé sur la construction géométrique des rayons, à partir des propriétés des courbes de lenteurs de phase est présenté. Ces courbes sont obtenues en prenant l'intersection d'une surface des lenteurs de phase décrite à la section I.3.1 avec le plan de propagation de l'onde. Afin de fixer les idées, un exemple est donné pour une onde *TH* se propageant au sein d'un mono cristal de cuivre parallèlement au plan repéré par les vecteurs unitaires $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. L'équation (1.10) qui dépend de la direction de phase, ici $\mathbf{n}_\theta = (0, \cos(\theta), \sin(\theta))$ et de la norme de la lenteur S , est notée $\Omega(S_2, S_3) = 0$, avec $S_2 = S \cos(\theta)$ et $S_3 = S \sin(\theta)$. La vitesse de l'énergie est en tout point normale à la courbe des lenteurs de phase. Sa direction \mathbf{n}_φ peut ainsi être exprimée en fonction des composantes de la dérivée de l'équation Ω par rapport à la variable lenteur de phase \mathbf{S} :

$$\mathbf{n}_\varphi = \left(0, -\frac{\partial\Omega}{\partial S_3}, \frac{\partial\Omega}{\partial S_2} \right), \quad (1.24)$$

et l'angle φ que fait le vecteur vitesse de l'énergie avec l'axe x_2 est égal à :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S_3} / \frac{\partial\Omega}{\partial S_2}\right). \quad (1.25)$$

De plus la projection de la lenteur de phase sur la direction de l'énergie correspond à la norme de la lenteur de l'énergie :

$$S_e = S \cos(\theta - \varphi). \quad (1.26)$$

La norme de la vitesse de l'énergie est alors obtenue en prenant l'inverse de cette grandeur :

$$c_e = \frac{1}{S_e}. \quad (1.27)$$

La figure I-2 représente la courbe des lenteurs de phase de l'onde transversale d'un mono cristal de cuivre dont la polarisation est dans le plan de phase $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Pour chaque direction de propagation \mathbf{n}_θ d'une onde plane correspond une direction de propagation de l'énergie suivant \mathbf{n}_φ . La figure I-3 décrit la courbe des vitesses de l'énergie associée à la courbe des lenteurs de phase. On constate que pour une direction de l'énergie peuvent correspondre plusieurs vitesses de l'énergie. Ceci est dû à l'anisotropie du matériau qui rend la courbe des lenteurs de phase concave. Ainsi en différents points de cette courbe les normales peuvent être orientées selon une même direction. On dit alors que la courbe des vitesses de l'énergie, également appelée courbe d'onde, est en forme de corne de croissant. La pointe d'une corne correspond à un point d'inflexion de la courbe des lenteurs de phase.

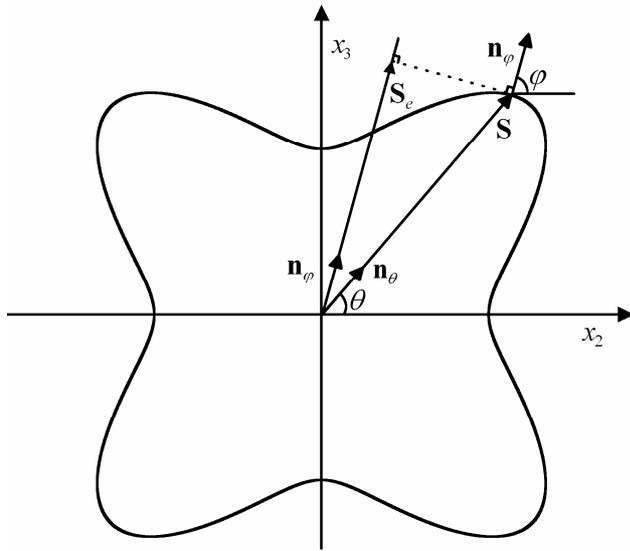


figure I-2 Courbe des lenteurs de phase de l'onde TH se propageant dans le plan (1,0,0) d'un mono cristal de cuivre.

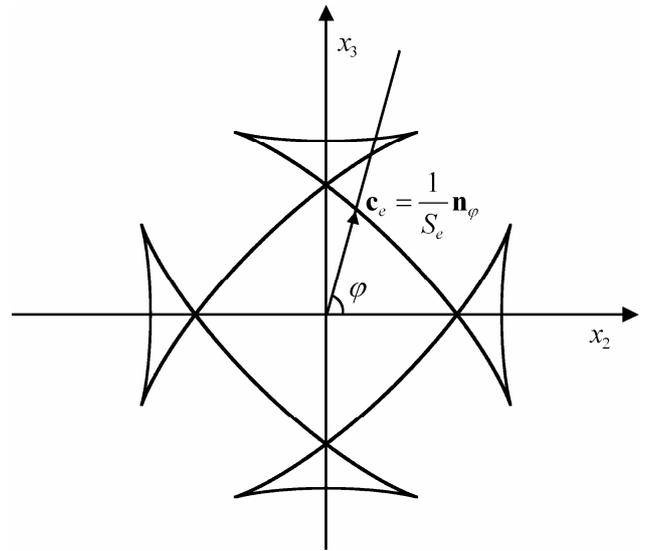


figure I-3 Courbe des vitesses de l'énergie de l'onde TH se propageant dans le plan (1,0,0) d'un mono cristal de cuivre.

Cette construction géométrique des rayons acoustiques met en évidence la focalisation des ondes acoustiques dénommée dans la littérature focalisation des phonons ou concentration de phonons. Pour un milieu anisotrope, l'existence de cornes sur la courbe des vitesses de l'énergie implique une focalisation des rayons. Afin de décrire cette focalisation, la distribution angulaire des rayons acoustiques pour une distribution équi-répartie de lenteurs de phase est illustrée à la figure I-4.

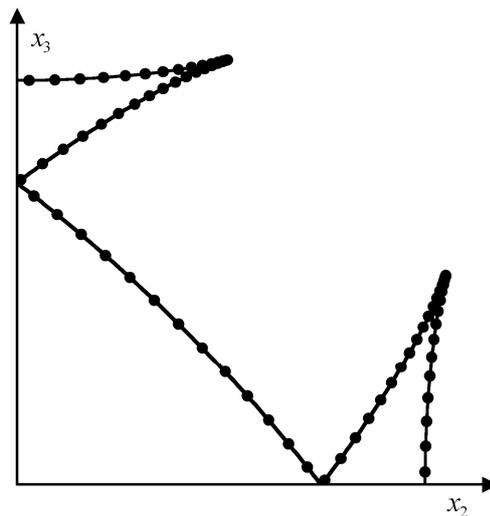


figure I-4 Illustration de la concentration de l'énergie au niveau des cornes de la forme d'onde.

Sur cette figure, chaque point de la courbe des rayons correspond au calcul de la vitesse de l'énergie associée à une lenteur de phase pour une distribution angulaire équi-répartie des lenteurs de phase. On y observe la concentration des rayons au niveau des cornes donnée par la concentration de points sur la courbe. Cette concentration de rayons peut également être interprétée comme une concentration d'énergie.

Dans la section qui suit, des méthodes de description du déplacement de la surface d'un milieu semi infini soumise à une force impulsionnelle ponctuelle de type LASER sont présentées.

I.4 Réponse impulsionnelle de la surface libre d'un demi espace anisotrope assujetti à une source ponctuelle à sa surface

La génération LASER a fait l'objet de nombreux travaux cherchant à modéliser la source acoustique consécutive aux interactions photoacoustiques. Une impulsion lumineuse focalisée en un point de la surface libre d'un solide engendre des ondes acoustiques suivant deux régimes prépondérants : le régime thermoélastique et le régime d'ablation. Pour ce premier, le LASER pulsé de faible intensité chauffe localement la surface du milieu et engendre une déformation mécanique. La source acoustique du régime thermoélastique se déduit de la résolution de l'équation de la chaleur couplée avec l'équation d'onde. Le régime d'ablation est théoriquement plus difficilement modélisable. Lorsque la densité de puissance lumineuse absorbée est plus élevée, le faisceau lumineux provoque la fusion puis l'ablation d'une petite quantité de matière. La quantité de mouvement des particules éjectées crée dans la zone irradiée une force réactive normale à la surface du milieu. La forme temporelle de la source est alors proche d'une fonction de Dirac. La source acoustique pour le régime d'ablation peut donc être modélisée par un monopole et une fonction temporelle de Dirac.

L'étude de la propagation des ondes acoustiques générées par ce type de source amène logiquement à l'analyse des fonctions de Green [Achenbach (1973); Aki et Richards (1980)]. Les méthodes de calcul des fonctions de Green font appel à des techniques employées par les géophysiciens sismologistes [Johnson (1974); Keith et Crampin (1977); Aki et Richards (1980)]. Diverses investigations ont été présentées pour résoudre ce problème classique de Lamb [Lamb (1904)] afin de calculer le champ de déplacement à l'intérieur d'un demi-espace élastique isotrope ou anisotrope assujetti à une source rectiligne ou ponctuelle [Pekeris et Lipson (1957); Tewary et Fortunko (1992); Mourad et Deschamps (1995)].

Dans cette section l'expression de la fonction de Green correspondant au cas d'un milieu semi infini impacté à sa surface par une source ponctuelle impulsionnelle est introduite. Les expressions analytiques du déplacement normal de la surface, solution de ce problème et

calculé par la méthode de Cagniard-de Hoop, sont par la suite présentées. Ces résultats sont tirés de la thèse de Bescond [Bescond (1997)] et leur calcul n'est pas développé. Enfin une méthode numérique conduisant au calcul du déplacement normal en un point de la surface est décrite.

I.4.1 Présentation du problème, expression de la fonction de Green

Un milieu continu élastique anisotrope non absorbant occupant le demi-espace $x_1 \geq 0$ est impacté par une source appliquée à sa surface. Le vide est considéré pour $x_1 < 0$. Le trièdre de référence $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ est celui de la figure I-5, où le vecteur \mathbf{x}_1 est normal à la surface libre et dirigé vers le solide. La source considérée est ponctuelle et perpendiculaire à la surface du milieu.

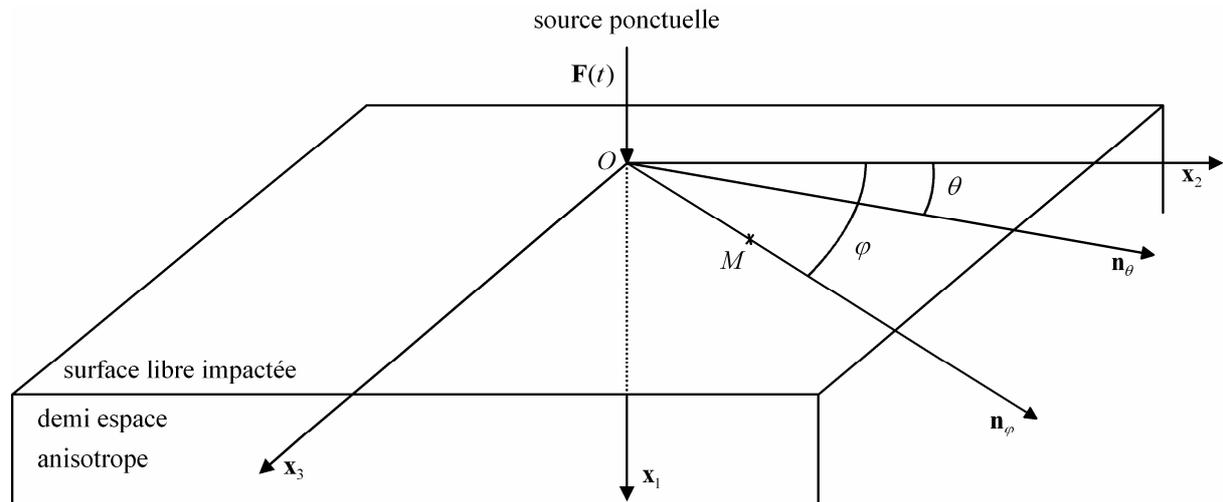


figure I-5 Géométrie du problème.

Le champ de déplacement \mathbf{u} , en tout point du demi-espace, satisfait le système d'équations comportant l'équation homogène de propagation dans un milieu anisotrope, l'équation inhomogène de continuité à l'interface, le principe de causalité et les conditions de Sommerfeld. Ces équations sont respectivement :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}, \quad (1.28)$$

$$c_{i1kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = -F_i \delta(x_2, x_3) \delta(t) \quad \text{pour } \begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall (x_2, x_3, t) \end{cases}, \quad (1.29)$$

$$u_i = 0, \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad \text{pour } t \leq 0 \quad \text{et} \quad (1.30)$$

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) = 0. \quad (1.31)$$

D'un point de vue général, la fonction de Green est la solution d'un problème différentiel ayant pour second membre une distribution de Dirac. Dans le cas d'un problème d'élastodynamique, elle décrit la réponse d'un système soumis à une source ponctuelle. Cette fonction, exprimée dans l'espace des transformées, solution des équations différentielles précédentes est un vecteur noté \mathbf{G} . La $i^{\text{ème}}$ composante de la solution du problème considéré ici est alors résolue en appliquant à cette fonction une double transformée de Fourier inverse sur les variables d'espace et une transformée de Laplace inverse sur la variable temporelle :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega, k_2, k_3) e^{i(\omega t - k_2 x_2 - k_3 x_3)} dk_2 dk_3 d\omega. \quad (1.32)$$

La fonction $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, solution de notre problème, est la fonction de Green dans l'espace des temps et des distances. La fonction $G_i(\omega, k_2, k_3)$ est de la forme :

$$G_i(\omega, k_2, k_3) = \sum_{n=1}^3 A_n P_i(\omega, k_1^{(n)}) e^{-ik_1^{(n)} x_1}. \quad (1.33)$$

Pour un champ de déplacement calculé en un point de la surface, c'est-à-dire pour $x_1 = 0$, la fonction de Green a pour expression :

$$G_i(\omega, k_2, k_3) = \sum_{n=1}^3 A_n P_i(\omega, k_1^{(n)}). \quad (1.34)$$

Seul ce cas sera traité dans les deux sections suivantes. On observe dans les expressions (1.33) et (1.34) une sommation sur les trois modes propres indiqués par l'indice n . Les grandeurs P_i et k_1 représentent respectivement la composante suivant \mathbf{x}_i de la polarisation et celle selon \mathbf{x}_1 du nombre d'onde. Les amplitudes A_n proviennent de la résolution de l'équation inhomogène (1.29) qui s'exprime dans l'espace des transformées pour une source normale à l'interface par :

$$[\mathbf{M}] \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Cette matrice carrée de dimension (3×3) est définie par :

$$[\mathbf{M}] = -i[\mathbf{M}_k], \quad (1.36)$$

avec :

$$[\mathbf{M}_k] = \begin{bmatrix} \alpha(\omega, k_1^{(1)}) & \alpha(\omega, k_1^{(2)}) & \alpha(\omega, k_1^{(3)}) \\ \lambda(\omega, k_1^{(1)}) & \lambda(\omega, k_1^{(2)}) & \lambda(\omega, k_1^{(3)}) \\ \mu(\omega, k_1^{(1)}) & \mu(\omega, k_1^{(2)}) & \mu(\omega, k_1^{(3)}) \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

et :

$$\begin{cases} \alpha(\omega, k_1^{(n)}) = c_{11} k_1^{(n)} P_1(\omega, k_1^{(n)}) + c_{12} k_2 P_2(\omega, k_1^{(n)}) + c_{13} k_3 P_3(\omega, k_1^{(n)}) \\ \lambda(\omega, k_1^{(n)}) = c_{66} (k_2 P_1(\omega, k_1^{(n)}) + k_1^{(n)} P_2(\omega, k_1^{(n)})) \\ \mu(\omega, k_1^{(n)}) = c_{55} (k_3 P_1(\omega, k_1^{(n)}) + k_1^{(n)} P_3(\omega, k_1^{(n)})) \end{cases}. \quad (1.38)$$

La solution du système de Cramer (1.35) est :

$$A_n(\omega, k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, k_1^{(3)}) = i \frac{N_n(\omega, k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, k_1^{(3)})}{R(\omega, k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, k_1^{(3)})}, \quad (1.39)$$

où la fonction $R(\omega, k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, k_1^{(3)})$, qui est le déterminant de la matrice $[\mathbf{M}_k]$, est la fonction de Rayleigh qui assure la condition d'existence de modes propres de propagation sur une surface libre. Les fonctions $N_n(\omega, k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, k_1^{(3)})$ sont les déterminants de la matrice $[\mathbf{M}_k]$ lorsque sa $n^{\text{ième}}$ colonne est remplacée par le vecteur source.

Dans chacune des deux sections suivantes, une méthode de calcul de la fonction de Green est présentée. La première fait appel à la méthode de Cagniard-de Hoop et propose un résultat semi analytique de la réponse. La seconde est une évaluation de la réponse calculée à partir d'intégrations numériques.

I.4.2 Calcul de la fonction de Green, à la surface d'un demi espace, par la méthode de Cagniard-de Hoop

Le problème considéré est celui de la section précédente, équations (1.28) à (1.31). L'expression de la composante normale de la fonction de Green, évaluée à la surface du matériau, obtenue par la méthode de Cagniard-de Hoop [Bescond (1997); Bescond et Deschamps (1998)] est présentée. L'intérêt de cette méthode est de proposer une expression semi analytique de cette fonction mettant en évidence les termes décrivant les temps d'arrivée des différents fronts d'onde.

Les calculs opérés dans la méthode de Cagniard-de Hoop prennent en compte les propriétés d'intégration dans le plan complexe. Afin d'effectuer les calculs de l'équation (1.32) dans ce plan, les changements de variables suivants sont appliqués :

$$k_1^{(n)} = -i \omega \eta_n, \quad k_2 = -i \omega S_{\parallel} \cos(\theta) \quad \text{et} \quad k_3 = -i \omega S_{\parallel} \sin(\theta), \quad (1.40)$$

les paramètres de Laplace et de Fourier sont alors définis par :

$$t \rightarrow i\omega, \quad x_2 \rightarrow -i\omega S_{\parallel} \cos(\theta) \quad \text{et} \quad x_3 \rightarrow -i\omega S_{\parallel} \sin(\theta). \quad (1.41)$$

L'angle θ est défini à la figure I-5 et la grandeur S_{\parallel} représente la composante de la lenteur de phase à l'interface. Ainsi à partir de ces changements de variables appliqués à l'équation (1.32), la composante normale du champ de déplacement se met sous la forme :

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\int_0^{+i\infty} + \int_0^{-i\infty} \right) \tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega) e^{\omega(t - S_{\parallel} r \cos(\theta - \varphi))} S_{\parallel} dS_{\parallel} d\theta d\omega, \quad (1.42)$$

où :

$$\tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega) = \omega^2 \sum_{n=1}^3 A_n(S_{\parallel}, \theta, \omega) P_1(\eta_n) e^{-\omega \eta_n x_1} \quad (1.43)$$

est la composante normale de la fonction de Green dans l'espace des transformées. La grandeur η_n représente la composante de la lenteur de phase dans la direction du vecteur \mathbf{x}_1 du $n^{\text{ème}}$ mode propre. La fonction de Green étant évaluée à la surface du matériau ($x_1 = 0$), l'exponentiel de l'expression (1.43) disparaît. Les amplitudes sont calculées à partir de la matrice $[\mathbf{M}]$ exprimée en fonction de la lenteur de phase par le changement de variable $\mathbf{k} = -i\omega \mathbf{S}$. Elles sont solution du système (1.35).

La méthode de Cagniard-de Hoop ne peut être utilisable que si l'intégrand de l'équation (1.42), $\tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega)$, est indépendant de la variable ω . Pour cela, il est important de noter que les composantes de la matrice $[\mathbf{M}]$ sont proportionnelles à $-\omega$:

$$[\mathbf{M}] = -\omega [\mathbf{M}_S], \quad (1.44)$$

avec :

$$[\mathbf{M}_S] = \begin{bmatrix} \alpha(\eta_1) & \alpha(\eta_2) & \alpha(\eta_3) \\ \lambda(\eta_1) & \lambda(\eta_2) & \lambda(\eta_3) \\ \mu(\eta_1) & \mu(\eta_2) & \mu(\eta_3) \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

et :

$$\begin{cases} \alpha(\eta_n) = c_{11} \eta_n P_1(\eta_n) + c_{12} S_2 P_2(\eta_n) + c_{13} S_3 P_3(\eta_n) \\ \lambda(\eta_n) = c_{66} (S_2 P_1(\eta_n) + \eta_n P_2(\eta_n)) \\ \mu(\eta_n) = c_{55} (S_3 P_1(\eta_n) + \eta_n P_3(\eta_n)) \end{cases} \quad (1.46)$$

En conséquence, puisque la composante de force F est constante, les amplitudes solutions du système (1.35) sont inversement proportionnelles à $-\omega$. Elles prennent alors la forme : $A_n(S_{\parallel}, \theta, \omega) = -B_n(S_{\parallel}, \theta) / \omega$. Le spectre introduit en (1.42) est donc une fonction linéaire de la fréquence et il s'exprime par :

$$\tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega) = -\omega \tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta), \quad (1.47)$$

où :

$$\tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{n=1}^3 B_n(S_{\parallel}, \theta) P_1(\eta_n). \quad (1.48)$$

Le terme de phase de l'exponentielle apparaissant dans l'équation (1.42) est : $\omega(t - S_{\parallel} r \cos(\theta - \varphi))$. Le théorème de dérivation des transformées de Laplace montre alors que dans ce cas précis, dériver par rapport au temps revient à multiplier par ω . Le champ de déplacement est donc relié à la dérivée temporelle de la fonction $U_1(x_1, x_2, t)$ par :

$$u_1(x_1, x_2, t) = -\frac{dU_1(x_1, x_2, t)}{dt}, \quad (1.49)$$

avec :

$$U_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) e^{\omega(t - S_{\parallel} r \cos(\theta - \varphi))} S_{\parallel} dS_{\parallel} d\theta d\omega. \quad (1.50)$$

L'intégrant de l'expression (1.50), $\tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta)$, est indépendant du paramètre ω . La méthode de Cagniard-de Hoop est donc applicable. Le spectre en fréquence est défini par :

$$\hat{U}_1(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) e^{-\omega S_{\parallel} r \cos(\theta - \varphi)} S_{\parallel} dS_{\parallel} d\theta, \quad (1.51)$$

avec :

$$U_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{U}_1(x_1, x_2, \omega) e^{\omega t} d\omega. \quad (1.52)$$

La méthode de Cagniard-de Hoop donne par simple identification l'original de la forme intégrale (1.51) si le noyau de l'exponentielle est égal à l'argument de la transformée de Laplace. Ceci est effectué à l'aide d'un changement de variable introduit par de Hoop [de Hoop (1960)] et défini par :

$$S_{\parallel} = \frac{t}{r \cos(\theta - \varphi)}. \quad (1.53)$$

L'intégration sur la variable S_{\parallel} prend en compte des considérations d'intégration dans le plan complexe. En passant les détails de calcul, le résultat final se présente sous la forme d'une somme de trois fonctions :

$$U_1(\mathbf{M}, t) = U_{vp}(\mathbf{M}, t) + U_s(\mathbf{M}, t) + U_R(\mathbf{M}, t). \quad (1.54)$$

La fonction $U_1(\mathbf{M}, t)$ représente l'intégration par rapport au temps du champ de déplacement normal de la surface. Pour un point d'observation donné, la surface se déforme au cours du temps à chaque arrivée d'ondes générées par la source. Pour ces temps d'arrivée, la fonction

U_1 présente un pic infini ou une discontinuité et il en est de même pour sa dérivée temporelle. Les trois fonctions de la relation (1.54) sont maintenant exprimées et leur contribution dans la réponse finale est explicitée. La fonction U_{vp} :

$$U_{vp}(\mathbf{M}, t) = -\frac{1}{2\pi^2} \text{V.P.} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \text{Re} \left(\tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) S_{\parallel} \frac{dS_{\parallel}}{dt} \Big|_{S_{\parallel} = \frac{t}{r \cos(\theta - \varphi)}} \right) d\theta \quad (1.55)$$

décrit l'arrivée des fronts des ondes rasantes. Elles correspondent à des ondes de volume qui rasant la surface. L'intégrale sur θ dans l'équation (1.55) est définie au sens des valeurs principales de Cauchy, symbolisé par V.P., pour éviter d'une part le pôle de Rayleigh de la fonction $\tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta)$ et d'autre part le pôle qui apparaît lorsque $\theta - \varphi = \pm\pi/2$. Son calcul nécessite l'emploi de méthodes numériques. Cette fonction possède de légères discontinuités aux temps d'arrivée des ondes rasantes. La contribution U_s :

$$U_s(\mathbf{M}, t) = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(\text{Res} \left(\tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) S_{\parallel} \frac{dS_{\parallel}}{dt} \Big|_{S_{\parallel} = \frac{t}{r \cos(\theta - \varphi)}} \right) \Big|_{\theta = \pm\pi/2 + \varphi} \right) \quad (1.56)$$

correspond à la solution statique. Elle résulte d'un calcul de résidu afin de tenir compte des pôles écartés de la fonction précédente. Pour un point d'observation donné, cette solution est une fonction constante de la variable temps. Ainsi la dérivée temporelle de ce terme est nulle et il n'intervient donc pas dans l'expression de la réponse finale. Enfin, la fonction U_R :

$$U_R(t, r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Res}_R(\theta) S_R(\theta) \delta(t - S_R(\theta) r \cos(\theta - \varphi)) d\theta \right) \quad (1.57)$$

décrit l'arrivée des fronts de l'onde de Rayleigh. La fonction :

$$\text{Res}_R(\theta) = \text{Res} \left(S \tilde{H}_1(\theta, S) \right) \Big|_{S=S_R(\theta)} \quad (1.58)$$

correspond au calcul de résidu évalué au pôle de Rayleigh défini par la lenteur réelle $S_R(\theta)$. Afin d'alléger les notations, l'indice parallèle n'est pas associé à cette lenteur qui est parallèle au plan de l'interface. Elle vérifie l'équation de Rayleigh, $R(S_R(\theta), \theta) = 0$, qui correspond à l'annulation du déterminant de la matrice $[\mathbf{M}_S]$. Si la méthode de Cagniard-de Hoop décrite précédemment est applicable, elle nécessite cependant des précautions supplémentaires compte tenu du changement de signe éventuel de la lenteur S_{\parallel} selon la valeur de l'angle $\theta - \varphi$ (équation (1.53)). Ainsi puisque le temps t est positif, on a les conditions :

$$S_{\parallel} > 0, \text{ si } \cos(\theta - \varphi) > 0, \text{ et } S_{\parallel} < 0, \text{ si } \cos(\theta - \varphi) < 0. \quad (1.59)$$

Ces conditions s'appliquent également au choix des pôles de Rayleigh. Ainsi en faisant varier l'angle θ de l'intégrale (1.57) de $-\pi/2$ à $\pi/2$, on décrit en réalité la surface des lenteurs des ondes de Rayleigh de $\varphi - \pi/2$ à $\varphi + \pi/2$.

Pour un temps fixé, considérons un angle d'intégration particulier de l'expression (1.57), θ_j , tel que l'intégrand de (1.57) soit non nul et tel que le système d'équations suivant soit satisfait :

$$\begin{cases} t - S_R(\theta_j) r \cos(\theta_j - \varphi) = 0 \\ R(S_R(\theta_j), \theta_j) = 0 \end{cases}, \theta_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (1.60)$$

Les solutions θ_j de ce système correspondent aux angles de phase des lenteurs de Rayleigh $S_R(\theta_j)$ dont le temps de vol pour arriver au point d'observation $\mathbf{M}(0, r, \varphi)$ est $t = S_R(\theta_j) r \cos(\theta_j - \varphi)$. Lorsqu'un tel angle existe, il n'est pas nécessairement unique. Soit n le nombre de ces angles particuliers que l'on indexe par ordre croissant : $\theta_j < \theta_{j+1}$ ($j = 1 \dots n-1$) pour un temps t fixé. Afin de résoudre l'intégrale (1.57), le changement de variable suivant est nécessaire :

$$\tau(\theta) = S_R(\theta) r \cos(\theta - \varphi). \quad (1.61)$$

Dans le domaine d'intégration de la variable θ , ce changement de variable n'est pas biunivoque. Ainsi, pour calculer la réponse temporelle, ce domaine est divisé en sous intervalles tels que :

$$U_R(t, r, \varphi) = \sum_{i=0}^m W_{R_i}(t, r, \varphi), \quad (1.62)$$

avec :

$$W_{R_i}(t, r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{\bar{\theta}_i}^{\bar{\theta}_{i+1}} \operatorname{Res}_R(\theta) S_R(\theta) \delta(t - \tau(\theta)) d\theta \right), \quad (1.63)$$

où $\bar{\theta}_0 = -\pi/2$ et $\bar{\theta}_{m+1} = \pi/2$. Les paramètres $\bar{\theta}_i$ sont les extrema de la fonction $\tau(\theta)$ (voir figure I-6). Ces angles définissent les lenteurs de phase de l'onde de Rayleigh, $S_R(\bar{\theta}_i)$, pour lesquels la normale à la courbe des lenteurs de phase de Rayleigh est orientée selon la direction d'observation φ . Dans chaque sous-intervalle, le changement de variable $\theta \rightarrow \tau(\theta)$ est à présent biunivoque. En appliquant ce changement de variable sur chaque fonction intégrale W_{R_i} , on obtient :

$$W_{R_i}(t, r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \operatorname{Res}_R(\theta) S_R(\theta) \delta(t - \tau(\theta)) \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^{-1} d\tau(\theta) \right). \quad (1.64)$$

D'après la définition de la distribution de Dirac, cette intégrale est nulle s'il n'existe pas dans l'intervalle $[\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{i+1}]$ d'angle θ_j vérifiant le système (1.60). Par contre si un tel angle existe, il est unique, et l'expression (1.64) est non nulle. Ainsi l'expression (1.64) est égale à :

$$W_R(t, r, \varphi) = -\frac{\text{signe}(\tau(\bar{\theta}_{i+1}) - \tau(\bar{\theta}_i))}{2\pi} \text{Im} \left(Q_i(\tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \Big|_{\theta_j} \right)^{-1} \right) \quad (1.65)$$

s'il existe un angle θ_j appartenant à l'intervalle $[\bar{\theta}_i; \bar{\theta}_{i+1}]$ tel que $\tau(\theta_j) = t$. Si ce n'est pas le cas, elle est nulle. Le terme $Q_i(\tau)$ introduit correspond à :

$$Q_i(\tau) = S_R(\theta_j) \text{Res}_R(\theta_j). \quad (1.66)$$

En appliquant cette démarche à chaque intégrale, la contribution des pôles de Rayleigh au calcul de la fonction de Green se met sous la forme :

$$U_R(t, r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \Big|_{\theta_j} \right|^{-1} \text{Im}(Q_j(\tau)). \quad (1.67)$$

Les paramètres θ_j et $\bar{\theta}_i$ introduits précédemment sont à présent explicités. Les calculs sont réalisés pour un mono cristal de cuivre. L'angle d'observation à la surface est $\varphi = 10^\circ$. L'évolution du temps de vol τ est représentée en fonction de l'angle θ compris entre -90° et 90° (figure I-6). Pour un temps $t = \tau(\theta)$ donné, représenté sur cette figure par une ligne horizontale, correspondent deux solutions θ_j vérifiant le système (1.60). On observe également cinq angles particuliers $\bar{\theta}_i$ ($i=1 \dots 5$). Lorsque le temps augmente, deux pôles de Rayleigh θ_j se rejoignent en un point particulier $\bar{\theta}_i$ puis disparaissent. En ces points particuliers qui sont des maxima de la fonction τ , la dérivée $\partial \tau / \partial \theta$ est nulle. En conséquence, le déplacement tend vers l'infini (équation (1.67)). La forme d'onde possède donc pour les temps $t = \tau(\bar{\theta}_i)$ des discontinuités franches qui correspondent à l'arrivée du front d'une onde de Rayleigh. Pour cet exemple on constate donc la propagation de cinq fronts d'onde, se déplaçant à des vitesses différentes, dans la direction $\varphi = 10^\circ$. Ceci est caractéristique d'un milieu anisotrope.

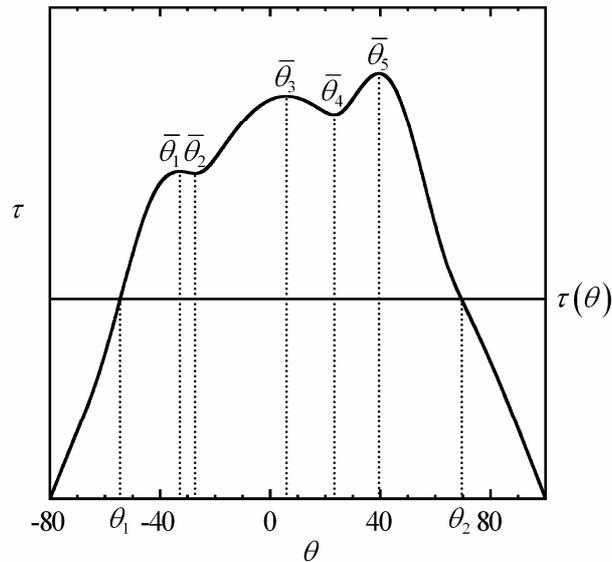


figure I-6 Évolution du temps de vol τ en fonction de l'angle θ pour un mono cristal de cuivre et un angle d'observation $\varphi = 10^\circ$. Les angles $\bar{\theta}_i$ correspondent à des maxima de τ .

Ces résultats sont reportés sur l'image de la courbe des lenteurs de phase par homothétie de rapport r à la figure I-7. Ainsi la projection sur la direction de propagation \mathbf{n}_φ des vecteurs définissant cette courbe ne correspond pas à une lenteur de l'énergie mais à un temps de vol. Ce temps de vol est représenté par une droite normale au vecteur \mathbf{n}_φ . Lorsqu'elle est tangente à la courbe, la normale au point de tangence qui donne la direction de propagation de l'énergie est alors orientée dans la direction du vecteur \mathbf{n}_φ . Ce cas de figure apparaît aux temps de vol $\tau(\bar{\theta}_i)$.

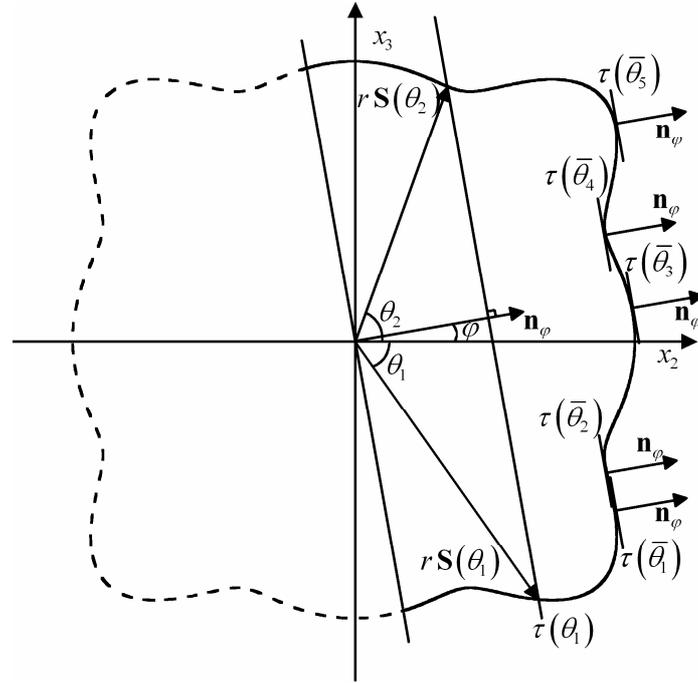


figure I-7 Courbe des lenteurs de phase de l'onde de Rayleigh d'un mono cristal de cuivre représentée par homothétie de rapport r . L'angle d'observation φ , de 10° , est repéré par le vecteur \mathbf{n}_φ . Les temps de vol qui sont des maxima de la figure I-6 correspondent aux lenteurs pour lesquelles les normales à la courbe sont orientées dans la même direction que celle du vecteur \mathbf{n}_φ .

Le résultat analytique du déplacement normal de la surface obtenu par la méthode de Cagniard-de Hoop met ainsi en évidence un critère de caractérisation des temps d'arrivée des fronts de l'onde de Rayleigh défini par l'annulation de la dérivée $\partial\tau/\partial\theta$.

L'introduction des composantes cartésiennes de la composante de la lenteur de phase de Rayleigh à la surface conduit à la relation :

$$\tau(S_{R2}(\theta)) = r(S_{R2}(\theta)\cos(\theta)\cos(\varphi) + S_{R3}(S_{R2}(\theta))\sin(\theta)\sin(\varphi)). \quad (1.68)$$

On a alors :

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\partial\tau}{\partial S_{R2}} \frac{\partial S_{R2}}{\partial\theta}. \quad (1.69)$$

Les valeurs de la variable θ qui annulent la dérivée $\partial S_{R2}/\partial\theta$ correspondent à des pôles de la dérivée $\partial\tau/\partial S_{R2}$. En ces points, le produit de ces deux fonctions est non nul. Les zéros de la fonction $d\tau/d\theta$ sont ainsi identiques à ceux de la fonction $\partial\tau/\partial S_{R2}$. La relation $\tau = rS_e$, dans laquelle la distance r est une constante, conduit à une nouvelle condition de caractérisation des ondes de Rayleigh définie par l'annulation de la dérivée $\partial S_e/\partial S_{R2}$.

I.4.3 Calcul de la fonction de Green, à la surface d'un demi espace, par décomposition en ondes planes transitoires et intégration numérique

Le calcul de la fonction de Green présentée dans la partie précédente demande des connaissances en algèbre des transformations et en analyse des fonctions complexes. La méthode proposée dans cette section a pour but d'évaluer cette fonction en minimisant les développements mathématiques. Le calcul correspond à l'évaluation d'une triple intégrale correspondant à celle de l'expression (1.32). Cependant, cette expression est modifiée afin de pallier des inconvénients numériques. Pour cela le paramétrage de la fonction de Green de l'équation (1.32) est modifié. Cette fonction est dans un premier temps décomposée en ondes planes transitoires en l'exprimant en fonction de la lenteur de phase par le changement de variable $\mathbf{k} = \omega \mathbf{S}$. Ce changement de variable présente deux intérêts. Le premier est de rendre la fonction de Green indépendante de la variable ω . Il n'est alors pas nécessaire de l'évaluer pour chacune des fréquences apparaissant dans le calcul de l'intégrale sur la variable ω . Il en résulte un gain de temps d'autant plus important que l'évaluation de cette fonction constitue l'opération la plus longue du calcul [Messaoud-Nacer et de Belleval (2004)]. Le deuxième intérêt est de proposer une discrétisation constante sur la variable d'espace. En effet, le nombre d'onde, qui dépend de la variable ω , a une discrétisation qui varie en fonction de la fréquence. Or, la fonction de Green possède des pôles pour lesquels elle a une valeur infinie d'un point de vue théorique. Numériquement, ces pics infinis sont tronqués et leur amplitude dépend fortement du point où ils sont calculés. La dépendance en fréquence entraîne ainsi un calcul irrégulier des amplitudes de cette fonction impliquant des déséquilibres dans l'évaluation de la réponse finale. L'introduction de la variable lenteur non assujettie à la fréquence résout ce problème. Cependant les intégrations sur les variables S_2 et S_3 engendrent le même inconvénient. En effet, si chacune de ces variables est discrétisée d'un pas constant, le module de la lenteur de phase à l'interface $S_{\parallel} = \sqrt{S_2^2 + S_3^2}$ ne l'est pas. Or, les pôles de la fonction sont fixes et correspondent à des valeurs de S_{\parallel} bien précises. Il est donc nécessaire d'introduire ce paramètre. Pour cela, la lenteur initialement exprimée en coordonnées cartésiennes est exprimée en coordonnées polaires :

$$\mathbf{S}^{(n)} = \eta_n \mathbf{x}_1 + S_2 \mathbf{x}_2 + S_3 \mathbf{x}_3 = \eta_n \mathbf{x}_1 + S_{\parallel} \mathbf{n}_{\theta} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n}_{\theta} = \cos(\theta) \mathbf{x}_2 + \sin(\theta) \mathbf{x}_3, \quad (1.70)$$

où le vecteur \mathbf{n}_{θ} et l'angle θ sont définis à la figure I-5. En tenant compte de ces changements, la composante normale tirée de l'équation (1.32) devient :

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega) e^{i\omega(t - S_{\parallel} r \cos(\theta - \varphi))} S_{\parallel} dS_{\parallel} d\theta d\omega. \quad (1.71)$$

La fonction $\tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega)$ est définie par :

$$\tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega) = \omega^2 \sum_{n=1}^3 A_n P_1(\eta_n). \quad (1.72)$$

À partir du changement de variable $\mathbf{k} = \omega \mathbf{S}$, la matrice $[\mathbf{M}]$ permettant de calculer les amplitudes est égale à $-i\omega[\mathbf{M}_s]$ où la matrice $[\mathbf{M}_s]$ est identique à celle de la section précédente (1.45). Les amplitudes sont alors proportionnelles à i/ω . En reprenant les notations introduites précédemment, les amplitudes peuvent se mettre sous la forme : $A_n(S_{\parallel}, \theta, \omega) = i B_n(S_{\parallel}, \theta) / \omega$. Le spectre introduit en (1.72) est donc une fonction linéaire de la fréquence et il s'exprime par :

$$\tilde{G}_1(S_{\parallel}, \theta, \omega) = i \omega \tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) \quad (1.73)$$

où :

$$\tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{n=1}^3 B_n(S_{\parallel}, \theta) P_1(\eta_n). \quad (1.74)$$

Le théorème de dérivation des transformées de Laplace indique que dériver par rapport au temps revient à multiplier par $i\omega$. Le champ de déplacement est donc relié à la dérivée temporelle de la fonction $U_1(x_1, x_2, t)$ par :

$$u_1(x_1, x_2, t) = \frac{dU_1(x_1, x_2, t)}{dt}. \quad (1.75)$$

Ainsi la fonction $\tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta)$ est indépendante de ω et n'a pas à être évaluée pour les différentes fréquences nécessaires à l'évaluation numérique de la première intégrale de l'expression (1.71). Il en découle ainsi une nette diminution du temps de calcul.

Le champ $U_1(x_1, x_2, t)$ est égal à :

$$U_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}_1(x_1, x_2, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.76)$$

avec :

$$\hat{U}_1(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{H}_1(S_{\parallel}, \theta) e^{-i\omega S_{\parallel} r \cos(\theta - \varphi)} S_{\parallel} dS_{\parallel} d\theta. \quad (1.77)$$

Les intégrations de la fonction \tilde{H}_1 sont calculées numériquement par la méthode des rectangles. La fonction \hat{U}_1 se met alors sous la forme de deux sommes, la première sur l'angle θ , la seconde sur la lenteur S_{\parallel} :

$$\hat{U}_1(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \tilde{H}_1(S_{\parallel}^{(j)}, \theta^{(i)}) e^{-i\omega S_{\parallel}^{(j)} r \cos(\theta^{(i)} - \varphi)} S_{\parallel}^{(j)} \Delta S_{\parallel} \Delta \theta. \quad (1.78)$$

avec :

$$\theta^{(i)} = i \frac{2\pi}{N_1} = i \Delta \theta \quad \text{et} \quad S_{\parallel}^{(j)} = j \frac{1}{V_{\min} N_2} = j \Delta S_{\parallel} \quad (1.79)$$

où V_{\min} correspond à une vitesse inférieure à celle de l'onde se propageant le plus lentement. La relation (1.75) permet d'obtenir le champ de la réponse finale en calculant l'intégrale en fréquence ainsi :

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \hat{U}_1(x_1, x_2, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.80)$$

Son calcul est réalisé à partir d'une transformée de Fourier inverse rapide. Initialement, le solide est considéré non viscoélastique impliquant aux composantes du tenseur des rigidités d'être réelles. Le respect de cette condition engendre de très grandes amplitudes de la fonction \hat{G}_1 au niveau des pôles de Rayleigh. Le spectre fréquentiel est alors composé de pics qui prennent le pas sur les petites discontinuités décrivant l'arrivée des fronts des ondes rasantes. Ainsi après le calcul de la transformée de Fourier inverse, seules les arrivées des fronts de l'onde de Rayleigh sont décrites. Afin de réduire l'amplitude de ces pics, de l'absorption est ajoutée au matériau en dotant les composantes des rigidités d'une partie imaginaire correspondant à un millièème de la partie réelle. Cela a pour conséquence de réduire les pics et ainsi de décrire la propagation de tous les phénomènes.

La méthode décrite précédemment est implémentée pour calculer le champ de déplacement sur la surface libre pour différentes orientations source-récepteur. Le cristal de cuivre a été choisi pour réaliser cette application numérique car ce matériau est fortement anisotrope. La surface libre coïncide avec le plan cristallographique (1,0,0) et les axes x_2 et x_3 coïncident avec les axes [0,1,0] et [0,0,1]. Dans ce référentiel, les constantes d'élasticité non nulles du cristal sont : $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 170$ GPa , $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 123$ GPa , $c_{44} = c_{55} = c_{66} = 75.5$ GPa . Sa masse volumique est de 8.9 g/cm³ . En un point de la surface, la fonction u_1 décrit le déplacement hors plan de la surface en fonction du temps t . Un point situé à une distance r de la source selon une direction d'observation φ est considéré. Le déplacement u_1 dépend alors de ces trois paramètres. Il peut être exprimé en fonction de la variable $v = r/t$, homogène à une vitesse et conduit à un nouveau déplacement $\tilde{u}_1(0, v \cos(\varphi), v \sin(\varphi))$. Ce dernier est représenté, à la figure I-8 et à la figure I-9 pour quatre angles φ compris entre 0° et 45° . Le déplacement est calculé à la surface, c'est à dire pour $x_1 = 0$. La distance du point d'observation à la source, qui a été choisie pour ce calcul, est de cinq millimètres. Cette grandeur a pour seule influence dans le calcul de modifier l'amplitude du déplacement.

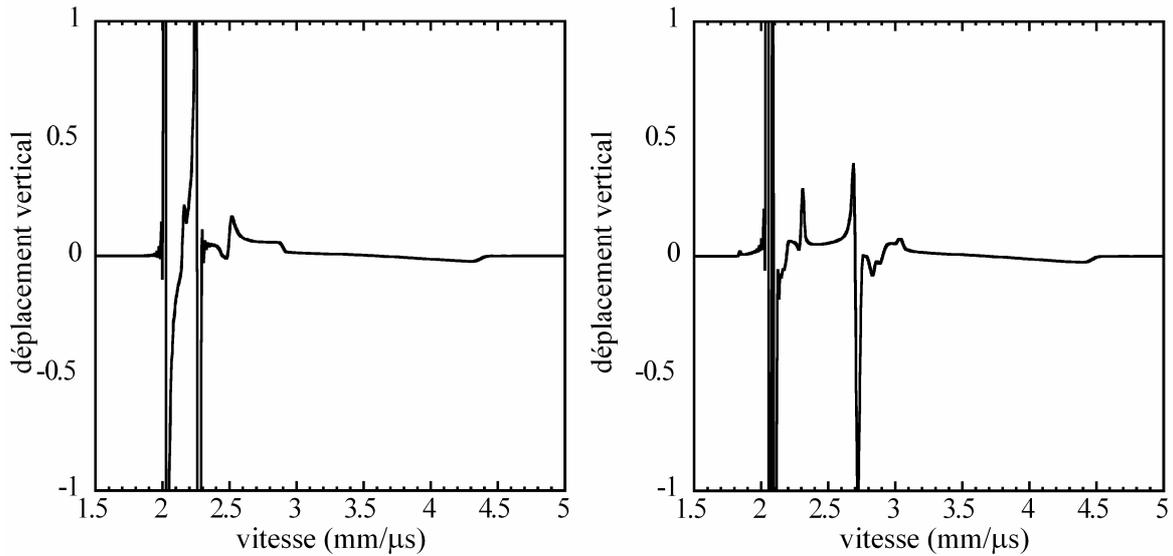


figure I-8 Déplacement vertical de la surface en fonction du paramètre vitesse $v = r/t$ pour des angles d'observation $\varphi = 0^\circ$, à gauche et $\varphi = 15^\circ$, à droite.

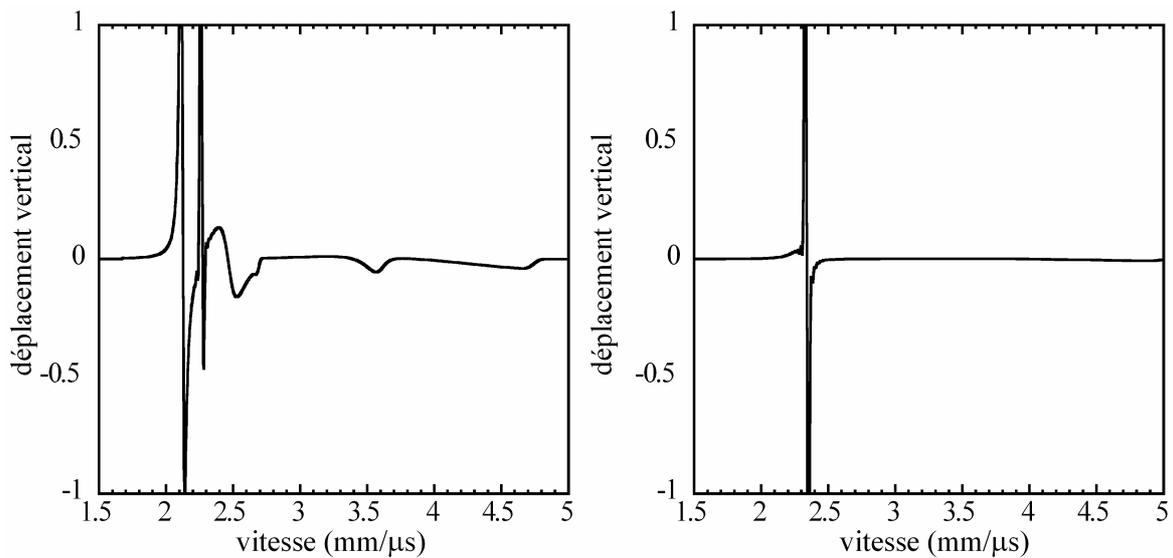


figure I-9 Déplacement vertical de la surface en fonction du paramètre vitesse $v = r/t$ pour des angles d'observation $\varphi = 30^\circ$, à gauche et $\varphi = 45^\circ$, à droite

On observe sur ces déplacements des discontinuités qui caractérisent différents types d'ondes. Les formes de ces déplacements sont comparées à des résultats expérimentaux et analysées en détail dans le chapitre 4.

La figure I-10 est une représentation tridimensionnelle de ces déplacements calculés pour une variation du paramètre φ sur 360° . Le plan de la figure correspond à celui de la surface et l'amplitude du déplacement est quantifiée par les dégradés de gris : le blanc correspond à un maximum de déplacement et le noir à un minimum. Cette représentation peut être interprétée comme une photographie, au temps unitaire, de la surface déformée.

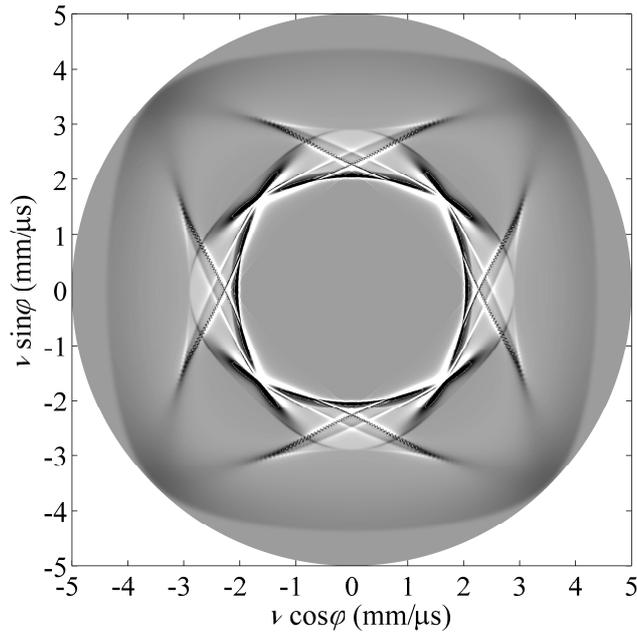


figure I-10 Fonction de Green : déplacement normal dans le plan de l'interface $\tilde{u}_1(r/t, \varphi)$. Le blanc donne le maximum d'intensité et le noir le minimum.

I.5 Principe de Fermat

Il a été vu à partir de la formule analytique obtenue par la méthode de Cagniard-de Hoop que le terme prépondérant décrivant la propagation de l'onde de Rayleigh est $\partial\tau/\partial\theta$. Afin de généraliser ce résultat à l'ensemble des ondes planes, il est à présent retrouvé à partir du principe de Fermat. Ce principe fut introduit en optique. À partir d'un exemple le décrivant dans le cadre de l'optique, une description similaire est appliquée aux ondes planes.

I.5.1 Principe de Fermat en optique

Soient v_l la vitesse de la lumière se propageant dans un milieu, l'intégrale curviligne :

$$L = \int_A^B \frac{ds}{v_l}, \quad (1.81)$$

calculée selon la trajectoire d'un rayon lumineux allant de A en B , se nomme le chemin optique. En notant c_l la vitesse de la lumière dans le vide, l'indice du milieu est :

$$n = \frac{c_l}{v_l}. \quad (1.82)$$

Le chemin optique peut alors s'écrire :

$$L = \frac{1}{c_l} \int_A^B n_l ds . \quad (1.83)$$

Pierre de Fermat a le premier posé en principe que le chemin optique des rayons lumineux était minimal. Afin d'illustrer ce principe, le calcul du chemin optique entre deux points appartenant à des milieux d'indices différents est présenté. La géométrie du problème est illustrée à la figure I-11. On considère un point source $A(x_2^{(A)}, x_3^{(A)})$ situé dans un milieu d'indice n_1 . Un point $B(x_2^{(B)}, x_3^{(B)})$ est situé dans un milieu d'indice n_2 séparé du premier par une interface Σ . Le trajet suivi par la lumière entre les points A et B est recherché.

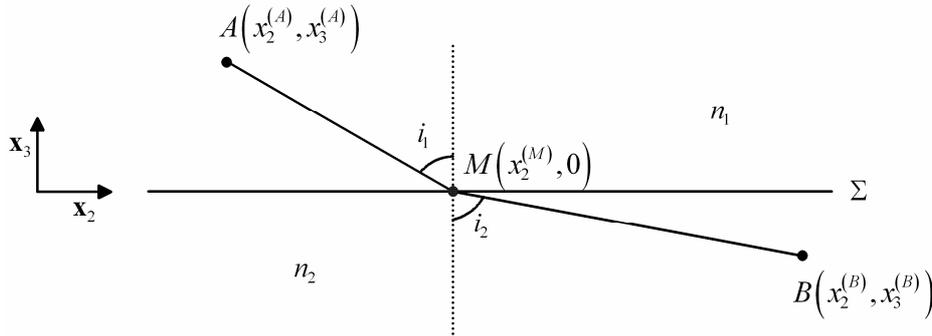


figure I-11 Géométrie du problème.

Soit $M(x_2^{(M)}, 0)$ le point d'intersection du rayon avec l'interface. Le repère orthonormé $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ est choisi de sorte que la composante du point M dans la direction \mathbf{x}_3 soit nulle. Les chemins optiques dans les milieux 1 et 2 sont respectivement :

$$L_{AM}(x_2^{(M)}) = n_1 \sqrt{(x_2^{(M)} - x_2^{(A)})^2 + x_3^{(A)2}} \quad \text{et} \quad L_{MB}(x_2^{(M)}) = n_2 \sqrt{(x_2^{(M)} - x_2^{(B)})^2 + x_3^{(B)2}} . \quad (1.84)$$

La position du point M le long de l'interface doit être telle que le chemin optique total soit extrémal :

$$\frac{d(L_{AM}(x_2^{(M)}) + L_{MB}(x_2^{(M)}))}{dx_2^{(M)}} = 0 . \quad (1.85)$$

Le calcul de cette dérivée à partir des relations (1.84) conduit à l'expression :

$$n_1 \frac{x_2^{(M)} - x_2^{(A)}}{AM} + n_2 \frac{x_2^{(M)} - x_2^{(B)}}{MB} = 0 . \quad (1.86)$$

En remarquant que $(x_2^{(M)} - x_2^{(A)})/AM = \sin(i_1)$ et que $(x_2^{(M)} - x_2^{(B)})/MB = -\sin(i_2)$, on retrouve la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) . \quad (1.87)$$

I.5.2 Principe de Fermat appliqué à l'évaluation de l'arrivée de fronts d'onde à la surface d'un milieu anisotrope

Les temps de vol des fronts d'onde se propageant à la surface d'un milieu anisotrope en parcourant une distance r d'un point O à un point M selon une direction \mathbf{n}_φ sont recherchés. Ils sont définis par :

$$t = \mathbf{S} \cdot \mathbf{OM}, \quad (1.88)$$

où \mathbf{S} est la lenteur de phase. En introduisant la lenteur de l'énergie $\mathbf{S}_e = (t/r)\mathbf{n}_\varphi$, la relation (1.88) peut également s'écrire :

$$S_e = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_\varphi. \quad (1.89)$$

Contrairement au problème de la section précédente, le point M est fixe et le matériau est homogène selon la direction \mathbf{n}_φ . Le temps de vol est donc une fonction de la variable lenteur de phase \mathbf{S} . Afin de trouver le chemin optique extrémal, le point M devait satisfaire l'équation de la droite définie par l'intersection du plan de l'interface Σ avec le plan de propagation de la lumière $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Il n'avait donc qu'un degré de liberté. Pour se placer dans les mêmes conditions, nous considérons la courbe des lenteurs de phase correspondant à l'intersection de la surface des lenteurs de phase avec la surface du milieu notée $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. La lenteur de phase de coordonnées polaires S et θ n'a ainsi qu'un degré de liberté. Le temps de vol $t(\theta)$ est calculé pour des valeurs de θ variant entre -90° et 90° et pour une direction \mathbf{n}_φ faisant un angle de 20° avec le vecteur \mathbf{x}_2 .

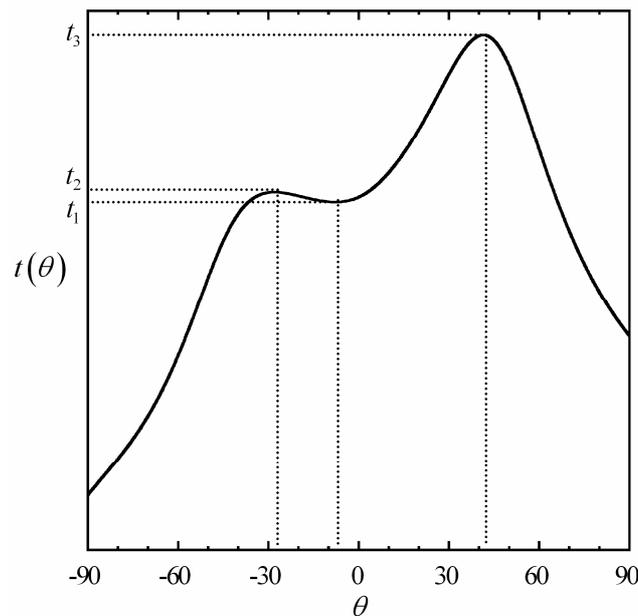


figure I-12 Évolution du temps de vol $t(\theta)$, des fronts d'onde se propageant dans la direction \mathbf{n}_φ faisant un angle de 20° avec l'axe \mathbf{x}_2 , pour des angles pris entre -90° et 90° .

On constate à la figure I-12 que le temps de vol est extrémal pour trois angles de phase. Le temps t_i correspondant à chacun de ces angles est relié à la lenteur de l'énergie par la relation :

$$t_i = r S_e^{(i)}, \quad (1.90)$$

où r est une constante. La courbe des lenteurs de phase qui a donné les résultats de ces temps de vol est tracée à la figure I-13. Les lenteurs de phase pour lesquelles le temps de vol est extrémal sont repérées sur la courbe par un cercle noir. Elles ont été tracées à partir des angles de phase obtenus à la figure I-12. Leurs projections selon la direction du vecteur \mathbf{n}_φ , donnant les lenteurs de l'énergie $S_e^{(i)}$, y sont représentées. Pour chacune de ces lenteurs de phase et uniquement pour celles-ci, la normale à la courbe est orientée dans la direction de \mathbf{n}_φ . Cette dernière correspond à la direction de propagation des fronts dont on cherchait les temps de vol. Or, les normales à la courbe des lenteurs de phase renseignent sur la direction de propagation de l'énergie. Les valeurs extrémales du temps de vol ont ainsi permis de trouver les lenteurs de phase et par suite la lenteur de l'énergie, ou le temps de parcours, des fronts d'onde se propageant du point O au point M .

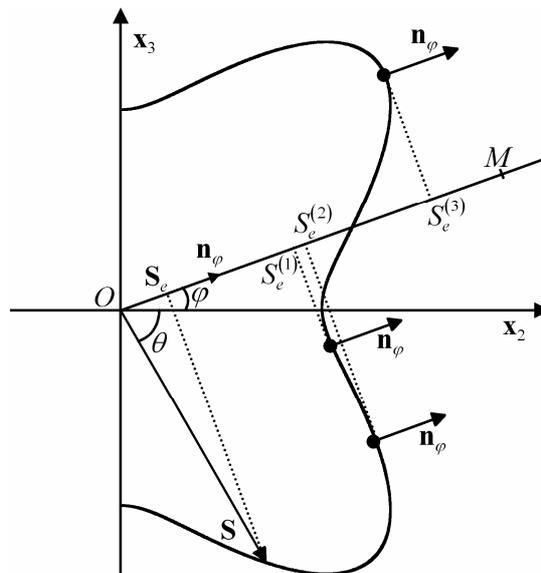


figure I-13 Lenteurs d'énergie $S_e^{(j)}$ associées à une courbe des lenteurs de phase pour un angle d'observation $\varphi = 20^\circ$.

Le temps de parcours des fronts d'onde peut ainsi être caractérisé par l'équation :

$$\frac{dt(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (1.91)$$

À présent, l'équation de dispersion est exprimée en fonction des coordonnées cartésiennes de la lenteur de phase au lieu des coordonnées polaires. La courbe des lenteurs de phase

n'autorisant qu'un degré de liberté, l'une des deux composantes est déduite de l'autre. Si l'on choisit la dépendance $S_3 = S_3(S_2)$ de la même manière que l'on avait $S = S(\theta)$, alors le principe de Fermat peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{dt(S_2)}{dS_2} = 0, \quad (1.92)$$

ou bien en considérant la relation (1.90) avec la grandeur r constante :

$$\frac{dS_e(S_2)}{dS_2} = 0. \quad (1.93)$$

Une relation équivalente aux trois précédentes est obtenue en gardant le même problème mais en changeant de paramètre. Soit $\Omega(S_2, S_3) = 0$ l'équation de dispersion considérée dans cette section. À partir de la relation (1.89), le changement de variable :

$$S_3 = \frac{S_e - S_2 \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}, \quad (1.94)$$

conduit à une nouvelle équation de dispersion $\tilde{\Omega}(S_2, S_e) = 0$. À partir du théorème des fonctions implicites, la dérivée dS_2/dS_e s'exprime en fonction de l'équation de dispersion par :

$$\frac{dS_2}{dS_e} = - \frac{\partial \tilde{\Omega}(S_2, S_e) / \partial S_e}{\partial \tilde{\Omega}(S_2, S_e) / \partial S_2}, \quad (1.95)$$

qui est l'inverse de la dérivée dS_e/dS_2 . La lenteur de l'énergie dans la direction \mathbf{n}_φ peut ainsi être directement obtenue en résolvant l'équation :

$$\frac{dS_2(S_e)}{dS_e} \rightarrow \infty. \quad (1.96)$$

Les arrivées des fronts d'onde sont caractérisées dans la méthode de Cagniard-de Hoop par des pics infinis dus à des fonctions analogues à celles des relations (1.91) et (1.96). Ces pics qui apparaissent dans le spectre de la fonction de Green mettent en avant certaines fréquences. Les discontinuités qui apparaissent dans la réponse finale et qui caractérisent les arrivées de fronts d'onde sont la conséquence de ces fréquences qui sont pondérées par des amplitudes plus grandes que les autres. On peut ainsi concevoir qu'une amplitude qui ne soit plus infinie mais qui propose localement un extremum qui prévaut sur une grande partie du spectre ait une influence sur la forme de la réponse. En se basant sur cette remarque, dans certaines situations, l'arrivée d'un front d'onde peut être caractérisée par un maximum de la dérivée dS_2/dS_e ce qui correspond à l'annulation de la dérivée seconde :

$$d^2 S_2 / dS_e^2 = 0. \quad (1.97)$$

Par la suite nous nommerons ce critère, par abus de langage, principe de Fermat approché.

I.6 Conclusion

Un ensemble de résultats qui seront appliqués par la suite afin de caractériser les vitesses de propagation des fronts d'ondes planes homogènes et hétérogènes, sont introduits dans ce chapitre. Le principe de Fermat et le principe de Fermat approché seront respectivement utilisés pour calculer les vitesses des ondes planes homogènes et hétérogènes. La représentation tridimensionnelle de la propagation des ondes, obtenue par le calcul de la fonction de Green, constituera un référent de comparaison aux résultats obtenus par la théorie des rayons.

- Chapitre II -

Rayons complexes appliqués aux ondes planes de volume

I.1 Introduction.....	47
I.2 Présentation du problème	47
I.3 Polynôme de Christoffel	48
I.3.1 Expression du polynôme de Christoffel.....	49
I.3.2 Solutions du polynôme de Christoffel paramétré en coordonnées polaires.....	52
I.4 Relations énergétiques.....	54
I.4.1 Énergie potentielle	54
I.4.2 Énergie cinétique	56
I.4.3 Relations énergétiques et célérité de l'énergie.....	56
I.5 Onde plane de volume homogène.....	57
I.5.1 Résolution du polynôme de Christoffel paramétré en coordonnées cartésiennes.....	57
I.5.2 Relation entre lenteurs de phase et de l'énergie, transposée à la géométrie de notre problème.....	58
I.5.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes rasantes homogènes.....	59
I.6 Onde plane de volume hétérogène.....	66
I.6.1 Onde hétérogène, bivecteur	66
I.6.2 Bilan énergétique	67
I.6.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes rasantes hétérogènes.....	69
I.7 Synthèse des résultats	72
I.8 Conclusion	74

II.1 Introduction

Les équations de propagation ainsi que l'expression du champ de déplacement, présentés dans le premier chapitre, décrivent des ondes planes homogènes caractérisées par une lenteur de phase réelle. Il est également montré que les vitesses de l'énergie peuvent être obtenues à partir de la courbe des lenteurs de phase, solutions de l'équation de Christoffel. Cependant la description des vitesses de l'énergie à partir de la théorie des rayons homogènes est restrictif. Il est en effet observé expérimentalement des fronts d'onde qui se propagent dans le prolongement des cornes formées par la courbe des vitesses de l'énergie d'ondes homogènes et qui ne sont pas pour autant décrites à partir de la courbe des lenteurs de phase homogènes [Every (1981); Hauser et al. (1992); Corbel et al. (1993); Audoin et al. (1996); Kim et al. (1996)]. La notion d'ondes planes hétérogènes, ayant une lenteur de phase complexe, s'avère alors bien adaptée pour une description plus complète des phénomènes physiques observés [Deschamps et Poncelet (2002)]. Le calcul de leur vitesse de l'énergie n'est plus basé sur la courbe des lenteurs de phase et fait intervenir le polynôme de Christoffel ainsi que des critères d'énergie. Dans un premier temps, cette méthode est décrite pour le cas des ondes de volume homogènes puis, elle est appliquée aux ondes de volume hétérogènes. Les résultats obtenus sont comparés à ceux calculés à partir de la fonction de Green décrite dans le premier chapitre.

II.2 Présentation du problème

La composante de la fonction de Green calculée par la méthode de Cagniard-de Hoop et décrivant les temps d'arrivée des ondes rasantes a été présentée dans le premier chapitre. Son calcul repose sur la sommation d'une infinité d'ondes planes qui interagissent et dont les contributions au résultat final dépendent de leurs amplitudes spectrales. En se plaçant en champ lointain, les ondes se propageant à des vitesses différentes, leurs interactions sont limitées. Ainsi chaque arrivée de front d'onde peut être découplée et perçue comme la contribution d'une seule onde plane. L'objet de cette section est de décrire la propagation de ces fronts à partir d'ondes planes prises séparément.

Les ondes rasantes sont des ondes de volume dont le flux d'énergie rase la surface d'un milieu. En d'autres termes, elles correspondent à des ondes qui se propageraient au sein d'un milieu infini et dont le vecteur de Poynting est parallèle à la surface. Elles sont de deux types : celles dont la lenteur de phase est parallèle à l'interface appelées ondes rasantes dans le plan et celles dont la lenteur de phase n'est pas parallèle à l'interface appelées ondes rasantes hors plan. Pour chacun de ces deux cas, une vitesse de l'énergie est représentée à la figure II-1.

Cette figure représente la surface des lenteurs de phase de l'onde TH calculée pour un mono cristal de cuivre.

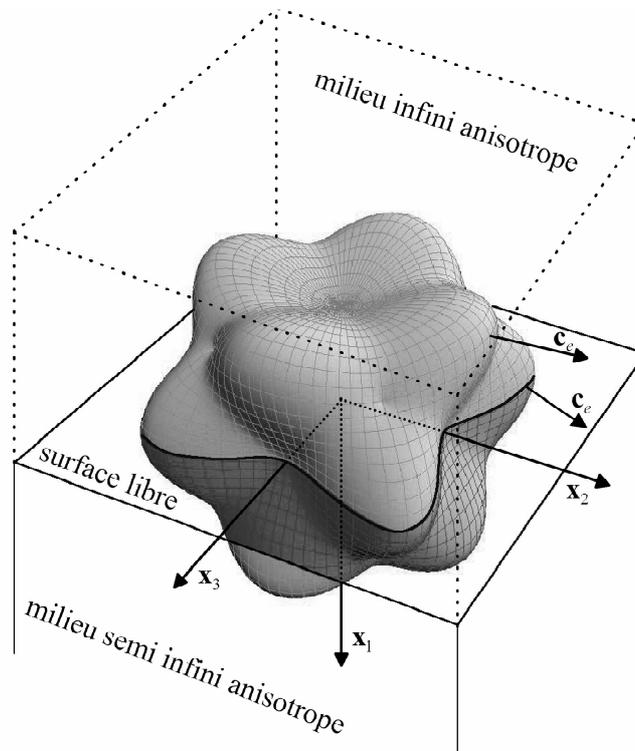


figure II-1 Surface des lenteurs de phase de l'onde TH correspondant à un mono cristal de cuivre. Les normales à cette surface indiquent la direction de transport de l'énergie. Les ondes rasantes sont caractérisées par un flux de l'énergie parallèle à l'interface. On différencie les ondes rasantes dans le plan qui ont des lenteurs de phase parallèles à l'interface, des ondes rasantes hors plan pour lesquelles les lenteurs de phase ne sont pas parallèles à l'interface.

La direction du flux d'énergie est donnée par la direction des normales à la surface des lenteurs de phase. Ainsi pour la courbe des lenteurs de phase correspondant à l'intersection entre cette surface et le plan de l'interface du milieu, tous les flux d'énergie sont parallèles à l'interface. Ce cas correspond aux ondes rasantes dans le plan.

Le système d'axes utilisé dans ce chapitre est identique à celui du chapitre précédent. Le matériau considéré est supposé être orthotrope. Les applications numériques ont été réalisées pour le cas d'un mono cristal de cuivre.

II.3 Polynôme de Christoffel

Dans cette section, la construction du polynôme de Christoffel dont les solutions correspondent à des ondes volumes caractérisées par un flux d'énergie parallèle à l'interface

est présentée. Les solutions de ce polynôme paramétré en coordonnées polaires sont ensuite calculées.

II.3.1 Expression du polynôme de Christoffel

Le polynôme de Christoffel est un polynôme de la variable lenteur de phase dont les racines sont solutions de l'équation de Christoffel. L'expression de ce polynôme telle qu'elle est présentée dans cette section est adaptée à la recherche des vitesses de l'énergie des fronts d'onde se propageant parallèlement à la surface du milieu.

L'équation de Christoffel qui a été introduite à l'équation (1.9) est utilisée dans cette section sous une forme différente. Pour cela, elle est multipliée par le carré de la lenteur de phase et divisée par la densité du matériau. Elle se présente sous la forme :

$$\tilde{\Gamma}_{il} u_l = 0, \quad (2.1)$$

avec $\tilde{\Gamma}_{il} = C_{ijkl} S_j S_k - \delta_{il}$. Les grandeurs C_{ijkl} correspondent aux composantes du tenseur des rigidités c_{ijkl} divisées par ρ et la grandeur δ_{il} désigne le symbole de Kronecker. Pour un matériau orthotrope qui correspond au cadre de notre étude, la matrice $\tilde{\Gamma}$, fonction de la variable η qui est la composante normale de la lenteur de phase, S_1 , se présente sous la forme :

$$\tilde{\Gamma}(\eta) = \begin{bmatrix} C_{11} \eta^2 + \alpha_1 & \alpha_{12} \eta & \alpha_{13} \eta \\ & C_{66} \eta^2 + \alpha_2 & \alpha_{23} \\ \text{symétrique} & & C_{55} \eta^2 + \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C_{66} S_2^2 + C_{55} S_3^2 - 1, & \alpha_2 &= C_{22} S_2^2 + C_{44} S_3^2 - 1, \\ \alpha_3 &= C_{44} S_2^2 + C_{33} S_3^2 - 1, & \alpha_{12} &= (C_{12} + C_{66}) S_2, \\ \alpha_{13} &= (C_{13} + C_{55}) S_3, & \alpha_{23} &= (C_{23} + C_{44}) S_2 S_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La condition de compatibilité des trois équations homogènes de l'expression (2.1) est donnée par l'annulation du déterminant de la matrice $\tilde{\Gamma}(\eta)$:

$$|\tilde{\Gamma}(\eta)| = 0. \quad (2.4)$$

Cette équation est un polynôme de la variable η :

$$\eta^6 - \tilde{\Sigma} \eta^4 + \tilde{\Delta} \eta^2 - \tilde{\Pi} = 0, \quad (2.5)$$

où :

$$\tilde{\Pi} = \frac{\Pi_{TV} \Pi_{L,TH}}{\alpha}, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{\alpha}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{\alpha} \quad (2.6)$$

et :

$$\begin{aligned}\alpha &= C_{11} C_{55} C_{66}, \quad \Pi_{TV} = \alpha_1, \quad \Pi_{L,TH} = \alpha_{23}^2 - \alpha_2 \alpha_3, \\ \Delta &= 2 \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12}^2 \alpha_3 - \alpha_{13}^2 \alpha_2 + C_{66} \alpha_1 \alpha_3 + C_{55} \alpha_1 \alpha_2 + C_{11} \alpha_2 \alpha_3 - C_{11} \alpha_{23}^2, \\ \Sigma &= C_{55} \alpha_{12}^2 + C_{66} \alpha_{13}^2 - C_{66} C_{55} \alpha_1 - C_{11} C_{55} \alpha_2 - C_{66} C_{11} \alpha_3.\end{aligned}\quad (2.7)$$

De par la symétrie du problème, l'équation (2.5) est cubique en η^2 et ses solutions correspondent à deux triplets $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ et $\{\eta_4, \eta_5, \eta_6\}$ qui diffèrent seulement par leur signe : $\eta_n = -\eta_{3+n}$ pour $n = 1, 2, 3$. En introduisant la variable $Y(\eta_n)$ dépendant des trois composantes normale η_1 , η_2 et η_3 par la relation :

$$Y(\eta_n) = \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3, \quad (2.8)$$

l'équation (2.5) est réécrite sous la forme :

$$K(\eta_n, S_2, S_3) = 0. \quad (2.9)$$

avec :

$$K(\eta_n, S_2, S_3) = Y(\eta_n)^4 + A_2 Y(\eta_n)^2 + A_1 Y(\eta_n) + A_0 \quad (2.10)$$

et :

$$A_0 = \tilde{\Delta}^2 - 4 \tilde{\Sigma} \tilde{\Pi}, \quad A_1 = -8 \tilde{\Pi}, \quad A_2 = -2 \tilde{\Delta}. \quad (2.11)$$

Le gradient de la fonction K est perpendiculaire à la surface qui lui est associée. Ceci caractérise également la vitesse de l'énergie. Notre problème étant de calculer les vitesses de l'énergie parallèles à l'interface, la composante normale du gradient est nulle :

$$\frac{\partial K(\eta_1, \eta_2, \eta_3, S_2, S_3)}{\partial \eta_n} = 0. \quad (2.12)$$

Les ondes rasantes ayant leur vitesse de l'énergie parallèle à l'interface peuvent ainsi être définies par le système de polynômes de la variable $Y(\eta_n)$ suivant :

$$\begin{cases} Y(\eta_n)^4 + A_2 Y(\eta_n)^2 + A_1 Y(\eta_n) + A_0 = 0 \\ 4Y(\eta_n)^3 + 2A_2 Y(\eta_n) + A_1 = 0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

Les solutions communes de ces deux polynômes sont obtenues par le calcul des racines de leur résultante. Cette dernière est définie comme étant le déterminant de la matrice de Sylvester \mathbf{S}_y dont l'expression en fonction des coefficients des deux polynômes est :

$$\mathbf{S}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 \\ 4 & 0 & 2A_2 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2A_2 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2A_2 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2A_2 & A_1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

La résultante de deux polynômes est donnée de manière plus générale dans l'annexe E. Le calcul de la résultante conduit au polynôme :

$$C(S_2, S_3) = -8^4 C_{\text{in}}(S_2, S_3) C_{\text{out}}(S_2, S_3), \quad (2.15)$$

avec :

$$C_{\text{in}}(S_2, S_3) = \tilde{\Pi}^2 \quad (2.16)$$

et :

$$C_{\text{out}}(S_2, S_3) = 4\tilde{\Delta}^3 - 18\tilde{\Delta}\tilde{\Pi}\tilde{\Sigma} + 27\tilde{\Pi}^2 - \tilde{\Delta}^2\tilde{\Sigma}^2 + 4\tilde{\Pi}\tilde{\Sigma}^3. \quad (2.17)$$

Les racines de ce polynôme correspondent à des ondes de volume dont le flux d'énergie est orienté parallèlement à l'interface du milieu.

Une remarque générale sur les expressions des polynômes C_{in} et C_{out} telles qu'elles sont présentées dans la suite de ce chapitre est nécessaire. Pour cela, considérons un polynôme Q des variables q_1 et q_2 . Ce polynôme peut se mettre sous la forme :

$$Q(q_1, q_2) = \sum_{k=0}^K Q^{(k)}(q_1) q_2^k. \quad (2.18)$$

Il peut donc être interprété comme un polynôme de la variable q_2 dont les coefficients $Q^{(k)}$ dépendent du paramètre q_1 . Les polynômes C_{in} et C_{out} sont écrits à plusieurs reprises sous cette forme. Cependant, il faut à chaque fois considérer cette écriture explicite comme étant symbolique dans le sens où ils n'ont pas été programmés ainsi lors des applications numériques. En effet, ils sont construits à partir des relations (2.6), (2.16) et (2.17) pour lesquelles les polynômes Π_{TV} , $\Pi_{L,SH}$, Δ et Σ sont exprimés sous la forme (2.18). Les polynômes C_{in} et C_{out} de la variable q_2 à coefficients dépendants de q_1 sont ensuite déduits numériquement à partir des propriétés relatives à la somme et au produit de deux polynômes. Différents paramétrages du polynôme de Christoffel sont présentés par la suite : en coordonnées polaires, $q_1 = \theta$ et $q_2 = S_{\parallel}$ pour calculer les courbes des lenteurs de phase, en coordonnées cartésiennes, $q_1 = S_3$ et $q_2 = S_2$ pour donner un exemple simple de racines complexes de ce polynôme et en fonction des paramètres $q_1 = S'_n$ (projection de la lenteur de phase selon une direction fixée) et $q_2 = S_2$ pour calculer les vitesses de l'énergie. Les

expressions des polynômes Π_{TV} , $\Pi_{L,TH}$, Δ et Σ sont données à l'annexe A pour chacun de ces paramétrages.

Les solutions du système (2.13) qui correspondent aux racines du polynôme C (relation (2.15)) sont à présent explicitées dans la section qui suit.

II.3.2 Solutions du polynôme de Christoffel paramétré en coordonnées polaires

Les solutions du système (2.13) correspondent à des ondes de volume dont le flux d'énergie est parallèle à l'interface et qui peuvent être classées en deux catégories. Chacune de ces catégories est reliée aux solutions des équations :

$$C_{in}(S_2, S_3) = 0 \quad \text{et} \quad C_{out}(S_2, S_3) = 0. \quad (2.19)$$

Les racines de $\tilde{\Pi}$ et donc du polynôme C_{in} (équation (2.16)) sont celles de l'équation (2.5) lorsque $\eta = 0$, c'est à dire lorsque la lenteur de phase est parallèle au plan de l'interface. Les racines du polynôme $C_{in}(S_2, S_3)$ décrivent donc des ondes rasantes dites dans le plan, c'est pourquoi ce polynôme est indicé 'in'. Le second polynôme indicé 'out', pour hors plan, décrit les ondes rasantes ayant une composante verticale η non nulle. Ce sont des ondes de volume dont le vecteur lenteur de phase n'est pas parallèle au plan de l'interface.

Les racines des polynômes C_{in} et C_{out} paramétrés en coordonnées polaires sont à présent recherchées. Pour cela, le changement de variables :

$$S_2 = S_{\parallel} \cos(\theta) \quad \text{et} \quad S_3 = S_{\parallel} \sin(\theta), \quad (2.20)$$

leur est appliqué. La grandeur S_{\parallel} représente la norme de la composante de la lenteur de phase parallèle à l'interface. Les deux polynômes ainsi obtenus sont des polynômes de la variable S_{\parallel}^2 de degrés 3 et 6 dont les coefficients ($C_{in}^{(2k)}$ et $C_{out}^{(2k)}$) dépendent de l'angle de phase θ . Leur expression peut se mettre sous la forme :

$$C_{in}(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^3 C_{in}^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}, \quad (2.21)$$

et :

$$C_{out}(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^6 C_{out}^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}. \quad (2.22)$$

Les racines des polynômes des relations (2.21) et (2.22) sont recherchées en faisant varier l'angle θ sur 360° . Les lenteurs de phase sont ensuite obtenues en prenant la racine carrée de ces racines. L'ensemble des solutions ainsi obtenues décrit les courbes des lenteurs de phase. Elles sont représentées pour les ondes latérales dans le plan à la figure II-2.

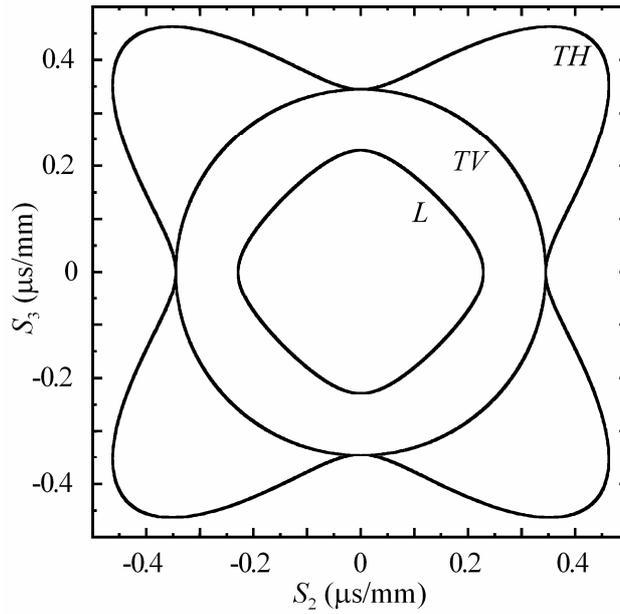


figure II-2 Lenteurs de phase des ondes rasantes dans le plan

Les trois solutions sont l'onde longitudinale (L), l'onde transversale à polarisation dans le plan (TH) et l'onde transversale à polarisation normale au plan (TV). On peut remarquer à partir de l'expression de $\tilde{\Pi}$ donnée à la relation (2.6) que les solutions du polynôme C_{in} sont découplées. En effet, il est possible de calculer indépendamment les lenteurs de phase de l'onde rasante TV à partir du polynôme Π_{TV} et celles des ondes L et TH à partir du polynôme $\Pi_{L,TH}$. Les courbes des lenteurs de phase des ondes latérales hors plan sont représentées à la figure II-3. Ces lenteurs ne sont pas parallèles au plan de l'interface défini par les vecteurs \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 car elles possèdent une composante dans la direction du vecteur \mathbf{x}_1 . Les courbes représentées à la figure II-3 sont les projections des lenteurs de phase hors plan sur le plan de l'interface.

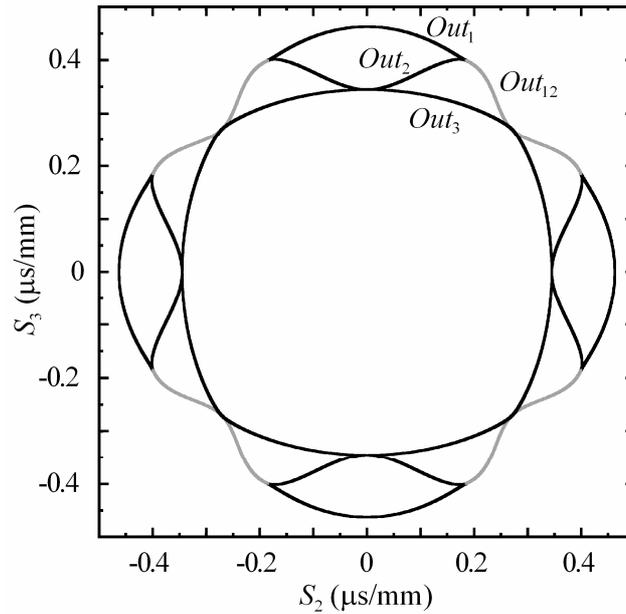


figure II-3 Projection des lenteurs de phase des ondes rasantes hors plan sur le plan $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$

Quatre solutions sont obtenues : trois solutions réelles correspondant aux ondes Out_1 , Out_2 et Out_3 représentées en noir, et une solution complexe double correspondant à l'onde Out_{12} , représentée en gris. Pour cette dernière, seule sa partie réelle est représentée à la figure II-3. Pour chaque angle de phase, seulement trois solutions du polynôme de degré 6 sont présentées. Les trois autres sont infinitésimales et ne représentent pas d'intérêt.

II.4 Relations énergétiques

Les relations énergétiques propres à la propagation d'une onde plane dans un milieu infini sont établies. Le cas le plus général d'une onde non homogène est considéré. Elle est caractérisée par des vecteurs polarisation et vitesse de phase, ainsi qu'une amplitude, complexes. Les résultats qui suivent se transposent directement au cas réel en prenant la partie réelle des grandeurs complexes introduites.

II.4.1 Énergie potentielle

Dans cette section, l'énergie potentielle définie par :

$$e_p = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (2.23)$$

est exprimée en fonction du vecteur de Poynting. L'expression (2.23) est modifiée de sorte que les grandeurs caractéristiques de l'onde plane apparaissent. Les composantes du tenseur des déformations sont définies par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2i\omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.24)$$

Par suite, l'expression de son conjugué est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = -\frac{1}{2i\omega} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.25)$$

dans laquelle :

$$\bar{v}_i = \bar{a} \bar{P}_i e^{-i\omega(t - \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{M})}. \quad (2.26)$$

En dérivant les composantes du champ de vitesse par rapport à la variable spatiale, l'expression (2.25) devient :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} (\bar{v}_i \bar{S}_j + \bar{v}_j \bar{S}_i). \quad (2.27)$$

La relation (2.23) peut alors se mettre sous la forme :

$$e_p = -\frac{1}{4} (\sigma_{ji} \bar{v}_i \bar{S}_j + \sigma_{ij} \bar{v}_j \bar{S}_i). \quad (2.28)$$

Le vecteur de Poynting ou flux énergétique étant défini par :

$$\mathbf{J} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad (2.29)$$

ses composantes sont :

$$J_i = -\sigma_{ij} \bar{v}_j. \quad (2.30)$$

À partir du changement de variables (2.30) introduit dans l'expression (2.28), l'énergie potentielle s'écrit :

$$e_p = \frac{1}{4} (J_j \bar{S}_j + J_i \bar{S}_i). \quad (2.31)$$

Cette expression conduit à :

$$e_p = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{S}}, \quad (2.32)$$

ou, en tenant compte des relations sur la moyenne temporelle introduites dans le premier chapitre à :

$$\bar{\mathbf{S}} \cdot \langle \mathbf{J} \rangle = 2 \langle e_p \rangle. \quad (2.33)$$

II.4.2 Énergie cinétique

À présent l'énergie cinétique définie par :

$$e_c = \frac{\rho v_i \bar{v}_i}{2}, \quad (2.34)$$

est également exprimée en fonction du vecteur de Poynting. L'équation de Christoffel (2.1) multipliée par le conjugué du champ de vitesse de l'onde conduit à :

$$\tilde{\Gamma}_{ij} v_j \bar{v}_i = 0, \quad (2.35)$$

où $\tilde{\Gamma}_{il} = C_{ijkl} S_j S_k - \delta_{il}$. En exprimant la loi constitutive du matériau : $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ en fonction des composantes du champ de vitesse :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{i\omega} C_{ijkl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}, \quad (2.36)$$

puis en explicitant la dérivée spatiale de la composante du champ de vitesse, les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = -C_{ijkl} S_k v_l. \quad (2.37)$$

En contractant les relations (2.34), (2.35) et (2.37), l'énergie cinétique s'exprime :

$$e_c = \left\{ \frac{1}{2} C_{ijkl} S_j S_k v_l \bar{v}_i \right\} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \bar{v}_i S_j. \quad (2.38)$$

D'après la définition du vecteur de Poynting (2.30), cette relation devient :

$$e_c = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}, \quad (2.39)$$

soit :

$$e_c = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}, \quad (2.40)$$

ou encore en considérant les expressions de la moyenne temporelle (premier chapitre) :

$$\mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{J} \rangle = 2 \langle e_c \rangle. \quad (2.41)$$

II.4.3 Relations énergétiques et célérité de l'énergie

La sommation des expressions (2.33) et (2.41) conduit à la relation :

$$\mathbf{S}' \cdot \langle \mathbf{J}' + i \mathbf{J}'' \rangle = \langle e_c + e_p \rangle, \quad (2.42)$$

et leur soustraction conduit à la relation :

$$\mathbf{S}'' \cdot \langle \mathbf{J}' + i \mathbf{J}'' \rangle = -i \langle e_c - e_p \rangle. \quad (2.43)$$

Les symboles prime et seconde représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire des grandeurs physiques considérées. La densité ρ est une grandeur réelle, le matériau considéré étant élastique, il en est de même des composantes du tenseur des rigidités C_{ijkl} . Ainsi, les énergies e_c et e_p sont réelles. L'expression (2.42) divisée par la moyenne temporelle de l'énergie mécanique conduit alors à :

$$\mathbf{S}' \cdot \mathbf{c}_e = 1, \quad (2.44)$$

dans laquelle \mathbf{c}_e , la célérité de l'énergie, est définie par :

$$\mathbf{c}_e = \frac{\langle \mathbf{J}' \rangle}{\langle e_c + e_p \rangle}. \quad (2.45)$$

De la relation (2.43) est tirée la propriété d'orthogonalité entre la direction de l'énergie et la partie imaginaire du vecteur de lenteur de phase \mathbf{S}'' :

$$\mathbf{S}'' \cdot \mathbf{c}_e = 0. \quad (2.46)$$

II.5 Onde plane de volume homogène

Dans un premier temps, le calcul des racines du polynôme $\tilde{\Pi}_{L,SH}$, paramétré en coordonnées cartésiennes, est présenté. Ce calcul illustre, à travers un exemple simple, les différents types de racines qui seront obtenus par la suite à partir d'un paramétrage plus complexe du polynôme de Christoffel. Le paramétrage en question, adapté au calcul des célérités de l'énergie, est réalisé à partir de la relation entre la lenteur de phase et la lenteur de l'énergie introduite dans la partie suivante. Un exemple ainsi que les résultats du calcul des célérités de l'énergie seront exposés dans la dernière partie.

II.5.1 Résolution du polynôme de Christoffel paramétré en coordonnées cartésiennes

Les polynômes introduits aux relations (2.16) et (2.17) peuvent être écrits, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$C_{\text{in}}(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^3 C_{\text{in}}^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}, \quad (2.47)$$

et :

$$C_{\text{out}}(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^6 C_{\text{out}}^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}. \quad (2.48)$$

Afin d'illustrer le calcul de leurs racines, un exemple est proposé à partir du polynôme $\Pi_{L,TH}$, défini à la relation (2.7) et qui peut se mettre sous la forme :

$$\Pi_{L,TH}(S_2, S_3) = \sum_{k=1}^2 \Pi_{L,TH}^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}. \quad (2.49)$$

Son expression complète est donnée à l'annexe A. Pour une valeur de S_3 , la recherche des racines S_2 de (2.49) revient à calculer les intersections entre la courbe des lenteurs de phase et une droite d'équation $\|\mathbf{S}\| - S_3 = 0$ dans laquelle le symbole $\|\ \ \|$ représente la norme d'un vecteur. Les racines du polynôme sont calculées pour différentes valeurs du paramètre S_3 . Elles peuvent être complexes et la projection dans le plan réel des lenteurs de phase (réelles en noir et complexes en gris) ainsi obtenues sont tracées à la figure II-4.

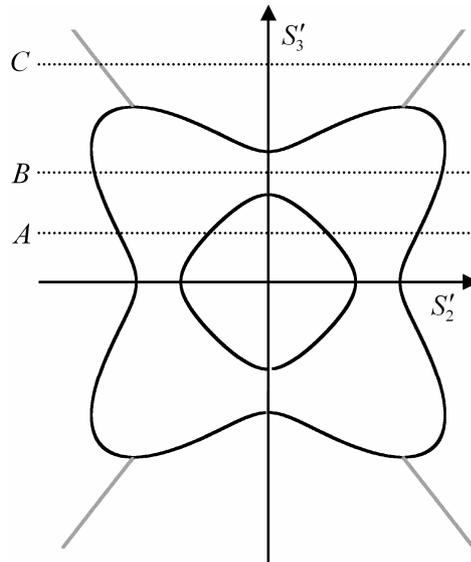


figure II-4 Projection dans le plan réel des courbes de lenteurs de phase homogènes (en noir) et hétérogènes (en gris), à la surface d'un cristal de cuivre, pour le cas d'une onde rasante.

Le polynôme de Christoffel admet, selon la valeur de S_3 , aucune racine réelle S_2 (cas C de la figure II-4), ou deux (cas B) ou quatre (cas A). Les solutions complexes correspondant au cas B sont cachées par l'axe vertical.

II.5.2 Relation entre lenteurs de phase et de l'énergie, transposée à la géométrie de notre problème

À partir des équations de l'énergie, la relation entre la lenteur de phase et la vitesse de l'énergie a été établie à la section II.4.3. Dans le cas d'une onde homogène dont la lenteur de phase est réelle, cette relation est :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{c}_e = 1. \quad (2.50)$$

Nous allons nous intéresser à la propagation des fronts d'onde à la surface d'un milieu anisotrope dont le plan coïncide avec le plan $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. La direction de propagation des fronts

d'ondes, parallèle à ce plan sera notée \mathbf{n}_φ . La relation (2.50) s'écrit alors en introduisant le module de la célérité de l'énergie c_e par :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_\varphi c_e = 1. \quad (2.51)$$

La division de l'équation (2.51) par c_e conduit à :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_\varphi = S_e. \quad (2.52)$$

Le vecteur \mathbf{n}_φ est parallèle au plan $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. La relation (2.52) peut donc être exprimée à partir de la composante de la lenteur de phase parallèle à ce plan :

$$\mathbf{S}_\parallel \cdot \mathbf{n}_\varphi = S_e. \quad (2.53)$$

Elle est valable aussi bien pour les ondes rasantes dans le plan que pour celles hors plan. La figure II-5 illustre cette relation vectorielle.

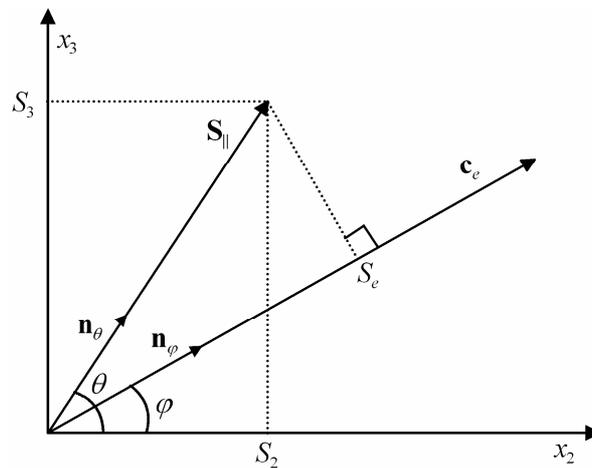


figure II-5 Relation entre la lenteur de phase et la lenteur de l'énergie pour le cas d'une onde rasante homogène.

Dans la section qui suit, un changement de variables est appliqué au polynôme de Christoffel à partir de la relation (2.53) afin de calculer les célérités de l'énergie des ondes rasantes homogènes.

II.5.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes rasantes homogènes

Il a été vu au premier chapitre que les vitesses de l'énergie pouvaient être obtenues à partir de la courbe des lenteurs de phase. Cette courbe est alors balayée en calculant à chaque fois la vitesse de l'énergie ayant pour direction la normale à cette courbe. Ainsi, avec cette méthode, pour une direction de l'espace fixée a priori, on ne connaît pas les vitesses de l'énergie correspondantes. Dans cette section, un calcul de ces vitesses pour une direction de l'énergie

donnée est présentée. Elle est appliquée, à titre d'exemple, au polynôme $\Pi_{L,TH}$ qui décrit les ondes rasantes dans le plan L et TH . La méthodologie est en tout point identique si on l'applique aux polynômes C_{in} et C_{out} .

Considérons un vecteur unitaire \mathbf{n}_φ parallèle au plan de l'interface et faisant un angle φ avec le vecteur \mathbf{x}_2 . Le but de cette section est de calculer les vitesses de l'énergie des fronts d'onde se propageant dans la direction de ce vecteur. Un paramétrage adapté à la résolution de ce problème est tout d'abord introduit. Il met en jeu la projection de la lenteur de phase à l'interface sur le vecteur \mathbf{n}_φ , notée S_n :

$$\mathbf{S}_{||} \cdot \mathbf{n}_\varphi = S_n . \quad (2.54)$$

Il est important de noter la différence entre les relations (2.53) et (2.54). Dans la première, la lenteur $\mathbf{S}_{||}$ correspond au point où la normale à la courbe des lenteurs de phase a la direction du vecteur \mathbf{n}_φ . La projection de cette lenteur sur ce vecteur est donc égale à la lenteur de l'énergie. Dans la seconde, la lenteur $\mathbf{S}_{||}$ est quelconque et la grandeur S_n ne correspond pas nécessairement à la lenteur de l'énergie. En vertu de la relation (2.46), si le vecteur $\mathbf{S}_{||}$ est complexe, sa partie imaginaire est perpendiculaire au vecteur \mathbf{n}_φ . Le paramètre S_n doit donc être imposé comme étant réel et il sera pour cela noté S'_n . Le développement de l'équation (2.54) fournit l'expression de S'_n en fonction des composantes de la lenteur de phase et de l'angle φ :

$$S'_n = S_2 \cos(\varphi) + S_3 \sin(\varphi) . \quad (2.55)$$

En introduisant l'expression de S_3 déduite de la relation précédente dans le polynôme $\Pi_{L,TH}$, défini à la relation (2.49), le nouveau polynôme obtenu peut se mettre sous la forme :

$$\Pi_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \Pi_{L,TH}^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k . \quad (2.56)$$

La symétrie ayant disparu, il est de degré 4 en S_2 et les coefficients $\Pi_{L,TH}^{(k)}$ dépendent des paramètres S'_n et φ . Cette fois, calculer les racines de ce polynôme pour une valeur de S'_n et une direction d'observation \mathbf{n}_φ données revient à rechercher les intersections de la surface des lenteurs avec la droite de normale \mathbf{n}_φ située à la distance S'_n de l'origine. Cette droite est nommée ligne d'observation. Ceci est illustré à la figure II-6 où les courbes représentent la projection dans le plan réel des courbes des lenteurs de phase. Les solutions réelles (ondes homogènes) sont représentées en noir et les solutions complexes (ondes hétérogènes) en gris. Selon les valeurs de S'_n , les solutions sont soit toutes les quatre réelles (ligne A), soit deux sont réelles et deux complexes conjuguées (ligne B) ou soit toutes les quatre complexes, deux à deux conjuguées (ligne C).

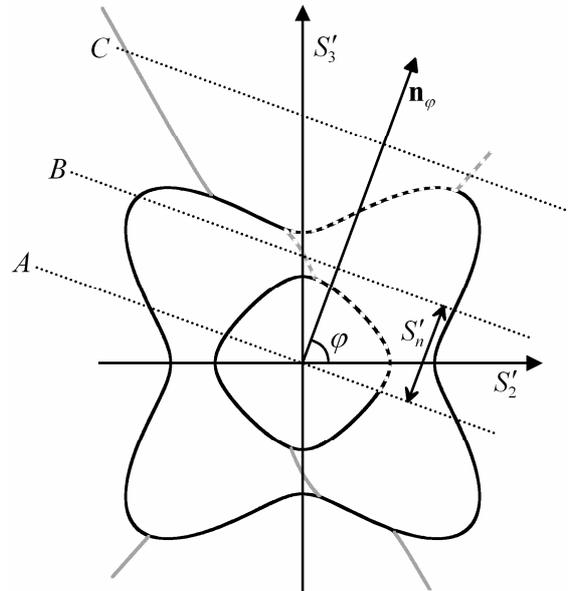


figure II-6 Parties réelles des courbes de lenteurs de phase homogènes (en noir) et hétérogènes (en gris). Les lenteurs de phase sont calculées pour différentes valeurs du paramètre S'_n le long de la direction \mathbf{n}_φ faisant un angle φ de 70° avec l'axe x_2 .

À partir du principe de Fermat introduit dans le premier chapitre, le calcul des vitesses de l'énergie associées aux racines du polynôme $\Pi_{L,TH}$ et orientées dans la direction du vecteur \mathbf{n}_φ , consiste à résoudre l'équation $\Pi_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) = 0$ sous la contrainte $dS'_2/dS'_n \rightarrow \infty$. Le calcul de la valeur absolue de cette dérivée, évaluée en fonction du paramètre S'_n , le long de la courbe en pointillés de la figure II-6 est représenté à la figure II-7.

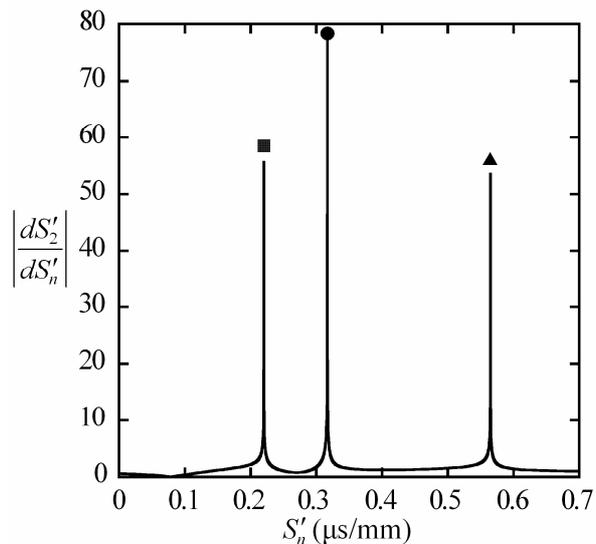


figure II-7 Évolution de la valeur absolue de la dérivée dS'_2/dS'_n en fonction de S'_n .

Trois pics infinis y sont observés. Ils correspondent à des valeurs du paramètre S'_n pour lesquels la ligne d'observation est tangente à la courbe des lenteurs de phase. Ceci est illustré à la figure II-8.

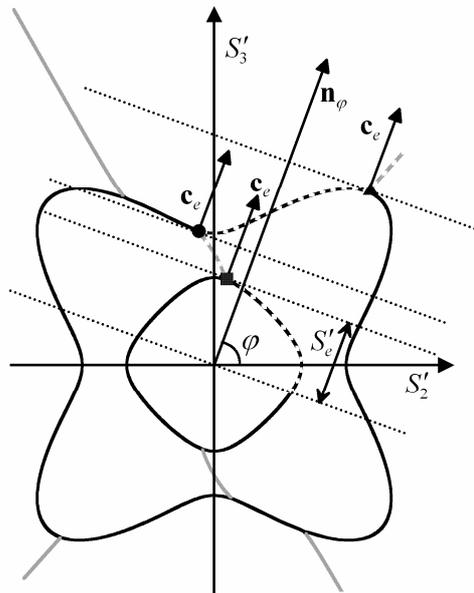


figure II-8 Parties réelles des lenteurs de phase homogène et hétérogène pour un angle φ de 70° . En fonction de l'angle d'observation φ , plusieurs célérités de l'énergie peuvent être orientées dans la même direction conduisant à une corne sur la courbe d'onde.

Pour chaque point de tangence, la normale à la courbe, qui donne la direction du transport de l'énergie, a donc la même direction que le vecteur \mathbf{n}_φ . La projection sur le vecteur \mathbf{n}_φ , des lenteurs de phase associées à ces points de tangence, S'_n , est donc la norme de la lenteur de l'énergie se propageant selon le vecteur \mathbf{n}_φ . La norme de la vitesse de l'énergie est ensuite déduite en prenant l'inverse de cette grandeur. Les trois vitesses ainsi obtenues sont superposées aux courbes des vitesses de l'énergie à la figure II-9.

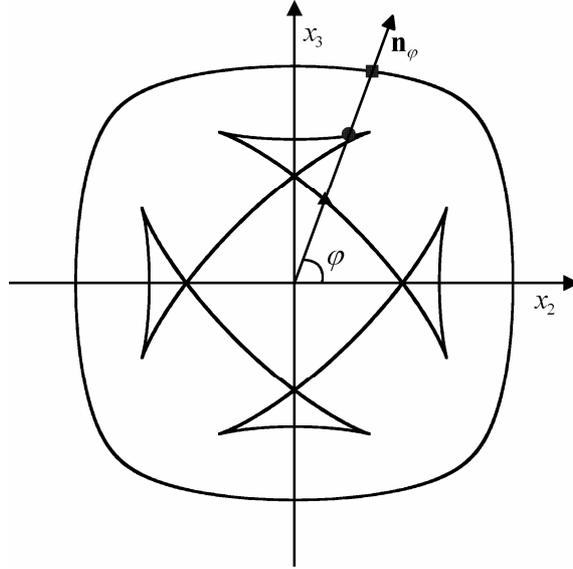


figure II-9 Superposition, sur la courbe d'ondes, des vitesses de l'énergie orientées dans la direction du vecteur \mathbf{n}_φ faisant un angle $\varphi = 70^\circ$ avec l'axe x_2 .

Le calcul des vitesses de l'énergie est donc réalisé en résolvant le système :

$$\begin{cases} \Pi_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) = 0 \\ \frac{dS'_n}{dS'_2} = 0 \end{cases}, \quad (2.57)$$

dans lequel la condition $dS'_n/dS'_2 = 0$ est analogue à celle introduite précédemment sous la forme : $dS'_2/dS'_n \rightarrow \infty$. À partir du théorème des fonctions implicites, la dérivée dS'_n/dS'_2 est exprimée, pour un angle φ donné, par :

$$\frac{dS'_n}{dS'_2} = - \frac{\partial \tilde{\Pi}_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) / \partial S'_2}{\partial \tilde{\Pi}_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) / \partial S'_n}, \quad (2.58)$$

où $\tilde{\Pi}_{L,TH}(S'_n, S_2, \varphi)$ est l'analogue de $\Pi_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2)$ mais exprimé comme un polynôme de la variable S'_n dont les coefficients dépendent de S_2 et de φ :

$$\tilde{\Pi}_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \tilde{\Pi}_{L,TH}^{(k)}(S_2, \varphi) S_n'^k. \quad (2.59)$$

Dans le cadre des ondes rasantes homogènes, la composante S_2 est réelle. Le polynôme $\tilde{\Pi}_{L,TH}$ est donc à valeurs réelles. Rechercher les zéros de la dérivée dS'_2/dS'_n revient ainsi à rechercher les zéros de $\partial \Pi_{L,TH} / \partial S'_2$. La grandeur S_2 étant réelle, on a la relation $S_2 = S'_2$. Tout comme $\Pi_{L,TH}$, $\partial \Pi_{L,TH} / \partial S'_2$ est un polynôme de la variable S_2 . Rechercher les solutions du système (2.57) revient à calculer les racines de la résultante des polynômes $\Pi_{L,TH}$ et $\partial \Pi_{L,TH} / \partial S'_2$. Cette résultante est un polynôme de degré six en $S_n'^2$ dont les coefficients dépendent des constantes de rigidité et de l'angle φ . Les solutions de la résultante peuvent

être complexes, seules les solutions réelles sont retenues. La norme des vitesses de l'énergie, solutions du problème, correspondent à l'inverse des racines carrées de ces solutions.

Selon le même procédé, les vitesses de l'énergie des ondes rasantes dans le plan et hors plan sont calculées en faisant varier l'angle φ sur 360° . Pour les ondes rasantes dans le plan, elles peuvent être obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} C_{in}(S'_n, S_2, \varphi) = 0 \\ \frac{\partial C_{in}}{\partial S'_2} = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Cependant la résultante des deux polynômes du système (2.60) est un polynôme de la variable $S_n'^2$ de degré 15. Afin de simplifier les calculs, ce système est décomposé en deux sous systèmes faisant intervenir les polynômes $\Pi_{L,TH}$ et Π_{TV} :

$$\begin{cases} \Pi_{L,TH}(S'_n, S_2, \varphi) = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{L,TH}}{\partial S'_2} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Pi_{TV}(S'_n, S_2, \varphi) = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{TV}}{\partial S'_2} = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

La résultante issue du premier système est, comme cela a été vu précédemment, un polynôme de la variable $S_n'^2$ de degré 6. Celle issue du deuxième système est un polynôme de la variable $S_n'^2$ de degré 4. Pour chaque angle φ , les racines de ces résultantes sont calculées. Les vitesses de l'énergie sont obtenues à partir des solutions réelles. Trois types de solutions sont ainsi obtenues, une onde plane longitudinale (L) et deux ondes planes transversales, l'une à polarisation dans le plan (TH) et l'autre à polarisation perpendiculaire au plan (TV). Leurs courbes sont représentées à la figure II-10.

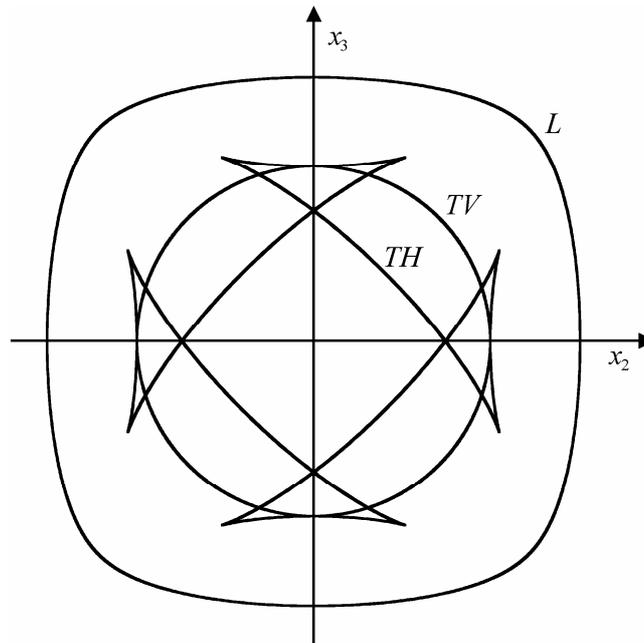


figure II-10 Vitesses de l'énergie des ondes rasantes dans le plan homogène.

De la même manière les vitesses de l'énergie des ondes rasantes hors plan sont calculées en résolvant le système :

$$\begin{cases} C_{\text{out}}(S'_n, S_2, \varphi) = 0 \\ \frac{dS'_n}{dS_2} = 0 \end{cases}, \quad (2.62)$$

pour des angles φ compris entre 0° et 360° . Les courbes des vitesses de l'énergie ainsi obtenues sont représentées à la figure II-11.

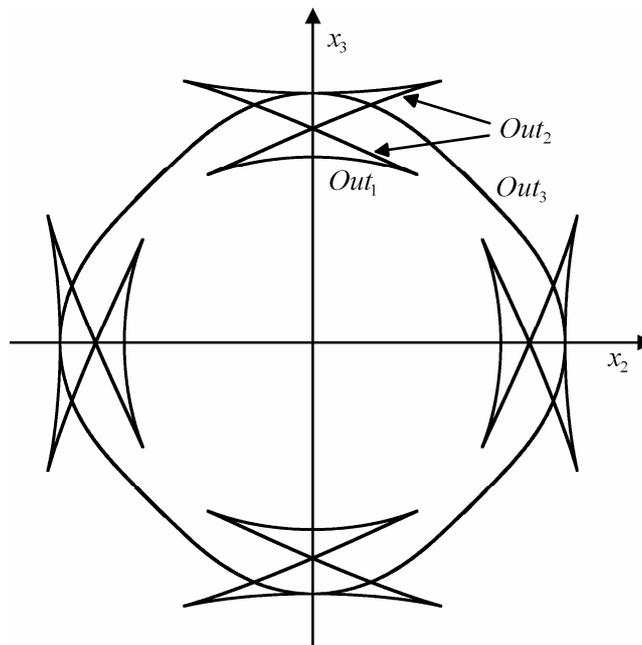


figure II-11 Vitesses de l'énergie des ondes rasantes hors plan hétérogènes.

Les différents modes, Out_1 , Out_2 et Out_3 sont repérés de manière à les relier aux courbes des lenteurs de phase présentées dans la section II.3.2.

On peut remarquer, sur la représentation tridimensionnelle de la réponse élastodynamique introduite dans le premier chapitre, qu'un front d'onde prolonge la corne de l'onde rasante homogène TH . Ceci n'apparaît pas sur la courbe des vitesses de l'énergie. Les ondes rasantes homogènes ne permettent donc qu'une description partielle des phénomènes physiques. Afin de compléter cette description, le concept d'onde plane hétérogène est introduit et développé dans la section qui suit.

II.6 Onde plane de volume hétérogène

Dans cette section, le concept d'onde plane hétérogène est introduit. Le calcul des vitesses de l'énergie de telles ondes, basé sur le principe de Fermat approché, est présenté. Il est appliqué aux ondes *TH*. Les vitesses ainsi obtenues sont dans la continuité des cornes observées sur la courbe des vitesses de l'énergie. Elles offrent ainsi une description plus complète des fronts d'onde apparaissant dans la réponse élastodynamique. Cette méthode ne peut cependant pas être appliquée aux ondes rasantes hors plan.

II.6.1 Onde hétérogène, bivecteur

Dans de nombreux problèmes, le concept d'ondes homogènes est restrictif et il est souvent nécessaire d'introduire la notion d'ondes planes hétérogènes pour obtenir une compréhension plus approfondie des phénomènes physiques. Toutefois, ce n'est qu'à partir des trente dernières années que ce concept a été exploité, en géophysique [Buchen (1971); Borchardt (1973)] et en électromagnétisme [Cuvelier et Billard (1973); Lefèvre et Montel (1973); Cuvelier et Billard (1978); Hayes (1987)] puis en acoustique [Cooper et Reiss (1966); Frisk (1979); Hayes (1984); Poirée (1984); Deschamps (1991)].

La définition du champ de déplacement d'une onde hétérogène, en tout point \mathbf{M} et à tout instant t , est donnée par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, t) = \Re \left(A \mathbf{P} e^{i(\omega t - \mathbf{S} \cdot \mathbf{M})} \right) \quad (2.63)$$

où $\Re(\cdot)$ indique la partie réelle d'une quantité complexe. Ce champ de déplacement est caractérisé par la présence de deux vecteurs complexes : la polarisation \mathbf{P} et la lenteur de phase \mathbf{S} . Hamilton utilisa le terme « bivecteur » pour définir ce type de vecteur : $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + i \mathbf{v}''$, constitué de deux vecteurs réels : \mathbf{v}' et \mathbf{v}'' [Hamilton (1853)]. Gibbs montra que pour chaque bivecteur, il peut être associé une ellipse ayant pour centre l'origine commune des vecteurs \mathbf{v}' et \mathbf{v}'' et pour laquelle ces deux vecteurs constituent une paire de semi diamètres [Gibbs (1961); Hayes (1980)]. Ainsi de telles ondes régissent un déplacement elliptique de la matière, traduit par leur vecteur polarisation complexe. Une polarisation rectiligne est décrite par un vecteur \mathbf{P} réel (A pouvant rester complexe). Le bivecteur lenteur $\mathbf{S} = \mathbf{S}' + i \mathbf{S}''$ définit quant à lui les plans de phase constante : $\mathbf{S}' \cdot \mathbf{M} = c^{te}$, les plans d'amplitude constante : $\mathbf{S}'' \cdot \mathbf{M} = c^{te}$, le vecteur propagation \mathbf{S}' et l'amortissement \mathbf{S}'' . En effet, en développant l'expression de ce vecteur dans la relation (2.63) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, t) = \Re \left(A \mathbf{P} e^{\mathbf{S}'' \cdot \mathbf{M}} e^{i(\omega t - \mathbf{S}' \cdot \mathbf{M})} \right), \quad (2.64)$$

on constate que le vecteur \mathbf{S}' joue le rôle de la lenteur de phase telle qu'elle a été présentée pour une onde plane homogène et que le vecteur \mathbf{S}'' impose une diminution de l'amplitude

lorsque le produit $\mathbf{S}'' \cdot \mathbf{M}$ est négatif. En introduisant le repère $(O, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_h)$, la lenteur de phase se met sous la forme (figure II-12) :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + i\mathbf{S}'' = S' \mathbf{n}_\theta + i e \mathbf{n}_\theta + i h \mathbf{n}_h. \quad (2.65)$$

Les nombres réels e et h désignent respectivement l'indice d'extinction et la composante évanescente aussi appelée coefficient d'hétérogénéité. On constate sur la figure II-12 que les plans équiphases, de normale \mathbf{S}' , sont distincts des plans équiampplitudes, de normale \mathbf{S}'' .

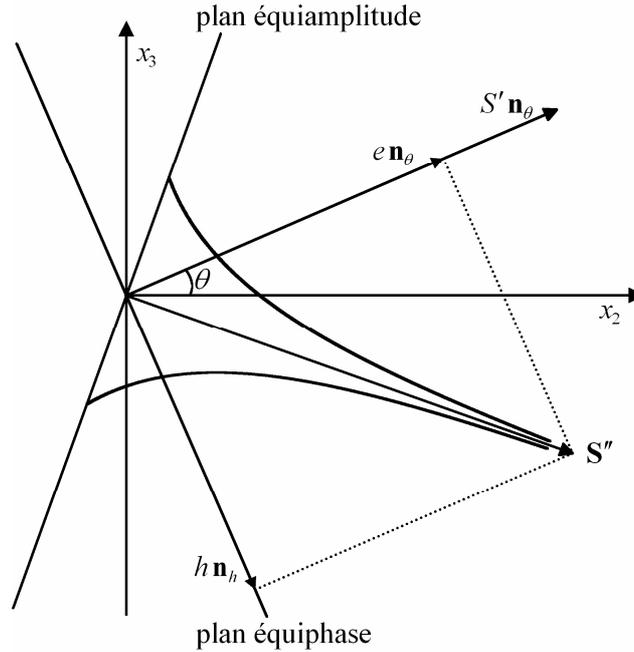


figure II-12 Définition de la lenteur de phase d'une onde plane hétérogène.

II.6.2 Bilan énergétique

Les calculs amenant à la relation entre la lenteur de phase et la vitesse de l'énergie présentés à la section II.4.3 sont appliqués ici au cas d'une onde plane hétérogène. Le vecteur lenteur de phase est donc considéré complexe : $\mathbf{S} = \mathbf{S}' + i\mathbf{S}''$. Les résultats obtenus sont valables pour un milieu non absorbant. Un tel milieu est caractérisé par des composantes du tenseur des rigidités réelles.

En multipliant l'équation de Christoffel par le conjugué du champ de déplacement, l'équation faisant intervenir l'énergie cinétique est obtenue :

$$\mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{J} \rangle = 2 \langle e_c \rangle. \quad (2.66)$$

Une deuxième équation provient de la multiplication de la loi de Hooke par le conjugué du tenseur des déformations. Il en découle l'expression suivante :

$$\bar{\mathbf{S}} \cdot \langle \mathbf{J} \rangle = 2 \langle e_p \rangle. \quad (2.67)$$

La sommation des équations (2.66) et (2.67) ainsi que l'expression de la vitesse de l'énergie en fonction du vecteur de Poynting et de l'énergie totale du système $\mathbf{c}_e = \langle \mathbf{J} \rangle / \langle e_c + e_p \rangle$ donnent la relation entre la partie réelle de la lenteur de phase et la vitesse de l'énergie :

$$\mathbf{S}' \cdot \mathbf{c}_e = 1. \quad (2.68)$$

La différence de ces deux équations donne la relation entre la partie imaginaire de la lenteur de phase et la vitesse de l'énergie :

$$\mathbf{S}'' \cdot \mathbf{c}_e = 0. \quad (2.69)$$

Des relations similaires sont présentées aux références suivantes [Synge (1956a); Buchen (1971); Hayes (1980)]. La multiplication des équations (2.68) et (2.69) par l'inverse du module du vecteur \mathbf{c}_e , S_e , ainsi que l'orthogonalité de la composante normale de la lenteur de phase avec la célérité de l'énergie qui est parallèle au plan de l'interface, conduisent aux deux expressions suivantes :

$$\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = S'_e \quad \text{et} \quad \mathbf{S}''_{\parallel} \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = 0. \quad (2.70)$$

On constate que, pour un milieu non absorbant, la direction d'atténuation de l'onde est normale à la direction de propagation de l'énergie. Ces relations vectorielles sont illustrées à la figure II-13.

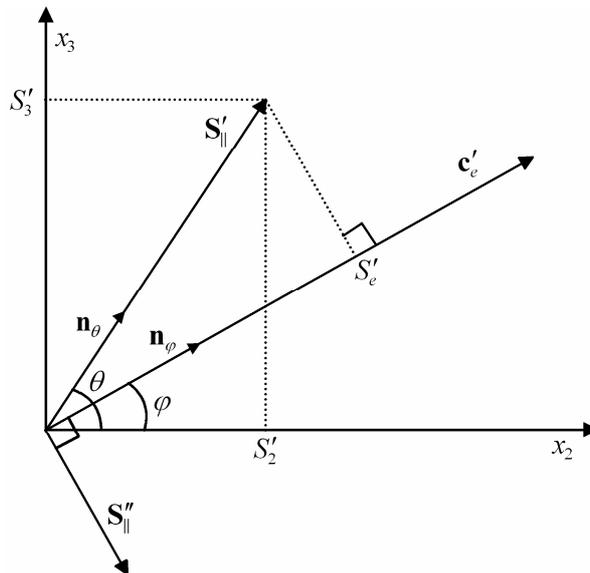


figure II-13 Relation entre la lenteur de phase et la lenteur de l'énergie pour le cas d'une onde plane hétérogène.

II.6.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes rasantes hétérogènes

La méthodologie de recherche des vitesses de l'énergie des ondes hétérogènes est identique à celle appliquée au cas des ondes homogènes. Les vitesses de l'énergie se propageant dans la direction du vecteur \mathbf{n}_φ faisant un angle φ avec le vecteur \mathbf{x}_2 sont recherchées. La projection sur cette direction, S_n , de la lenteur de phase parallèle à l'interface est introduite :

$$\mathbf{S}_{\parallel} \cdot \mathbf{n} = S_n. \quad (2.71)$$

La partie imaginaire de la lenteur de phase étant perpendiculaire au vecteur \mathbf{n}_φ , la projection est une grandeur réelle qui sera notée S'_n . Son expression en fonction de l'angle de propagation φ donnée par :

$$S'_n = S_2 \cos(\varphi) + S_3 \sin(\varphi) \quad (2.72)$$

est identique à celle de l'équation (2.55). Les vitesses de l'énergie sont calculées pour l'onde hétérogène TH . Les calculs opérés dans cette section portent donc sur le polynôme $\Pi_{L,TH}$. Le changement de variables en S_3 appliqué à ce polynôme à partir de la relation (2.72) conduit au même polynôme que celui introduit à la section II.5.3.

On constate à la figure II-10 un arrêt brutal de la propagation du front de l'onde TH au niveau de la corne de la courbe des vitesses de l'énergie. En ce point, deux fronts d'onde se rejoignent et la concentration d'énergie y est importante. Des résultats expérimentaux, qui seront exposés dans le quatrième chapitre, montrent que ces deux ondes interfèrent lorsqu'elles se rejoignent pour donner naissance à une troisième onde. Cette dernière n'est pas décrite par la théorie des ondes planes homogènes. Afin de comprendre comment évoluent les solutions du polynôme $\Pi_{L,TH}$ au niveau de cette corne, les courbes des lenteurs de phase de l'onde longitudinale et de l'onde transversale TH obtenues pour des angles φ de 70° , 63.8° et 60° sont représentées à la figure II-14.

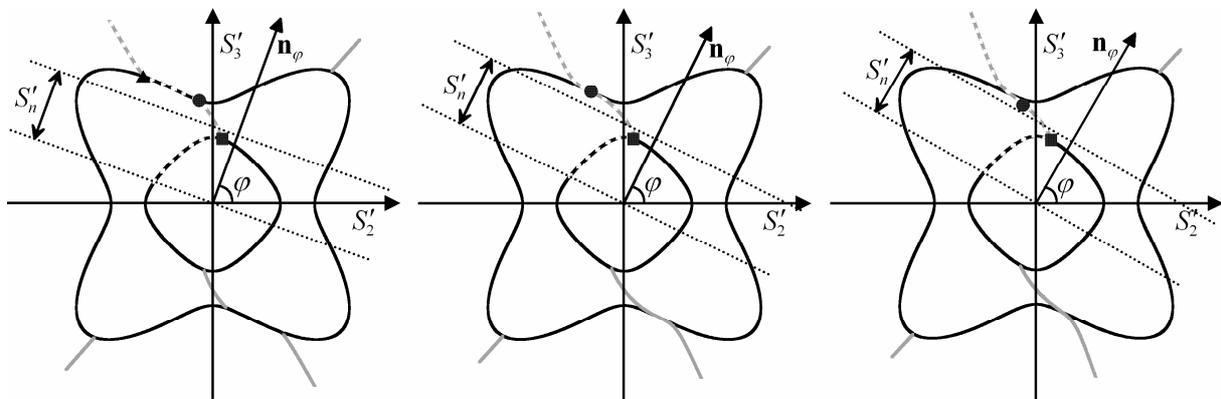


figure II-14 Lenteurs de phase calculées pour des angles d'observation φ de 70° , 63.8° et 60° .

Pour un angle φ de 70° , la ligne d'observation est tangente aux courbes en quatre points. Trois points sont représentés sur la figure : un carré pour l'onde longitudinale, un triangle et un rond pour l'onde transversale. Un point de tangence est caractérisé par la jonction de deux solutions réelles qui deviennent ainsi une solution double du polynôme. Cette solution dégénère ensuite en deux solutions complexes conjuguées. Le long de la courbe en pointillés, on constate que la nature des lenteurs de phase alterne entre solutions réelles et complexes à chaque point de tangence. La valeur absolue de la dérivée dS'_2/dS'_n calculée le long de cette courbe en fonction du paramètre S'_n présente des pics infinis qui correspondent à ces points. Ce sont les seules solutions réelles pour lesquelles la vitesse de l'énergie est orientée dans la direction du vecteur \mathbf{n}_φ . Ceci illustre une nouvelle fois le principe de Fermat. Lorsque l'on diminue l'angle φ , la partie de courbe réelle située entre les deux points de tangence du mode transversal diminue et devient ponctuelle pour une valeur de 63.8° . Ce point correspond à un point d'inflexion de la courbe qui est caractéristique des matériaux anisotropes. La vitesse de l'énergie associée est située à la pointe de la corne représentée à la figure II-16 et les deux pics infinis de la dérivée observés pour l'angle de 70° n'en forment à présent qu'un (figure II-15).

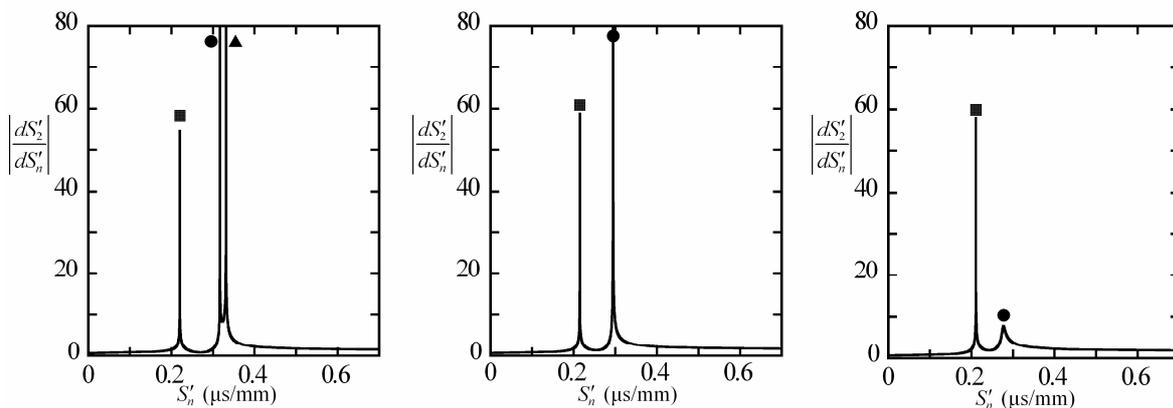


figure II-15 Calcul de la valeur absolue des dérivées dS'_2/dS'_n en fonction de S'_n le long des contours en pointillés définis à la figure II-14.

Pour un angle inférieur à 63.8° , à titre d'exemple il a été choisi un angle de 60° , la courbe des lenteurs de l'onde transversale ne présente plus de point de tangence dans la zone qui nous intéresse. Le tracé de la dérivée calculée le long des pointillés ne révèle donc plus de pic infini et il n'existe pas de solution réelle susceptible d'avoir sa vitesse de l'énergie orientée dans la direction du vecteur \mathbf{n}_φ . Cependant tel que le problème a été posé, la partie imaginaire de toutes les solutions complexes est perpendiculaire au vecteur \mathbf{n}_φ . La vitesse de l'énergie qui leur est associée est donc parallèle à ce vecteur. Il existe ainsi une infinité de solutions ayant leur vitesse de l'énergie correctement orientée. Le tracé de la dérivée présente un maximum, associé à une de ces solutions complexes témoignant d'une concentration d'énergie. La

lenteur de l'énergie correspondant à ce maximum est celle d'un front d'onde qui prédomine les autres. On constate que la célérité qui lui est associée est dans la continuité de la corne (figure II-16). Ce résultat a été introduit dans le premier chapitre sous le nom de principe de Fermat approché.

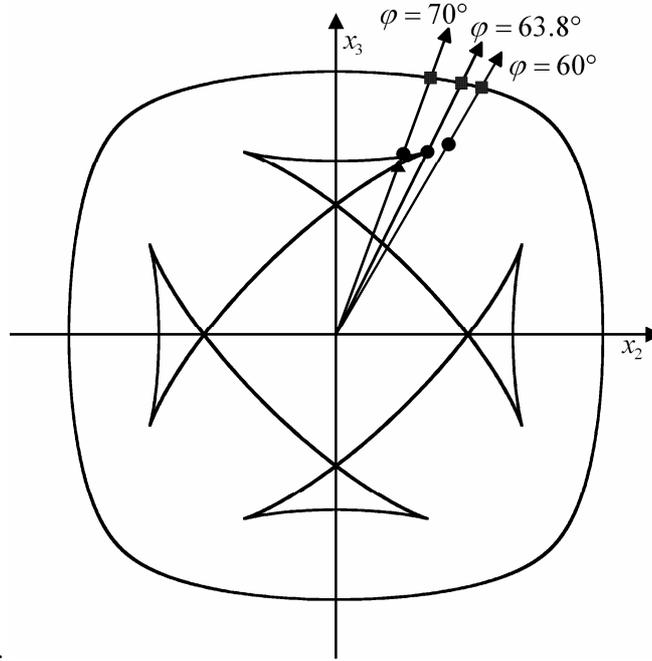


figure II-16 Vitesses de l'énergie obtenues à partir des pics de la valeur absolue de la dérivée dS'_2/dS'_n de la figure II-15.

Les vitesses de l'énergie situées dans la continuité de la corne et associées à des lenteurs de phase complexes sont calculées pour différents angles φ en résolvant le système :

$$\begin{cases} \Pi_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) = 0 \\ \frac{d^2 S'_2}{dS_n'^2} = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

L'expression de la dérivée $d^2 S_2/dS_n'^2$ est donnée dans l'annexe C. La dérivée $d^2 S'_2/dS_n'^2$ est obtenue en prenant la partie réelle de la précédente. Ce résultat est démontré dans l'annexe D. Contrairement aux ondes homogènes, cette dérivée n'est pas explicitée sous la forme d'un polynôme de la variable S_2 si bien qu'il n'est pas possible de calculer la résultante du système (2.73). Ce système composé d'une équation complexe et d'une équation réelle est résolu numériquement par la méthode de Gauss. Les solutions du système (2.73), correspondant à des ondes planes TH hétérogènes, sont dans le prolongement des cornes et complètent la description des fronts d'onde incomplète lorsque l'on ne considère que les ondes planes homogènes. Elles sont représentées en gris à la figure II-17.

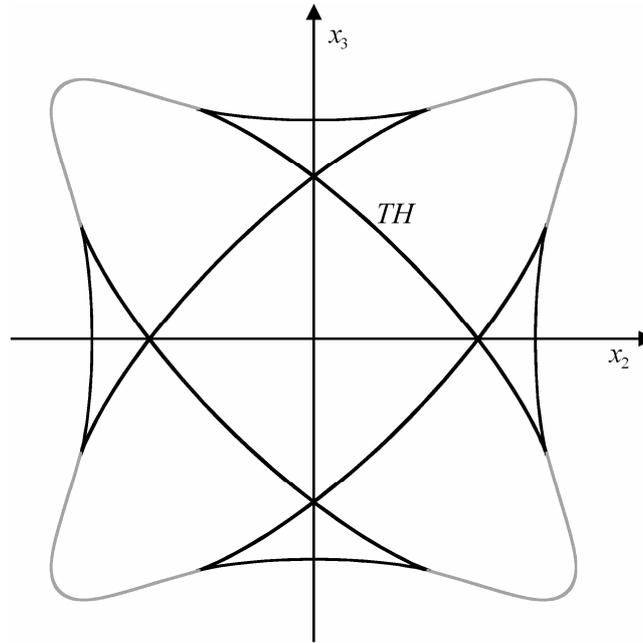


figure II-17 Vitesses de l'énergie de l'onde *TH* hétérogène représentées en gris. Ces vitesses sont dans le prolongement des cornes formées par les vitesses de l'énergie de l'onde *TH* homogène représentées en noir.

Les ondes rasantes hors plan sont caractérisées par une atténuation parallèle au plan de l'interface. Le vecteur lié à cette atténuation, qui correspond à la partie imaginaire de la lenteur de phase \mathbf{S}'' , est perpendiculaire à la direction de propagation de l'énergie. Tel que le problème est posé, le vecteur \mathbf{S}'' est donc parallèle au plan perpendiculaire à cette direction et il n'est donc pas nécessairement parallèle au plan de l'interface. Les solutions obtenues par notre calcul peuvent alors avoir une atténuation dans la profondeur du milieu ce qui est incompatible avec ce type d'ondes. Ce calcul n'est donc pas applicable aux ondes rasantes hors plan.

II.7 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont comparés à la représentation tridimensionnelle calculée dans le premier chapitre à partir de la fonction de Green. Elle illustre le déplacement normal d'une surface soumise à une source ponctuelle et perpendiculaire en régime d'ablation. Pour un tel régime, l'onde *TV* dont la polarisation est perpendiculaire à l'interface n'est pas excitée. Le front de cette onde n'est donc pas décrit par la réponse élastodynamique. Seules les ondes *L* et *TH* sont donc représentées à la figure II-18.



figure II-18 Comparaison des vitesses de l'énergie des ondes rasantes dans le plan homogènes avec la réponse élastodynamique calculée par la fonction de Green.

On constate une bonne correspondance entre les deux résultats. On remarque que l'onde *TH* n'est pas totalement décrite par le calcul de la fonction de Green. La partie qui n'apparaît pas a en effet une amplitude trop faible par rapport à l'ensemble de la réponse pour être visible.

Les courbes des vitesses de l'énergie des ondes rasantes homogènes hors plan sont comparées à la réponse élastodynamique à la figure II-19.

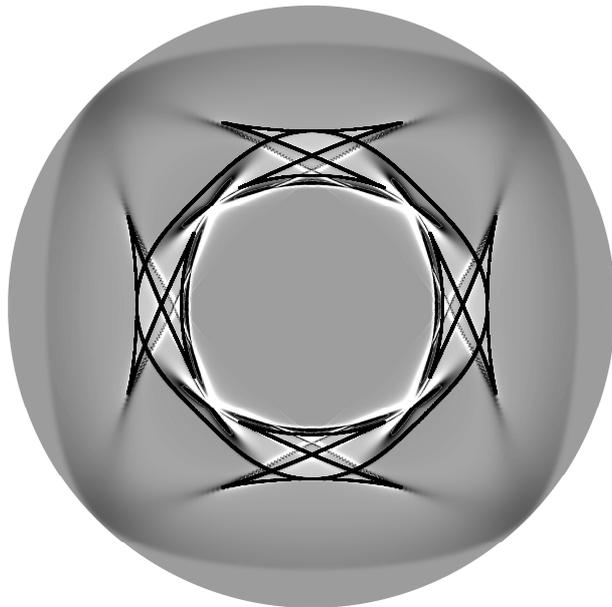


figure II-19 Comparaison des vitesses de l'énergie des ondes rasantes hors plan homogènes avec la réponse élastodynamique calculée par la fonction de Green.

Enfin, les vitesses de l'énergie des ondes rasantes dans le plan, homogènes et hétérogènes sont superposées à la réponse élastodynamique à la figure II-18.

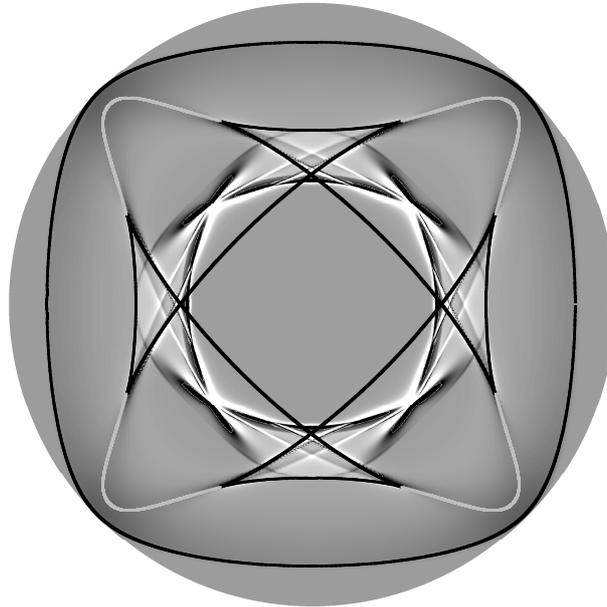


figure II-20 Comparaison des vitesses de l'énergie des ondes rasantes dans le plan homogènes (en noir) et hétérogènes (en gris) avec la réponse élastodynamique calculée par la fonction de Green.

Les vitesses de l'onde TH hétérogène représentées en gris décrivent correctement le front d'onde apparaissant sur la réponse élastodynamique dans la continuité de la corne.

II.8 Conclusion

Les vitesses de l'énergie des ondes latérales homogènes parallèles à la surface d'un cristal de cuivre ont été calculées à partir du principe de Fermat. Ce calcul ne décrivant pas l'ensemble des vitesses des fronts d'onde se propageant, la notion d'onde plane hétérogène a été introduite. Les vitesses de l'énergie de ces ondes particulières sont obtenues en considérant le principe de Fermat approché introduit au premier chapitre. Bien que ce calcul soit adapté aux ondes latérales dans le plan, il ne permet pas le calcul des vitesses de l'énergie des ondes latérales hétérogènes hors plan. Les résultats ainsi obtenus présentent une bonne concordance avec ceux provenant du calcul de la fonction de Green.

- Chapitre III -

Rayons complexes appliqués aux ondes de Rayleigh

I.1 Introduction.....	77
I.2 Onde de Rayleigh.....	77
I.3 Polynôme de Rayleigh	79
I.3.1 Équation de Christoffel	80
I.3.2 Condition de surface libre	81
I.3.3 Expression du polynôme de Rayleigh.....	84
I.3.4 Solutions du polynôme de Rayleigh	87
I.4 Relations énergétiques.....	91
I.4.1 Énergie potentielle	92
I.4.2 Énergie cinétique	92
I.4.3 Relation entre la lenteur de phase et la partie réelle du vecteur de Poynting	93
I.5 Onde de Rayleigh homogène.....	94
I.5.1 Relation entre lenteur de phase et lenteur de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène	95
I.5.2 Polynôme de Rayleigh	97
I.5.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogènes	99
I.6 Onde de Rayleigh hétérogène	107
I.6.1 Relation entre la lenteur de phase et la direction de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène et de la pseudo onde de Rayleigh	107
I.6.2 Calcul des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène et de la pseudo onde de Rayleigh.....	109
I.7 Synthèse des résultats	119
I.8 Conclusion	121

III.1 Introduction

Ce chapitre reprend la méthodologie de calcul des vitesses de l'énergie des ondes planes homogènes et hétérogènes introduite dans le deuxième chapitre et appliquée ici à l'onde de Rayleigh et à la pseudo onde de Rayleigh. Ce sont deux ondes de surface qui doivent vérifier l'équation de Christoffel ainsi qu'une condition limite à la surface. Le polynôme de Rayleigh est construit en couplant ces deux équations. Il est l'analogue, pour les ondes de surface, du polynôme de Christoffel. En appliquant à ce polynôme un changement de variable basé sur les équations énergétiques, les vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogène et hétérogène ainsi que celles de la pseudo onde de Rayleigh sont calculées en appliquant, selon le cas, le principe de Fermat ou le principe de Fermat approché.

III.2 Onde de Rayleigh

La capacité que possède la surface d'un milieu semi-infini isotrope à prendre en charge la propagation des ondes acoustiques a été démontrée pour la première fois par Rayleigh [Rayleigh (1885)]. Il décrit dans ce papier la nature des implications mécaniques qui leur sont relatives, note leur analogie avec l'effet des vagues sur la mer et montre que leur vitesse est de 10% plus faible que celles des ondes transversales se propageant dans le même milieu. Il conjecture aussi que ces ondes pourraient avoir un rôle important dans les tremblements de terre et dans les collisions des solides élastiques.

La propagation de ces ondes lors d'un tremblement de terre est à présent avérée. Lorsqu'un tremblement de terre se produit, deux types principaux d'ondes de vibrations se propagent dans la terre à partir de l'épicentre : les ondes de compression (ondes longitudinales) et les ondes de cisaillement (ondes transversales). Lorsque ces deux ondes atteignent la surface de la Terre, elles donnent naissance à un troisième type appelé onde de surface qui se divise en deux catégories : les ondes de Love et les ondes de Rayleigh.

L'onde de Rayleigh présenta ainsi dans un premier temps un grand intérêt pour les géophysiciens et les sismologues. En comparaison, l'utilisation de cette onde dans l'appareillage électronique est plus récente. Elle émane de la création du radar durant la seconde guerre mondiale. Depuis, un grand nombre d'appareillages utilisant cette onde ont vu leur apparition : du radar et des systèmes de communication professionnels, aux téléviseurs et téléphones portables. Des applications de l'onde de Rayleigh en électronique sont données, pour les plus récentes, aux références : [Lewis (1995); Morgan (1998)]. Tout comme les ondes de volume, l'onde de Rayleigh est également utilisée en caractérisation des matériaux,

en contrôle non destructif pour détecter par exemple la présence de fissures à la surface d'une structure.

La propagation de l'onde de Rayleigh à la surface d'un milieu semi infini anisotrope est décrite par l'équation de Christoffel couplée à la condition de surface libre (les contraintes normales à la surface sont nulles). L'amplitude de cette onde a la propriété de décroître exponentiellement dans la profondeur du milieu. Initialement, son champ de déplacement était décrit comme la sommation du champ de trois ondes ayant chacune un coefficient d'atténuation q_n réel [Gold (1956)] :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, t) = \sum_{n=1}^3 A_n \mathbf{P}_n e^{-q_n x_1} e^{i\omega(t - \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{M}_n)} . \quad (3.1)$$

Cette sommation porte sur les trois modes solutions de l'équation de Christoffel, c'est à dire une onde longitudinale et deux ondes transversales. Synge et Gazis et al. introduisirent l'onde de Rayleigh généralisée en considérant un coefficient d'atténuation complexe [Synge (1956b); Gazis et al. (1960)]. L'onde de Rayleigh est alors décrite comme la somme de trois ondes partielles hétérogènes. Chacun de ces trois modes est caractérisé par une composante normale de la lenteur de phase complexe. Son champ de déplacement est exprimé sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{P}(x_1) e^{i\omega(t - \mathbf{S}_\parallel \cdot \mathbf{M}_\parallel)} . \quad (3.2)$$

Le vecteur amplitude $\mathbf{P}(x_1)$ correspond à la sommation des trois modes partiels :

$$\mathbf{P}(x_1) = \sum_{n=1}^3 A_n \mathbf{P}_n e^{-i\omega \eta_n x_1} . \quad (3.3)$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\eta}_n$, \mathbf{S}_\parallel et \mathbf{M}_\parallel sont représentés à la figure III-1.

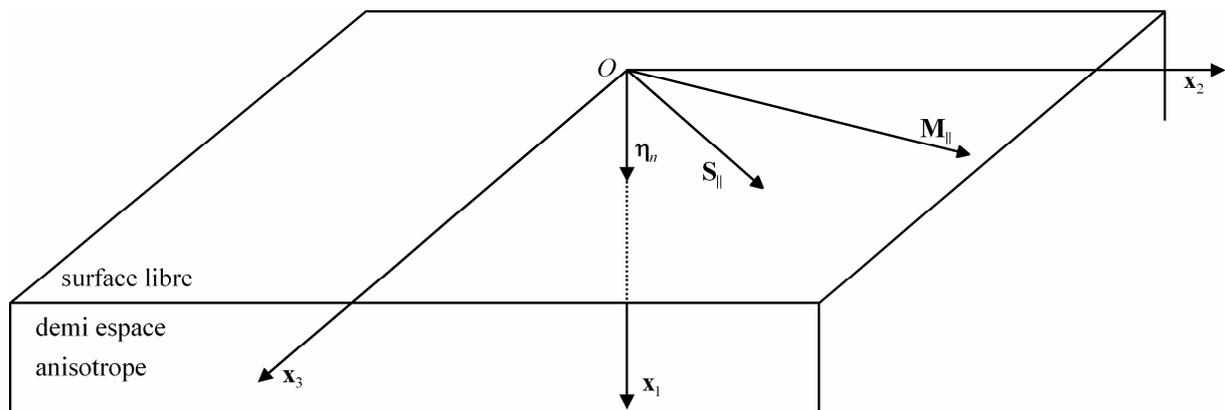


figure III-1 Composantes des lenteurs de phase de l'onde de Rayleigh se propageant à la surface d'un milieu semi infini.

L'atténuation de l'onde de Rayleigh provient de la partie imaginaire négative de la composante normale η_n . Chaque mode correspond donc à une onde plane hétérogène. Cependant, lorsque le vecteur lenteur de phase à la surface $S_{||}$ est réel, l'onde de Rayleigh est homogène car il n'y a pas d'atténuation dans la direction de sa propagation. Cette notion est introduite afin de différencier cette onde de l'onde de Rayleigh hétérogène présentée par la suite.

III.3 Polynôme de Rayleigh

Rayleigh fut le premier à étudier les ondes de surface et il examina leur propagation pour un demi espace isotrope. Pendant la période allant de 1972 à 1985, de nombreux papiers parurent permettant de répondre à un problème ouvert portant sur la théorie des ondes de surface dont l'intitulé était : 'Given a linear elastic half-space of arbitrary anisotropy, are there directions in the half-space boundary for which steady subsonic Rayleigh wave propagation is not possible?'. En 1956, Synge avait considéré ce problème et avait montré que la détermination de la vitesse de Rayleigh correspondait à l'annulation du déterminant d'une matrice complexe de dimension 3×3 [Synge (1956b)]. Il conclut incorrectement à l'existence de seulement quelques directions pour lesquelles les solutions donnant la vitesse de l'onde sont réelles. Stroh, à partir du formalisme qui porte son nom, montra que le déterminant introduit par Synge pouvait se mettre sous une forme réelle [Stroh (1962)]. En se basant sur les travaux de Stroh, Barnett et al. prouvèrent que lorsqu'une onde de surface existe, sa vitesse est unique [Barnett et al. (1973)]. La preuve de l'existence fut donnée par la suite par Barnett et Lothe [Barnett et Lothe (1974)]. Un article plus récent prouve l'unicité de la vitesse de l'onde de Rayleigh indépendamment du formalisme de Stroh [Mielke et Fu (2004)].

En parallèle, des efforts ont été réalisés pour mettre sous la forme d'un polynôme, l'équation définissant la vitesse de l'onde de Rayleigh. C'est un polynôme de degré 3, ayant pour variable le carré de la vitesse c , dans le cas d'un milieu isotrope. Le problème se complique rapidement en réduisant la symétrie du milieu. Le cas d'une anisotropie générale semble avoir été analysé en premier par [Taylor et Currie (1979); Taylor (1981)] où il est montré que l'équation a 27 racines. Cette équation est mise sous la forme d'un polynôme de degré 27 de la variable c^2 en utilisant le formalisme de Stroh [Taziev (1989)]. Afin d'obtenir le même type d'équations, Destrade développa une méthode efficace basée sur les intégrales premières [Yu (1983)] des composantes de traction [Destrade (2001a), (2001b)]. Plus récemment, Ting montra comment obtenir un grand nombre d'équations à partir d'une procédure simple [Ting (2002a), (2002b)].

Pour un milieu semi infini avec un plan de symétrie à la surface, le polynôme déduit de l'équation de Rayleigh est de degré 12 en c^2 . Il est établi par Taziev [Taziev (1987)] en

exprimant l'équation du mouvement en fonction du vecteur traction normal. La démarche qu'il utilise pour calculer ce polynôme est présentée dans les sections qui suivent. Les deux premières décrivent l'équation de Christoffel et la condition de surface libre sous la forme de polynômes de la même variable. Le polynôme de Rayleigh est obtenu en prenant leur résultante. Sa forme initiale est ensuite modifiée afin de l'adapter à notre problème et de l'utiliser par la suite.

III.3.1 Équation de Christoffel

Il a été vu dans le chapitre 2 que l'équation de Christoffel peut se mettre sous la forme :

$$\eta^6 + p_4 \eta^4 + p_2 \eta^2 + p_0 = 0, \quad (3.4)$$

avec $p_4 = -\tilde{\Sigma}$, $p_2 = \tilde{\Delta}$ et $p_0 = -\tilde{\Pi}$. Les racines de cette équation sont notées η_1^2 , η_2^2 et η_3^2 . Leurs combinaisons linéaires, appelées fonctions symétriques élémentaires, sont reliées aux coefficients de l'équation (3.4) par les relations :

$$\tilde{\Sigma} = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2, \quad (3.5)$$

$$\tilde{\Delta} = \eta_1^2 \eta_2^2 + \eta_1^2 \eta_3^2 + \eta_2^2 \eta_3^2, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\Pi} = \eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2. \quad (3.7)$$

En introduisant les fonctions :

$$X(\eta_n) = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad (3.8)$$

$$Y(\eta_n) = \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3, \quad (3.9)$$

et :

$$Z(\eta_n) = \eta_1 \eta_2 \eta_3, \quad (3.10)$$

deux relations peuvent alors être obtenues :

$$X(\eta_n)^2 - 2Y(\eta_n) - \tilde{\Sigma} = 0, \quad (3.11)$$

et :

$$Y(\eta_n)^2 - 2Z(\eta_n)X(\eta_n) - \tilde{\Delta} = 0. \quad (3.12)$$

Ces dernières, dont les solutions vérifient l'équation de Christoffel, seront par la suite couplées à la condition de surface libre afin d'obtenir le polynôme de Rayleigh.

III.3.2 Condition de surface libre

Le milieu étudié est semi infini orthotrope. Sa surface correspond à un plan principal et elle est considérée libre. Cette dernière hypothèse s'exprime par l'annulation des contraintes normales qui lui sont appliquées. En utilisant le système d'axes introduit dans les chapitres précédents, le vecteur contrainte normal $\boldsymbol{\sigma}_1$ est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

avec :

$$\sigma_{1j} = \sum_{n=1}^3 A_n \sigma_{1j}^{(n)}, \quad (3.14)$$

où les composantes A_n sont celles du vecteur amplitude \mathbf{A} . Afin de coupler la condition de surface libre aux équations (3.11) et (3.12), cette dernière est exprimée en fonction de $X(\eta_n)$, $Y(\eta_n)$ et $Z(\eta_n)$ à partir du formalisme de Stroh.

La vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh est définie, à partir de la relation (3.2) par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{M}, t) = \sum_{n=1}^3 A_n \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{M}, t), \quad (3.15)$$

avec :

$$\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{M}, t) = i \omega \mathbf{P}_n e^{-i\omega \eta_n x_1} e^{i\omega(t - \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{M}_{\parallel})}. \quad (3.16)$$

Comme le champ de déplacement $\mathbf{u}^{(n)}$ de l'un des trois modes apparaissant dans la sommation de l'expression (3.2), la vitesse particulaire $\mathbf{v}^{(n)}$ vérifie la relation [Stroh (1962)] :

$$\tilde{\Gamma}(\eta_n) \mathbf{v}^{(n)} = 0, \quad (3.17)$$

pour laquelle la matrice $\tilde{\Gamma}(\eta_n)$ introduite dans le chapitre 2 est décomposée sous la forme :

$$\tilde{\Gamma}(\eta_n) = \mathbf{Q} - \mathbf{I} + \eta_n (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \eta_n^2 \mathbf{T}. \quad (3.18)$$

La matrice \mathbf{I} représente la matrice identité et l'exposant T la transposée. Les expressions des matrices introduites sont :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_{66} S_2^2 + C_{55} S_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} S_2^2 + C_{44} S_3^2 & (C_{23} + C_{44}) S_2 S_3 \\ 0 & (C_{23} + C_{44}) S_2 S_3 & C_{44} S_2^2 + C_{33} S_3^2 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & C_{66} S_2 & C_{55} S_3 \\ C_{12} S_2 & 0 & 0 \\ C_{13} S_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

et

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

La vecteur d'état $\xi(\eta_n)$ de dimension 6 constitué par les vecteurs $\mathbf{u}^{(n)}$ et $\boldsymbol{\sigma}_1^{(n)}$ du $n^{\text{ème}}$ mode partiel :

$$\xi(\eta_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(n)} \\ \boldsymbol{\sigma}_1^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

vérifie la relation [Ingebrigsten et Tonning (1969); Barnett et Lothe (1973); Chadwick et Smith (1977)] :

$$-i \omega \mathbf{N} \xi(\eta_n) = \frac{\partial \xi(\eta_n)}{\partial x_1}, \quad (3.23)$$

soit :

$$\mathbf{N} \xi(\eta_n) = \eta_n \xi(\eta_n), \quad (3.24)$$

avec :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^T \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^T, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{N}_2 = -\mathbf{T}^{-1}, \quad (3.27)$$

et :

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{Q} - \mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^T. \quad (3.28)$$

La relation (3.24) peut alors se décomposer comme suit :

$$\mathbf{N}_1 \mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{N}_2 \boldsymbol{\sigma}_1^{(n)} = \eta_n \mathbf{v}^{(n)}, \quad (3.29)$$

et :

$$\mathbf{N}_3 \mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{N}_1^T \boldsymbol{\sigma}_1^{(n)} = \eta_n \boldsymbol{\sigma}_1^{(n)}. \quad (3.30)$$

Les équations (3.29) et (3.30) sont combinées afin de former un système dont l'inconnue est $\boldsymbol{\sigma}_1^{(n)}$. Pour cela, à partir de l'équation (3.30), la vitesse $\mathbf{v}^{(n)}$ est exprimée en fonction du vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}_1^{(n)}$:

$$\mathbf{v}^{(n)} = -\mathbf{N}_3^{-1} (\mathbf{N}_1^T - \eta_n \mathbf{I}) \boldsymbol{\sigma}_1^{(n)}. \quad (3.31)$$

Cette expression est introduite dans l'équation (3.29), ce qui donne :

$$\hat{\Gamma}(\eta_n)\sigma_1^{(n)} = 0, \quad (3.32)$$

avec :

$$\hat{\Gamma}(\eta_n) = \mathbf{N}_2 - (\eta_n \mathbf{I} - \mathbf{N}_1) \mathbf{N}_3^{-1} (\eta_n \mathbf{I} - \mathbf{N}_1^T). \quad (3.33)$$

Le déterminant de la matrice $\hat{\Gamma}$ est obtenu en la multipliant par sa matrice adjointe notée $\bar{\Gamma}$:

$$\hat{\Gamma}(\eta_n) \bar{\Gamma}(\eta_n) = \det(\hat{\Gamma}(\eta_n)) \mathbf{I}. \quad (3.34)$$

Le vecteur $\sigma_1^{(n)}$, solution du système (3.32), est non nul lorsque le déterminant de la matrice $\hat{\Gamma}$ est nul. La multiplication de l'équation (3.34) par un vecteur quelconque \mathbf{g} conduit alors à la relation :

$$\hat{\Gamma}(\eta_n) \bar{\Gamma}(\eta_n) \mathbf{g} = 0. \quad (3.35)$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (3.32) donne :

$$\sigma_1^{(n)} = \bar{\Gamma}(\eta_n) \mathbf{g}. \quad (3.36)$$

Les contraintes normales partielles sont des polynômes de la variable η_n . Leurs expressions les plus simples sont obtenues à partir du vecteur $\mathbf{g} = (1, 0, 0)$. Elles se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(n)} &= a_4 \eta_n^4 + a_2 \eta_n^2 + a_0 \\ \sigma_{12}^{(n)} &= b_3 \eta_n^3 + b_1 \eta_n \\ \sigma_{13}^{(n)} &= c_3 \eta_n^3 + c_1 \eta_n \end{aligned} \quad (3.37)$$

Soit \mathbf{L} la matrice regroupant l'ensemble des contraintes partielles :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)} & \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{11}^{(3)} \\ \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{12}^{(2)} & \sigma_{12}^{(3)} \\ \sigma_{13}^{(1)} & \sigma_{13}^{(2)} & \sigma_{13}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

la condition de surface libre est donnée, à partir de la relation (3.14), par :

$$\mathbf{L} \mathbf{A} = 0. \quad (3.39)$$

Elle est satisfaite par l'annulation du déterminant de \mathbf{L} dont l'expression est :

$$|\mathbf{L}| = (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_3)(b_3 c_1 - c_3 b_1) D(\eta_n), \quad (3.40)$$

où le terme $D(\eta_n)$ est défini par :

$$D(\eta_n) = a_4 (\eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3 + \eta_1^2 \eta_2 \eta_3^2 + \eta_1 \eta_2^2 \eta_3^2) - a_2 \eta_1 \eta_2 \eta_3 + a_0 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3). \quad (3.41)$$

La condition de surface libre est assurée par l'annulation de $D(\eta_n)$. L'annulation dans l'équation (3.40) des autres termes en facteur correspond à des solutions doubles : $\eta_i = \eta_j$

avec $i \neq j$ ou à l'égalité des contraintes $\sigma_{12}^{(n)}$ et $\sigma_{13}^{(n)}$. Dans l'expression de $D(\eta_n)$, la factorisation par $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ du terme ayant a_4 en facteur donne :

$$D(\eta_n) = a_4 \eta_1 \eta_2 \eta_3 (\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3) - a_2 \eta_1 \eta_2 \eta_3 + a_0 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3). \quad (3.42)$$

À partir des relations (3.8) à (3.10), l'expression de $D(\eta_n)$ s'écrit :

$$D(\eta_n) = a_4 Z(\eta_n) Y(\eta_n) - a_2 Z(\eta_n) + a_0 X(\eta_n). \quad (3.43)$$

La condition d'annulation du déterminant (3.40) peut alors se mettre sous la forme :

$$Z(\eta_n)(Y(\eta_n) - \tilde{a}_2) + \tilde{a}_0 X(\eta_n) = 0, \quad (3.44)$$

avec $\tilde{a}_2 = a_2/a_4$ et $\tilde{a}_0 = a_0/a_4$. Elle correspond à la condition de surface libre du matériau.

III.3.3 Expression du polynôme de Rayleigh

L'équation (3.44) est à présent couplée aux équations (3.11) et (3.12) de telle sorte que les deux expressions ainsi obtenues soient sous la forme de polynômes de la variable $Y(\eta_n)$.

Dans un premier temps, la fonction $X(\eta_n)$ tirée de l'équation (3.12) :

$$X(\eta_n) = \frac{1}{2Z(\eta_n)} (Y(\eta_n)^2 - \tilde{\Delta}) \quad (3.45)$$

est injectée dans l'équation (3.44) :

$$Z(\eta_n) Y(\eta_n) - \tilde{a}_2 Z(\eta_n) + \frac{\tilde{a}_0}{2Z(\eta_n)} (Y(\eta_n)^2 - \tilde{\Delta}) = 0. \quad (3.46)$$

Une fois cette équation multipliée par $2Z(\eta_n)/\tilde{a}_0$, en remarquant que $Z(\eta_n)^2 = -p_0$ et que $\tilde{\Delta} = p_2$ et en introduisant les notations $\kappa_1 = p_0/\tilde{a}_0$ et $\kappa_0 = 2p_0\tilde{a}_2/\tilde{a}_0 - p_2$, l'expression (3.46) se met sous la forme :

$$Y(\eta_n)^2 - 2\kappa_1 Y(\eta_n) + \kappa_0 = 0. \quad (3.47)$$

De la même manière, l'expression de $X(\eta_n)$ est tirée de l'équation (3.11) :

$$X(\eta_n)^2 = 2Y(\eta_n) + \tilde{\Sigma}. \quad (3.48)$$

L'équation (3.44) mise sous la forme :

$$Z(\eta_n)(Y(\eta_n) - \tilde{a}_2) = -\tilde{a}_0 X(\eta_n) \quad (3.49)$$

est ensuite élevée au carré. Le terme $X(\eta_n)^2$ est alors remplacé par son expression obtenue à l'équation (3.48). En remarquant que $Z(\eta_n)^2 = -p_0$ et que $\tilde{\Sigma} = -p_4$ et en introduisant les notations $\lambda_1 = \tilde{a}_2 - \tilde{a}_0^2/p_0$ et $\lambda_0 = \tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_0^2 p_4/p_0$, l'expression ainsi obtenue est :

$$Y(\eta_n)^2 - 2\lambda_1 Y(\eta_n) + \lambda_0 = 0. \quad (3.50)$$

L'onde de Rayleigh satisfait les équations (3.47) et (3.50). Les solutions communes de ces deux polynômes en $Y(\eta_n)$ sont les zéros de leur résultante exprimée ci après :

$$R(\kappa_0, \kappa_1, \lambda_0, \lambda_1) = (\kappa_0 - \lambda_0)^2 - 4(\kappa_1 - \lambda_1)(\kappa_0 \lambda_1 - \kappa_1 \lambda_0). \quad (3.51)$$

Cette expression est le polynôme de Taziev [Taziev (1987)]. Cependant cette fonction n'est pas un polynôme des variables S_2 et S_3 . Il apparaît en effet un dénominateur, fonction de ces deux variables, qui provient des divisions par \tilde{a}_0 et p_0 apparaissant dans les fonctions λ_0 , λ_1 , κ_0 et κ_1 . La méthode amenant à l'élimination de ce dénominateur est à présent développée. Pour cela, un changement de variable est tout d'abord opéré sur les grandeurs \tilde{a}_0 , \tilde{a}_2 , p_0 , p_2 et p_4 définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \frac{\Sigma_n \pi_{TV}}{\alpha^2}, & \tilde{a}_2 &= \frac{\Sigma_m}{\alpha}, \\ p_0 &= \frac{\pi_{TV} \pi_{L,TH}}{\alpha^3}, & p_2 &= \frac{\Sigma_1}{\alpha^2} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{\Sigma_2}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

L'expression des grandeurs introduites qui dépendent des constantes des rigidités et des composantes de la lenteur de phase sont décrites à la fin de cette section. Ce changement de variable consiste à multiplier ces cinq grandeurs par une puissance de τ de la manière suivante : $\bar{a}_0 = \tilde{a}_0 \tau^2$, $\bar{a}_2 = \tilde{a}_2 \tau$, $\bar{p}_0 = p_0 \tau^3$, $\bar{p}_2 = p_2 \tau^2$ et $\bar{p}_4 = p_4 \tau$. Ainsi en introduisant les grandeurs : $\bar{\kappa}_1 = \bar{p}_0 / \bar{a}_0$, $\bar{\kappa}_0 = 2 \bar{p}_0 \bar{a}_2 / \bar{a}_0 - \bar{p}_2$, $\bar{\lambda}_1 = \bar{a}_2 - \bar{a}_0^2 / \bar{p}_0$ et $\bar{\lambda}_0 = \bar{a}_2^2 - \bar{a}_0^2 \bar{p}_4 / \bar{p}_0$, la relation suivante est vérifiée :

$$R(\bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1) = \tau^4 R(\kappa_0, \kappa_1, \lambda_0, \lambda_1). \quad (3.53)$$

Ces deux fonctions ont les mêmes racines. À partir des grandeurs introduites dans les relations (3.52), le dénominateur de $R(\kappa_0, \kappa_1, \lambda_0, \lambda_1)$ a pour expression $\alpha^4 \pi_{L,TH}^2$. La relation (3.53) conduit donc à choisir $\tau = \alpha \sqrt{\pi_{L,TH}}$. Les deux termes de la fonction $R(\bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1)$ ainsi obtenus sont mis sous la forme :

$$(\bar{\kappa}_0 - \bar{\lambda}_0)^2 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \beta_4, \quad (3.54)$$

et :

$$4(\bar{\kappa}_1 - \bar{\lambda}_1)(\bar{\kappa}_0 \bar{\lambda}_1 - \bar{\kappa}_1 \bar{\lambda}_0) = P_0 + P_1 + \beta_1 + P_2 + \beta_2 + P_3 + \beta_3, \quad (3.55)$$

avec :

$$P_0 = \frac{4 \pi_{L,TH}^3 \Sigma_m}{\Sigma_n^2} (\pi_{L,TH} \Sigma_m + \Sigma_m^2 \Sigma_n - \Sigma_n \Sigma_1), \quad (3.56)$$

$$P_1 = \Sigma_1 (\Sigma_m \pi_{L,TH})^2, \quad (3.57)$$

$$\beta_1 = \Sigma_1 (2 \Sigma_n^2 \pi_{TV} - \Sigma_m \pi_{L,TH})^2, \quad (3.58)$$

$$P_2 = \pi_{L,TH}^2 (-\Sigma_m^2 - \Sigma_1)(-\Sigma_1), \quad (3.59)$$

$$\beta_2 = -\pi_{L,TH}^2 (\Sigma_m^2 - \Sigma_1)(4\Sigma_n \pi_{TV} - \Sigma_1), \quad (3.60)$$

$$P_3 = 2\pi_{TV} \pi_{L,TH} (2\Sigma_2 \pi_{L,TH} \Sigma_n \Sigma_m - \Sigma_2 \Sigma_n^2 \Sigma_1), \quad (3.61)$$

$$\beta_3 = -2\pi_{TV} \pi_{L,TH} (\Sigma_2 - 2\Sigma_m)(2\pi_{L,TH} (2\Sigma_n \Sigma_m - \pi_{L,TH}) - \Sigma_n^2 (2\Sigma_n \pi_{TV} + \Sigma_1)), \quad (3.62)$$

$$\beta_4 = (\Sigma_m^2 \pi_{L,TH} - \Sigma_n^2 \Sigma_2 \pi_{TV})^2. \quad (3.63)$$

La différence des fonctions $(\bar{\kappa}_0 - \bar{\lambda}_0)^2$ et $4(\bar{\kappa}_1 - \bar{\lambda}_1)(\bar{\kappa}_0 \bar{\lambda}_1 - \bar{\kappa}_1 \bar{\lambda}_0)$ conduit à l'annulation des termes P_i qui les composent. Ainsi seuls les termes β_i apparaissent dans l'expression du polynôme de Rayleigh qui s'écrit :

$$R(S_2, S_3) = 2\pi_{TV} \pi_{L,TH} (\Sigma_2 - 2\Sigma_m)(2\pi_{L,TH} (2\Sigma_n \Sigma_m - \pi_{L,TH}) - \Sigma_n^2 (2\Sigma_n \pi_{TV} + \Sigma_1)) + \pi_{L,TH}^2 (\Sigma_m^2 - \Sigma_1)(4\Sigma_n \pi_{TV} - \Sigma_1) - \Sigma_1 (2\Sigma_n^2 \pi_{TV} - \Sigma_m \pi_{L,TH})^2 + (\Sigma_m^2 \pi_{L,TH} - \Sigma_n^2 \pi_{TV} \Sigma_2)^2. \quad (3.64)$$

En introduisant la matrice \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

ainsi que sa comatrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

avec :

$$\begin{aligned} B_{11} &= C_{22} C_{33} - C_{23}^2 & B_{22} &= C_{11} C_{33} - C_{13}^2 & B_{33} &= C_{11} C_{22} - C_{12}^2 \\ B_{12} &= C_{13} C_{23} - C_{12} C_{33} & B_{13} &= C_{12} C_{23} - C_{13} C_{22} & B_{23} &= C_{12} C_{13} - C_{11} C_{23} \end{aligned}, \quad (3.67)$$

les expressions des grandeurs α , $\pi_{L,TH}$, π_{TV} , Σ_n , Σ_m , Σ_1 et Σ_2 sont explicitées :

$$\alpha = C_{11} C_{55} C_{66}, \quad (3.68)$$

$$\pi_{L,TH} = \alpha (C_{11} B_{11} S_2^2 S_3^2 - C_{12}^2 S_2^2 - C_{13}^2 S_3^2 + \omega_5), \quad (3.69)$$

$$\pi_{TV} = C_{55} C_{66} (C_{66} S_2^2 + C_{55} S_3^2 - 1), \quad (3.70)$$

$$\Sigma_n = -C_{11} \left((C_{13} B_{13} + C_{23} B_{23} + C_{33} B_{33}) S_2^2 S_3^2 - C_{44} (C_{12} S_2^2 - C_{13} S_3^2)^2 + \omega_5 \right), \quad (3.71)$$

$$\Sigma_m = \omega_1 + \omega_2, \quad (3.72)$$

$$\Sigma_1 = -C_{55} C_{66} (\Sigma_m + \Sigma_n + \omega_4), \quad (3.73)$$

et :

$$\Sigma_2 = \omega_2 - \omega_3, \quad (3.74)$$

avec :

$$\omega_1 = \alpha (S_2^2 + S_3^2) - C_{55} C_{66} (B_{33} S_2^4 + B_{22} S_3^4 + (4C_{11} C_{44} - 2B_{23}) S_2^2 S_3^2), \quad (3.75)$$

$$\omega_2 = -C_{11} (C_{55} + C_{66}) + (C_{55} B_{33} + C_{11} C_{44} C_{66}) S_2^2 + (C_{66} B_{22} + C_{11} C_{44} C_{55}) S_3^2, \quad (3.76)$$

$$\omega_3 = C_{55} C_{66} (1 + 2C_{12} S_2^2 + 2C_{13} S_3^2), \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \omega_4 = & 2C_{11} C_{44} (C_{66} S_2^2 - C_{55} S_3^2) (C_{12} S_2^2 - C_{13} S_3^2) - 2C_{11} (C_{55} B_{13} + C_{66} B_{12}) S_2^2 S_3^2 \\ & + C_{12} (C_{55} C_{12} - 2C_{11} C_{66}) S_2^2 + C_{13} (C_{66} C_{13} - 2C_{11} C_{55}) S_3^2 - C_{55} C_{66} (C_{12} S_2^2 + C_{13} S_3^2)^2, \end{aligned} \quad (3.78)$$

et :

$$\omega_5 = C_{11} - B_{33} S_2^2 - B_{22} S_3^2 + C_{11} C_{44} (C_{22} S_2^4 + C_{33} S_3^4 - 2C_{23} S_2^2 S_3^2 - S_2^2 - S_3^2). \quad (3.79)$$

Comme le polynôme de Christoffel dans le chapitre 2, par la suite, le polynôme de Rayleigh est écrit sous la forme :

$$R(q_1, q_2) = \sum_{k=1}^K R^{(k)}(q_1) q_2^k, \quad (3.80)$$

faisant référence à un polynôme de la variable q_2 dont les coefficients dépendent de q_1 . Cette formulation présente l'intérêt de donner le degré du polynôme ainsi que la variable et les paramètres qui le caractérisent. Cependant lors des applications numériques, il a été programmé sous la forme (3.64) dans laquelle ce sont les termes le définissant qui sont mis sous la forme (3.80). Le polynôme de Rayleigh est ensuite déduit à partir des règles de sommation et de multiplication inhérentes aux polynômes. Le polynôme de Rayleigh est par la suite exprimé en coordonnées polaires, $q_1 = \theta$ et $q_2 = S_{||}$ pour calculer les courbes des lenteurs de phase et en fonction des variables $q_1 = S'_n$ et $q_2 = S_2$ pour calculer les vitesses de l'énergie. Les différents polynômes apparaissant dans l'expression (3.64) sont exprimés sous la forme (3.80) pour les deux paramétrages précédents ainsi qu'en coordonnées cartésiennes à l'annexe B.

III.3.4 Solutions du polynôme de Rayleigh

Le polynôme de Rayleigh calculé précédemment est un polynôme de degré 12 en S_2^2 et S_3^2 . Il peut se mettre sous la forme :

$$R(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^{12} R^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}, \quad (3.81)$$

où S_2 est la variable principale et les coefficients dépendent du paramètre S_3 . L'élimination des composantes normales partielles des lenteurs de phases η_n constitue pour notre problème

le plus grand intérêt que propose la formulation (3.64). Pour une racine $S_{\parallel}(\theta) = (0, S_2(\theta), S_3(\theta))$, correspond un triplet $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ renseignant sur la nature de l'onde solution. Ce triplet est obtenu en substituant la valeur de $S_{\parallel}(\theta)$ dans l'équation de Christoffel sous sa forme initiale (3.4) et en choisissant parmi les quatre triplets solutions de cette équation, celui qui vérifie les conditions limites. Cette procédure a été implémentée numériquement dans le cas où la surface du milieu correspond au plan principal d'un monocristal de cuivre dont la symétrie est cubique. Afin de caractériser les solution obtenues, elles sont décrites dans le tableau III-1, dans lequel solutions réelles et complexes sont séparées.

Appellation	$\text{Im}(S_{\parallel}(\theta))$	$\{\eta'_1 \eta''_1, \eta'_2 \eta''_2, \eta'_3 \eta''_3\}$
S_R	0	$\{0 -, --, +- \}$
S_I	0	$\{-0, ++, +- \}$
S_{II}	0	$\{0 +, --, +- \}$
S_{III}, S_{IV}	0	$\{-0, ++, +- \}$
$S_I^{(r)}, S_{II}^{(r)}, S_{III}^{(r)}, S_{IV}^{(r)}$	0	$\{+0, +0, -0 \}$
$S_I^{(c)}$	-	$\{++ , +- , -- \}$
$S_{II}^{(c)}$	-	$\{++ , +- , -- \}$
$S_{III}^{(c)}$	-	$\{+- , -- , -- \}$
$S_{IV}^{(c)}$	-	$\{++ , +- , -- \}$

tableau III-1 Caractérisation des solutions du polynôme de Rayleigh.

Pour chacune d'elles, les signes des parties réelles et imaginaires des triplets $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ sont explicitées. Chacun des triplets qui apparaît aux différentes lignes de la troisième colonne sont différents. De plus, il est important de préciser que chacune des solutions $\{S_{\parallel}, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ est accompagnée de la même solution mais avec un signe opposé ainsi que de son complexe conjugué. Ceci est dû au caractère réel des coefficients du polynôme (3.64) ainsi qu'à la structure de la variable $Y(\eta_n)$ donnée par la relation (3.9). Les solutions du polynôme (leur partie réelle dans le cas où elles sont complexes) sont présentées à la figure III-2 à l'exception de racines complexes infinitésimales qui ne présentent pas d'intérêt. Ces courbes sont superposées à la figure III-3 à celles représentant les ondes rasantes dans le plan (L, TH, TV) et hors plan (Out_i) . Pour une meilleure lecture des résultats, les tracés des ces courbes sont réalisés dans le premier quadrant qui correspond à deux fois le plus grand secteur sans symétrie $(0^\circ, 45^\circ)$.

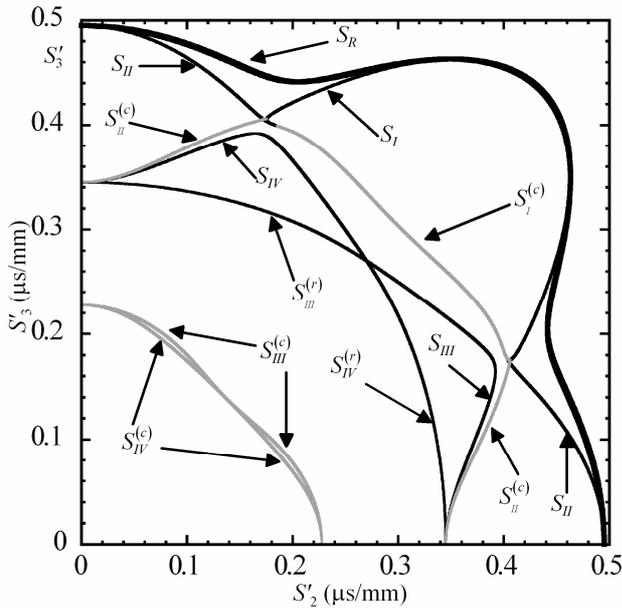


figure III-2 Parties réelles des courbes des lenteurs de phase obtenues à partir du polynôme de Rayleigh.

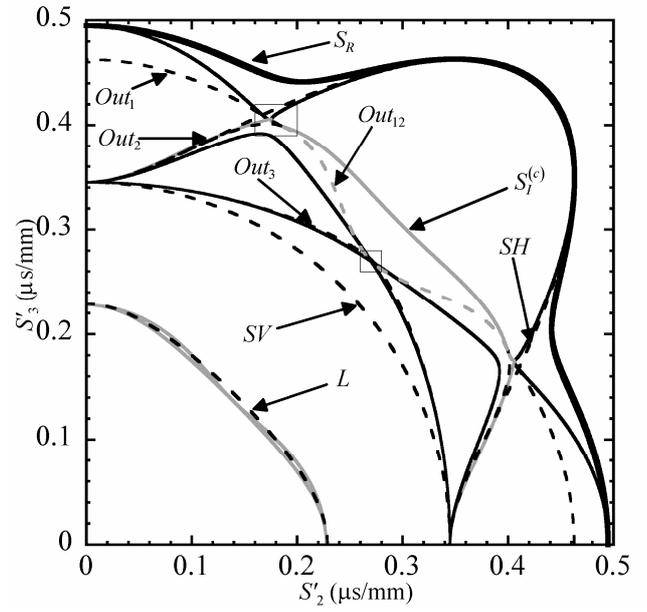


figure III-3 Parties réelles des courbes des lenteurs de phase obtenues à partir du polynôme de Rayleigh et des ondes latérales.

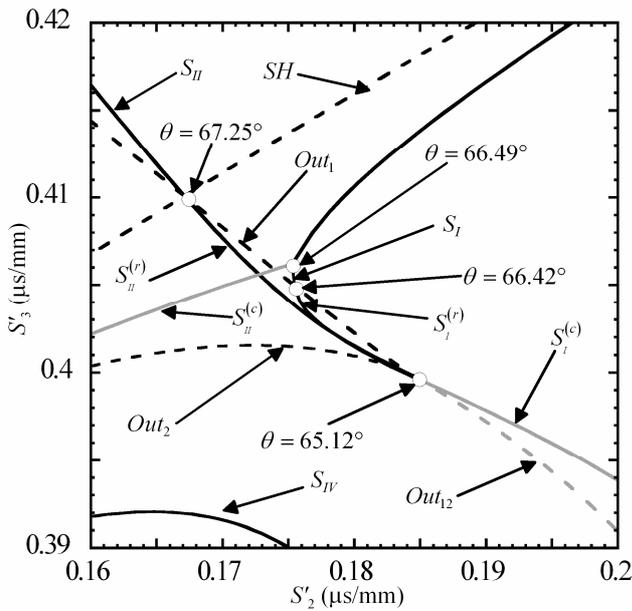


figure III-4 Zoom de la zone rectangulaire de la figure III-3.

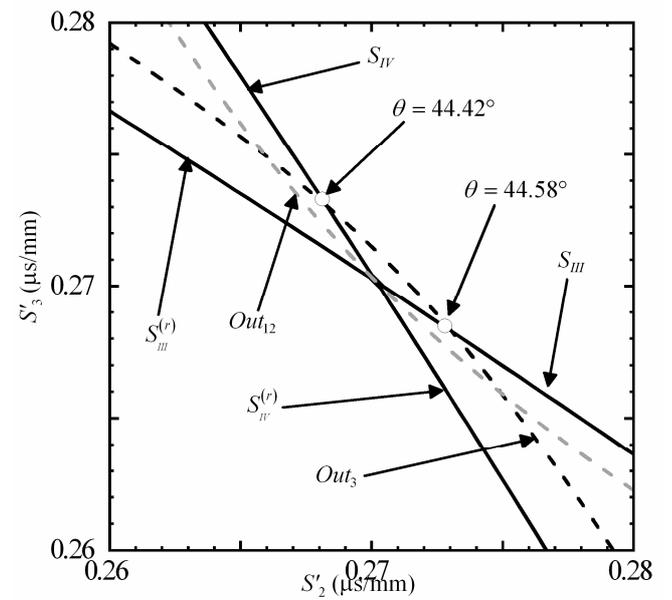


figure III-5 Zoom de la zone carrée de la figure III-3.

À présent le tracé des courbes est commenté. Tout d'abord une comparaison avec les résultats obtenus par [Bescond et Deschamps (1998)] assure la conformité des résultats obtenus pour la lenteur de phase de l'onde de Rayleigh S_R . Comme on peut l'observer dans le tableau III-1, toutes les autres racines réelles n'ont pas de réalité physique : les solutions S_I, \dots, S_{IV} , qui ont des modes partiels dont les signes de la partie imaginaire de la lenteur normale η_n sont opposés ou encore les solutions $S_I^{(r)}, \dots, S_{IV}^{(r)}$ dont les parties imaginaires des composantes normales de la lenteur de phase sont nulles. Parmi les solutions complexes $S_i^{(c)}$, la courbe $S_1^{(c)}$ représente la pseudo onde de Rayleigh.

La figure III-4 et la figure III-5 illustrent des zooms de la figure III-3 qui présentent un intérêt sur le changement de nature des solutions. Le premier zoom (figure III-4) est situé autour de la corne de l'onde hors plan latérale. On observe qu'il émerge de cette corne ($\theta = 65.12^\circ$) la pseudo onde de Rayleigh ($S_1^{(c)}$) ainsi que l'onde hors plan Out_{12} .

La pseudo onde de Rayleigh fut mesurée pour la première fois par Engan et al. et par Rollins pour un cristal de quartz [Engan et al. (1967); Rollins (1968)] et par Rollins et al. pour un cristal de cuivre [Rollins et al. (1968)]. Un calcul de sa vitesse de phase est présenté à la référence [Lim et Farnell (1969)]. La méthode décrite dans cet article est une modification de celle employée pour l'onde de Rayleigh [Lim et Farnell (1968)]. Les deux méthodes présentées dans ces articles sont succinctement décrites afin de mettre en relief les différences qui apparaissent entre ces deux ondes. Le calcul de la vitesse de l'onde de Rayleigh consiste dans un premier temps à imposer une lenteur de phase réelle à la surface et à construire à partir de l'équation de Christoffel, un champ de déplacement analogue à celui de l'équation (3.2) et respectant la condition de décroissance exponentielle dans la profondeur du milieu. Le déterminant complexe des contraintes normales à la surface est alors calculé à partir de ce champ. Lorsqu'il est nul, la condition de surface libre est satisfaite. Cette procédure est réitérée jusqu'à obtenir la lenteur de phase annulant ce déterminant. La vitesse de phase recherchée est alors l'inverse de cette grandeur. Dans certains cas, l'onde de Rayleigh dégénère en ou vers une onde de volume. Cela se produit lorsque la partie imaginaire d'une composante normale de la lenteur de phase η_n est nulle ou approche zéro et lorsque l'amplitude associée à cette lenteur prédomine sur les deux autres. Près de tels cas de dégénérescence ou de quasi dégénérescence, les solutions d'une pseudo onde de surface apparaissent. La présence de cette onde se traduit par un minimum marqué de la norme du déterminant cité précédemment. La non annulation du déterminant signifie que la condition de surface libre n'est pas satisfaite. Afin de la satisfaire, la procédure de calcul décrite auparavant est modifiée en ajoutant une partie imaginaire négative aux composantes de la lenteur de phase parallèles à la surface. Ceci induit une décroissance de l'amplitude du déplacement à la surface. La procédure de recherche de la vitesse de phase est alors identique à celle de l'onde de Rayleigh en ajoutant en paramètre les deux parties imaginaires introduites. En tenant compte de ce changement, il existe un jeu de paramètres amenant à

l'annulation du déterminant. Cette solution est caractérisée par deux composantes normales de la lenteur de phase respectant la décroissance dans la profondeur du milieu et par une troisième ayant une partie réelle et une partie imaginaire positives. Le mode associé à cette composante est une onde transversale qui se propage dans le matériau et dont l'amplitude croît dans la profondeur du milieu. La pseudo onde de surface est donc la combinaison d'une onde de surface et d'une onde transversale. La radiation de l'onde transversale dans le milieu peut s'expliquer par la perte d'énergie de l'onde à la surface qui est transmise dans le milieu.

III.4 Relations énergétiques

Les relations énergétiques propres à la propagation de l'onde plane de Rayleigh se propageant à la surface d'un milieu semi infini, non viscoélastique et anisotrope sont établies. Elles sont décrites dans le cas général pour lequel la composante de la lenteur de phase à l'interface $S_{||}$ est complexe. Ceci correspond à l'onde de Rayleigh hétérogène. Les relations propres à l'onde de Rayleigh homogène sont déduites en considérant cette composante réelle ($S_{||}'' = 0$). Le champ de déplacement de l'onde de Rayleigh hétérogène est donné par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{P}(x_1) e^{\omega S_{||}' M_{||}} e^{i\omega(t - S_{||}' M_{||})}, \quad (3.82)$$

où :

$$\mathbf{P}(x_1) = \sum_{n=1}^3 A_n \mathbf{P}_n e^{-i\omega \eta_n x_1}. \quad (3.83)$$

La partie imaginaire négative de la lenteur de phase $S_{||}$ induit une atténuation de cette onde à l'interface. Les vecteurs $\boldsymbol{\eta}_n$, $S_{||}$ et $M_{||}$ sont représentés à la figure III-6.

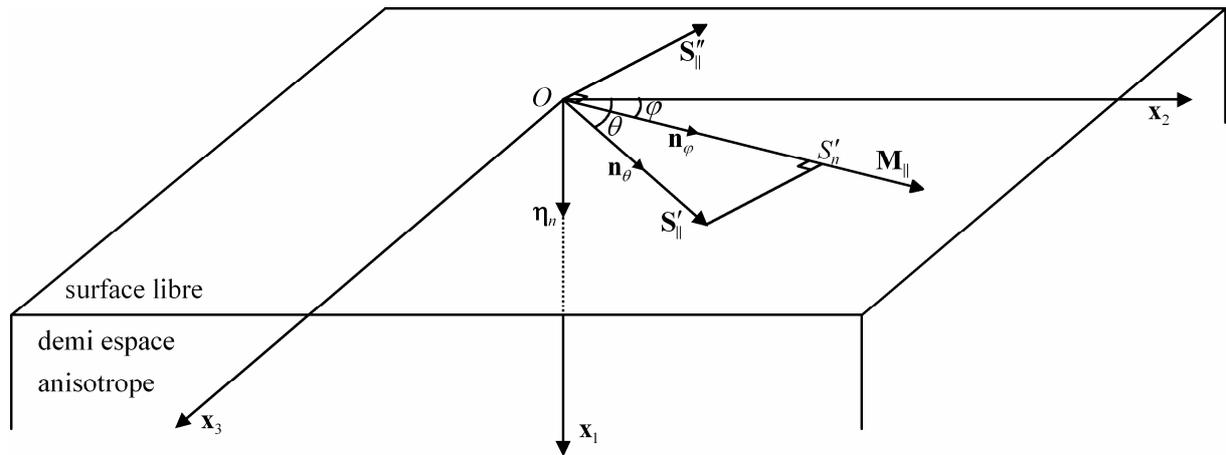


figure III-6 Composantes des lenteurs de phase de l'onde de Rayleigh hétérogène se propageant à la surface d'un milieu semi infini.

La structure du champ de déplacement de la pseudo onde de Rayleigh est identique à celui de l'onde de Rayleigh hétérogène. Un repère orthonormé $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, tel que le vecteur unitaire \mathbf{x}_1 soit normal entrant à la surface, est considéré.

III.4.1 Énergie potentielle

L'énergie potentielle est définie par :

$$e_p = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}. \quad (3.84)$$

Exprimée en fonction de la dérivée spatiale de la vitesse, elle prend la forme :

$$e_p = \frac{i}{2\omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}. \quad (3.85)$$

Le calcul des dérivées spatiales relatives aux variables x_2 et x_3 amène à la relation :

$$e_p = \frac{i}{2\omega} \left(\sigma_{i1} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_1} + i\omega \bar{S}_2 \sigma_{i2} \bar{v}_i + i\omega \bar{S}_3 \sigma_{i3} \bar{v}_i \right), \quad (3.86)$$

puis après simplification :

$$e_p = \frac{i}{2\omega} \sigma_{i1} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_1} - \frac{1}{2} (\bar{S}_2 \sigma_{i2} \bar{v}_i + \bar{S}_3 \sigma_{i3} \bar{v}_i). \quad (3.87)$$

La composante du vecteur de Poynting dans la direction x_j étant égale à $-\sigma_{ij} \bar{v}_i$, la relation (3.87) devient :

$$e_p = \frac{i}{2\omega} \sigma_{i1} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\bar{S}_2 J_2 + \bar{S}_3 J_3). \quad (3.88)$$

Il apparaît dans l'expression (3.88) le produit scalaire de la lenteur de phase et du vecteur de Poynting à la surface :

$$e_p = \frac{i}{2\omega} \sigma_{i1} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}_{\parallel}. \quad (3.89)$$

Finalement en tenant compte des relations sur la moyenne temporelle (chapitre 1), la relation suivante est obtenue :

$$\bar{\mathbf{S}}_{\parallel} \cdot \langle \mathbf{J}_{\parallel} \rangle = 2 \langle e_p \rangle - \frac{i}{2\omega} \sigma_{i1} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_1}. \quad (3.90)$$

III.4.2 Énergie cinétique

L'énergie cinétique est par définition égale à :

$$e_c = \frac{\rho v_i \bar{v}_i}{2}. \quad (3.91)$$

Or, d'après le principe fondamental de la dynamique :

$$v_i = \frac{1}{i \omega \rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3.92)$$

l'expression (3.91) peut alors s'écrire :

$$e_c = \frac{-i}{2\omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{v}_i. \quad (3.93)$$

En exprimant les dérivées spatiales par rapport aux variables x_2 et x_3 , la relation précédente est mise sous la forme :

$$e_c = \frac{-i}{2\omega} \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i - i \omega S_2 \sigma_{i2} \bar{v}_i - i \omega S_3 \sigma_{i3} \bar{v}_i \right) \quad (3.94)$$

puis après simplification :

$$e_c = \frac{-i}{2\omega} \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i - \frac{1}{2} (S_2 \sigma_{i2} \bar{v}_i + S_3 \sigma_{i3} \bar{v}_i). \quad (3.95)$$

La composante du vecteur de Poynting dans la direction x_j étant égale à $-\sigma_{ij} \bar{v}_i$, la relation (3.95) peut s'écrire :

$$e_c = \frac{-i}{2\omega} \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \frac{1}{2} (S_2 J_2 + S_3 J_3). \quad (3.96)$$

Il apparaît dans cette expression le produit scalaire de la lenteur de phase et du vecteur de Poynting à la surface :

$$e_c = \frac{-i}{2\omega} \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}_{\parallel}. \quad (3.97)$$

Finalement en tenant compte des relations sur la moyenne temporelle (chapitre 1), la relation suivante est obtenue :

$$\mathbf{S}_{\parallel} \cdot \langle \mathbf{J}_{\parallel} \rangle = 2 \langle e_c \rangle + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i. \quad (3.98)$$

III.4.3 Relation entre la lenteur de phase et la partie réelle du vecteur de Poynting

La sommation du conjugué de l'expression (3.90) avec l'expression (3.98) conduit à :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i \mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle = \langle e_c + e_p \rangle + \frac{i}{4\omega} \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right). \quad (3.99)$$

La dérivée de la composante du vecteur de Poynting dans la direction \mathbf{x}_1 par rapport à la variable x_1 est égale à :

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (-\sigma_{i1} \bar{v}_i) = -\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i - \sigma_{i1} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_1}. \quad (3.100)$$

Le conjugué de cette expression conduisant à :

$$\bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \bar{\sigma}_{i1}}{\partial x_1} v_i - \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_1}, \quad (3.101)$$

l'expression (3.99) peut s'écrire :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i\mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle = \langle e_c + e_p \rangle + \frac{i}{4\omega} \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i - \frac{\partial \bar{\sigma}_{i1}}{\partial x_1} v_i - \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_1} \right). \quad (3.102)$$

Les expressions $\bar{v}_i \partial \sigma_{i1} / \partial x_1$ et $v_i \partial \bar{\sigma}_{i1} / \partial x_1$ sont conjuguées, la relation (3.102) devient donc :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i\mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle = \langle e_c + e_p \rangle - \frac{1}{2\omega} \Im \left(\bar{v}_i \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \right) - \frac{i}{4\omega} \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_1}. \quad (3.103)$$

où le symbole \Im représente la partie imaginaire. En introduisant les grandeurs $e_{\omega} = \Im(\bar{v}_i \partial \sigma_{i1} / \partial x_1) / 2\omega$ et $e_l = (\partial \bar{J}_1 / \partial x_1) / 4\omega$, l'expression (3.103) s'écrit :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i\mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle = \langle e_c + e_p \rangle - \langle e_{\omega} \rangle - i \langle e_l \rangle. \quad (3.104)$$

Le terme d'énergie $\langle e_{\omega} \rangle$ peut être interprété comme de l'énergie de dispersion et le terme $\langle e_l \rangle$ comme une perte d'énergie vers l'extérieur du milieu. La relation énergétique (3.104) est une expression locale qui dépend de la profondeur du point d'observation. Il est donc nécessaire, pour obtenir une relation globale, de faire une intégration le long de l'axe (x_1) [Coquin et Tiersten (1967)]. En notant :

$$\langle\langle (\cdot) \rangle\rangle = \int_0^{+\infty} \langle (\cdot) \rangle dx_1, \quad (3.105)$$

l'équation (3.104) intégrée conduit à l'expression :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i\mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \langle\langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle\rangle = \langle\langle e_c + e_p \rangle\rangle - \langle\langle e_{\omega} \rangle\rangle - i \langle\langle e_l \rangle\rangle. \quad (3.106)$$

La même relation, pour le cas d'une plaque, est présentée dans la thèse de Neau [Neau (2003)].

III.5 Onde de Rayleigh homogène

Cette section est consacrée au calcul des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogènes. Il est réalisé à partir d'un paramétrage du polynôme de Rayleigh basé sur une relation entre la lenteur de phase et la lenteur de l'énergie introduite dans la première partie.

La partie suivante présente un exemple de calcul des racines du polynôme de Rayleigh exprimé avec ce paramétrage. Enfin le calcul des vitesses de l'énergie, pour une direction parallèle à l'interface donnée, est réalisé à titre d'exemple puis l'ensemble des vitesses des fronts d'onde se propageant à l'interface est présenté.

III.5.1 Relation entre lenteur de phase et lenteur de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène

La relation entre la lenteur de phase et le vecteur de Poynting d'une onde plane de Rayleigh homogène, obtenue dans la section précédente, est donnée par :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i\mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle = \langle e_c + e_p \rangle + \frac{i}{4\omega} \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right). \quad (3.107)$$

Pour l'onde de Rayleigh homogène, le terme :

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1}, \quad (3.108)$$

est nul. Ce résultat est tout d'abord démontré, à partir du formalisme de Stroh. Pour cela, l'expression (3.108) est reformulée pour le $n^{\text{ième}}$ mode partiel des grandeurs \mathbf{v} et $\boldsymbol{\sigma}_1$ en fonction du vecteur $\boldsymbol{\xi}(\eta_n)$ (expression (3.22)) et de son conjugué $\bar{\boldsymbol{\xi}}(\eta_n)$:

$$\bar{\mathbf{v}}^{(n)} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1^{(n)}}{\partial x_1} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(n)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(n)}}{\partial x_1} = \bar{\boldsymbol{\xi}}(\eta_n) \mathbf{E} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\eta_n)}{\partial x_1}, \quad (3.109)$$

la matrice \mathbf{E} étant définie par :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

À partir de la relation (3.23), la relation (3.109) peut être formulée par :

$$\bar{\mathbf{v}}^{(n)} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1^{(n)}}{\partial x_1} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(n)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(n)}}{\partial x_1} = -i\omega \bar{\boldsymbol{\xi}}(\eta_n) \mathbf{E} \mathbf{N} \boldsymbol{\xi}(\eta_n). \quad (3.111)$$

La matrice \mathbf{N} admet $\boldsymbol{\xi}(\eta_n)$ pour vecteur propre et η_n pour valeur propre. Elle satisfait la relation :

$$\mathbf{N} \boldsymbol{\xi}(\eta_n) = \eta_n \boldsymbol{\xi}(\eta_n). \quad (3.112)$$

Considérons à présent deux modes partiels distincts identifiés par les indices n_1 et n_2 . En multipliant à gauche la relation (3.112) relative à chacun de ces modes par le vecteur $\boldsymbol{\xi}(\eta_m) \mathbf{E}$, on obtient les deux relations :

$$\boldsymbol{\xi}(\eta_{n_2}) \mathbf{E} \mathbf{N} \boldsymbol{\xi}(\eta_{n_1}) = \eta_{n_1} \boldsymbol{\xi}(\eta_{n_2}) \mathbf{E} \boldsymbol{\xi}(\eta_{n_1}), \quad (3.113)$$

et :

$$\xi(\eta_{n1}) \mathbf{E} \mathbf{N} \xi(\eta_{n2}) = \eta_{n2} \xi(\eta_{n1}) \mathbf{E} \xi(\eta_{n2}). \quad (3.114)$$

La structure particulière de la matrice \mathbf{N} conduit à l'égalité : $(\mathbf{E} \mathbf{N})^T = \mathbf{E} \mathbf{N}$. La transposée de l'expression (3.114) est donc égale à :

$$\xi(\eta_{n2}) \mathbf{E} \mathbf{N} \xi(\eta_{n1}) = \eta_{n2} \xi(\eta_{n2}) \mathbf{E} \xi(\eta_{n1}). \quad (3.115)$$

La différence des relations (3.113) et (3.115) donne :

$$(\eta_{n1} - \eta_{n2}) \xi(\eta_{n2}) \mathbf{E} \xi(\eta_{n1}) = 0. \quad (3.116)$$

L'onde de Rayleigh ne possède pas de mode double, l'équation (3.116) implique donc la relation :

$$\xi(\eta_{n2}) \mathbf{E} \xi(\eta_{n1}) = 0. \quad (3.117)$$

Le vecteur ξ décrivant l'onde de Rayleigh est une combinaison linéaire des trois modes partiels :

$$\xi = \sum_{n=1}^3 A_n \xi(\eta_n). \quad (3.118)$$

L'expression (3.108) est décrite en fonction de ce vecteur par :

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = -i \omega \bar{\xi} \mathbf{E} \mathbf{N} \xi. \quad (3.119)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = -i \omega \left(\sum_{n=1}^3 \bar{A}_n \bar{\xi}(\eta_n) \right) \mathbf{E} \mathbf{N} \left(\sum_{n=1}^3 A_n \xi(\eta_n) \right) \quad (3.120)$$

ou, à partir de la relation (3.112) :

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = -i \omega \left(\sum_{n=1}^3 \bar{A}_n \bar{\xi}(\eta_n) \right) \mathbf{E} \left(\sum_{n=1}^3 \eta_n A_n \xi(\eta_n) \right). \quad (3.121)$$

Les trois vecteurs propres $\xi(\eta_n)$ sont complexes et distincts des trois vecteurs propres conjugués $\bar{\xi}(\eta_n)$. Le terme à droite de l'équation (3.121) est donc nul et la relation :

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i1} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = 0, \quad (3.122)$$

est satisfaite. La relation entre la lenteur de phase et le vecteur de Poynting s'écrit donc :

$$\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \ll \mathbf{J}'_{\parallel} \gg = \ll e_c + e_p \gg. \quad (3.123)$$

En posant la vitesse de l'énergie égale à :

$$\mathbf{c}_e = \frac{\langle\langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle\rangle}{\langle\langle e_c + e_p \rangle\rangle}, \quad (3.124)$$

on obtient de l'expression (3.123) la relation :

$$\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{c}_e = 1. \quad (3.125)$$

L'introduction du vecteur unitaire \mathbf{n}_{φ} parallèle à la direction de propagation de l'énergie ainsi que celle du module de la lenteur de l'énergie S_e , conduisent à la même relation que celle obtenue dans le second chapitre pour une onde rasante homogène :

$$\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = S_e. \quad (3.126)$$

La lenteur de l'énergie est la projection sur la direction de propagation de l'énergie du vecteur lenteur de phase. Cette relation vectorielle est représentée à la figure III-7.

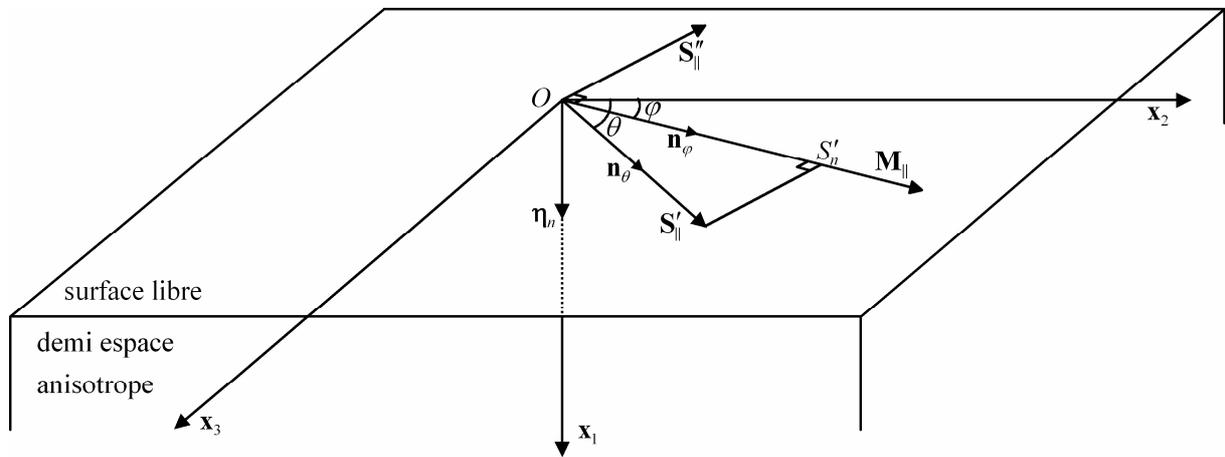


figure III-7 Représentation géométrique de la relation entre les lenteurs de phase et de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène.

III.5.2 Polynôme de Rayleigh

Le polynôme de Rayleigh présenté à la section III.3.3 dépend des composantes de la lenteur de phase à la surface. Un changement de variable est opéré en introduisant la projection de la lenteur de phase selon une direction de propagation définie par le vecteur \mathbf{n}_{φ} faisant un angle φ avec l'axe \mathbf{x}_2 . Cette grandeur est réelle et sera notée S'_n :

$$\mathbf{S}_{\parallel} \cdot \mathbf{n} = S'_n. \quad (3.127)$$

L'expression de la composante de la lenteur \mathbf{S}_{\parallel} , S_3 , est déduite de la relation (3.127) :

$$S_3 = \frac{S'_n - S_2 \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}, \quad (3.128)$$

et introduite sous cette forme dans le polynôme de Rayleigh donné à la relation (3.81). Le polynôme de Rayleigh ainsi obtenu dépend de la composante S_2 , de la projection S'_n et de l'angle φ . C'est un polynôme de degré 24 de la variable S_2 et dont les coefficients dépendent des paramètres S'_n et φ :

$$R(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=1}^{24} R^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k . \quad (3.129)$$

La courbe des lenteurs de phase peut ainsi être calculée en recherchant les racines S_2 de ce polynôme pour un angle φ donné et pour différentes valeurs de S'_n . Pour chacune de ces racines, la deuxième composante S_3 est calculée à partir de la relation (3.128). Un exemple de courbe de lenteur de phase calculée par cette méthode, pour un angle φ de 80° , est illustré à la figure III-8. Les solutions du polynôme de Rayleigh pouvant être complexes, seule leur partie réelle est représentée.

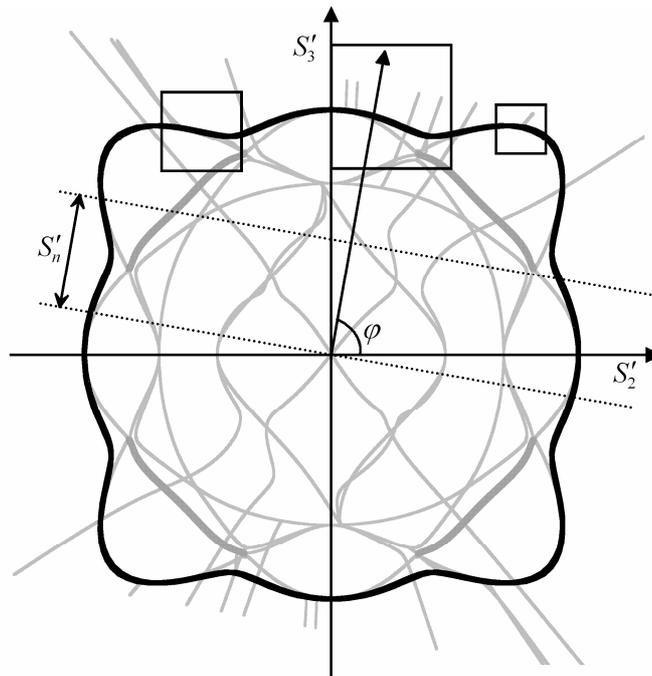


figure III-8 Parties réelles des courbes des lenteurs de phase calculées à partir du polynôme de Rayleigh pour un angle $\varphi = 80^\circ$. Les solutions de l'onde de Rayleigh sont représentées par un trait épais noir, celles de la pseudo onde de Rayleigh par un trait épais gris et toutes les autres en traits fins gris.

La solution réelle correspondant à l'onde de Rayleigh a une courbe noire, celle de la pseudo onde de Rayleigh est grise à trait épais et les autres solutions, qui n'ont pas de sens physique, sont grises à traits fins.

III.5.3 Calcul des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogènes

En appliquant le principe de Fermat, le calcul des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogènes, orientées selon un vecteur \mathbf{n}_φ formant un angle φ avec l'axe \mathbf{x}_2 est réalisé. Il consiste à résoudre l'équation $R(S'_n, \varphi, S_2) = 0$ sous la contrainte $dS'_2/dS'_n \rightarrow \infty$ qui peut aussi être exprimée par $dS'_n/dS'_2 = 0$. Avant de présenter les résultats globaux, la description des solutions obtenues pour un angle φ de 80° est présentée à titre d'exemple.

Tout d'abord, il est important de préciser qu'il existe des solutions réelles du polynôme de Rayleigh, vérifiant le principe de Fermat et ne correspondant pas à l'onde de Rayleigh. Un tri est donc nécessaire au préalable afin de ne retenir que cette onde. Elle est facilement isolée car elle correspond à la plus grande lenteur de phase réelle. Les courbes des lenteurs de phase calculées pour un angle φ de 80° ont été présentées dans la partie précédente à la figure III-8. Les lenteurs de l'onde de Rayleigh sont illustrées par la courbe noire à trait épais. Pour chaque lenteur correspond un couple (S_2, S'_n) solution de l'équation $R(S'_n, \varphi, S_2) = 0$. La composante de lenteur S'_2 dépend de l'angle de phase θ . La dérivée dS'_2/dS'_n peut ainsi être calculée en fonction de cet angle. Elle est représentée à la figure III-9 pour des valeurs de θ comprises entre -10° et 170° . Cet intervalle correspond, pour un angle d'observation $\varphi = 80^\circ$, à des valeurs positives du paramètres S'_n .

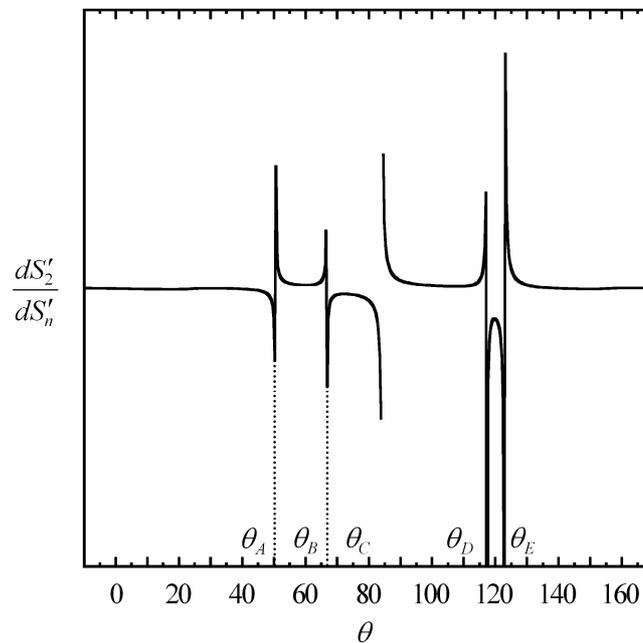


figure III-9 Évolution de la dérivée dS'_2/dS'_n correspondant à l'onde de Rayleigh en fonction de l'angle de phase pour un angle d'observation $\varphi = 80^\circ$.

Il apparaît sur cette dérivée cinq discontinuités qui sont reliées aux angles de phase $\theta_A = 122,9^\circ$, $\theta_B = 117,3^\circ$, $\theta_C = 84,2^\circ$, $\theta_D = 66,6^\circ$ et $\theta_E = 50,5^\circ$. Les normales à la courbe des lenteurs de phase, relatives à ces angles, sont représentées à la figure III-10 où chaque illustration est un zoom des zones carrées de la figure III-8.

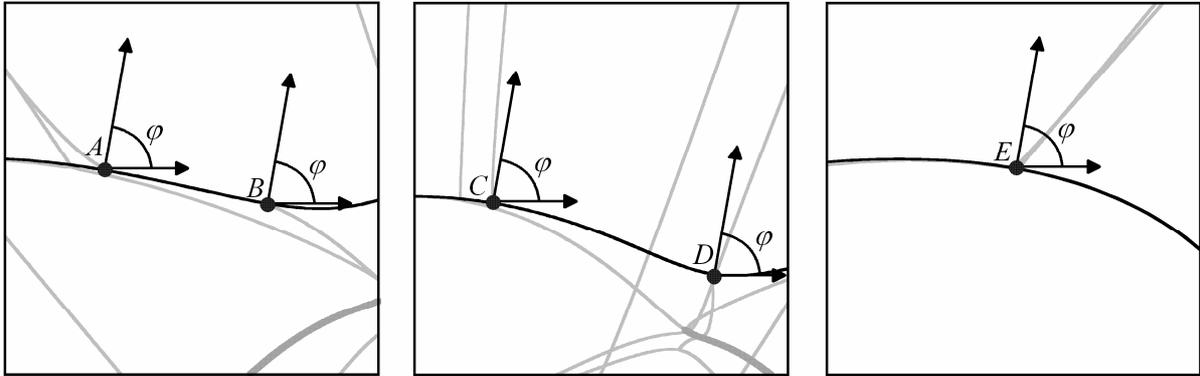


figure III-10 Normales à la courbe des lenteurs de phase de l'onde de Rayleigh faisant un angle de 80° avec l'axe x_2 .

Les cinq normales, qui donnent la direction de l'énergie, forment un angle de 80° avec l'axe x_2 . Les paramètres S'_n associés aux cinq solutions A, B, C, D et E sont donc les normes des lenteurs de l'énergie orientées dans la direction qui avait été fixée. Les vitesses de l'énergie sont obtenues en prenant l'inverse de ces grandeurs. Elles sont représentées à la figure III-11.

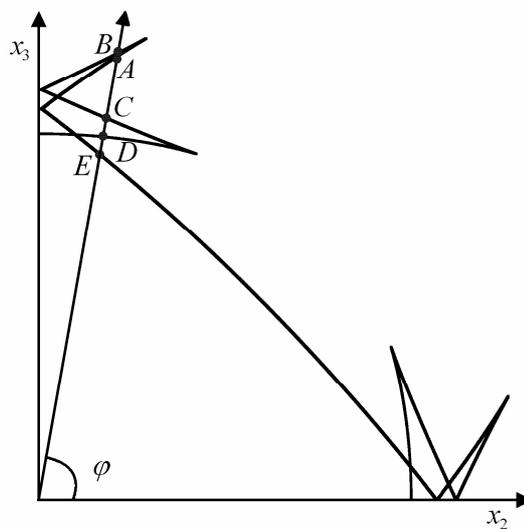


figure III-11 Vitesses de l'énergie pour un angle $\varphi = 80^\circ$.

L'ensemble des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogènes sont calculées en résolvant le système :

$$\begin{cases} R(S'_n, \varphi, S_2) = 0 \\ \frac{dS'_n}{dS_2} = 0 \end{cases}, \quad (3.130)$$

pour des angles φ compris entre 0° et 360° . À l'instar du système amenant au calcul des vitesses de l'énergie des ondes rasantes homogènes, il serait possible de calculer la résultante des polynômes $R(S'_n, \varphi, S_2)$ et dS'_n/dS_2 qui sont pour le cas des ondes homogènes des polynômes en S'_2 . Cependant étant donnés les degrés élevés de ces deux polynômes, il est difficile d'obtenir une expression explicite de cette résultante à partir d'un logiciel de calcul formel. Ce système est donc, comme celui relatif aux ondes rasantes hétérogènes, résolu par la méthode de Gauss. La forme d'onde ainsi obtenue, représentée à la figure III-12 est composée de deux cornes formées par les branches $R_1 - R_4$ et $R_3 - R_5$.

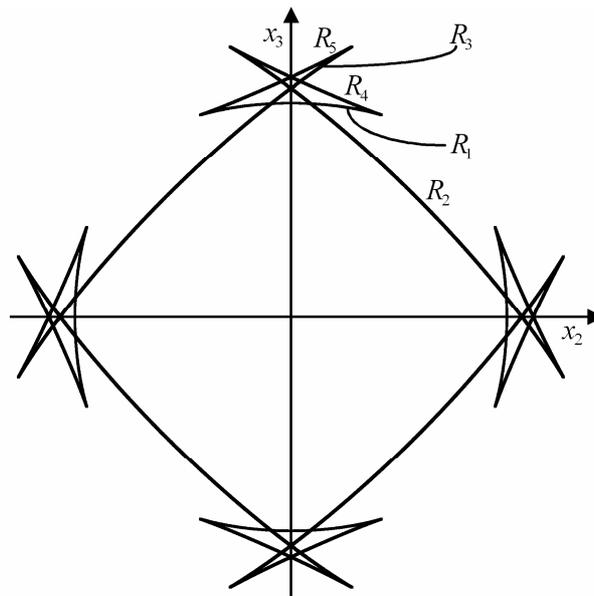


figure III-12 Vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène.

Les parties réelles et imaginaires des trois composantes normales des lenteurs de phase, η_n , sont présentées pour chacune des cinq branches, R_i , de la figure III-13 à la figure III-15 en fonction de l'angle d'observation φ . Les courbes sont différenciées par le symbole $R_i^{(n)}$ qui représente la $n^{\text{ème}}$ composante normale de la lenteur de phase de la branche i . Les parties imaginaires des grandeurs η_n sont positives ce qui implique une décroissance exponentielle de l'onde de Rayleigh dans la profondeur du milieu. Deux parties réelles sont opposées et la troisième est nulle. Ces résultats sont en accord avec les caractéristiques de l'onde de Rayleigh présentées dans le tableau III-1. On remarque une jonction des courbes

caractéristique des deux cornes des célérités de l'énergie formées par les branches $R_1 - R_4$ et $R_3 - R_5$. Les deux angles φ où se rejoignent les courbes coïncident avec la direction des célérités de l'énergie qui sont à la pointe de ces deux cornes.

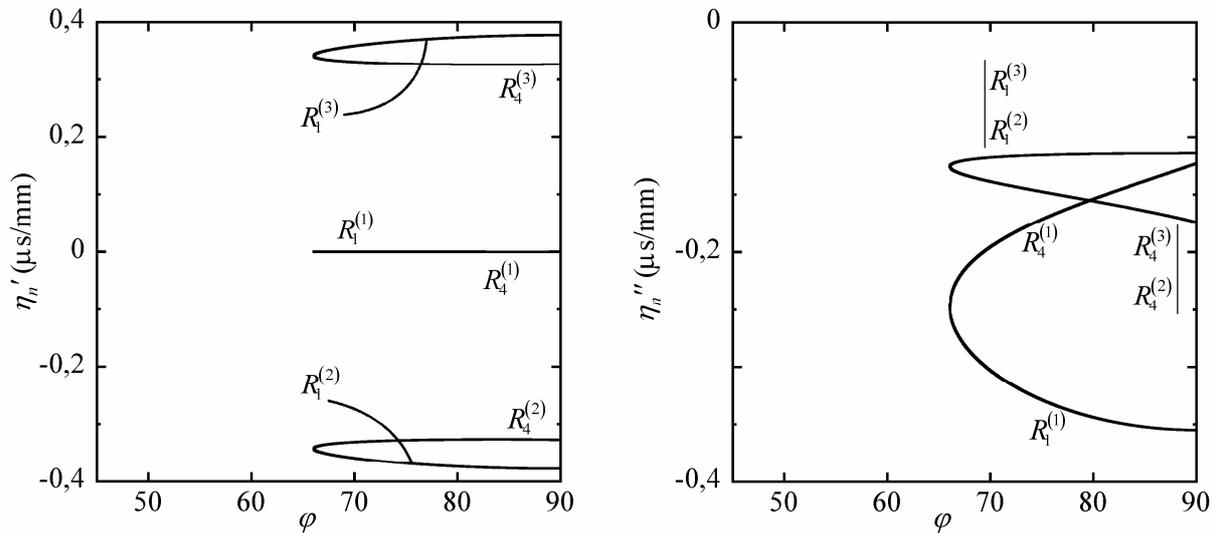


figure III-13 Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des trois composantes normales des lenteurs de phase des branches R_1 et R_4 en fonction de l'angle φ .

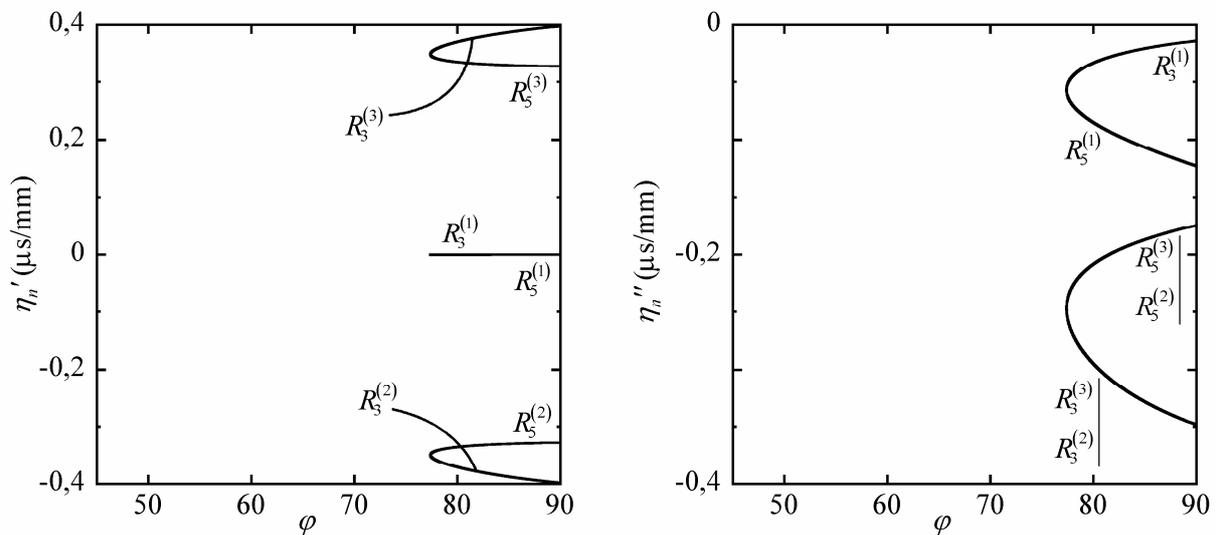


figure III-14 Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des trois composantes normales des lenteurs de phase des branches R_3 et R_5 en fonction de l'angle φ .

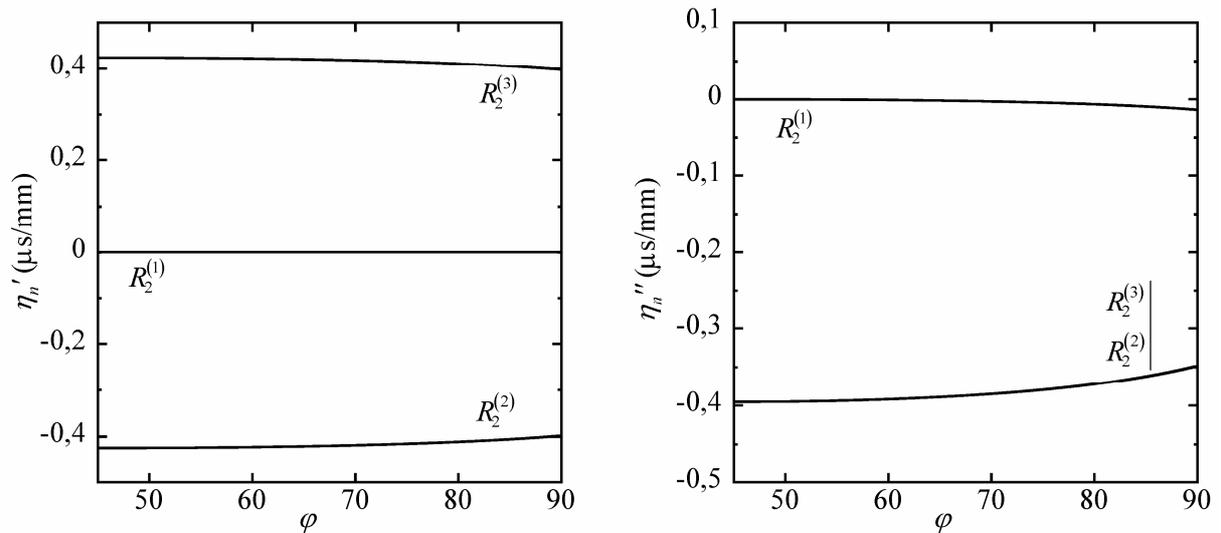


figure III-15 Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des trois composantes normales des lenteurs de phase de la branche R_2 en fonction de l'angle φ .

À titre indicatif, les courbes d'onde des solutions réelles du polynôme de Rayleigh sont exposées. Leurs vitesses de l'énergie sont calculées de la même manière que pour l'onde de Rayleigh en résolvant le système (3.130). Les parties, réelle et imaginaire, des trois composantes normales des lenteurs de phase reliées à ces solutions sont également présentées en fonction de l'angle de phase. Pour chaque solution, ces composantes sont différenciées par un exposant entre parenthèses. Ainsi les écritures $S_i^{(j)}$ et $S_i^{(r)(j)}$ représentent respectivement la $j^{\text{ème}}$ composante normale des solutions S_i et $S_i^{(r)}$. Les solutions S_I, \dots, S_{IV} sont tracées en traits pleins et les solutions $S_I^{(r)}, \dots, S_{IV}^{(r)}$ sont tracées en pointillés. Les parties imaginaires des composantes normales des solutions $S_I^{(r)}, \dots, S_{IV}^{(r)}$ qui sont nulles ne sont pas représentées.

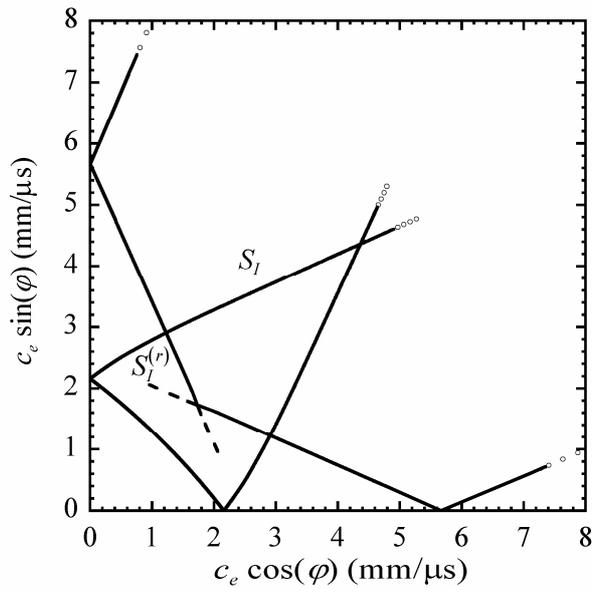


figure III-16 Vitesses de l'énergie relatives à la solution S_I (en traits pleins) et à la solution $S_I^{(r)}$ (en pointillés).

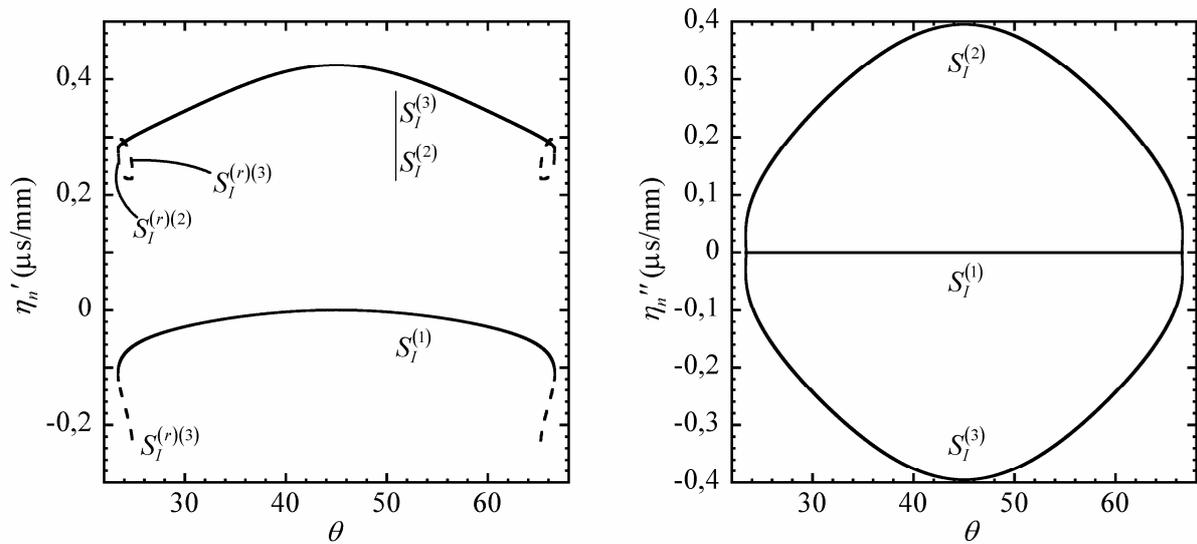


figure III-17 Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des composantes normales de la lenteur de phase des solutions S_I (en traits pleins) et $S_I^{(r)}$ (en pointillés).

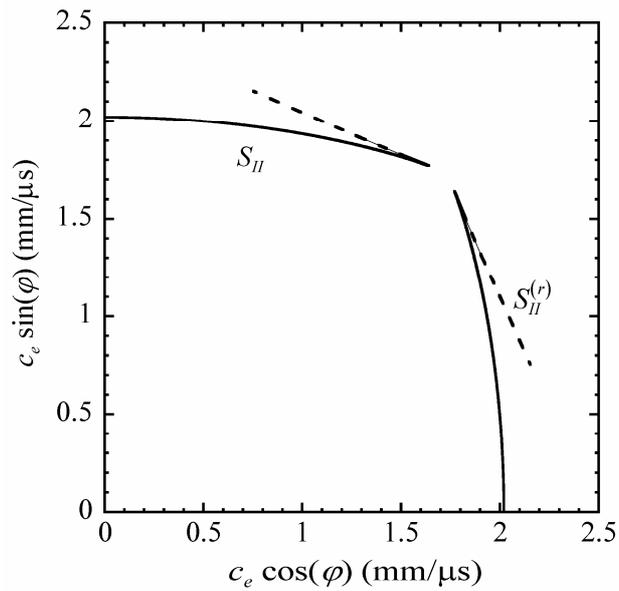


figure III-18 Vitesses de l'énergie relatives à la solution S_{II} (en traits pleins) et à la solution $S_{II}^{(r)}$ (en pointillés).

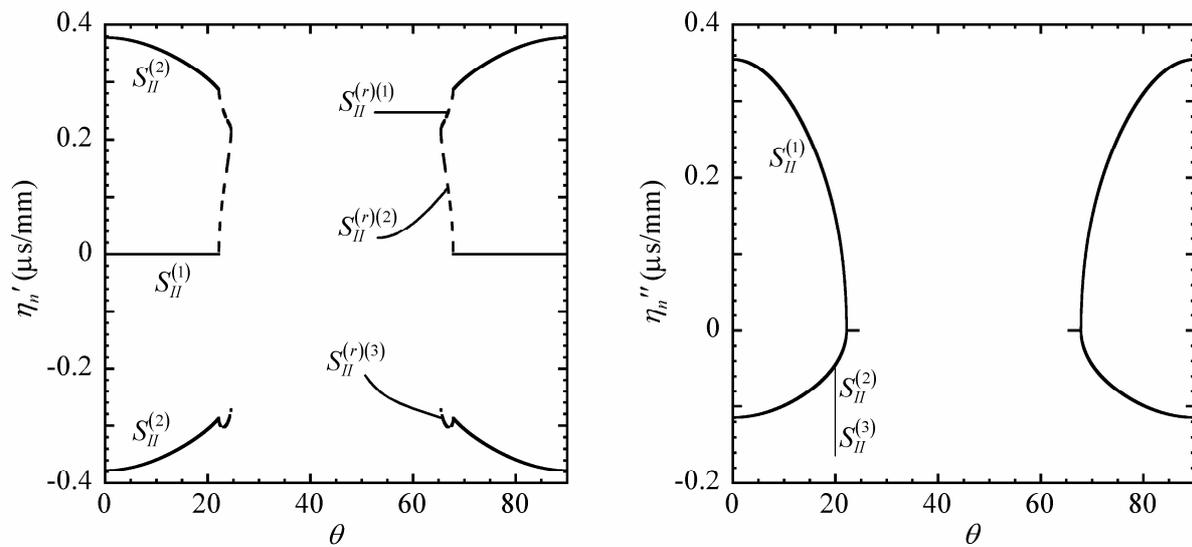


figure III-19 Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des composantes normales de la lenteur de phase des solutions S_{II} (en traits pleins) et $S_{II}^{(r)}$ (en pointillés).

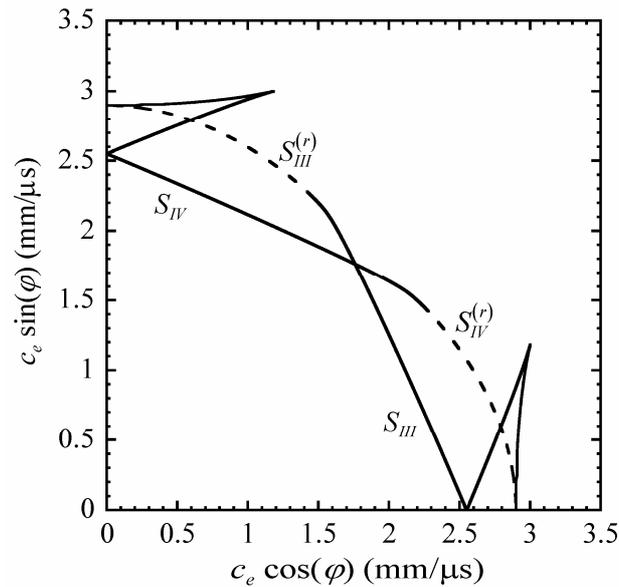


figure III-20 Vitesses de l'énergie relatives aux solutions S_{III} et S_{IV} (en traits pleins) et aux solutions $S_{III}^{(r)}$ et $S_{IV}^{(r)}$ (en pointillés).

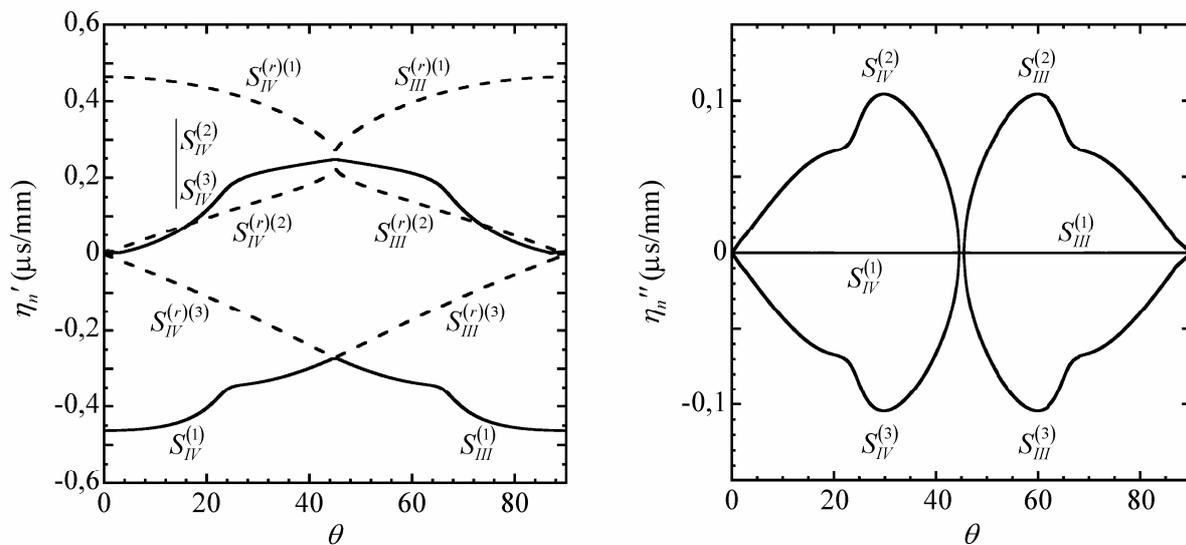


figure III-21 Partie réelle, à gauche, et imaginaire, à droite, des composantes normales de la lenteur de phase des solutions S_{III} et S_{IV} , en traits pleins et $S_{III}^{(r)}$ et $S_{IV}^{(r)}$, en pointillés.

Une remarque peut être faite au sujet des vitesses de l'énergie de la solution S_I (figure III-16). Il apparaît sur sa forme d'onde des ronds qui symbolisent le prolongement de cette courbe à l'infini. Afin d'expliquer ce résultat, considérons une lenteur $\mathbf{S}_{||}$ et le vecteur unitaire normal à la courbe des lenteurs de phase \mathbf{n}_φ lui correspondant. La norme de la vitesse de l'énergie se propageant dans la direction du vecteur \mathbf{n}_φ est donnée par la relation :

$$c_e = \frac{1}{\mathbf{S}_{\parallel} \cdot \mathbf{n}_{\varphi}}. \quad (3.131)$$

Lorsque les vecteurs \mathbf{S}_{\parallel} et \mathbf{n}_{φ} sont orthogonaux, la vitesse de l'énergie tend vers l'infini.

Au même titre que l'onde rasante homogène TH , la théorie des rayons homogènes n'autorise qu'une description partielle des phénomènes physiques relatifs à l'onde de Rayleigh. Les fronts d'onde se propageant dans la continuité des cornes des vitesses de l'énergie peuvent cependant être calculés à partir du principe de Fermat approché. Il est appliqué à l'onde de Rayleigh hétérogène dont la composante de la lentéur de phase à l'interface est complexe. Cette onde ainsi que la pseudo onde de Rayleigh qui est par définition une onde hétérogène sont traitées dans la partie suivante.

III.6 Onde de Rayleigh hétérogène

III.6.1 Relation entre la lentéur de phase et la direction de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène et de la pseudo onde de Rayleigh

La relation entre la lentéur de phase et le vecteur de Poynting obtenue à la section III.4.3 pour le cas d'une onde de Rayleigh hétérogène est donnée par :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i\mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \langle\langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle\rangle = \langle\langle e_c + e_p \rangle\rangle - \langle\langle e_{\omega} \rangle\rangle - i \langle\langle e_l \rangle\rangle. \quad (3.132)$$

En introduisant le vecteur unitaire \mathbf{n}_{φ} orienté dans la direction de l'énergie ainsi que le module du vecteur $\langle\langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle\rangle : \langle\langle J'_{\parallel} \rangle\rangle$, l'équation (3.132) peut se mettre sous la forme :

$$(\mathbf{S}'_{\parallel} + i\mathbf{S}''_{\parallel}) \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = \frac{\langle\langle e_c + e_p \rangle\rangle}{\langle\langle J'_{\parallel} \rangle\rangle} - \frac{\langle\langle e_{\omega} \rangle\rangle}{\langle\langle J'_{\parallel} \rangle\rangle} - i \frac{\langle\langle e_l \rangle\rangle}{\langle\langle J'_{\parallel} \rangle\rangle}. \quad (3.133)$$

Le calcul de l'intégrale du terme $\langle\langle e_l \rangle\rangle$ défini par:

$$\langle\langle e_l \rangle\rangle = \int_0^{+\infty} \langle e_l \rangle dx_1 = \frac{1}{2\omega} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_1} dx_1, \quad (3.134)$$

conduit à l'expression :

$$\langle\langle e_l \rangle\rangle = \frac{1}{2\omega} \left(\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \bar{J}_1(x_1) - \bar{J}_1(x_1 = 0) \right). \quad (3.135)$$

La condition de surface libre impose aux contraintes normales appliquées à la surface d'être nulles. Ainsi, la composante normale du vecteur de Poynting évaluée en tout point de la surface ($x_1 = 0$) est nulle :

$$\bar{J}_1(x_1 = 0) = 0. \quad (3.136)$$

L'onde de Rayleigh est caractérisée par une décroissance exponentielle de son amplitude et par conséquent de son énergie dans la profondeur du milieu. À une distance infinie de la surface, l'énergie de cette onde est nulle et il en est de même pour le vecteur de Poynting :

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \bar{J}_1(x_1) = 0. \quad (3.137)$$

De manière générale, cette relation n'est pas valide pour la pseudo onde de Rayleigh. Cette dernière est en effet caractérisée par un mode pour lequel la partie imaginaire du vecteur $\boldsymbol{\eta}_n$ induit une croissance exponentielle de l'amplitude dans la profondeur du milieu.

À partir des relations (3.136) et (3.137), le terme de perte d'énergie $\langle\langle e_l \rangle\rangle$ de l'équation (3.133) est, pour l'onde de Rayleigh hétérogène, nul :

$$\langle\langle e_l \rangle\rangle = 0. \quad (3.138)$$

La relation $\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = 0$ est donc vérifiée pour cette onde, ce qui n'est pas le cas pour la pseudo onde de Rayleigh. Elle garantit l'orientation du vecteur \mathbf{n}_{φ} selon la direction du transport de l'énergie.

Comme pour l'onde de Rayleigh homogène, le paramètre S'_n correspondant à la projection de la partie réelle de la lenteur de phase sur la direction de l'énergie est introduit :

$$\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = S'_n. \quad (3.139)$$

Le polynôme de Rayleigh est alors paramétré en fonction des grandeurs S'_n et S_2 à partir de cette relation. Il est identique à celui utilisé pour calculer les vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène. Dans la partie suivante, à l'instar des ondes rasantes hétérogènes, un couple (S'_n, S_2) vérifiant le principe de Fermat approché est recherché. Jusqu'à présent, le paramètre S'_n ainsi obtenu donnait le module de la vitesse de l'énergie en prenant son inverse. Ceci reposait sur la relation $\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{c}_e = 1$ avec $\mathbf{c}_e = c_e \mathbf{n}_{\varphi}$ déduite des relations énergétiques. Cependant, pour l'onde de Rayleigh hétérogène, le terme $\langle\langle e_{\omega} \rangle\rangle$ est non nul et on déduit de l'équation (3.132), en considérant la définition de la vitesse de l'énergie donnée par :

$$\mathbf{c}_e = \frac{\langle\langle \mathbf{J}'_{\parallel} \rangle\rangle}{\langle\langle e_c + e_p \rangle\rangle}, \quad (3.140)$$

la relation :

$$\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{c}_e = 1 - \varepsilon, \quad (3.141)$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{\langle\langle e_{\omega} \rangle\rangle}{\langle\langle e_c + e_p \rangle\rangle}. \quad (3.142)$$

Afin d'utiliser la méthode de calcul des vitesses de l'énergie, le terme ε est négligé. Il sera évalué dans la section suivante.

Afin de récapituler les relations vectorielles introduites dans cette partie, elles sont présentées à la figure III-22.

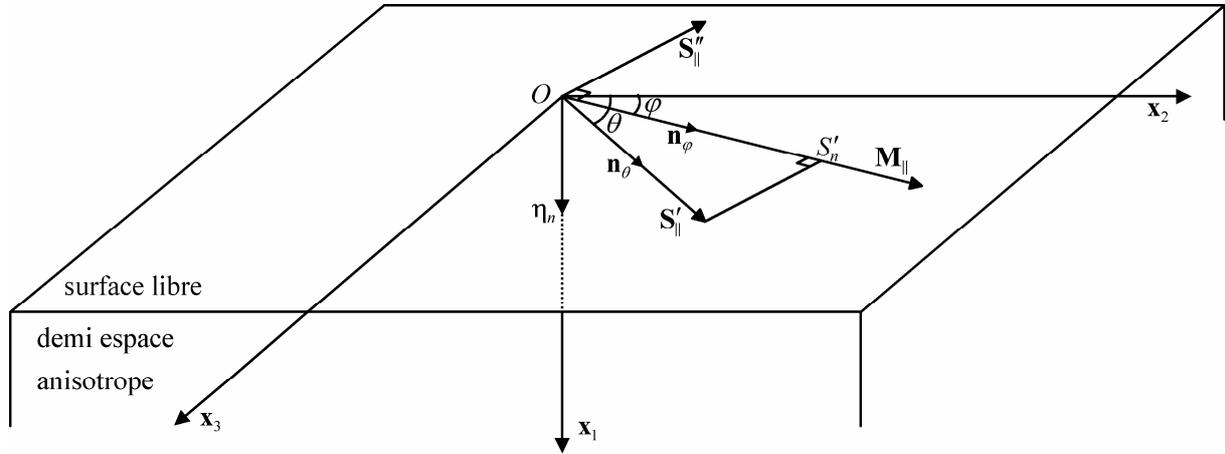


figure III-22 Représentation géométrique de la relation entre les parties, réelle et imaginaire, de la lenteur de phase et la direction de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène.

III.6.2 Calcul des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène et de la pseudo onde de Rayleigh

Les vitesses de l'énergie des fronts de l'onde de Rayleigh se situant dans la continuité des cornes de la forme d'onde ainsi que les vitesses de propagation des fronts de la pseudo onde de Rayleigh sont calculées. Pour cela, le principe de Fermat approché est appliqué.

III.6.2.1 Onde de Rayleigh hétérogène

Deux exemples de calcul des célérités de l'onde de Rayleigh hétérogène sont présentés. Chacun d'eux correspond à une solution qui est dans la continuité de l'une des deux cornes de la surface d'onde de l'onde de Rayleigh homogène.

Ainsi le système :

$$\begin{cases} R(S'_n, \varphi, S_2) = 0 \\ \frac{d^2 S'_n}{dS_n^2} = 0 \end{cases}, \quad (3.143)$$

est résolu pour des angles d'observation φ de 75° et de 64° . Afin d'illustrer les solutions communes aux deux équations du système (3.143), les racines du polynôme de Rayleigh sont tout d'abord calculées en fonction du paramètre S'_n pour les deux angles φ choisis. Les courbes des lenteurs de phase ainsi obtenues sont représentées à la figure III-23.

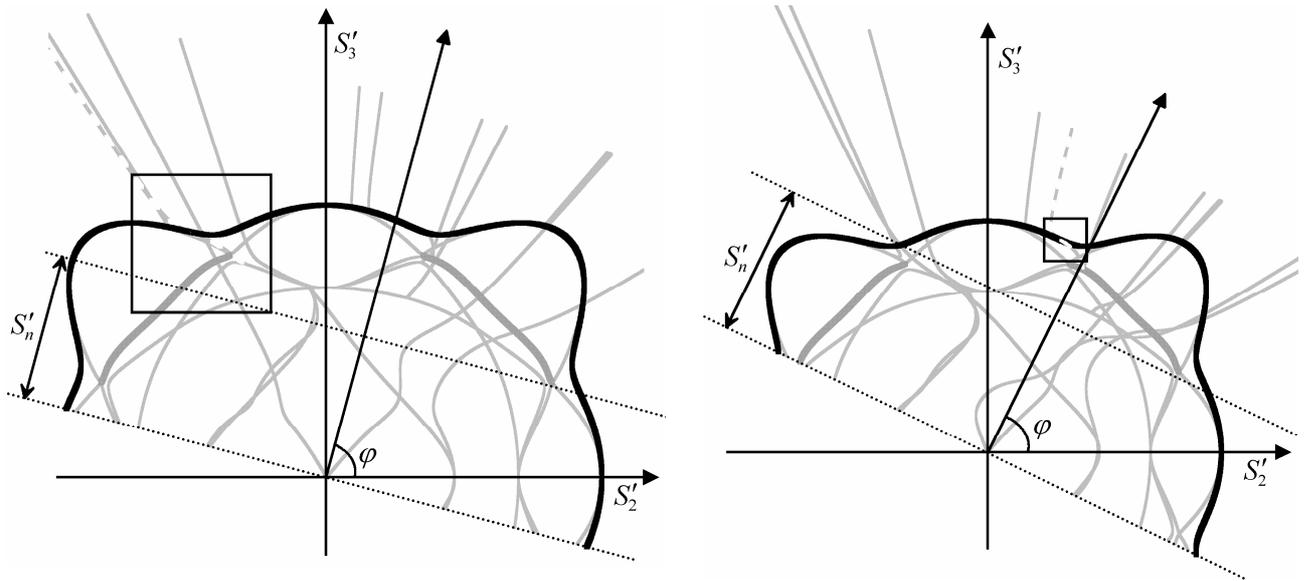


figure III-23 Parties réelles des courbes des lenteurs de phase calculées à partir du polynôme de Rayleigh pour des angles φ de 75° (à gauche) et de 64° (à droite). Les solutions de l'onde de Rayleigh sont en trait épais noir, celles de la pseudo onde de Rayleigh en trait épais gris et toutes les autres en traits fins gris.

Sur chacune de ces figures un carré noir spécifie la zone dans laquelle se trouve la lenteur de phase associée à la vitesse de l'énergie recherchée. Pour plus de clarté, un zoom est réalisé sur ces deux zones. Il est représenté à la figure III-24.

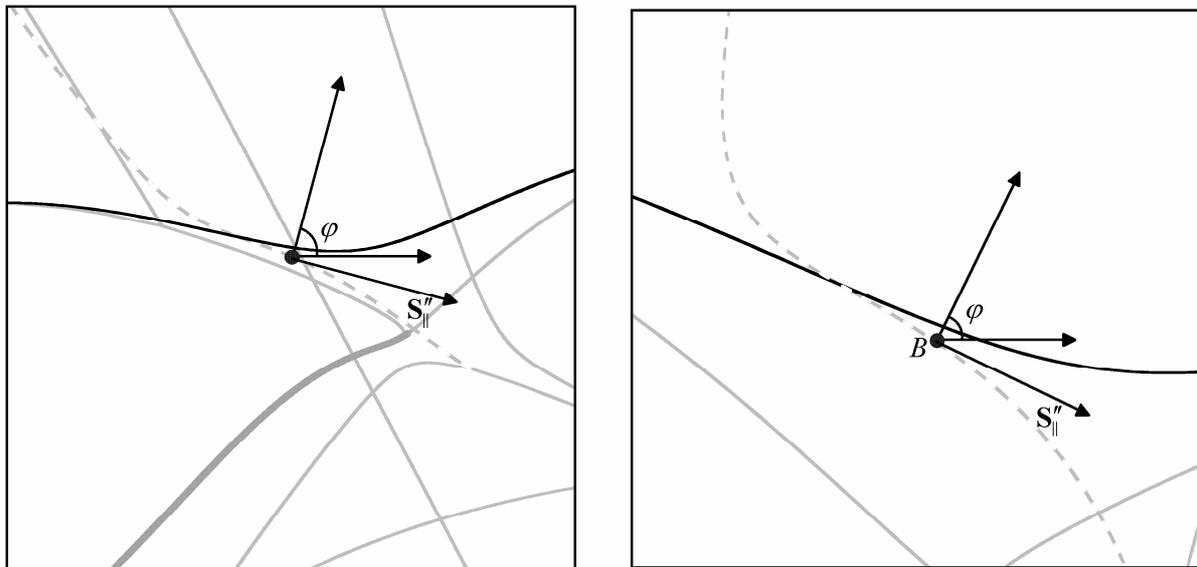


figure III-24 Zoom des courbes des lenteurs de phase correspondant aux zones carrées de la figure III-23. Les lettres A et B spécifient les lenteurs de phase qui vérifient le principe de Fermat approché.

Les solutions complexes issues du raccordement des solutions réelles qui correspondent à la corne des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène y sont représentées en pointillés. Elles constituent une infinité d'ondes hétérogènes dont l'énergie est orientée dans la direction de l'énergie fixée auparavant car elles vérifient toutes la relation : $\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = 0$. Parmi ces solutions une seule vérifie le principe de Fermat approché. Elle ne correspond plus à un pic infini de la dérivée dS'_2/dS'_n mais à un maximum. Cette dérivée est calculée en fonction du paramètre S'_n pour les solutions représentées en pointillés. Elle est illustrée à la figure III-25 pour les angles $\varphi = 75^\circ$ et $\varphi = 64^\circ$:

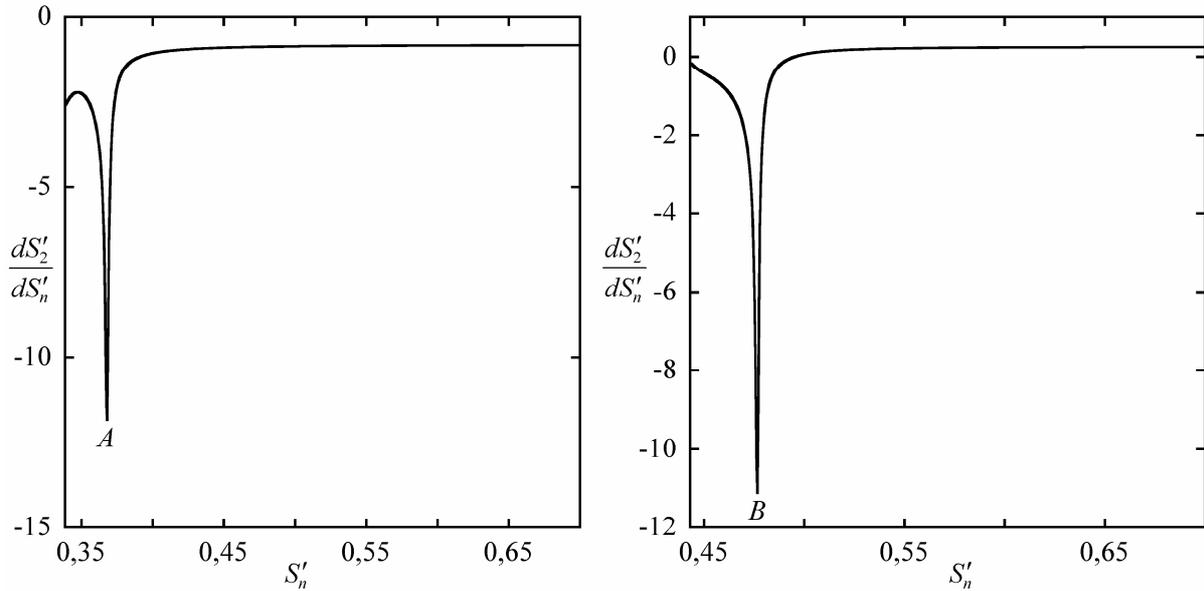


figure III-25 Représentation de la dérivée dS'_2/dS'_n évaluée le long des contours en pointillés de la figure III-24 en fonction du paramètre S'_n , pour des angles φ de 75° , à gauche et de 64° , à droite.

Sur chacune de ces dérivées, un minimum émerge identifié par les lettres A et B . La vitesse de l'onde est alors obtenue en prenant l'inverse du paramètre S'_n associé au maximum. Les deux vitesses ainsi obtenues sont représentées sur la courbe d'onde à la figure III-26.

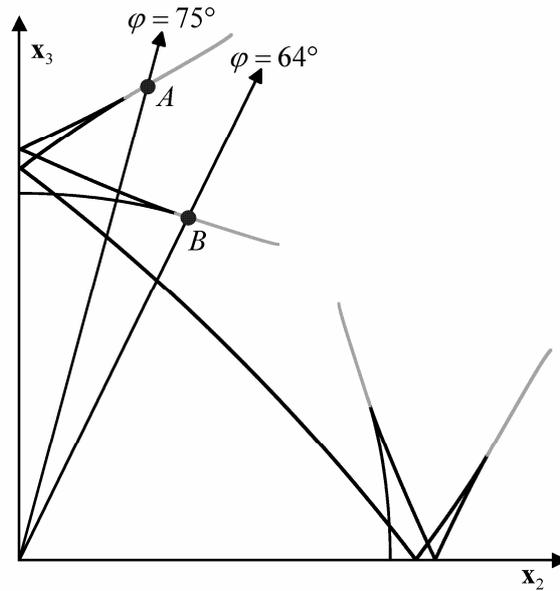


figure III-26 Vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène pour des angles d'observation de 64° , point B et 75° , point A.

Les vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène sont calculées pour différents angles φ en résolvant le système (3.143) par la méthode de Gauss. Elles sont superposées aux vitesses de l'onde homogène et représentées en gris à la figure III-27.

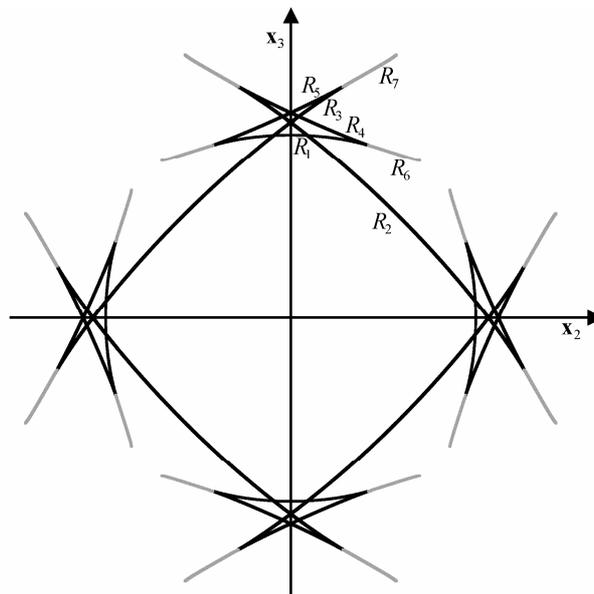


figure III-27 Vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène, représentées en noir et de l'onde de Rayleigh hétérogène, représentées en gris.

Ces vitesses sont dans la continuité des vitesses de l'onde homogène. Afin d'illustrer cette continuité, les composantes normales des lenteurs de phase des trois modes hétérogènes sont

superposées aux résultats obtenus dans la partie précédente à la figure III-28 et à la figure III-29.

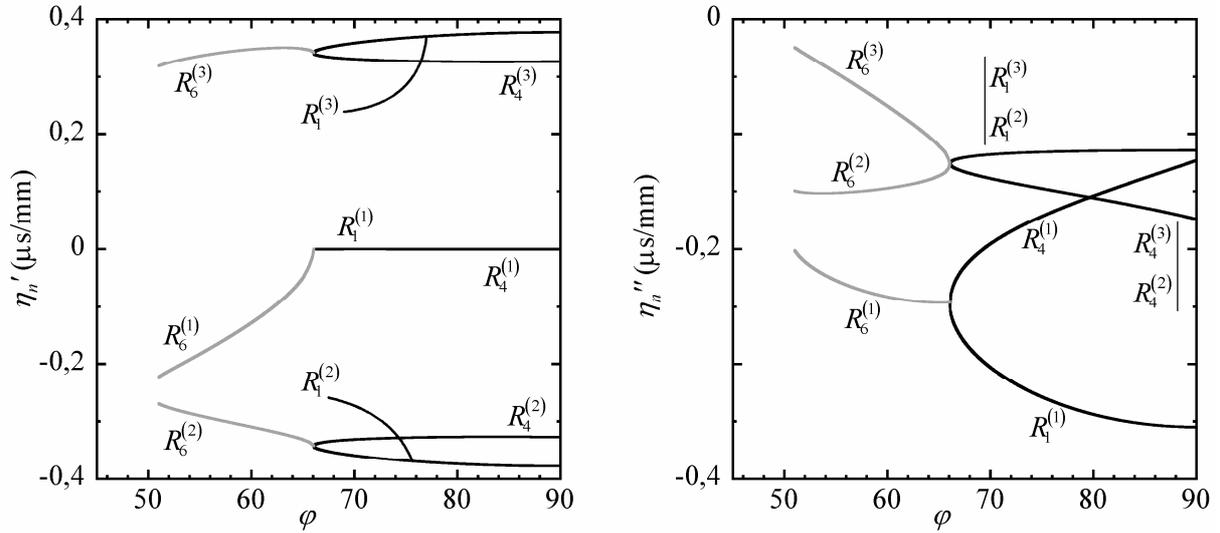


figure III-28 Partie réelle, à gauche, et imaginaire, à droite, des trois composantes normales de la lenteur de phase des branches R_1 , R_4 et R_6 en fonction de l'angle φ .

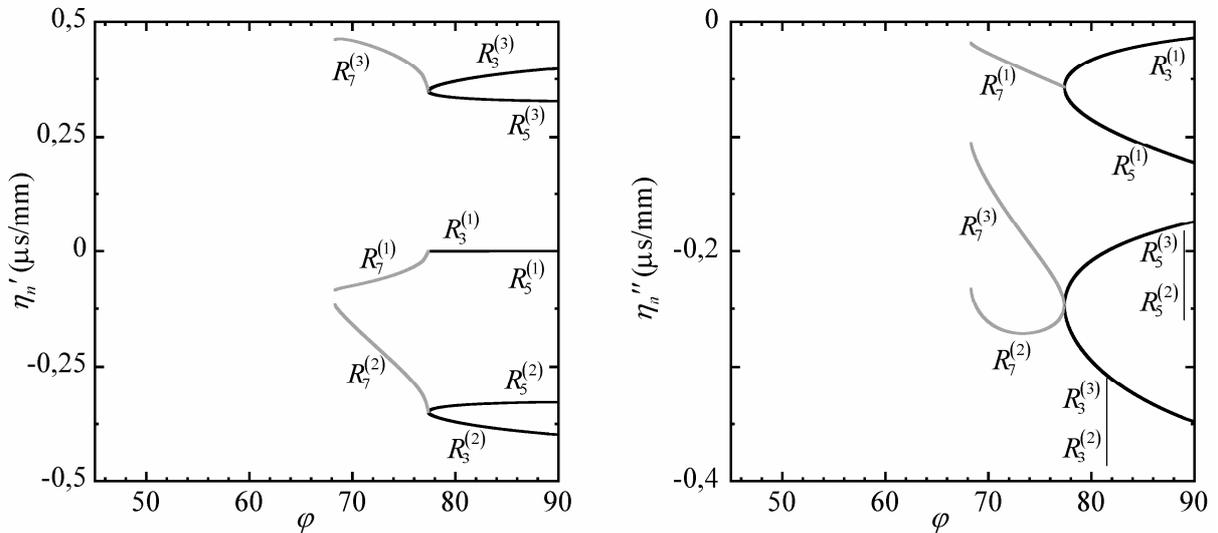


figure III-29 Partie réelle, à gauche, et imaginaire, à droite, des trois composantes normales de la lenteur de phase des branches R_3 , R_5 et R_7 en fonction de l'angle φ .

La continuité au niveau des cornes est respectée. On constate également que la décroissance exponentielle de l'onde est conservée car les parties imaginaires restent négatives.

Afin de calculer les vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh hétérogène, le terme ε apparaissant dans la relation :

$$\mathbf{S}'_{\parallel} \cdot \mathbf{c}_e = 1 - \varepsilon, \quad (3.144)$$

a été négligé. Ce terme est évalué et représenté en fonction de l'angle φ à la figure III-30 pour les branches R_6 et R_7 .

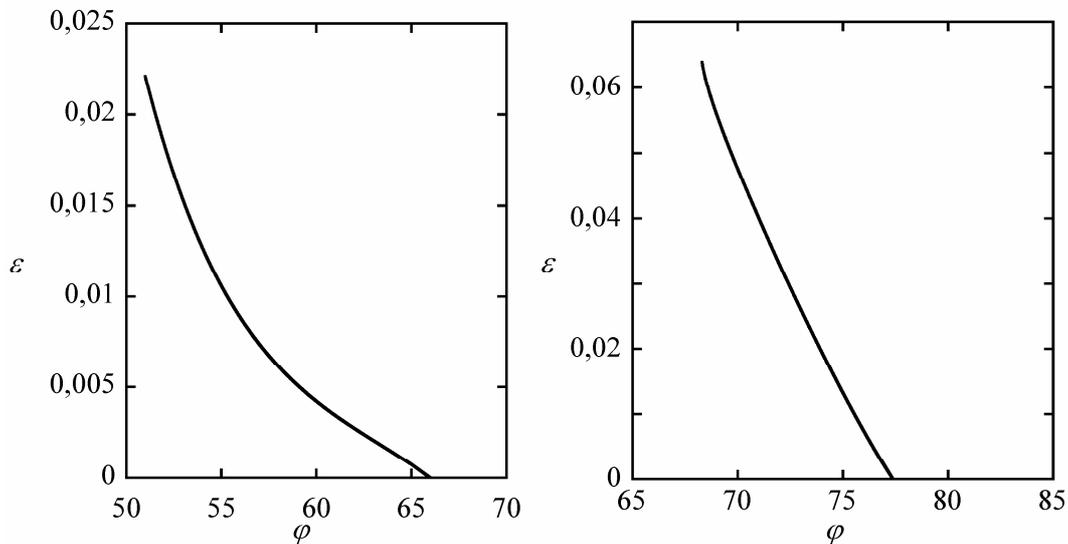


figure III-30 Évaluation du terme ε en fonction de l'angle φ pour les branches R_6 (à gauche) et R_7 (à droite).

La valeur maximale de ce terme représente 6% de l'unité. L'approximation réalisée sur l'évaluation de la vitesse de l'énergie est donc faible.

III.6.2.2 Pseudo onde de Rayleigh

Les calculs réalisés pour la pseudo onde de Rayleigh doivent être considérés avec précaution. En effet, cette onde qui peut être observée expérimentalement, n'est pas décrite par la théorie des ondes planes comme une onde physiquement acceptable. Parmi les trois composantes normales complexes de la lenteur de phase qui composent cette onde, une d'entre elles induit une augmentation de son amplitude dans la profondeur du milieu. Ceci est incompatible avec la définition d'une onde de surface et de manière générale incompatible avec les lois de conservation de l'énergie. Cependant il s'est avéré que le calcul des vitesses de l'énergie, à partir de la courbe des lenteurs de phase ou par le calcul de la fonction de Green, donnait des résultats satisfaisants par comparaison avec ceux obtenus expérimentalement. Les calculs qui sont réalisés dans cette partie par application du principe de Fermat approché amènent au même constat. Le terme $\ll e_i \gg$ introduit dans les relations énergétiques est non nul. La relation $\mathbf{S}_{\parallel}'' \cdot \mathbf{n}_{\varphi} = 0$ assurant le calcul des vitesses de l'énergie se propageant dans la direction du vecteur \mathbf{n}_{φ} n'est donc pas satisfaite. La méthode utilisée jusqu'à présent pour les ondes hétérogènes est donc mise en défaut. Outre ce constat, elle est appliquée et les résultats obtenus sont satisfaisants.

Au préalable, les vitesses de l'énergie de la pseudo onde de Rayleigh sont calculées en appliquant la méthode usuelle basée sur les normales à la courbe des lenteurs de phase parallèle à l'interface. Cette méthode introduite dans le premier chapitre n'est en principe utilisable que pour les ondes homogènes dont les lenteurs sont réelles. Elle est donc, pour la pseudo onde de Rayleigh, appliquée à la partie réelle de la courbe des lenteurs de phase. La partie imaginaire de ces lenteurs étant faible en comparaison avec leur partie réelle, les résultats obtenus par cette approche sont cohérents avec ceux issus de mesures expérimentales. La forme d'onde est constituée d'une corne nommée Ps_1^* et d'une branche, Ps_2^* . Elle est représentée à la figure III-31 :

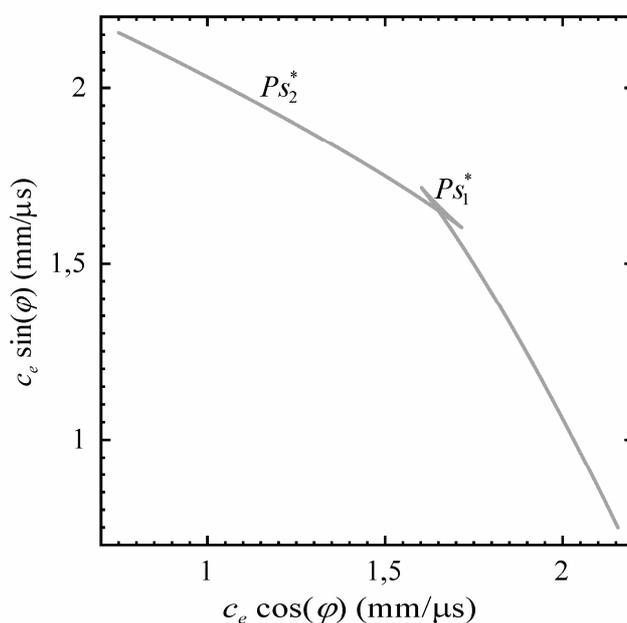


figure III-31 Vitesses de l'énergie de la pseudo onde de Rayleigh calculées à partir de la partie réelle de la courbe des lenteurs de phase.

Les parties, réelle et imaginaire, des composantes normales de la lenteur de phase η_n , sont illustrées, en fonction de l'angle d'observation φ , à la figure III-32 pour les solutions correspondant à la corne Ps_1^* et à la figure III-33 pour la branche Ps_2^* . Les trois modes sont différenciés par un exposant entre parenthèses.

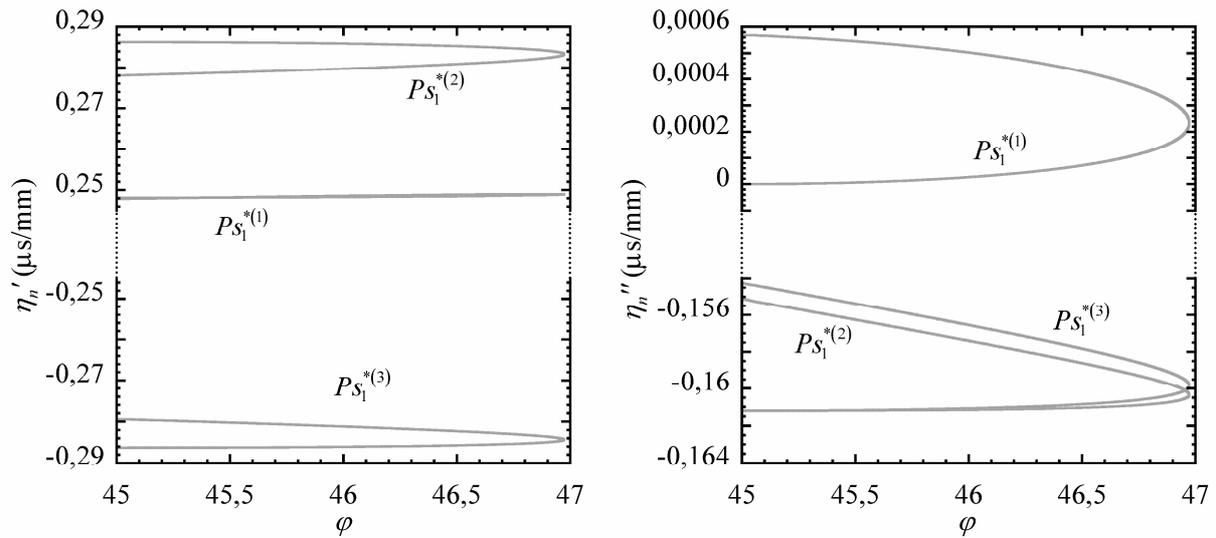


figure III-32 Partie réelle, à gauche et partie imaginaire à droite, des composantes normales de la lenteur de phase, correspondant à la corne Ps_1^* , en fonction de l'angle d'observation φ .

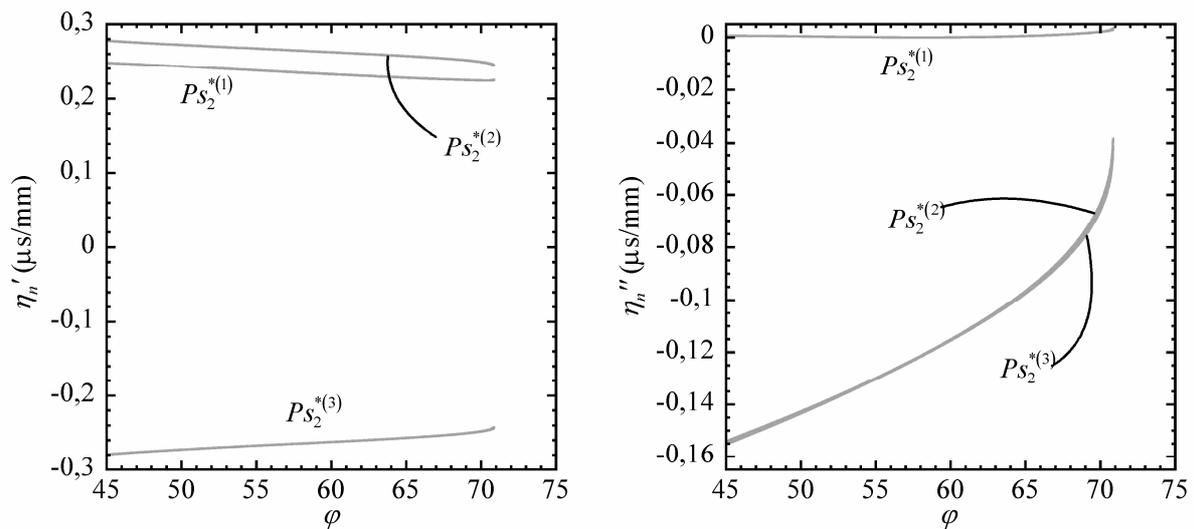


figure III-33 Partie réelle, à gauche et partie imaginaire à droite, des composantes normales de la lenteur de phase, correspondant à la branche Ps_2^* , en fonction de l'angle d'observation φ .

Ces résultats classiques vont permettre une comparaison avec ceux obtenus par le principe de Fermat approché.

La pseudo onde de Rayleigh est une onde hétérogène. Les vitesses de l'énergie peuvent donc être calculées en appliquant le principe de Fermat approché. De la même manière que pour l'onde de Rayleigh hétérogène, le système suivant est résolu :

$$\begin{cases} R(S'_n, \varphi, S_2) = 0 \\ \frac{d^2 S'_n}{dS_n'^2} = 0 \end{cases}, \quad (3.145)$$

pour les solutions du polynôme de Rayleigh correspondant à la pseudo onde de Rayleigh. Les solutions de ce système sont obtenues par la méthode de Gauss. Le calcul des vitesses de l'énergie relatif à la corne pose des problèmes au niveau du tri de solutions du polynôme de Rayleigh. Ainsi, seules les solutions qui sont dans la continuité de cette corne sont obtenues (courbe Ps_1). Les vitesses de l'énergie de la branche ainsi que celles qui sont dans sa continuité sont toutes calculées (courbe Ps_2). Ces résultats complètent ceux obtenus à partir de la courbe des lenteurs de phase. Ces vitesses sont représentées à la figure III-34 :

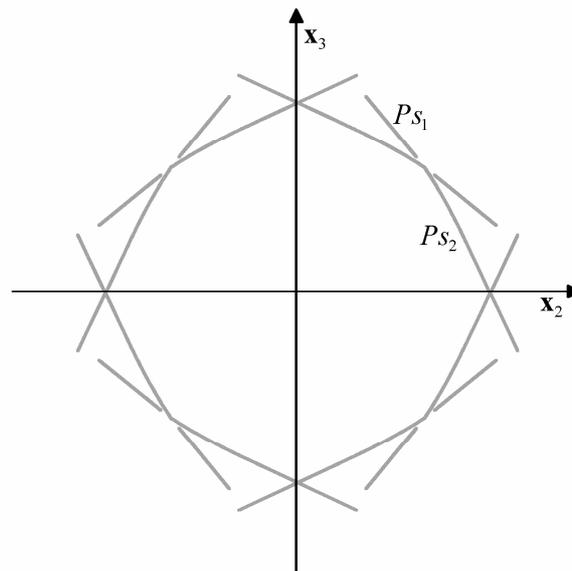


figure III-34 Vitesses de l'énergie de la pseudo onde de Rayleigh calculées à partir du principe de Fermat approché.

Les courbes des parties réelles et imaginaires des composantes normales de la lenteur de phase η_n sont représentées, en fonction de l'angle d'observation φ , à la figure III-35 pour les solutions Ps_1 et à la figure III-36 pour les solutions Ps_2 .

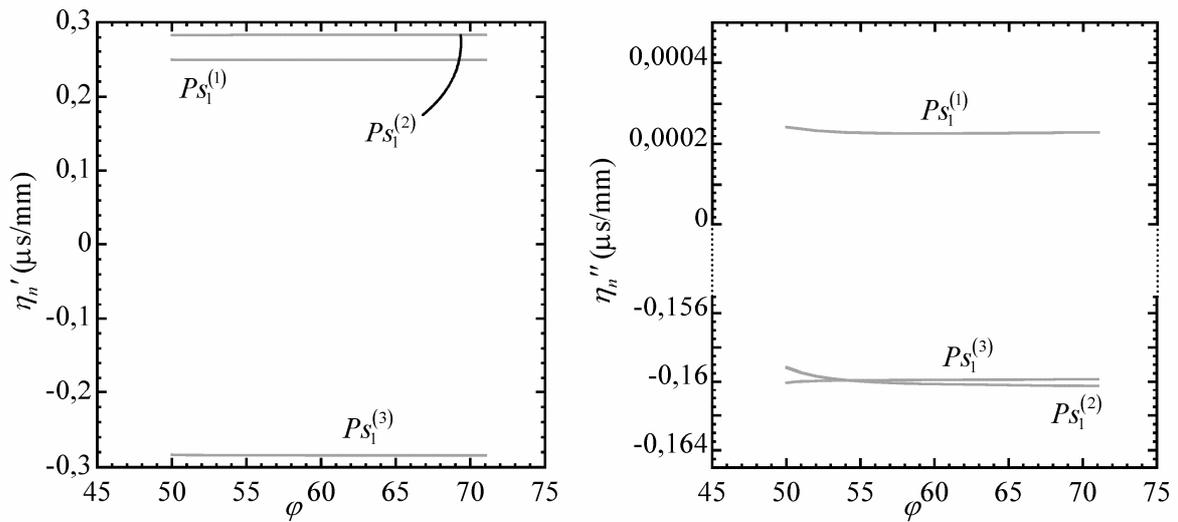


figure III-35 Partie réelle, à gauche et partie imaginaire, à droite, des composantes normales de la lenteur de phase de la solution Ps_1 en fonction de l'angle d'observation φ .

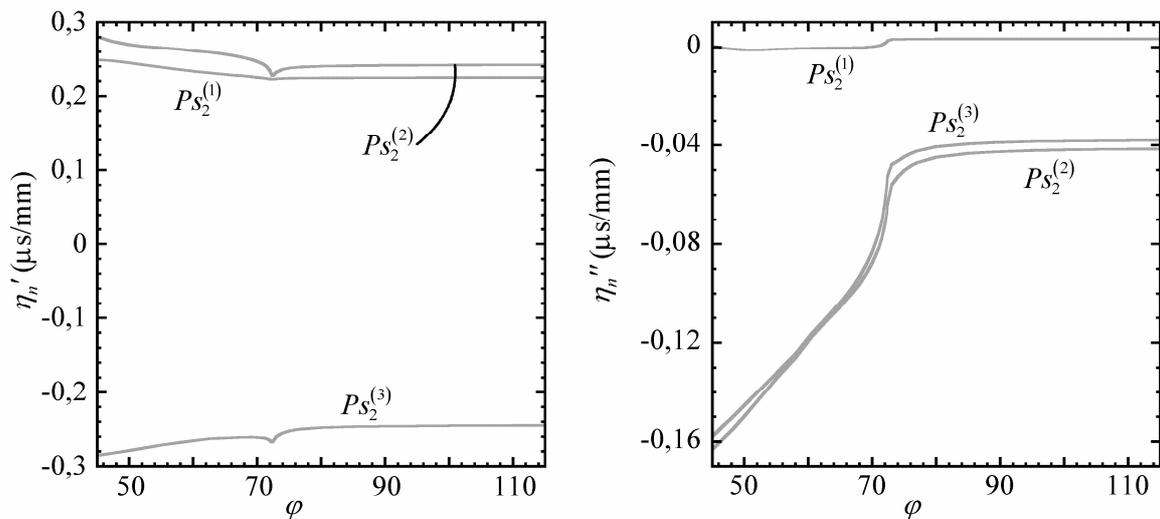


figure III-36 Partie réelle, à gauche et partie imaginaire, à droite, des composantes normales de la lenteur de phase de la solution Ps_2 en fonction de l'angle d'observation φ .

Ces résultats sont cohérents avec ceux présentés à la figure III-32 et à la figure III-33. Les composantes normales de la solution Ps_1 sont dans la continuité de celles de la corne Ps_1^* . De même les composantes normales des branches Ps_2 et Ps_2^* pour des angles d'observation φ identiques sont très proches. Une différence apparaît cependant pour la partie imaginaire du mode $Ps_2^{(1)}$ qui est négative pour les angles φ compris entre 45° et 70° . Ces angles correspondent à l'intervalle d'existence de la solution classique Ps_2^* . Sur ce dernier, la pseudo onde de Rayleigh Ps_2 est physiquement admissible car les parties imaginaires de ses trois

composantes normales, négatives, impliquent une décroissance de l'onde dans la profondeur du milieu.

III.7 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont comparés à la représentation tridimensionnelle de la réponse élastodynamique calculée dans le premier chapitre à partir de la fonction de Green. La courbe des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène lui est superposée à la figure III-37.

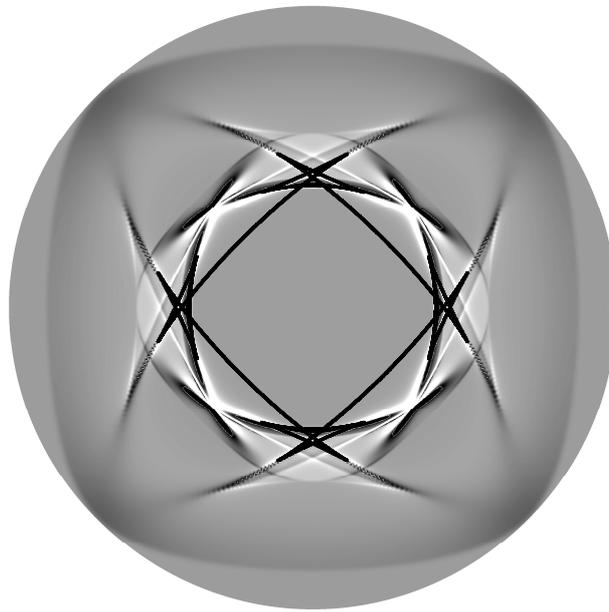


figure III-37 Comparaison des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène avec la réponse élastodynamique calculée par la fonction de Green.

On remarque que la branche R_2 de faible amplitude n'est pas observable par le calcul de la fonction de Green.

Les courbes des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh homogènes et hétérogènes sont superposées à la réponse élastodynamique à la figure III-38.

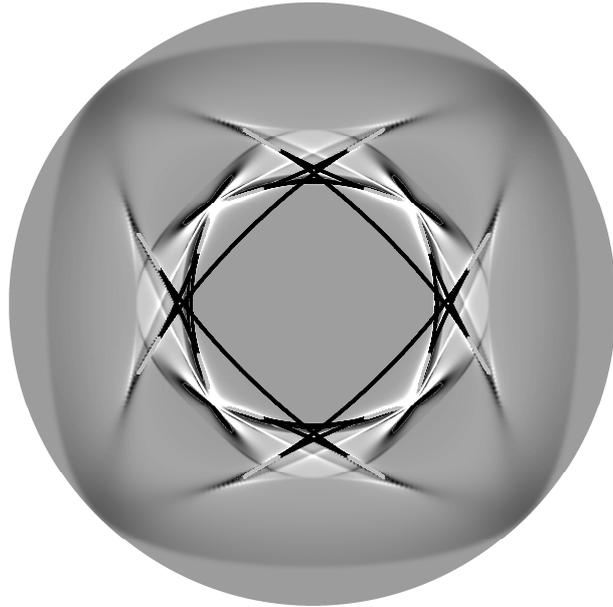


figure III-38 Comparaison des vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène représentées en noir et de l'onde de Rayleigh hétérogène représentées en gris avec la réponse élastodynamique calculée par la fonction de Green.

Les vitesses de l'énergie décrites par la branche R_7 sont proches de celles obtenues pour l'onde homogène TH . Il est donc difficile de les différencier à partir de la représentation tridimensionnelle de la figure III-38. Cependant il apparaît sur la réponse élastodynamique bidimensionnelle, qui correspond pour un angle donné à une coupe verticale de cette figure, des discontinuités caractéristiques de l'onde de Rayleigh. Les vitesses correspondantes sont alors en accord avec celles obtenues à partir l'onde de Rayleigh hétérogène. Ces discontinuités sont observables dans le chapitre suivant sur le déplacement vertical de la surface, calculé par la fonction de Green, pour des angles φ de 15° pour la branche R_7 et de 30° pour la branche R_6 .

Finalement, les vitesses de l'énergie de la pseudo onde de Rayleigh sont comparées à la réponse élastodynamique à la figure III-39. Bien que les courbes des ondes hétérogènes aient été tracées en gris jusqu'à présent, elles sont représentées ici en noir par souci de clarté.

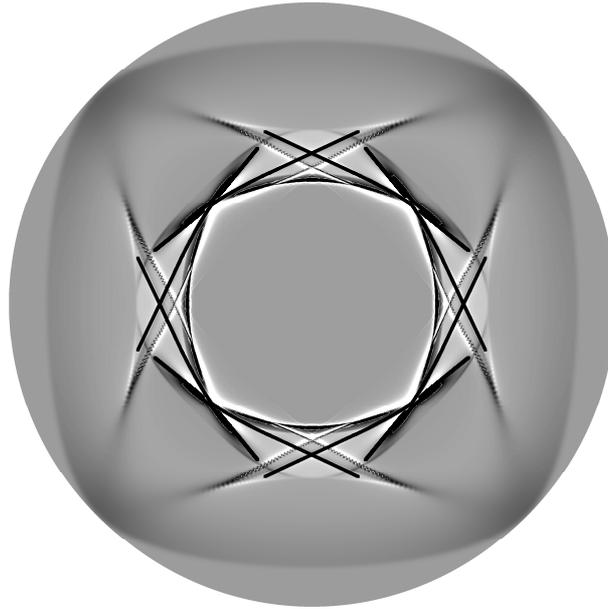


figure III-39 Comparaison des vitesses de l'énergie de la pseudo onde de Rayleigh avec la réponse élastodynamique calculée par la fonction de Green.

III.8 Conclusion

Dans ce chapitre, les vitesses de l'énergie de l'onde de Rayleigh homogène sont calculées à partir du polynôme de Rayleigh couplé à une relation énergétique obtenue à partir du principe de Fermat. Afin de compléter ces résultats qui ne décrivent que partiellement les phénomènes physiques observés expérimentalement le concept d'onde de Rayleigh hétérogène est introduit. Les vitesses qui lui sont associées sont alors calculées à partir du principe de Fermat approché. Ces vitesses sont des valeurs approchées des vitesses de l'énergie. Elles décrivent cependant correctement les fronts se propageant par diffraction dans le prolongement des cornes de la forme d'onde. Les vitesses de l'énergie de la pseudo onde de Rayleigh sont également calculées. Sa description par la théorie des ondes planes n'est pas physiquement admissible car elle est constituée d'une composante normale de la lenteur de phase dont la partie imaginaire implique une croissance de son amplitude dans la profondeur du milieu. Malgré cela, le calcul usuel de ses vitesses de l'énergie, basé sur la partie réelle de sa courbe des lenteurs de phase, donne des résultats qui sont en accord avec l'expérience. Partant de ce constat, le principe de Fermat approché est appliqué à cette onde qui est par nature hétérogène. La croissance de son amplitude dans la profondeur du milieu induit un paramétrage non physique du polynôme de Rayleigh. Cependant les résultats obtenus sont cohérents avec ceux obtenus expérimentalement.

- Chapitre IV -

Résultats expérimentaux

I.1 Introduction.....	125
I.2 Mode opératoire.....	125
I.3 Résultats.....	126
I.4 Conclusion	133

IV.1 Introduction

La détection LASER qui utilise le principe de l'interférométrie optique offre un outil très performant pour la mesure des déplacements acoustiques d'une surface. Cette technique autorise une mesure ponctuelle et instantanée des perturbations acoustiques sur une surface. Ainsi, la détection des ondes acoustiques peut être menée avec une excellente résolution spatiale et temporelle. Une mesure expérimentale de la réponse dynamique de la surface d'un monocristal de cuivre, soumise à une source ponctuelle impulsionnelle, est réalisée en appliquant cette technique. Après une description du dispositif expérimental, les résultats obtenus sont présentés. Afin de proposer une synthèse, ils sont comparés à ceux des chapitres précédents. On y observe notamment la propagation des fronts d'onde, générés par diffraction, se trouvant dans le prolongement des cornes mis en évidence auparavant.

IV.2 Mode opératoire

Un LASER Nd :YAG est utilisé pour générer des ondes ultrasonores en régime d'ablation. La durée de l'émission est de 15 ns et la lumière émise a une longueur d'onde de 1064 nm avec une énergie maximale de 340 mJ. La dépendance temporelle s'apparente donc à une fonction de Dirac. Le faisceau incident est focalisé à l'aide d'une lentille sphérique rendant la source acoustique ponctuelle d'un diamètre inférieur à 1 mm. La force réactive est normale à l'interface. La détection des fronts d'onde s'effectue à partir d'une sonde LASER hétérodyne d'une puissance de 100 mW. La mesure des fronts des ondes de surface est réalisée en positionnant le faisceau sonde de l'interféromètre sur la surface impactée. Un dispositif de rotation conservant la distance entre les faisceaux émetteur et récepteur permet de mesurer les arrivées des fronts pour différentes directions à la surface de l'échantillon. Le dispositif expérimental est représenté à la figure IV-1.

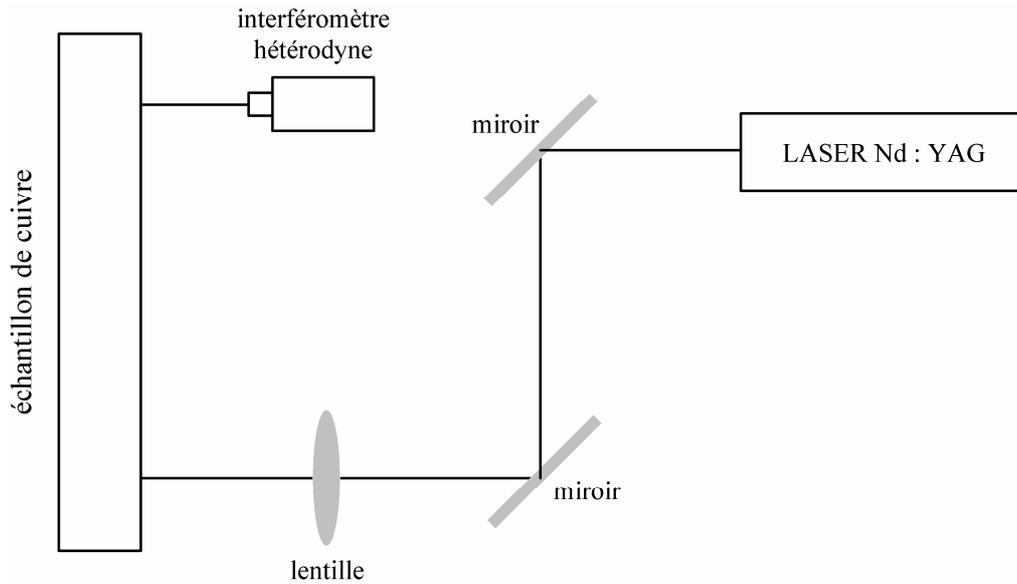


figure IV-1 Montage expérimental pour la génération et détection LASER d'ondes à la surface d'un échantillon de cuivre.

Les mesures sont effectuées tous les degrés pour des angles compris entre -45° et 45° . Les résultats sont moyennés sur 300 tirs. La distance entre la source et le récepteur est de 202 mm.

IV.3 Résultats

La sonde mesure en un point de la surface son déplacement normal en fonction du temps. Les temps d'arrivée des différents fronts d'onde dépendent alors de la distance entre l'émetteur et le récepteur. Afin de comparer les résultats expérimentaux à ceux des chapitres précédents, l'évolution du déplacement est représentée en fonction de la vitesse. Elle est spécifique à chacun des fronts d'onde et les résultats obtenus ne dépendent plus de la distance émetteur-récepteur.

Les formes d'onde mesurées expérimentalement sont comparées à celles de la section I.4.3 calculées théoriquement, pour des angles φ de 0° , 15° , 30° et 45° . Afin de simplifier la comparaison chaque front est identifié. Ils sont définis figure IV-2 et à la figure IV-3. Les fronts des ondes rasantes dans le plan, hors plan, de Rayleigh et pseudo-Rayleigh sont respectivement repérées par les lettres I , O , R et Ps . Les solutions représentées en gris correspondent aux fronts d'onde générés par diffraction au niveau des cornes des courbes des vitesses de l'énergie.

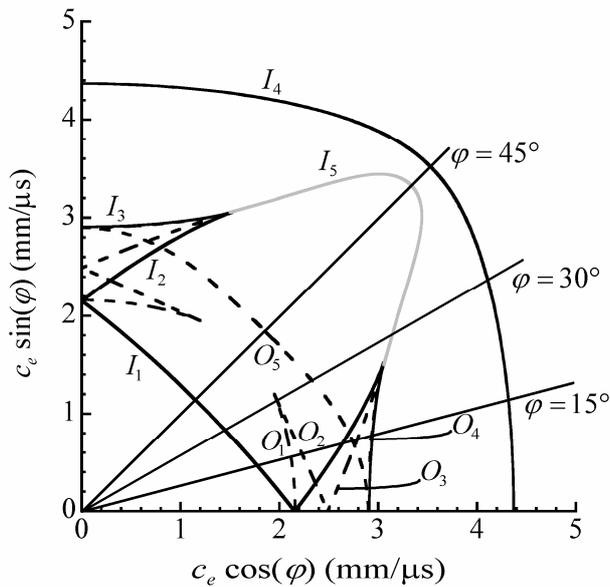


figure IV-2 Vitesses de l'énergie des ondes rasantes dans le plan (trait plein) et hors plan (traits en pointillés).

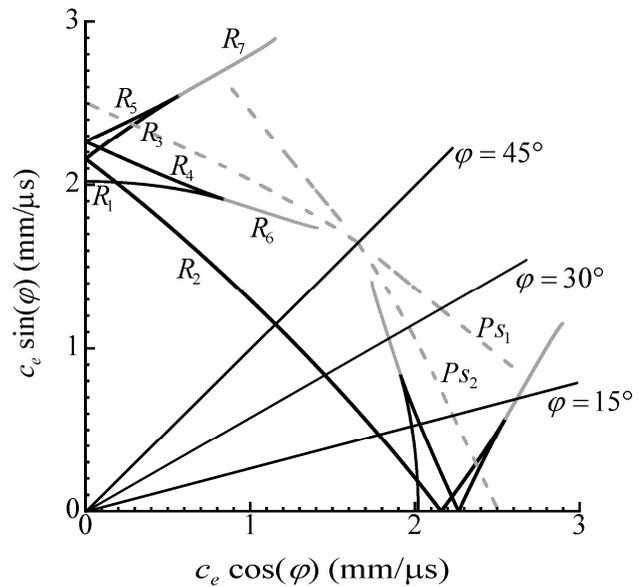


figure IV-3 Vitesse de l'énergie des ondes de Rayleigh (trait plein) et pseudo-Rayleigh (traits en pointillés).

La vitesse des fronts d'onde comparés est comprise entre 1,5 mm/ μ s et 5 mm/ μ s. Nous n'attacherons pas d'importance à l'amplitude du déplacement vertical de la surface. Elle est de l'ordre du pico mètre. La comparaison porte sur les discontinuités du déplacement vertical qui sont provoquées par l'arrivée de fronts d'ondes.

Tout d'abord, pour l'angle $\varphi = 0^\circ$, la figure IV-4 montre la complexité du déplacement de la surface due au nombre important de fronts d'onde se propageant. Les arrivées des trois fronts de l'onde de Rayleigh (R_1 , R_2 , R_4) sont discernables par des pics de forte amplitude. Ils apparaissent également dans les résultats expérimentaux. Les fronts des ondes latérales sont caractérisés par des discontinuités d'amplitude plus faible. On discerne donc plus difficilement leurs fronts expérimentaux qui sont parasités par le bruit. Cependant les fronts I_1 , O_1 et O_3 sont identifiables. De plus, le déplacement croît à partir de la vitesse de O_4 puis décroît à celle du front I_4 ce qui est en accord avec la théorie.

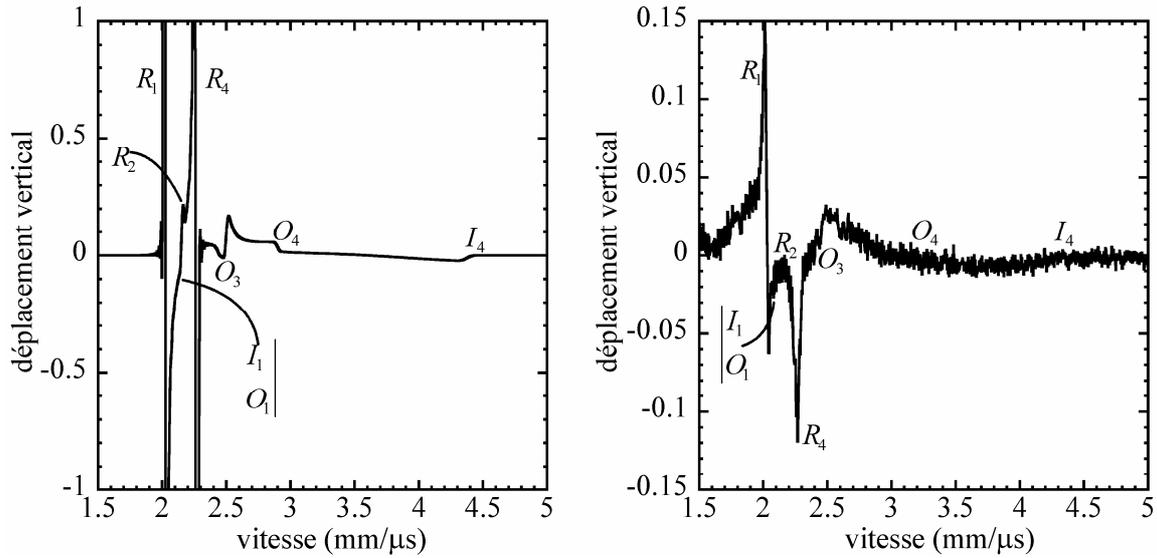


figure IV-4 Déplacements verticaux théorique (à gauche) et expérimental (à droite) de la surface d'un cristal de cuivre soumise à une force impulsionnelle verticale pour un angle $\varphi = 0^\circ$.

Pour la direction d'observation $\varphi = 15^\circ$ qui ne correspond pas à un axe cristallographique, les phénomènes deviennent plus complexes (figure IV-5). Les fronts des ondes de Rayleigh de fortes amplitudes (R_1, R_4 et R_7) sont clairement identifiables aussi bien avec les résultats théoriques qu'expérimentaux. Le front R_7 est issu de la diffraction des fronts R_3 et R_5 . Il correspond à la solution en onde plane hétérogène qui prolonge une des deux cornes des vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh représentée à la figure IV-3. Selon la branche de cette structure en forme de corne, le flux d'énergie de l'onde de Rayleigh est soit focalisé (R_1, R_3, R_4 et R_5) soit dispersé (R_2). Ainsi, l'amplitude de cette dernière est plus faible si bien qu'on ne l'observe pas sur les résultats expérimentaux. Le pic correspondant au front Ps_2 , issu de la diffraction des cornes de la pseudo-onde de Rayleigh, superposé à celui du front O_2 , apparaît dans les résultats expérimentaux. Il en est de même pour les fronts I_3, O_1 et O_4 .

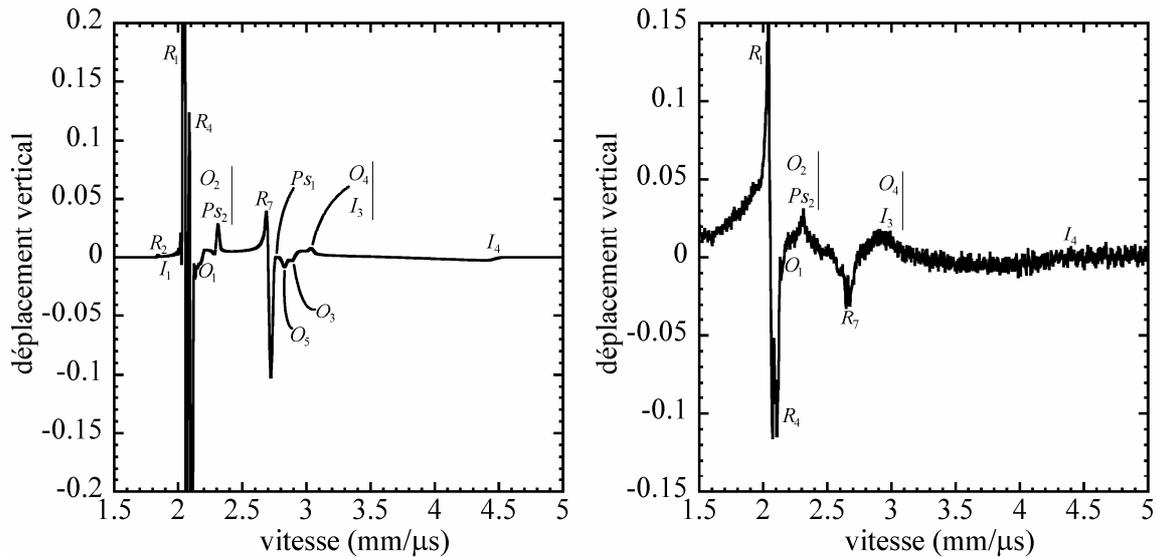


figure IV-5 Déplacements verticaux théorique (à gauche) et expérimental (à droite) de la surface d'un cristal de cuivre soumise à une force impulsionnelle verticale pour un angle $\varphi = 15^\circ$.

Pour l'angle $\varphi = 30^\circ$, l'ensemble des phénomènes est observé expérimentalement figure IV-6. Contrairement aux deux angles précédents, pour cette direction de propagation, les fronts d'ondes ont des vitesses de propagation éloignées. Il n'y a ainsi pas d'interaction entre ces fronts pouvant altérer les résultats. On observe pour cette direction trois fronts générés par diffraction (I_5 , R_6 et PS_1).

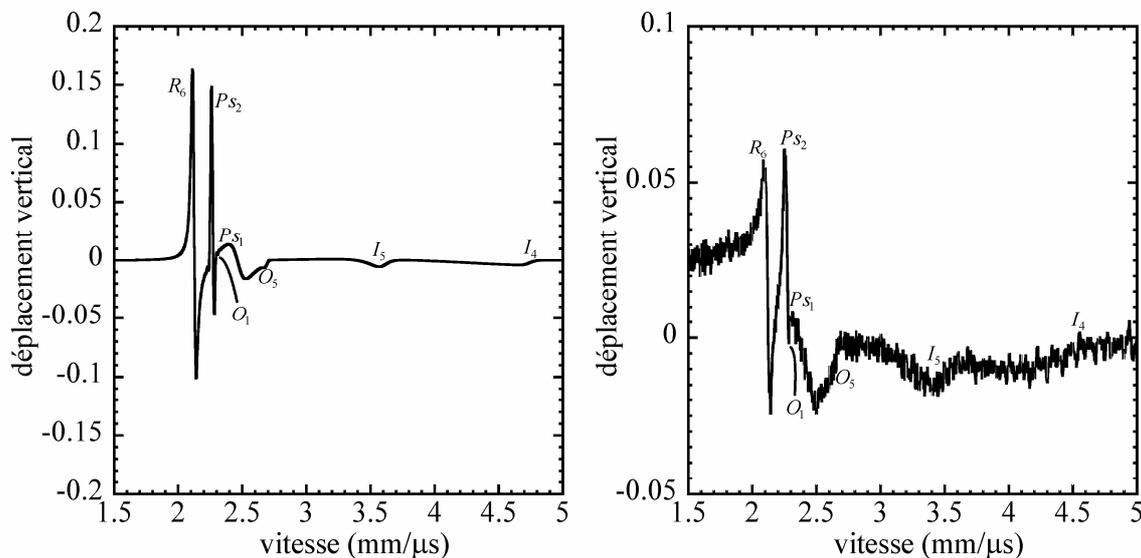


figure IV-6 Déplacements verticaux expérimental (à gauche) et théorique (à droite) de la surface d'un cristal de cuivre soumise à une force impulsionnelle verticale pour un angle $\varphi = 30^\circ$.

Pour le dernier angle, $\varphi = 45^\circ$, le déplacement de la surface témoigne de la propagation d'un nombre moins important de fronts. Le résultat théorique met en évidence la propagation

des deux pseudo-ondes de Rayleigh (P_{S_1} et P_{S_2}) ainsi que de deux ondes latérales dans le plan (I_4 et I_5). Le front O_5 d'amplitude trop faible n'est pas observable. Les fronts de I_1 et R_2 , qui ont dans cette direction des vitesses inférieures à 1,5 km/sec, n'apparaissent pas sur les figures. Expérimentalement, les mêmes fronts apparaissent à l'exception de I_5 .

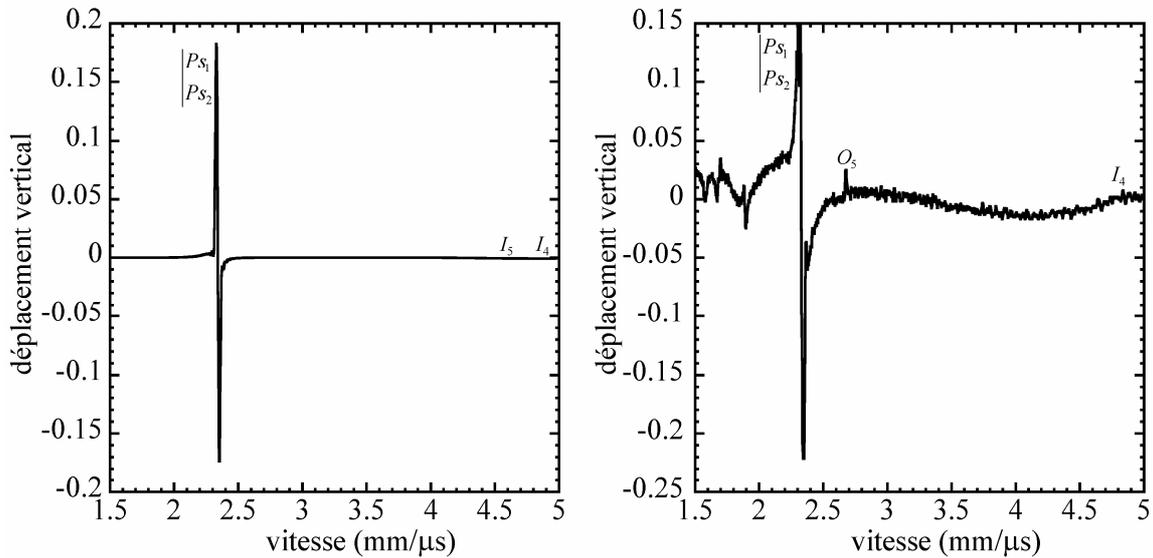


figure IV-7 Déplacements verticaux expérimental (à gauche) et théorique (à droite) de la surface d'un cristal de cuivre soumise à une force impulsionnelle verticale pour un angle $\varphi = 45^\circ$.

Le déplacement vertical de la surface a été mesuré expérimentalement pour des angles compris entre 0° et 45° (tous les degrés). Les résultats obtenus initialement étaient fonction du temps. Afin de permettre une comparaison directe, l'évolution de la surface a été exprimée en fonction du paramètre vitesse en divisant la distance émetteur-récepteur par le temps. Comme cela a été réalisé pour les réponses élastodynamiques obtenues dans le troisième chapitre, les déplacements mesurés pour les différents angles sont juxtaposés et leur représentation correspond à une photo prise par un observateur situé au dessus de la surface. L'évolution des déplacements dépendant de la vitesse, la photo représente la distance parcourue par les différents fronts durant une période de temps unitaire. Elle est représentée à la figure IV-8 et comparée à la représentation tridimensionnelle du déplacement vertical de la surface obtenue par le calcul de la fonction de Green. Sur ces deux représentations, le blanc représente un maximum d'amplitude et le noir un minimum. La zone blanche, située au centre de la représentation expérimentale, correspond à une plage de vitesses comprises entre 0 et 1.5 mm/μs pour lesquelles le déplacement n'a pas été mesuré.

Les courbes des vitesses de l'énergie obtenues dans les deux chapitres précédents sont superposées aux deux représentations tridimensionnelles des déplacements de la surface à la figure IV-9 pour les ondes rasantes, à la figure IV-10 pour les ondes de surface et pour finir à la figure IV-11 pour les ondes rasantes et de surface. Sur ces figures, les vitesses de l'énergie

des ondes planes homogènes sont représentées en bleu, celles des ondes planes hétérogènes en rouge.

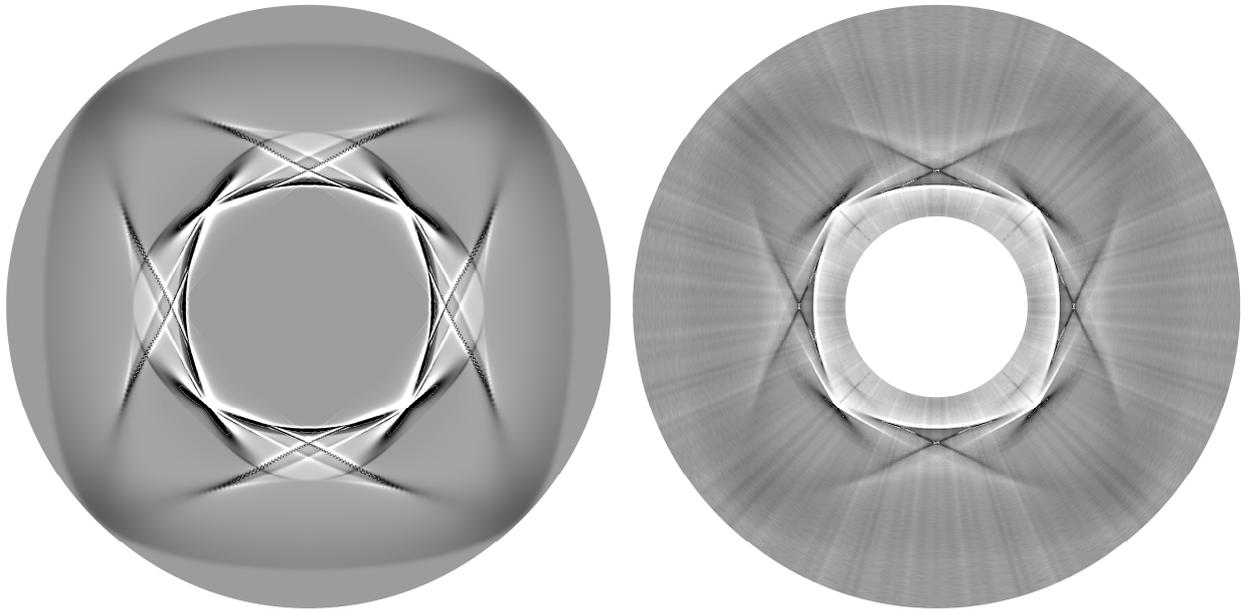


figure IV-8 Représentation tridimensionnelle des déplacements verticaux de la surface d'un cristal de cuivre, soumise à une force impulsionnelle normale, calculés à partir de la fonction de Green (à gauche) et mesurés expérimentalement (à droite).

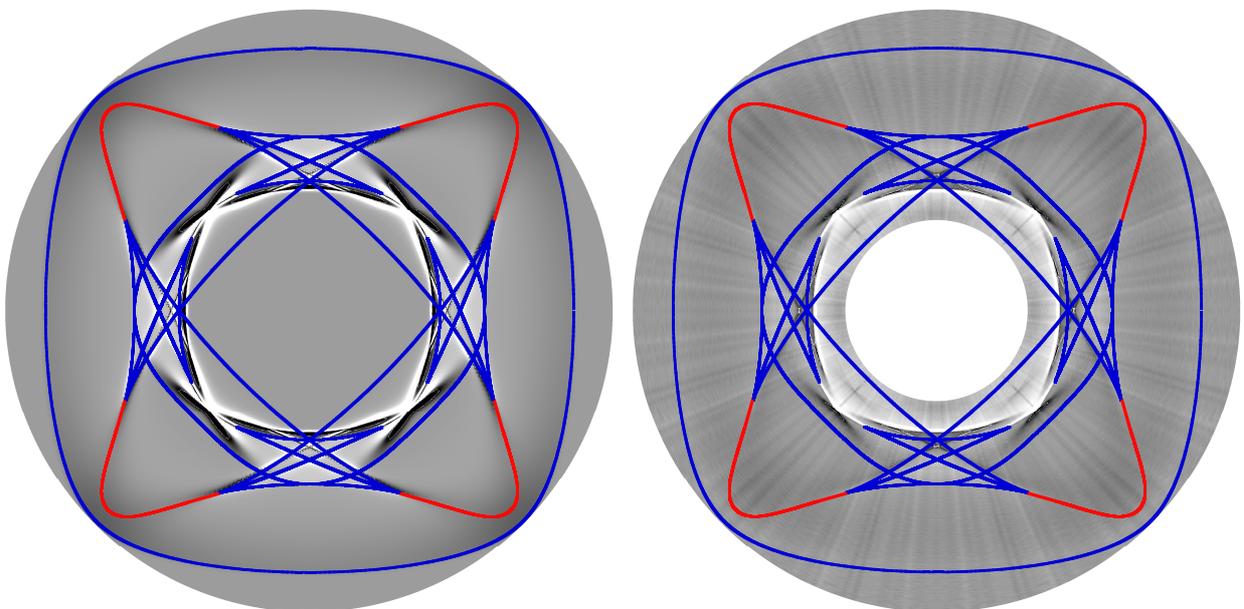


figure IV-9 Comparaison entre les vitesses de l'énergie des ondes rasantes et les déplacements verticaux de la surface d'un cristal de cuivre, soumise à une force impulsionnelle normale, théoriques (à gauche) et expérimentaux (à droite).

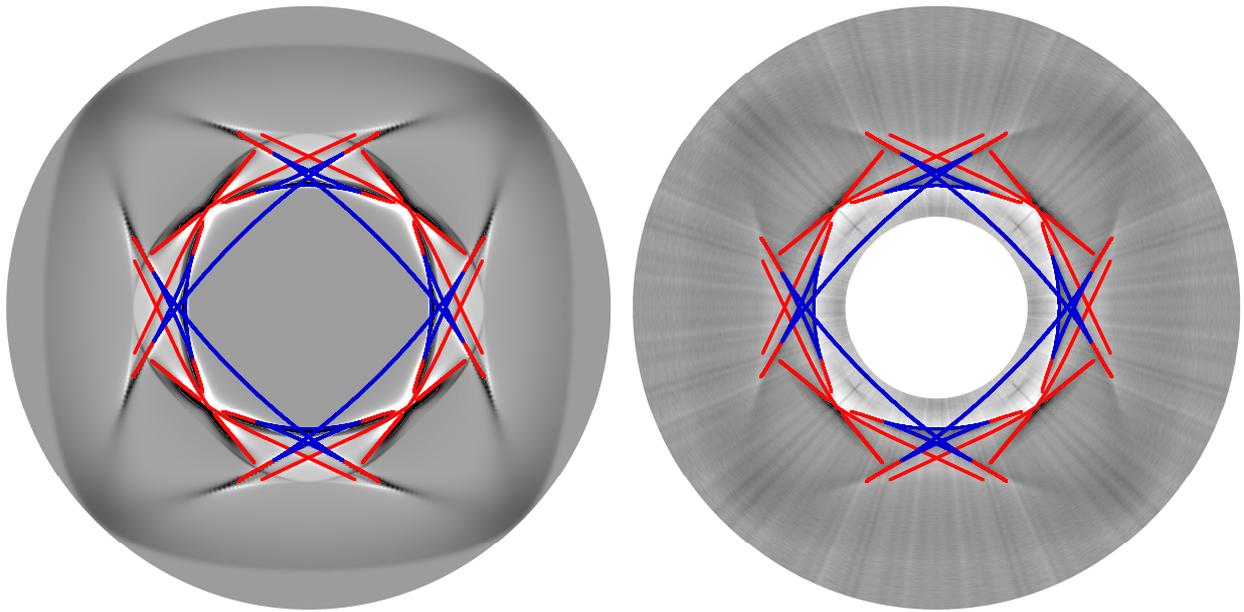


figure IV-10 Comparaison entre les vitesses de l'énergie des ondes de surface (Rayleigh et pseudo Rayleigh) et les déplacements verticaux de la surface d'un cristal de cuivre, soumise à une force impulsionnelle normale, théoriques (à gauche) et expérimentaux (à droite).

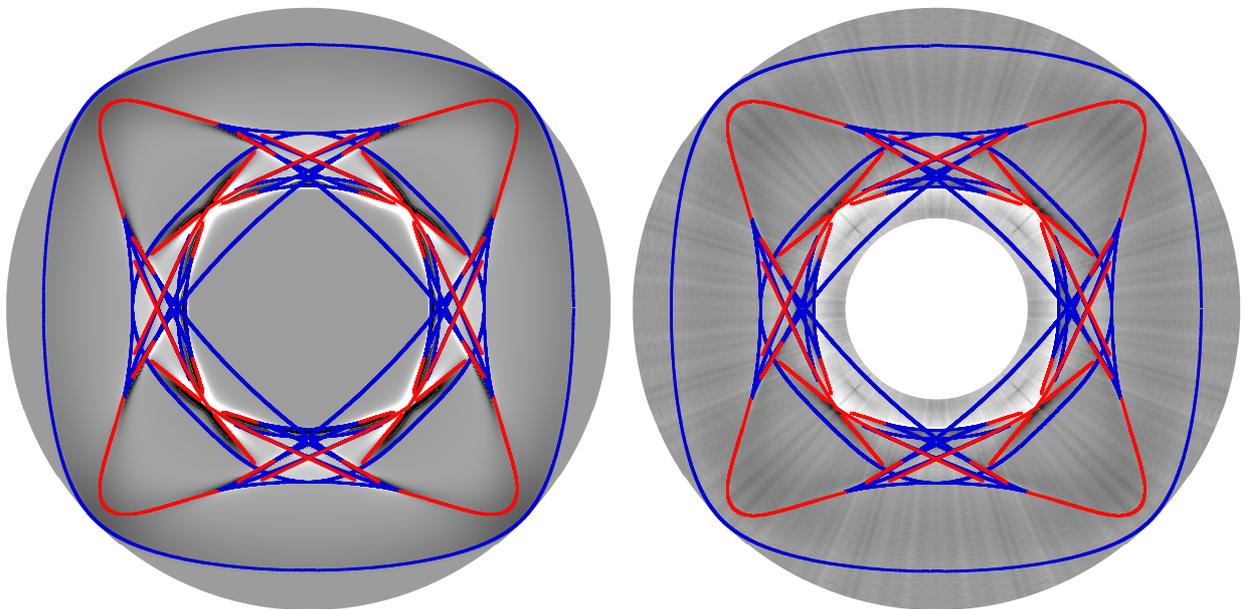


figure IV-11 Comparaison entre les vitesses de l'énergie des ondes rasantes et de surface (Rayleigh et pseudo Rayleigh) et les déplacements verticaux de la surface d'un cristal de cuivre, soumise à une force impulsionnelle normale, théoriques (à gauche) et expérimentaux (à droite).

On constate avec la figure IV-11 que les rayons homogènes couplés aux rayons hétérogènes donnent une description complète des fronts se propageant à la surface d'un cristal de cuivre.

IV.4 Conclusion

Les résultats expérimentaux sont globalement en accord avec les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents. Les fronts pour lesquels l'amplitude du déplacement vertical de la surface est faible (en particulier les ondes latérales et l'onde de Rayleigh R_2 dont le flux d'énergie est dispersé) sont noyés dans le bruit. Les fronts des ondes de Rayleigh pour lesquels le flux d'énergie est focalisé (R_1 , R_3 , R_4 et R_5) ainsi que les fronts des pseudo-ondes de Rayleigh sont caractérisés par une déformation importante de la surface. Ces fronts sont ainsi particulièrement bien décrits par l'expérience. Enfin, cette expérience met en relief la diffraction des fronts d'onde au niveau des cornes donnant naissance à d'autres fronts.

Conclusion

Dans cette thèse, les phénomènes de diffraction inhérents aux milieux anisotropes ont été étudiés par la théorie des rayons. Pour ce type de milieux, les fronts des ondes qui se propagent forment des cornes au niveau desquelles apparaît une forte concentration d'énergie. Cette dernière engendre des phénomènes de diffraction provoquant la propagation d'autres fronts. La théorie des rayons classiques, basée sur le concept d'onde plane homogène, ne décrit pas ces fronts. Il est nécessaire pour en tenir compte d'étendre cette théorie aux ondes hétérogènes. Pour cela, une méthode de calcul des vitesses de l'énergie, différente de la construction géométrique des rayons, est introduite. Elle repose sur deux critères qui permettent de caractériser les temps d'arrivées des fronts d'onde. Ces critères combinés à l'équation de propagation d'une onde conduisent au calcul de ses vitesses de l'énergie. Le premier, le principe de Fermat est appliqué aux ondes homogènes et donne les mêmes résultats que ceux obtenus par construction géométrique des rayons. Le second, le principe de Fermat approché, est appliqué aux ondes hétérogènes et, les vitesses alors obtenues, décrivent les fronts générés par diffraction.

Cette méthode a dans un premier temps été appliquée aux ondes rasantes. Les vitesses des ondes rasantes hétérogènes dans le plan décrivent convenablement les fronts générés par diffraction. Elle n'est cependant pas applicable aux ondes rasantes hétérogènes hors plan. Les cas de l'onde de Rayleigh et de la pseudo onde de Rayleigh ont ensuite été traités. Pour cela la notion d'onde de Rayleigh hétérogène caractérisée par une atténuation de l'amplitude à l'interface a été introduite. Les vitesses obtenues pour cette onde sont des approximations des vitesses de l'énergie. Elles rendent cependant bien compte des phénomènes de diffraction. Le calcul des vitesses de la pseudo onde de Rayleigh est plus ambigu. Leur description par la théorie des ondes planes n'a pas de sens physique car l'amplitude de cette onde croît dans la profondeur du milieu. De ce fait, les équations qui amènent au calcul de ses vitesses sont mal posées. Malgré ces constatations, les vitesses obtenues décrivent de manière satisfaisante la propagation des fronts de cette onde qui peuvent être observés expérimentalement.

Ainsi, les rayons réels couplés aux rayons complexes donnent une description complète des phénomènes physiques décrits numériquement par le calcul de la fonction de Green ou observés expérimentalement. Il reste cependant dans cette étude quelques points à approfondir. Les vitesses de propagation des ondes planes rasantes hors plan hétérogènes n'ont pas pu être calculées. Pour y parvenir, il serait nécessaire de considérer des équations qui leur sont propres de manière à garantir l'atténuation de leur amplitude à l'interface du milieu. Les vitesses calculées pour l'onde de Rayleigh hétérogène donnent une approximation convenable des vitesses de l'énergie. Cependant, le principe de Fermat approché faisant

intervenir une dérivée, il pourrait être intéressant de rechercher un rapprochement entre ces vitesses et les vitesses de groupe bien que ces dernières ne soient pas clairement définies pour le cas d'une onde plane hétérogène.

Cette étude a pour premier objectif de proposer une extension à la théorie des rayons classiques. Outre cet aspect fondamental, on peut envisager d'utiliser la méthode de calcul des vitesses de l'énergie dans un but de caractérisation de matériau. Cette méthode permet en effet de calculer, pour une direction de propagation fixée a priori, les vitesses de l'énergie des ondes planes homogènes. Il est ainsi envisageable d'implémenter une méthode d'optimisation, basée sur les constantes de rigidité, permettant d'approcher pour différentes directions de propagation les vitesses de l'énergie calculées numériquement à celles obtenues expérimentalement.

Bibliographie

Abbudi M. et Barnett D.M. (1991). *Three-dimensional computer visualization of the slowness surfaces of anisotropic crystals*. Modern theory of anisotropic elasticity and applications. Philadelphia, Wu J.J., Ting T.C.T., Barnett D.M. (Eds.).

Achenbach J.D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, North-Holland Ed.

Aki K. et Richards P.G. (1980). *Quantitative seismology*. San Francisco.

Audoin B, Bescond C. et Deschamps M. (1996). "Recovering of stiffness coefficients of anisotropic materials from point-like generation and detection of acoustic waves." *J. Appl. Phys.* **80**: 3760.

Auld B.A. (1973). *Acoustic fields and waves in solids*. New York, Wiley.

Barnett D.M. et Lothe J. (1973). "Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, greens function and surface wave (rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic solids." *Phys. Norv.* **7**: 13-19.

Barnett D.M. et Lothe J. (1974). "Consideration of the existence of surface wave (rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals." *J. Phys. F: Metal Physics* **4**: 671-686.

Barnett D.M., Lothe J., Nishioka K. et Asaro R.J. (1973). "Elastic surface waves in anisotropic crystals: A simplified method for calculating rayleigh velocities using dislocation theory." *J. Phys. F: Metal Physics* **3**: 1083-1096.

Bescond C. (1997). "Réponse dynamique d'un demi-espace anisotrope: Application à la résolution de problèmes inverses par génération et détection laser." Thèse, Université Bordeaux 1.

Bescond C. et Deschamps M. (1998). "Dynamical surface response of a semi-infinite elastic medium to an impulsive force." *J. Acoust. Soc. Am.* **103**: 114-124.

Borcherdt R.D. (1973). "Energy and plane waves in linear viscoelastic media." *J. Geophys. Res.* **78**: 2442-2453.

Buchen P.W. (1971). "Plane waves in linear viscoelastic media." *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **23**: 531-542.

Chadwick P. et Smith G.D (1977). "Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials." *Adv. Appl. Mech.* **17**: 307-376.

Christoffel E.B. (1877). *Ann. Mat. Pura Appl.* **8**: 193.

Cooper H.F. et Reiss E.L. (1966). "Reflection of plane viscoelastic waves from plane boundaries." *J. Acoust. Soc. Am.* **39**: 1133-1138.

- Coquin G.A. et Tiersten H.F.** (1967). "Analysis of the excitation and detection of piezoelectric surface waves in quartz by means of surface electrodes." *J. Acoust. Soc. Am.* **41**: 921-939.
- Corbel C., Guillois F., Royer D., Fink M.A. et De Mol R.** (1993). "Laser-generated elastic waves in carbon-epoxy composite." *IEEE Trans. Ultr. Fer. Freq. Contr.* **40**: 710.
- Cuvelier P. et Billard J.** (1973). "Quelques propriétés des ondes électromagnétiques hétérogènes, planes et uniformes." *Nouv. rev. Opt.* **4**: 23-36.
- Cuvelier P. et Billard J.** (1978). "Réfraction des ondes planes uniformément hétérogènes; bilan énergétique dans le cas particulier où leurs amplitudes sont perpendiculaires au plan d'incidence." *J. Opt.* **9**: 9-14.
- de Hoop A.T.** (1960). "A modification of cagniard's method for solving seismic pulse problem." *Appl. sci. res.*
- Deschamps M.** (1991). "L'onde plane hétérogène et ses applications en acoustique linéaire." *J. Acoustique* **4**: 269-305.
- Deschamps M. et Poncelet O.** (2002). "Inhomogeneous plane wave and the most energetic complex ray." *Ultrasonics* **40**: 293-296.
- Destrade M.** (2001a). "The explicit secular equation for surface acoustic waves in monoclinic elastic crystals." *J. Acoust. Soc. Am.* **109**: 1398-1402.
- Destrade M.** (2001b). "Surface waves in orthotropic incompressible materials." *J. Acoust. Soc. Am.* **110**: 837-840.
- Dieulesaint E. et Royer D.** (1974). *Ondes élastiques dans les solides*. Paris, Masson.
- Engan H., Ingebrigsten K.A. et Tonning A.** (1967). "Elastic surface waves in alpha-quartz: Observation of leaky surface waves." *Appl. Phys. Letters* **10**: 311-313.
- Every A.G.** (1981). "Ballistic phonons and the shape of the ray surface in cubic crystals." *Phys. Rev. B* **24**: 3456.
- Every A.G., Koos G.L. et Wolfe J.P.** (1984). "Ballistic phonon imaging in sapphire: Bulk focusing and critical-cone channeling effects." *Phys. Rev. B* **29**(4): 2190-2209.
- Every A.G., Sachse W., Kim K.Y. et Thompson M.O.** (1990). "Phonon focusing and mode-conversion effects in silicon at ultrasonic frequencies." *Phys. Rev. Lett.* **65**(12): 1446-1449.
- Frisk G.V.** (1979). "Inhomogeneous waves and the plane-wave reflection coefficient." *J. Acoust. Soc. Am.* **66**(1): 219-234.
- Gazis D.C., Herman R. et Wallis R.F.** (1960). "Surface elastic waves in cubic crystals." *Phys. Rev.* **119**: 533-544.
- Gibbs J.W.** (1961). *Element of vector analysis*. New-York, Dover Publications.
- Gold L.** (1956). "Rayleigh wave propagation on anisotropic (cubic) media." *Phys. Rev.* **104**: 1532-1536.
- Gundersen S.A.** (1991). "Contributions to the theory of free surface waves in elastically anisotropic media." Thèse, Université d'Oslo.

-
- Hamilton W.R.** (1853). *Lectures on quaternions*. Dublin, Hodges & Smith.
- Hauser M.R., Weaver R.L. et Wolfe J.P.** (1992). "Internal diffraction of ultrasound in crystal: Phonon focusing at long wavelength." *Phys. Rev. Lett.* **68**: 2604.
- Hayes M.** (1977). "A note on group velocity." *Proc. R. Lond.*
- Hayes M.** (1980). "Energy flux for trains of inhomogeneous plane waves." *Proc. R. Soc. Lond. A* **370**: 417-429.
- Hayes M.** (1984). "Inhomogeneous plane waves." *Arch. Rational Mech. Anal.* **85**: 41-79.
- Hayes M.** (1987). "Inhomogeneous electromagnetic plane waves in crystal." *Arch. Rational Mech. Anal.* **97**: 221-260.
- Hurley D.C. et Wolfe J.P.** (1985). "Phonon focusing in cubic crystals." *Phys. Rev. B* **32**(4): 2568-2587.
- Ingebrigsten K.A. et Tonning A.** (1969). "Elastic surface waves in crystal." *Phys. Rev.* **184**: 942-951.
- Johnson L.R.** (1974). "Green's function for lamb's problem." *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **37**: 99-131.
- Keith C.M. et Crampin S.** (1977). "Seismic body waves in anisotropic media: Synthetic seismograms." *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **49**: 225-243.
- Kim K.Y., Bretz K.C., Every A.G. et Sachse W.** (1996). "Ultrasonic imaging of the group velocity surface about the cubic axis in silicon." *J. Appl. Phys.* **79**(4): 1857.
- Kurosh A.** (1973). *Cours d'algèbre supérieure*. Moscou, Mir.
- Lamb H.** (1904). "On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid." *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **203**(A): 1-42.
- Lefèvre M.R. et Montel M.** (1973). "Influence de l'absorption sur les propriétés optiques des solides: Propagation des ondes électromagnétiques hétérogènes, planes et uniformes, dans les milieux homogènes et isotropes." *Opt. Acta* **20**: 97-128.
- Lewis Meirion F.** (1995). "Rayleigh waves - a progress report." *Eur. Jour. Phys.*: 1-7.
- Lim T.C. et Farnell G.W.** (1968). "Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals." *J. Appl. Phys.* **9**: 4319-4325.
- Lim T.C. et Farnell G.W.** (1969). "Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals." *J. Acoust. Soc. Am.* **45**: 845-851.
- Lothe J. et Barnett D.M.** (1976). "On the existence of surface-wave solutions for anisotropic half-spaces with free surface." *J. Appl. Phys.* **47**: 428-433.
- Maris H.J.** (1970). "Enhancement of heat pulses in crystals due to elastic anisotropy." *J. Acoust. Soc. Am.* **50**(3): 812-818.
- Messaoud-Nacer N. et de Belleval J.F.** (2004). "A model of ultrasonic transducer beams using a decomposition into transient plane waves." *Acta Acustica united with Acustica* **90**: 419-431.

- Mielke A. et Fu Y.B.** (2004). "Uniqueness of the surface-wave speed: A proof that is independent of the stroh formalism." *Mathematics and Mechanics of Solids* **9**: 5-15.
- Morgan D.P.** (1998). "History of saw devices." *IEEE Int. Frequency Control Symp.*: 439-460.
- Mourad A. et Castagnède B.** (1993). "Détermination des temps d'arrivée de fronts d'onde acoustiques divergents dans une lame anisotrope." *J. Phys. III France* **3**: 1911-1927.
- Mourad A. et Deschamps M.** (1995). "Lamb's problem for an anisotropic half space studied by the cagniard de hoop method." *J. Acoust. Soc. Am.* **97**(5): 3194-3197.
- Musgrave M.J.P.** (1970). *Crystal acoustics*. San Francisco, Holden-Day.
- Neau G.** (2003). "Ondes de lamb dans des plaques anisotropes viscoélastiques: Étude des fronts d'onde et atténuation." Thèse, Université Bordeaux 1.
- Pekeris C.L. et Lipson H.** (1957). "Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse." *J. Acoust. Soc. Am.* **29**(11): 1233-1238.
- Poirée B.** (1984). "Vitesse de propagation de l'énergie de l'onde plane évanescente acoustique." *Revue du Cethedec* **79**: 104-112.
- Rayleigh** (1885). "On waves propagating along the plane surface of an elastic solid." *Proc. Lond. Math. Soc.* **17**: 4-11.
- Rollins F.R.** (1968). "Ultrasonic examination of liquid-solid boundaries using a right-angle reflector technique." *J. Acoust. Soc. Am.* **44**: 431-434.
- Rollins F.R., Lim T.C. et Farnell G.W.** (1968). "Ultrasonic reflectivity and surface wave phenomena on surfaces of copper single crystals." *Appl. Phys. Letters* **12**: 236-238.
- Stroh A.N.** (1962). "Steady state problems in anisotropic elasticity." *J. Math. Phys.* **41**: 77-103.
- Sugawara Y., Wright O.B., Matsuda O., Takigahira M., Tanaka Y., Tamura S. et Gusev V.E. (2002). "Watching ripples on crystals." *Phys. Rev. Lett.* **88**(18): 185504.
- Synge J.L.** (1956a). "Flux of energy for elastic waves in anisotropic media." *Proc. Roy. Irish Acad.* **58**: 13-21.
- Synge J.L.** (1956b). "Elastic waves in anisotropic media." *J. Math. Phys.* **35**: 323-334.
- Taylor B., Maris H.J. et Elbaum C.** (1969). "Phonon focusing in solids." *Phys. Rev. Lett.* **23**(8): 416-419.
- Taylor B., Maris H.J. et Elbaum C.** (1971). "Focusing of phonon in crystalline solids due to elastic anisotropy." *Phys. Rev. B* **3**(4): 1462-1472.
- Taylor D.B.** (1981). "Surface waves in anisotropic media: The secular equation and its numerical solutions." *Proc. Roy. S. London* **A376**: 265-300.
- Taylor D.B. et Currie P.K.** (1979). "The secular equation for rayleigh waves in elastic crystals." *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **32**: 163-173.
- Taziev R.M.** (1987). "Two-partial acoustic surface waves." *Sov. Phys. Acoustics* **33**: 100-103.

Taziev R.M. (1989). "Dispersion relation for acoustic waves in an anisotropic elastic half-space." *Sov. Phys. Acoustics* **35**: 535-538.

Tewary V.K. et Fortunko C.M. (1992). "A computationally efficient representation for propagation of elastic waves in anisotropic solids." *J. Acoust. Soc. Am.* **91**: 1888-1896.

Ting T.C.T. (2002a). "Explicit secular equations for surface waves in monoclinic materials with the symmetry plane at $x_1=0$, $x_2=0$ or $x_3=0$." *Proc. R. Lond.* **458**: 1017-1031.

Ting T.C.T. (2002b). "An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy." *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **55**: 297-311.

Wang L. (1992). "Contributions to the theory of surface waves and interfacial waves in anisotropic elastic media: Supersonic surface waves and subsonic slip waves." Thèse, Université d'Oslo.

Yu M.Y. (1983). "Surface polaritons in nonlinear media." *Phys. Rev. A* **28**: 1855-1856.

Zil'bergleit A.S. et Kopilevich Yu.I. (1980). "Velocity of energy transport by waves." *Sov. Phys. Tech. Phys.* **25**(2): 147-153.

Annexe A

Les polynômes Π_{TV} , $\Pi_{L,SH}$, Δ et Σ sont exprimés sous la forme :

$$Q(q_1, q_2) = \sum_{k=0}^K Q^{(k)}(q_1) q_2^k, \quad (1)$$

où le polynôme Q des variables q_1 et q_2 peut être interprété comme un polynôme de la variable q_2 dont les coefficients $Q^{(k)}$ dépendent du paramètre q_1 . Trois paramétrages sont présentés ici. Ils correspondent aux cas : $q_1 = \theta$ et $q_2 = S_{\parallel}$, $q_1 = S_3$ et $q_2 = S_2$, et $q_1 = S'_n$, φ et $q_2 = S_2$.

$$\underline{q_1 = \theta \text{ et } q_2 = S_{\parallel}}$$

$$\underline{\Pi_{TV}(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^1 \Pi_{TV}^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}}, \quad (2)$$

$$\Pi_{TV}^{(0)} = -1, \quad (3)$$

$$\Pi_{TV}^{(2)} = C_{66} \cos(\theta)^2 + C_{55} \sin(\theta)^2. \quad (4)$$

$$\underline{\Pi_{L,TH}(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^2 \Pi_{L,TH}^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}}, \quad (5)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(0)} = -1, \quad (6)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(2)} = (C_{22} + C_{44}) \cos(\theta)^2 + (C_{33} + C_{44}) \sin(\theta)^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{L,TH}^{(4)} = & - \left(C_{22} \cos(\theta)^2 + C_{44} \sin(\theta)^2 \right) \left(C_{44} \cos(\theta)^2 + C_{33} \sin(\theta)^2 \right) \\ & + (C_{23} + C_{44})^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\underline{\Sigma(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^1 \Sigma^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}}, \quad (9)$$

$$\Sigma^{(0)} = C_{11}C_{55} + C_{11}C_{66} + C_{55}C_{66}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(2)} &= C_{55} (C_{12} + C_{66})^2 \cos(\theta)^2 + C_{66} (C_{13} + C_{55})^2 \sin(\theta)^2 \\
&\quad - C_{11} C_{55} (C_{22} \cos(\theta)^2 + C_{44} \sin(\theta)^2) \\
&\quad - C_{11} C_{66} (C_{44} \cos(\theta)^2 + C_{33} \sin(\theta)^2) \\
&\quad - C_{55} C_{66} (C_{66} \cos(\theta)^2 + C_{55} \sin(\theta)^2)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\Delta(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^2 \Delta^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}, \tag{12}$$

$$\Delta^{(0)} = C_{11} + C_{55} + C_{66}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(2)} &= -C_{66} \left((C_{44} + C_{66}) \cos(\theta)^2 + (C_{33} + C_{55}) \sin(\theta)^2 \right) \\
&\quad - C_{11} \left((C_{22} + C_{44}) \cos(\theta)^2 + (C_{33} + C_{44}) \sin(\theta)^2 \right), \\
&\quad - C_{55} \left((C_{22} + C_{66}) \cos(\theta)^2 + (C_{44} + C_{55}) \sin(\theta)^2 \right) \\
&\quad + (C_{12} + C_{66})^2 \cos(\theta)^2 + (C_{13} + C_{55})^2 \sin(\theta)^2
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(4)} &= 2(C_{12} + C_{66})(C_{13} + C_{55})(C_{23} + C_{44}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \\
&\quad + C_{55} (C_{66} \cos(\theta)^2 + C_{55} \sin(\theta)^2) (C_{22} \cos(\theta)^2 + C_{44} \sin(\theta)^2) \\
&\quad + C_{66} (C_{66} \cos(\theta)^2 + C_{55} \sin(\theta)^2) (C_{44} \cos(\theta)^2 + C_{33} \sin(\theta)^2) \\
&\quad + C_{11} (C_{22} \cos(\theta)^2 + C_{44} \sin(\theta)^2) (C_{44} \cos(\theta)^2 + C_{33} \sin(\theta)^2). \\
&\quad - (C_{12} + C_{66})^2 (C_{44} \cos(\theta)^2 + C_{33} \sin(\theta)^2) \cos(\theta)^2 \\
&\quad - (C_{13} + C_{55})^2 (C_{22} \cos(\theta)^2 + C_{44} \sin(\theta)^2) \sin(\theta)^2 \\
&\quad - C_{11} (C_{23} + C_{44})^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\underline{q_1 = S_3 \text{ et } q_2 = S_2}$$

$$\Pi_{TV}(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^1 \Pi_{TV}^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}, \tag{16}$$

$$\Pi_{TV}^{(0)} = C_{55} S_3^2 - 1, \tag{17}$$

$$\Pi_{TV}^{(2)} = C_{66}. \tag{18}$$

$$\underline{\Pi_{L,TH}(S_2, S_3)} = \sum_{k=0}^4 \underline{\Pi_{L,TH}^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (19)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(0)} = -(C_{44} S_3^2 - 1)(C_{33} S_3^2 - 1), \quad (20)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(2)} = (C_{23} + C_{44})^2 S_3^2 - C_{44} (C_{44} S_3^2 - 1) - C_{22} (C_{33} S_3^2 - 1), \quad (21)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(4)} = -C_{22} C_{44}. \quad (22)$$

$$\underline{\Sigma(S_2, S_3)} = \sum_{k=0}^1 \underline{\Sigma^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (23)$$

$$\Sigma^{(0)} = C_{66} (C_{13} + C_{55})^2 S_3^2 - C_{11} C_{55} (C_{44} S_3^2 - 1) - C_{11} C_{66} (C_{33} S_3^2 - 1) - C_{55} C_{66} (C_{55} S_3^2 - 1), \quad (24)$$

$$\Sigma^{(2)} = C_{55} (C_{12} + C_{66})^2 - C_{55} C_{66}^2 - C_{11} C_{22} C_{55} - C_{11} C_{44} C_{66}. \quad (25)$$

$$\underline{\Delta(S_2, S_3)} = \sum_{k=0}^2 \underline{\Delta^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(0)} &= C_{11} (C_{44} S_3^2 - 1)(C_{33} S_3^2 - 1) + C_{55} (C_{55} S_3^2 - 1)(C_{44} S_3^2 - 1) \\ &\quad + C_{66} (C_{55} S_3^2 - 1)(C_{33} S_3^2 - 1) - (C_{13} + C_{55})^2 (C_{44} S_3^2 - 1) S_3^2, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} &= C_{11} C_{22} (C_{33} S_3^2 - 1) + C_{11} C_{44} (C_{44} S_3^2 - 1) + C_{22} C_{55} (C_{55} S_3^2 - 1) \\ &\quad + C_{44} C_{66} (C_{55} S_3^2 - 1) + C_{55} C_{66} (C_{44} S_3^2 - 1) - C_{12} (C_{12} + 2C_{66})(C_{33} S_3^2 - 1), \\ &\quad - C_{11} (C_{23} + C_{44})^2 S_3^2 - C_{22} (C_{13} + C_{55})^2 S_3^2 \\ &\quad + 2(C_{12} + C_{66})(C_{13} + C_{55})(C_{23} + C_{44}) S_3^2, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Delta^{(4)} = C_{11} C_{22} C_{44} + C_{22} C_{55} C_{66} + C_{44} C_{66}^2 - C_{44} (C_{12} + C_{66})^2. \quad (29)$$

$$q_1 = S'_n, \varphi \text{ et } q_2 = S_2$$

Afin de simplifier les écritures, le changement de variables $\tilde{S}'_n = S'_n / \sin(\varphi)$ est introduit. Le terme $\cotan(\varphi)$ représente la cotangente de l'angle φ .

$$\underline{\Pi_{TV}(S'_n, \varphi, S_2)} = \sum_{k=0}^2 \underline{\Pi_{TV}^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k}, \quad (30)$$

$$\Pi_{TV}^{(0)} = C_{55} \tilde{S}'_n{}^2 - 1, \quad (31)$$

$$\Pi_{TV}^{(1)} = -2C_{55} \cotan(\varphi) \tilde{S}'_n, \quad (32)$$

$$\Pi_{TV}^{(2)} = C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}. \quad (33)$$

$$\Pi_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \Pi_{L,TH}^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (34)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(0)} = -(C_{44} \tilde{S}_n'^2 - 1)(C_{33} \tilde{S}_n'^2 - 1), \quad (35)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(1)} = 2 \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{33} (C_{44} \tilde{S}_n'^2 - 1) + C_{44} (C_{33} \tilde{S}_n'^2 - 1)), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{L,TH}^{(2)} = & (1 - C_{44} \tilde{S}_n'^2) (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) + (C_{33} \tilde{S}_n'^2 - 1) (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}), \\ & - 4 C_{33} C_{44} \cotan(\varphi)^2 \tilde{S}_n'^2 + (C_{23} + C_{44})^2 \tilde{S}_n'^2, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{L,TH}^{(3)} = & 2 \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{44} (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) + C_{33} (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22})), \\ & - 2 \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{23} + C_{44})^2, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\Pi_{L,TH}^{(4)} = (C_{23} + C_{44})^2 \cotan(\varphi)^2 - (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}). \quad (39)$$

$$\Sigma(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^2 \Sigma^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)} = & C_{66} \tilde{S}_n'^2 (C_{13} + C_{55})^2 - C_{11} C_{55} (C_{44} \tilde{S}_n'^2 - 1) \\ & - C_{11} C_{66} (C_{33} \tilde{S}_n'^2 - 1) - C_{55} C_{66} (C_{55} \tilde{S}_n'^2 - 1), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Sigma^{(1)} = 2 \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{11} C_{44} C_{55} + C_{11} C_{33} C_{66} + C_{55}^2 C_{66} - C_{66} (C_{13} + C_{55})^2) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)} = & C_{55} (C_{12} + C_{66})^2 + C_{66} (C_{13} + C_{55})^2 \cotan(\varphi)^2 - C_{11} C_{55} (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) \\ & - C_{11} C_{66} (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) - C_{55} C_{66} (C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\Delta(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \Delta^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(0)} = & C_{11} (C_{33} \tilde{S}_n'^2 - 1) (C_{44} \tilde{S}_n'^2 - 1) + C_{55} (C_{44} \tilde{S}_n'^2 - 1) (C_{55} \tilde{S}_n'^2 - 1) \\ & + C_{66} (C_{33} \tilde{S}_n'^2 - 1) (C_{55} \tilde{S}_n'^2 - 1) - \tilde{S}_n'^2 (C_{13} + C_{55})^2 (C_{44} \tilde{S}_n'^2 - 1), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)} = & 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (1 - C_{44} \tilde{S}_n'^2) (C_{11} C_{33} + C_{55}^2 - (C_{13} + C_{55})^2) \\
& + 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (1 - C_{33} \tilde{S}_n'^2) (C_{11} C_{44} + C_{55} C_{66}) \\
& + 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (1 - C_{55} \tilde{S}_n'^2) (C_{33} C_{66} + C_{44} C_{55}) \\
& + 2 \tilde{S}_n'^3 \cotan(\varphi) C_{44} (C_{13} + C_{55})^2
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(2)} = & 4 \tan(\varphi)^2 \tilde{S}_n'^2 (C_{44} C_{55}^2 + C_{11} C_{33} C_{44} + C_{33} C_{55} C_{66} - C_{44} (C_{13} + C_{55})^2) \\
& + (C_{33} \tilde{S}_n'^2 - 1) (C_{11} (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) + C_{66} (C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}) - (C_{12} + C_{66})^2) \\
& + (C_{44} \tilde{S}_n'^2 - 1) (C_{11} (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) + C_{55} (C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}) - (C_{13} + C_{55})^2 \cotan(\varphi)^2) \\
& + (C_{55} \tilde{S}_n'^2 - 1) (C_{55} (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) + C_{66} (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44})) \\
& + \tilde{S}_n'^2 (2(C_{12} + C_{66})(C_{13} + C_{55})(C_{23} + C_{44}) - (C_{13} + C_{55})^2 (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22})) \\
& - \tilde{S}_n'^2 C_{11} (C_{23} + C_{44})^2
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(3)} = & -4 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (C_{12} + C_{66}) (C_{13} + C_{55}) (C_{23} + C_{44}) \\
& - 2 C_{55} C_{66} \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) - 2 C_{33} C_{66} \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}) \\
& - 2 C_{55}^2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) - 2 C_{44} C_{55} \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}) \\
& + 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) (C_{13} + C_{55})^2 (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) + 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi)^3 C_{44} (C_{13} + C_{55})^2 \\
& + 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) C_{11} (C_{23} + C_{44})^2 + 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) C_{33} (C_{12} + C_{66})^2 \\
& - 2 \tilde{S}'_n \cotan(\varphi) C_{11} (2 C_{33} C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}^2 + C_{22} C_{33})
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(4)} = & 2 \cotan(\varphi)^2 (C_{12} + C_{66}) (C_{13} + C_{55}) (C_{23} + C_{44}) \\
& + C_{66} (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) (C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}) \\
& + C_{55} (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) (C_{55} \cotan(\varphi)^2 + C_{66}) \\
& + C_{11} (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) \\
& - \cotan(\varphi)^2 (C_{13} + C_{55})^2 (C_{44} \cotan(\varphi)^2 + C_{22}) \\
& - (C_{12} + C_{66})^2 (C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{44}) \\
& - C_{11} (C_{23} + C_{44})^2 \cotan(\varphi)^2
\end{aligned} \tag{49}$$

Annexe B

Les polynômes ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 , ω_5 , π_{TV} , $\pi_{L,SH}$ et Σ_n sont exprimés sous la forme :

$$Q(q_1, q_2) = \sum_{k=0}^K Q^{(k)}(q_1) q_2^k, \quad (1)$$

où le polynôme Q des variables q_1 et q_2 peut être interprété comme un polynôme de la variable q_2 dont les coefficients $Q^{(k)}$ dépendent du paramètre q_1 . Trois paramétrages sont présentés ici. Ils correspondent aux cas : $q_1 = \theta$ et $q_2 = S_{\parallel}$, $q_1 = S_3$ et $q_2 = S_2$, et $q_1 = S'_n$, φ et $q_2 = S_2$.

$$\underline{q_1 = \theta \text{ et } q_2 = S_{\parallel}}$$

$$\omega_1(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^2 \omega_1^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}, \quad (2)$$

$$\omega_1^{(0)} = 0, \quad (3)$$

$$\omega_1^{(2)} = \alpha, \quad (4)$$

$$\omega_1^{(4)} = -C_{55} C_{66} (B_{33} \cos(\theta)^4 + B_{22} \sin(\theta)^4 + (4C_{11} C_{44} - 2B_{23}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2). \quad (5)$$

$$\omega_2(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^1 \omega_2^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}, \quad (6)$$

$$\omega_2^{(0)} = -C_{11} (C_{55} + C_{66}), \quad (7)$$

$$\omega_2^{(2)} = (C_{55} B_{33} + C_{11} C_{44} C_{66}) \cos(\theta)^2 + (C_{66} B_{22} + C_{11} C_{44} C_{55}) \sin(\theta)^2. \quad (8)$$

$$\omega_3(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^1 \omega_3^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}, \quad (9)$$

$$\omega_3^{(0)} = C_{55} C_{66}, \quad (10)$$

$$\omega_3^{(2)} = 2C_{55} C_{66} (C_{12} \cos(\theta)^2 + C_{13} \sin(\theta)^2). \quad (11)$$

$$\underline{\omega_4(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^2 \omega_4^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}}, \quad (12)$$

$$\omega_4^{(0)} = 0, \quad (13)$$

$$\omega_4^{(2)} = C_{12} (C_{12} C_{55} - 2 C_{11} C_{66}) \cos(\theta)^2 + C_{13} (C_{13} C_{66} - 2 C_{11} C_{55}) \sin(\theta)^2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \omega_4^{(4)} = & 2 C_{11} C_{44} (C_{66} \cos(\theta)^2 - C_{55} \sin(\theta)^2) (C_{12} \cos(\theta)^2 - C_{13} \sin(\theta)^2) \\ & - C_{55} C_{66} (C_{12} \cos(\theta)^2 + C_{13} \sin(\theta)^2)^2 - 2 C_{11} (C_{55} B_{13} + C_{66} B_{12}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\underline{\omega_5(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^1 \omega_5^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}}, \quad (16)$$

$$\omega_5^{(0)} = C_{11}, \quad (17)$$

$$\omega_5^{(2)} = -C_{11} C_{44} - B_{33} \cos(\theta)^2 - B_{22} \sin(\theta)^2, \quad (18)$$

$$\omega_5^{(4)} = C_{11} C_{44} (C_{22} \cos(\theta)^4 + C_{33} \sin(\theta)^4) - 2 C_{23} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2. \quad (19)$$

$$\underline{\pi_{TV}(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^1 \pi_{TV}^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k}}, \quad (20)$$

$$\pi_{TV}^{(0)} = -C_{55} C_{66}, \quad (21)$$

$$\pi_{TV}^{(2)} = C_{55} C_{66} (C_{66} \cos(\theta)^2 + C_{55} \sin(\theta)^2). \quad (22)$$

$$\underline{\pi_{L,TH}(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^2 \pi_{L,TH}^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k} + \alpha \omega_5(S_{\parallel}, \theta)}, \quad (23)$$

$$\pi_{L,TH}^{(0)} = 0, \quad (24)$$

$$\pi_{L,TH}^{(2)} = -\alpha (C_{12}^2 \cos(\theta)^2 + C_{13}^2 \sin(\theta)^2), \quad (25)$$

$$\pi_{L,TH}^{(4)} = \alpha C_{11} B_{11} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2. \quad (26)$$

$$\underline{\Sigma_n(S_{\parallel}, \theta) = \sum_{k=0}^2 \Sigma_n^{(2k)}(\theta) S_{\parallel}^{2k} - C_{11} \omega_5(S_{\parallel}, \theta)}, \quad (27)$$

$$\Sigma_n^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_n^{(2)} = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_n^{(4)} = & C_{11} C_{44} \left(C_{12} \cos(\theta)^2 - C_{13} \sin(\theta)^2 \right)^2 \\ & - C_{11} \left(C_{13} B_{13} + C_{23} B_{23} + C_{33} B_{33} \right) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\underline{q_1 = S_3 \text{ et } q_2 = S_2}$$

$$\underline{\omega_1(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^2 \omega_1^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (30)$$

$$\omega_1^{(0)} = \alpha S_3^2 - C_{55} C_{66} B_{22} S_3^4, \quad (31)$$

$$\omega_1^{(2)} = \alpha - C_{55} C_{66} (4 C_{11} C_{44} - 2 B_{23}) S_3^2, \quad (32)$$

$$\omega_1^{(4)} = -C_{55} C_{66} B_{33}. \quad (33)$$

$$\underline{\omega_2(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^1 \omega_2^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (34)$$

$$\omega_2^{(0)} = -C_{11} (C_{55} + C_{66}) + (C_{66} B_{22} + C_{11} C_{44} C_{55}) S_3^2, \quad (35)$$

$$\omega_2^{(2)} = C_{55} B_{33} + C_{11} C_{44} C_{66}. \quad (36)$$

$$\underline{\omega_3(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^1 \omega_3^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (37)$$

$$\omega_3^{(0)} = C_{55} C_{66} (1 + 2 C_{13} S_3^2), \quad (38)$$

$$\omega_3^{(2)} = 2 C_{12} C_{55} C_{66}. \quad (39)$$

$$\underline{\omega_4(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^2 \omega_4^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (40)$$

$$\omega_4^{(0)} = C_{13} (C_{13} C_{66} - 2 C_{11} C_{55}) S_3^2 + C_{13} C_{55} (2 C_{11} C_{44} - C_{13} C_{66}) S_3^4, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \omega_4^{(2)} = & C_{12} (C_{12} C_{55} - 2 C_{11} C_{66}) - 2 (C_{12} C_{13} C_{55} C_{66} + C_{11} C_{12} C_{44} C_{55} + C_{11} C_{13} C_{44} C_{66}) S_3^2, \\ & - 2 C_{11} (C_{55} B_{13} + C_{66} B_{12}) S_3^2, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\omega_4^{(4)} = 2 C_{11} C_{12} C_{44} C_{66} - C_{12}^2 C_{55} C_{66}. \quad (43)$$

$$\underline{\omega_5(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^2 \omega_5^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}}, \quad (44)$$

$$\omega_5^{(0)} = C_{11} - (B_{22} + C_{11} C_{44}) S_3^2 + C_{11} C_{33} C_{44} S_3^4, \quad (45)$$

$$\omega_5^{(2)} = -B_{33} - C_{11} C_{44} - 2 C_{11} C_{23} C_{44} S_3^2, \quad (46)$$

$$\omega_5^{(4)} = C_{11} C_{22} C_{44}. \quad (47)$$

$$\pi_{TV}(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^1 \pi_{TV}^{(2k)}(S_3) S_2^{2k}, \quad (48)$$

$$\pi_{TV}^{(0)} = -C_{55} C_{66} + C_{55}^2 C_{66} S_3^2, \quad (49)$$

$$\pi_{TV}^{(2)} = C_{55} C_{66}^2. \quad (50)$$

$$\pi_{L,TH}(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^2 \pi_{L,TH}^{(2k)}(S_3) S_2^{2k} + \alpha \omega_5(S_2, S_3), \quad (51)$$

$$\pi_{L,TH}^{(0)} = -\alpha C_{13}^2 S_3^2, \quad (52)$$

$$\pi_{L,TH}^{(2)} = -\alpha C_{12}^2 + \alpha C_{11} B_{11} S_3^2. \quad (53)$$

$$\Sigma_n(S_2, S_3) = \sum_{k=0}^2 \Sigma_n^{(2k)}(S_3) S_2^{2k} - C_{11} \omega_5(S_2, S_3), \quad (54)$$

$$\Sigma_n^{(0)} = C_{11} C_{13}^2 C_{44} S_3^4, \quad (55)$$

$$\Sigma_n^{(2)} = -C_{11} (C_{13} B_{13} + C_{23} B_{23} + C_{33} B_{33} + 2 C_{12} C_{13} C_{44}) S_3^2 \quad (56)$$

$$\Sigma_n^{(4)} = C_{11} C_{12}^2 C_{44}. \quad (57)$$

$$q_1 = S'_n, \varphi \text{ et } q_2 = S_2$$

Afin de simplifier les écritures, le changement de variables $\tilde{S}'_n = S'_n / \sin(\varphi)$ est introduit. Le terme $\cotan(\varphi)$ représente la cotangente de l'angle φ .

$$\omega_1(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \omega_1^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (58)$$

$$\omega_1^{(0)} = \alpha \tilde{S}'_n{}^2 - C_{55} C_{66} B_{22} \tilde{S}'_n{}^4, \quad (59)$$

$$\omega_1^{(1)} = -2\alpha \cotan(\varphi) \tilde{S}'_n + 4 C_{55} C_{66} B_{22} \cotan(\varphi) \tilde{S}'_n{}^3, \quad (60)$$

$$\omega_1^{(2)} = \alpha (1 + \cotan(\varphi)^2) - C_{55} C_{66} (6 B_{22} \cotan(\varphi)^2 \tilde{S}'_n{}^2 + (4 C_{11} C_{44} - 2 B_{23}) \tilde{S}'_n{}^2), \quad (61)$$

$$\omega_1^{(3)} = 4 C_{55} C_{66} \cotan(\varphi) \tilde{S}'_n (B_{22} \cotan(\varphi)^2 + 2 C_{11} C_{44} - B_{23}), \quad (62)$$

$$\omega_1^{(4)} = -C_{55} C_{66} \left(B_{33} + 2(2C_{11} C_{44} - B_{23}) \cotan(\varphi)^2 + B_{22} \cotan(\varphi)^4 \right). \quad (63)$$

$$\omega_2(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^2 \omega_2^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (64)$$

$$\omega_2^{(0)} = -C_{11} (C_{55} + C_{66}) + (C_{66} B_{22} + C_{11} C_{44} C_{55}) \tilde{S}_n'^2, \quad (65)$$

$$\omega_2^{(1)} = -2(C_{66} B_{22} + C_{11} C_{44} C_{55}) \cotan(\varphi) \tilde{S}_n', \quad (66)$$

$$\omega_2^{(2)} = C_{55} B_{33} + C_{11} C_{44} C_{66} + (C_{66} B_{22} + C_{11} C_{44} C_{55}) \cotan(\varphi)^2. \quad (67)$$

$$\omega_3(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^2 \omega_3^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (68)$$

$$\omega_3^{(0)} = C_{55} C_{66} (1 + 2C_{13} \tilde{S}_n'^2), \quad (69)$$

$$\omega_3^{(1)} = -4C_{13} C_{55} C_{66} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n', \quad (70)$$

$$\omega_3^{(2)} = 2C_{55} C_{66} (C_{12} + C_{13} \cotan(\varphi)^2). \quad (71)$$

$$\omega_4(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \omega_4^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (72)$$

$$\omega_4^{(0)} = C_{13} (C_{13} C_{66} - 2C_{11} C_{55}) \tilde{S}_n'^2 + C_{13} C_{55} (2C_{11} C_{44} - C_{13} C_{66}) \tilde{S}_n'^4, \quad (73)$$

$$\omega_4^{(1)} = 2 \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{13} (2C_{11} C_{55} - C_{13} C_{66}) + 4C_{13} C_{55} \tilde{S}_n'^2 (C_{13} C_{66} - 2C_{11} C_{44})), \quad (74)$$

$$\omega_4^{(2)} = C_{12} (C_{12} C_{55} - 2C_{11} C_{66}) + C_{13} \cotan(\varphi)^2 (C_{13} C_{66} - 2C_{11} C_{55}) - 2C_{11} \tilde{S}_n'^2 (C_{13} C_{44} C_{66} + C_{55} B_{13} + C_{66} B_{12}), \quad (75)$$

$$-2C_{12} C_{55} \tilde{S}_n'^2 (C_{13} C_{66} + C_{11} C_{44}) + 6C_{13} C_{55} \cotan(\varphi)^2 \tilde{S}_n'^2 (2C_{11} C_{44} - C_{13} C_{66})$$

$$\omega_4^{(3)} = 4C_{13} C_{55} C_{66} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{12} + C_{13} \cotan(\varphi)^2) + 4C_{11} C_{44} C_{55} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{12} - 2C_{13} \cotan(\varphi)^2), \quad (76)$$

$$+ 4C_{11} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (C_{13} C_{44} C_{66} + C_{55} B_{13} + C_{66} B_{12})$$

$$\begin{aligned}\omega_4^{(3)} &= -C_{55} C_{66} \left(C_{12} + C_{13} \cotan(\varphi)^2 \right)^2 \\ &+ 2 C_{11} C_{44} \left(C_{66} - C_{55} \cotan(\varphi)^2 \right) \left(C_{12} - C_{13} \cotan(\varphi)^2 \right), \\ &- 2 C_{11} \cotan(\varphi)^2 \left(C_{55} B_{13} + C_{66} B_{12} \right).\end{aligned}\quad (77)$$

$$\omega_5(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \omega_5^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (78)$$

$$\omega_5^{(0)} = C_{11} - (B_{22} + C_{11} C_{44}) \tilde{S}_n'^2 + C_{11} C_{33} C_{44} \tilde{S}_n'^4, \quad (79)$$

$$\omega_5^{(1)} = 2 \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' (B_{22} + C_{11} C_{44}) - 4 C_{11} C_{33} C_{44} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n'^3, \quad (80)$$

$$\omega_5^{(2)} = -B_{33} - B_{22} \cotan(\varphi)^2 + C_{11} C_{44} \left(6 C_{33} \cotan(\varphi)^2 \tilde{S}_n'^2 - 2 C_{23} \tilde{S}_n'^2 - \cotan(\varphi)^2 - 1 \right), \quad (81)$$

$$\omega_5^{(3)} = 4 C_{11} C_{44} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' \left(C_{23} - C_{33} \cotan(\varphi)^2 \right), \quad (82)$$

$$\omega_5^{(4)} = C_{11} C_{44} \left(C_{22} - 2 C_{33} \cotan(\varphi)^2 + C_{33} \cotan(\varphi)^4 \right). \quad (83)$$

$$\pi_{TV}(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^2 \pi_{TV}^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k, \quad (84)$$

$$\pi_{TV}^{(0)} = -C_{55} C_{66} + C_{55}^2 C_{66} \tilde{S}_n'^2, \quad (85)$$

$$\pi_{TV}^{(1)} = -2 C_{55}^2 C_{66} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n', \quad (86)$$

$$\pi_{TV}^{(2)} = C_{55} C_{66} \left(C_{66} + C_{55} \cotan(\varphi)^2 \right). \quad (87)$$

$$\pi_{L,TH}(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \pi_{L,TH}^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k + \alpha \omega_5(S'_n, \varphi, S_2), \quad (88)$$

$$\pi_{L,TH}^{(0)} = -\alpha C_{13}^2 \tilde{S}_n'^2, \quad (89)$$

$$\pi_{L,TH}^{(1)} = 2 \alpha C_{13}^2 \cotan(\varphi) \tilde{S}_n', \quad (90)$$

$$\pi_{L,TH}^{(2)} = -\alpha \left(C_{12}^2 + C_{13}^2 \cotan(\varphi)^2 \right) + \alpha C_{11} B_{11} \tilde{S}_n'^2, \quad (91)$$

$$\pi_{L,TH}^{(3)} = -2 \alpha C_{11} B_{11} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n', \quad (92)$$

$$\pi_{L,TH}^{(4)} = \alpha C_{11} B_{11} \cotan(\varphi)^2. \quad (93)$$

$$\Sigma_n(S'_n, \varphi, S_2) = \sum_{k=0}^4 \Sigma_n^{(k)}(S'_n, \varphi) S_2^k - C_{11} \omega_5(S'_n, \varphi, S_2), \quad (94)$$

$$\Sigma_n^{(0)} = C_{11} C_{13}^2 C_{44} \tilde{S}_n'^4, \quad (95)$$

$$\Sigma_n^{(1)} = -4 C_{11} C_{13}^2 C_{44} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n'^3, \quad (96)$$

$$\Sigma_n^{(2)} = -C_{11} \tilde{S}_n'^2 \left(C_{13} B_{13} + C_{23} B_{23} + C_{33} B_{33} + 2 C_{13} C_{44} \left(C_{12} - 3 C_{13} \cotan(\varphi)^2 \right) \right), \quad (97)$$

$$\Sigma_n^{(3)} = 2 C_{11} \cotan(\varphi) \tilde{S}_n' \left(C_{13} B_{13} + C_{23} B_{23} + C_{33} B_{33} + 2 C_{13} C_{44} \left(C_{12} - C_{13} \cotan(\varphi)^2 \right) \right), \quad (98)$$

$$\Sigma_n^{(4)} = -C_{11} \left((C_{13} B_{13} + C_{23} B_{23} + C_{33} B_{33}) \cotan(\varphi)^2 - C_{44} \left(C_{12} - C_{13} \cotan(\varphi)^2 \right)^2 \right). \quad (99)$$

Annexe C

Etant donnée une équation de dispersion $\Omega(S_2, S'_n) = 0$ dépendant de la variable complexe $S_2 = S'_2 + iS''_2$ et de la variable réelle S'_n , l'enjeu de cette section est d'exprimer les expressions des dérivées dS_2/dS'_n et $d^2S_2/dS_n'^2$. L'équation de dispersion est un polynôme des variables S_2 et S'_n . Elle est différentiable en tout point S_2 et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann à savoir :

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial S'_2} = \frac{\partial \Omega''}{\partial S_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Omega'}{\partial S_2} = -\frac{\partial \Omega''}{\partial S'_2}. \quad (1)$$

De plus, sa dérivée, par rapport à la variable S_2 , s'exprime selon l'une des expressions suivantes :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial S_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial S'_2} = -i \frac{\partial \Omega}{\partial S''_2}. \quad (2)$$

En supposant la dérivée $\partial \Omega / \partial S_2$ différente de zéro, le théorème des fonctions implicites conduit à l'expression :

$$\frac{dS_2}{dS'_n} = -\frac{\partial \Omega / \partial S'_n}{\partial \Omega / \partial S_2}. \quad (3)$$

La dérivée $d^2S_2/dS_n'^2$ est tout d'abord obtenue en dérivant la fonction dS_2/dS'_n par rapport à la variable S'_n :

$$\frac{d^2S_2}{dS_n'^2} = \frac{d}{dS'_n} (dS_2/dS'_n). \quad (4)$$

La fonction dS_2/dS'_n dépend des variables S_2 et S'_n , la relation (4) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2S_2}{dS_n'^2} = \frac{\partial}{\partial S_2} (dS_2/dS'_n) \frac{dS_2}{dS'_n} + \frac{\partial}{\partial S'_n} (dS_2/dS'_n). \quad (5)$$

En remplaçant l'expression de dS_2/dS'_n obtenue à l'équation (2) dans l'équation (5), la dérivée recherchée s'écrit :

$$\frac{d^2S_2}{dS_n'^2} = -\frac{\partial \Omega / \partial S'_n}{\partial \Omega / \partial S_2} \frac{\partial}{\partial S_2} \left(-\frac{\partial \Omega / \partial S'_n}{\partial \Omega / \partial S_2} \right) + \frac{\partial}{\partial S'_n} \left(-\frac{\partial \Omega / \partial S'_n}{\partial \Omega / \partial S_2} \right), \quad (6)$$

elle peut être factorisée de la manière suivante :

$$\frac{d^2 S_2}{dS_n'^2} = \frac{1}{\partial\Omega/\partial S_2} \left(\partial\Omega/\partial S_n' \frac{\partial}{\partial S_2} \left(\frac{\partial\Omega/\partial S_n'}{\partial\Omega/\partial S_2} \right) - \partial\Omega/\partial S_2 \frac{\partial}{\partial S_n'} \left(\frac{\partial\Omega/\partial S_n'}{\partial\Omega/\partial S_2} \right) \right), \quad (7)$$

Les deux dérivées partielles par rapport aux variables S_2 et S_n' de l'expression (7) sont développées :

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left(\frac{\partial\Omega/\partial S_n'}{\partial\Omega/\partial S_2} \right) = \frac{(\partial^2\Omega/\partial S_2\partial S_n')(\partial\Omega/\partial S_2) - (\partial\Omega/\partial S_n')(\partial^2\Omega/\partial S_2^2)}{(\partial\Omega/\partial S_2)^2} \quad (8)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial S_n'} \left(\frac{\partial\Omega/\partial S_n'}{\partial\Omega/\partial S_2} \right) = \frac{(\partial^2\Omega/\partial S_n'^2)(\partial\Omega/\partial S_2) - (\partial\Omega/\partial S_n')(\partial^2\Omega/\partial S_2\partial S_n')}{(\partial\Omega/\partial S_2)^2}. \quad (9)$$

L'insertion de l'expression de ces dérivées partielles dans l'équation (7) conduit à :

$$\frac{d^2 S_2}{dS_n'^2} = \frac{1}{(\partial\Omega/\partial S_2)^3} \left(\partial\Omega/\partial S_n' \left((\partial^2\Omega/\partial S_2\partial S_n')(\partial\Omega/\partial S_2) - (\partial\Omega/\partial S_n')(\partial^2\Omega/\partial S_2^2) \right) - \partial\Omega/\partial S_2 \left((\partial^2\Omega/\partial S_n'^2)(\partial\Omega/\partial S_2) - (\partial\Omega/\partial S_n')(\partial^2\Omega/\partial S_2\partial S_n') \right) \right). \quad (10)$$

Après simplification, l'expression de $d^2 S_2/dS_n'^2$ devient :

$$\frac{d^2 S_2}{dS_n'^2} = \frac{1}{(\partial\Omega/\partial S_2)^3} \left(2 \frac{\partial\Omega}{\partial S_n'} \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_2\partial S_n'} \frac{\partial\Omega}{\partial S_2} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial S_2} \right)^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_n'^2} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial S_n'} \right)^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_2^2} \right). \quad (11)$$

Les dérivées partielles par rapport aux variables S_2 et S_n' de cette équation sont maintenant exprimées. Pour simplifier leurs expressions, la fonction $d^2 S_2/dS_n'^2$ est écrite sous la forme :

$$\frac{d^2 S_2}{dS_n'^2} = \frac{f}{(\partial\Omega/\partial S_2)^3} \quad (12)$$

avec :

$$f = 2 \frac{\partial\Omega}{\partial S_n'} \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_2\partial S_n'} \frac{\partial\Omega}{\partial S_2} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial S_2} \right)^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_n'^2} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial S_n'} \right)^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_2^2}. \quad (13)$$

Ces deux dérivées partielles s'expriment ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left(\frac{d^2 S_2}{dS_n'^2} \right) = \frac{1}{(\partial\Omega/\partial S_2)^4} \left(\frac{\partial f}{\partial S_2} \frac{\partial\Omega}{\partial S_2} - 3f \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_2^2} \right) \quad (14)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial S_n'} \left(\frac{d^2 S_2}{dS_n'^2} \right) = \frac{1}{(\partial\Omega/\partial S_2)^4} \left(\frac{\partial f}{\partial S_n'} \frac{\partial\Omega}{\partial S_2} - 3f \frac{\partial^2\Omega}{\partial S_2\partial S_n'} \right) \quad (15)$$

avec :

$$\frac{\partial f}{\partial S_2} = 2 \frac{\partial \Omega}{\partial S_2} \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial S_2^2 \partial S'_n} \frac{\partial \Omega}{\partial S'_n} + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_2 \partial S'_n} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_2^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_n'^2} \right) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S_2} \right)^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial S_2 \partial S_n'^2} - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S'_n} \right)^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial S_2^3} \quad (16)$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial S'_n} = 2 \frac{\partial \Omega}{\partial S'_n} \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial S_2 \partial S_e'^2} \frac{\partial \Omega}{\partial S_2} + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_2 \partial S'_n} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_2^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_n'^2} \right) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S_2} \right)^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial S_n'^3} - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S'_n} \right)^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial S_2^2 \partial S'_n} \quad (17)$$

Annexe D

Etant donnée une équation de dispersion $\Omega(S_2, S'_n) = 0$ pour laquelle :

$$\Omega = \Omega' + i\Omega'' \quad \text{et} \quad S_2 = S'_2 + iS''_2, \quad (1)$$

soit :

$$\begin{cases} \Omega'(S'_2, S''_2, S'_n) = 0 \\ \Omega''(S'_2, S''_2, S'_n) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

et en supposant Ω analytique, c'est à dire vérifiant :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial S_2} = \frac{\partial \Omega'}{\partial S'_2} + i \frac{\partial \Omega''}{\partial S'_2} = -i \frac{\partial \Omega'}{\partial S''_2} + \frac{\partial \Omega''}{\partial S''_2}, \quad (3)$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial S'_2} = \frac{\partial \Omega''}{\partial S''_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Omega''}{\partial S'_2} = -\frac{\partial \Omega''}{\partial S''_2}, \quad (4)$$

cette section propose une démonstration de la relation :

$$\frac{dS'_2}{dS'_n} = \Re \left(\frac{dS_2}{dS'_n} \right), \quad (5)$$

dans laquelle le symbole \Re représente la partie réelle d'une grandeur complexe.

À partir du théorème des fonctions implicites, la dérivée dS_2/dS'_n est exprimée en fonction des dérivées partielles de l'équation Ω par la relation :

$$\frac{dS_2}{dS'_n} = -\frac{\partial \Omega / \partial S'_n}{\partial \Omega / \partial S_2}. \quad (6)$$

En considérant, les équations (1) et (3), cette dérivée est développée sous la forme :

$$\frac{dS_2}{dS'_n} = -\frac{\partial \Omega' / \partial S'_n + i \partial \Omega'' / \partial S'_n}{\partial \Omega' / \partial S'_2 + i \partial \Omega'' / \partial S'_2}. \quad (7)$$

La partie réelle de l'équation (7) est donnée par :

$$\Re \left(\frac{dS_2}{dS'_n} \right) = -\Re \left(\frac{(\partial \Omega' / \partial S'_n + i \partial \Omega'' / \partial S'_n)(\partial \Omega' / \partial S'_2 - i \partial \Omega'' / \partial S'_2)}{(\partial \Omega' / \partial S'_2 + i \partial \Omega'' / \partial S'_2)(\partial \Omega' / \partial S'_2 - i \partial \Omega'' / \partial S'_2)} \right), \quad (8)$$

soit :

$$\Re\left(\frac{dS_2}{dS'_n}\right) = -\frac{(\partial\Omega'/\partial S'_n)(\partial\Omega'/\partial S'_2) + (\partial\Omega''/\partial S'_n)(\partial\Omega''/\partial S'_2)}{(\partial\Omega'/\partial S'_2)^2 + (\partial\Omega''/\partial S'_2)^2}. \quad (9)$$

La dérivation du système (2) par rapport à la variable S'_n conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Omega'}{\partial S'_n} + \frac{\partial\Omega'}{\partial S'_2} \frac{dS'_2}{dS'_n} + \frac{\partial\Omega'}{\partial S'_2} \frac{dS''_2}{dS'_n} = 0 \\ \frac{\partial\Omega''}{\partial S'_n} + \frac{\partial\Omega''}{\partial S'_2} \frac{dS'_2}{dS'_n} + \frac{\partial\Omega''}{\partial S'_2} \frac{dS''_2}{dS'_n} = 0 \end{cases}. \quad (10)$$

L'expression de la dérivée dS'_2/dS'_n est obtenue à partir de ce système et a pour expression :

$$\frac{dS'_2}{dS'_n} = \frac{(\partial\Omega'/\partial S'_2)(\partial\Omega''/\partial S'_n) - (\partial\Omega''/\partial S'_2)(\partial\Omega'/\partial S'_n)}{(\partial\Omega'/\partial S'_2)(\partial\Omega''/\partial S'_2) - (\partial\Omega'/\partial S'_2)(\partial\Omega''/\partial S'_2)}. \quad (11)$$

En considérant les égalités (4), on constate que les relations (9) et (11) sont identiques. Cette égalité est respectée pour les dérivées d'ordre supérieur et ainsi pour la dérivée seconde, on a la relation :

$$\frac{dS_2{}'^2}{dS_n{}'^2} = \Re\left(\frac{dS_2^2}{dS_n^2}\right). \quad (12)$$

variable principale. Le système (4) est alors vérifié pour tous les couples (S_1, S_2) qui annulent la résultante.

Fronts d'onde ultrasonores à la surface d'un milieu semi infini anisotrope : théorie des rayons réels et complexes

Les fronts d'ondes ultrasonores générés par une source LASER en régime d'ablation et se propageant à la surface d'un milieu anisotrope peuvent être observés expérimentalement à partir d'une sonde hétérodyne mesurant le déplacement vertical de la surface en fonction du temps ou numériquement par un calcul de la fonction de Green.

Les résolutions des polynômes de Christoffel et de Rayleigh associées à un critère d'énergie permettent de calculer respectivement les temps d'arrivée des ondes rasantes et de l'onde de Rayleigh. Ce calcul qui est basé sur la notion d'onde plane homogène, ne donne qu'une description partielle des phénomènes physiques observés expérimentalement ou numériquement. En effet, pour un milieu anisotrope, certains fronts se rejoignent en un point et forment une corne. Le lieu de jonction des deux fronts est caractérisé par une concentration d'énergie impliquant des phénomènes de diffraction. Cependant lorsque l'on considère la description des fronts d'onde à partir d'ondes planes homogènes, on constate que les fronts s'interrompent brutalement à la pointe de la corne. L'introduction des ondes rasantes et de Rayleigh hétérogènes permettent de décrire les fronts qui se propagent dans le prolongement des cornes. Les résultats ainsi obtenus sont en parfait accord avec ceux obtenus expérimentalement ou numériquement.

Mots clés : onde rasante, onde de Rayleigh, onde hétérogène, anisotropie, vitesse de l'énergie, fonction de Green

Ultrasonic wave fronts at semi infinite anisotropic medium surface: real and complex ray theory

Ultrasonic wave fronts generated by a LASER source in the ablation regime and which propagate at the surface of an anisotropic medium can be observed experimentally with an optical heterodyne probe by measuring the normal surface displacement with time dependence or numerically by a Green function calculation.

Arrival times of lateral waves and Rayleigh wave are calculated by coupling respectively Christoffel and Rayleigh polynomials to energetic criterion. This calculation based on homogeneous plane wave doesn't describe all the physical phenomena observed experimentally or numerically. Indeed, for anisotropic media, two wave fronts can join and form cuspidal edge. This area is characterized by a concentration of energy which implies diffraction phenomena. However, by considering homogeneous plane waves, wave front propagation is brutally interrupted on cuspidal edge. The introduction of inhomogeneous lateral and Rayleigh waves gives a description of wave fronts which propagate in the extension of cuspidal edge. These results are in good agreement with the results obtained experimentally or numerically.

Keywords: lateral wave, Rayleigh wave, inhomogeneous wave, anisotropy, energy velocity, Green function