

N° d'ordre 3296

# THÈSE

PRÉSENTÉE A

**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR

*En Cotutelle avec*

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH –FES- MAROC

Par Youssef STITOU

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPECIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

-----  
**MODÉLISATION PARAMETRIQUE 3-D FONDEÉ SUR LA  
DECOMPOSITION DE WOLD**

**APPLICATIONS AU FILTRAGE DE BLOCS SISMIQUES 3-D.**

-----  
Soutenance : **05 Décembre 2006.**

Après avis de :

Philippe BOLON,  
Driss ABOUTAJDINE

Professeur à l'Université de Savoie  
Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat.

Devant la commission d'examen formée de :

Rachid BENSELIMANE  
Driss ABOUTAJDINE  
Mohcine ZAOUAK  
Mostafa MRABTI  
M. Philippe BOLON,  
Flavius TURCU  
Pierre BAYLOU  
Mohamed NAJIM

Professeur à l'Ecole Supérieur de Technologie Fès Saïs  
Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat,  
Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Fès Saïs  
Professeur à la Faculté des Sciences Daher EL Mehraz Fès  
Professeur à l'Université de Savoie  
Chargé de recherche CNRS-LAPS, Bordeaux  
Professeur à l'ENSEIRB, Bordeaux, *Président*  
Professeur à l'ENSEIRB, Bordeaux

# Remerciement

*Ce mémoire est l'aboutissement d'un travail de recherche effectué dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'université Bordeaux I en France et l'université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès - Maroc.*

*Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance et mes remerciements au Professeur M. Najim pour son accueil au sein de l'Equipe Signal et Image, pour la confiance qu'il m'a accordée et pour l'environnement scientifique dont j'ai bénéficié au sein de son laboratoire.*

*Je voudrais remercier également M. Mrabti, Professeur à la faculté des Sciences Dhar El Meheraz- Fès, d'avoir accepté de co-diriger ce travail et pour tous les conseils qu'il m'a prodigués.*

*Je remercie tout particulièrement, F. Turcu, chargé de recherche CNRS, qui a joué un rôle considérable dans cette thèse. Je lui suis infiniment reconnaissant pour sa disponibilité, ses conseils et les discussions mathématiques que nous avons eues tout au long de ma thèse.*

*Ma reconnaissance profonde va aussi à Y. Berthoumieu, HDR et maître de conférence à l'ENSEIRB, B. Aksasse, professeur assistant à la Faculté des Sciences Techniques (FST) d'Errachidia, et D. Jantet, ingénieur de recherche CNRS, qui ont partagé avec moi leurs connaissances profondes du traitement d'images et l'analyse des données sismiques. Je les remercie également pour les efforts investis dans l'amélioration de mon manuscrit.*

*Je remercie vivement le Professeur P. Baylou pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.*

*Je tiens à adresser mes remerciements particuliers à Monsieur D. Aboutajdine, Professeur à la faculté des sciences de Rabat, et à Monsieur Ph. Bolon, Professeur à l'université de Savoie, qui ont accepté d'être les rapporteurs de mon mémoire.*

*J'adresse également mes sincères remerciements aux professeurs M. Zaouak et R. Benselimane, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de jury et pour tous les conseils qu'ils m'ont prodigués.*

*Que tous les membres de LAPS soient remerciés de la sympathie qu'ils m'ont témoignée tout au long de mon séjour au laboratoire et de l'aide qu'ils m'ont apportée dans le cadre de cette thèse.*

## Notations

$j$	:	Racine carré de -1
$\hat{X}$	:	Valeur estimée de $X$
$( )^*$	:	Opérateur conjugué
$( )^T$	:	Opérateur transposé
$( )^H$	:	Opérateur transposé-conjuguée
$( )^+$	:	Opérateur pseudo inverse.
$\otimes$	:	Produit de Kronecker
$\circ$	:	Produit de Khatri-Rao
$\delta_i( )$	:	Operateur de Kroneker $i - D$
$\lambda_i( )$	:	Mesure de Lebesgue $i - D$
$LO(3)$	:	Ensemble des ordres lexicographiques sur $Z^3$
$I$	:	Matrice identité
$(\Omega, A, P)$	:	Espace de probabilité
$\langle, \rangle$	:	Produit scalaire
$E[ ]$	:	Espérance mathématique
$L^2(\Omega, A, P)$	:	Espace des variables aléatoires définies sur $(\Omega, A, P)$ et de carrées intégrables

# Abréviations

1-D	Monodimensionnel
2-D	Bidimensionnel
3-D	Tridimensionnel
ACMP	Algebraically Coupled Matrix Pencils
AIC	Akaike Information Criterion
AR	Autorégressif
BT	Bloc Toeplitz
MA	Moyenne Ajustée
ARMA	Autorégressif à Moyenne Ajustée
DPNS	Demi Plan Non Symétrique
DPRNS	
DENS	Demi Espace Non Symétrique
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
HOS	High Order Statistics
HR	Haute Résolution
IC	Information Criterion
MDL	Minimum Description Length
MEMP	Matrix Enhancement and Matrix Pencils
MEV	Minimum Eignvalue
MUSIC	MUltiple SIgnal CLassification
QP	Quart de Plan
QS	Quarter Space
RSB	Rapport Signal à Bruit
RTP	Rank Test Procedure
SOS	Second Order Statistics
SVD	Singular Value Decomposition
TBTB	Toeplitz Bloc- Bloc Toeplitz
TFD	Transformé de Fourier Discrète
YW	Yule-Walker equations

# Tables des matières

<b>Introduction</b> .....	<b>11</b>
<b>Chapitre 1 Modélisation paramétriques de textures 2-D</b> .....	<b>13</b>
1.1 Introduction.....	13
1.2 Textures .....	13
1.2.2 Définitions.....	14
1.2.3 Types de textures.....	15
1.2.4 Analyse synthèse des textures : .....	16
1.2.5 Modélisation stochastique des textures .....	16
1.3 Modélisation paramétrique des textures 2-D .....	17
1.3.2 Les modèles ARMA, AR, MA.....	17
1.3.3 Les modèles markoviens : .....	18
1.3.4 Les modèles harmoniques .....	20
1.3.5 La modélisation fondée sur la décomposition de Wold 2-D .....	20
<b>Chapitre 2 Modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold</b> .....	<b>21</b>
2.1 Introduction.....	21
2.2 Modélisation fondée sur la décomposition de Wold 2-D .....	22
2.2.2 Décomposition de Wold 2-D.....	23
2.2.3 Modèles associés au champs purement aléatoire 2-D .....	26
2.2.4 Modèle associé au champ harmonique 2-D .....	27
2.2.5 Modèles associés au champ évanescent 2-D.....	28
2.2.6 Applications à la synthèse et l'analyse des textures 2-D.....	31
2.2.6.1 Exemples .....	31
2.3 Modélisation Paramétrique 3-D.....	33
2.3.1 Décomposition de Wold 3-D.....	33
2.3.1.1 Cas d'un seul ordre lexicographique sur $Z^3$ .....	33
2.3.1.2 Cas des ordres multiples.....	36
2.3.2 Modèle associé au champ purement aléatoire 3-D.....	37
2.3.3 Modèle associé au champ harmonique 3-D .....	38
2.3.4 Modèle associé au champ évanescent .....	39
2.3.4.1 Modèle associé au champ évanescent de type 1.....	39
2.3.4.2 Modèle associé au champ évanescent de type 2.....	40
2.3.4.3 Remarques importantes : .....	42
2.4 Conclusion .....	43

## **Chapitre 3 Etude des Modèles Autorégressifs 3-D ..... 45**

3.1	Introduction.....	45
3.2	Estimations des paramètres transverses.....	46
3.2.1	Cas des observations non bruitées.....	46
3.2.2	Cas d'un bruit additif blanc.....	48
3.3	Estimation de l'ordre d'un modèle AR 3-D.....	51
3.3.1	Méthodes à critère d'information (IC).....	51
3.3.2	Méthode à valeur propre minimale (MEV).....	53
3.3.3	Méthode linéaire algébrique: RTP.....	56
3.3.3.1	Méthode de Newton – Raphson.....	58
3.3.3.2	Calcul du rang.....	58
3.3.4	Exemples Numériques.....	59
3.3.4.1	Exemple 1 :.....	59
3.3.4.2	Exemple 2.....	59
3.3.4.3	Commentaires.....	60
3.4	Conclusion.....	61

## **Chapitre 4 Etudes des processus déterministes 3-D ..... 63**

4.1	Introduction.....	63
4.2	Identification des Processus Harmoniques 3-D.....	64
4.2.1	Fondements et limitations des Méthodes basées sur l'autocorrélation.....	66
4.2.2	Méthodes analytiques basées sur les statistiques d'ordre supérieur.....	69
4.2.2.1	La Méthode MEMP 3-D.....	70
4.2.2.2	La Méthode ESPRIT 3-D.....	78
4.2.3	Estimation des paramètres : ordre, amplitudes complexes.....	79
4.2.3.1	Estimation de l'ordre du modèle.....	79
4.2.3.2	Estimation des amplitudes complexes.....	80
4.3	Estimation des paramètres du processus évanescent 3-D.....	82
4.3.1	Processus évanescent du type 1.....	82
4.3.2	Processus évanescent de type 2.....	82
4.4	Résultats expérimentaux.....	83
4.5	Conclusion.....	86

## **Chapitre 5 Applications au filtrage des données sismiques ..... 89**

5.1	Introduction.....	89
5.2	Images sismiques 2-D et 3-D.....	90
5.3	Filtrage des données sismiques.....	92
5.3.1	Les filtres propres :.....	92
5.3.2	Filtrage FK.....	94
5.4	Méthodes proposées.....	94
5.4.1	Filtrage par décomposition spectrale.....	94

5.4.1.1	Exemples .....	95
5.4.1.2	Avantages et inconvénients : .....	97
5.4.2	Approche paramétrique : Filtre propre .....	102
5.4.2.1	Modélisation des données sismiques 3-D .....	102
5.4.2.2	Fondement du filtre proposé .....	103
5.4.3	Résultats expérimentaux .....	108
5.4.3.1	Cas d'images sismiques 2-D .....	108
5.4.3.2	Cas d'images sismiques 3-D .....	119
5.4.3.3	Limites et avantages: .....	125
5.5	Conclusion .....	125
<b>Conclusion .....</b>		<b>127</b>
<b>Annexe A : Processus Stochastiques 3-D .....</b>		<b>129</b>
A.1	Notions de base .....	129
A.2	Stationnarité .....	129
A.3	Statistiques de processus aléatoire .....	130
<b>Annexe B : Estimation des moments et cumulants .....</b>		<b>133</b>
<b>Annexe C : Rappel sur les représentations spectrales .....</b>		<b>135</b>
C.1	Transformé de Fourier discrète 3-D .....	135
C.2	Mesures spectrales .....	135
<b>Annexe D : Notions de prédiction linéaire sur <math>Z^3</math> .....</b>		<b>137</b>
D.1	Types de processus aléatoires .....	137
<b>Annexe E : Estimation des paramètres du modèle AR 3-D .....</b>		<b>139</b>
E.1	Estimation des paramètres AR 3-D bruité .....	139
E.2	Sélection de l'ordre du modèle AR 3-D par les CI .....	139
E.3	Sélection du modèle par la méthode algébrique .....	139
<b>Annexe F : Produit de Khatri-Rao .....</b>		<b>140</b>
<b>Bibliographie .....</b>		<b>141</b>





# Introduction

De nombreuses techniques de traitement du signal et de l'image sont fondées sur la théorie des probabilités et plus particulièrement sur les notions de variable ou de processus aléatoire. Ces outils mathématiques ont été mis à contribution pour construire des modèles a priori aptes à décrire les phénomènes étudiés. Dans ce contexte, la modélisation paramétrique a connu un grand succès et un développement important dans le cas des signaux monodimensionnels (1-D) et bidimensionnels (2-D). Cette thématique constitue un des axes de recherche de l'équipe Signal et Image. Dans le cas 2-D, en considérant les images comme une réalisation des processus aléatoire autorégressif (AR 2-D) Liu et al [Liu96] ont développé une structure de filtre en treillis basée sur les coefficients de réflexion 2-D. Ces coefficients ont été dans un premier temps utilisés pour la compression numérique d'image et la restauration des images dégradées par un bruit additif. Ultérieurement, ils ont été mis en œuvre dans la thèse de Alata [Alat98], en tant que nouvel ensemble de caractérisation des textures 2 - D et utilisés pour la classification et la segmentation des images texturées.

De manière générale, la difficulté majeure de la modélisation paramétrique des textures 2-D est de disposer de modèles qui rendent compte 'efficacement' à la fois du caractère aléatoire, du caractère périodique et du caractère directionnel, présents, le plus souvent simultanément dans les textures. Un outil mathématique permettant de développer des nouveaux modèles paramétriques capables de représenter ces trois caractères est fourni par la décomposition de Wold 2-D [Fran95a]. Il s'agit de la décomposition d'un processus stochastique homogène 2-D en une somme de trois composantes orthogonales : une composante purement aléatoire, une composante harmonique et une composante évanescence. Des modèles paramétriques correspondant à chacune des trois composantes ont été proposés dans [Fran93] pour l'analyse et la synthèse des textures 2-D. Ces modèles ont permis d'obtenir de bon résultats dans des applications comme la segmentation et l'indexation des images texturées [Stoi98], [Fran96], [Kris96], [Rama03].

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation des processus aléatoires 3-D fondée sur des décompositions de type Wold. Notre objectif principal est de développer de nouveaux modèles paramétriques 3-D qui permettent de caractériser une grande classe de blocs d'images texturées.

Le mémoire s'organise de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, introductif, nous rappelons tout d'abord les notions liées aux textures et à la caractérisation des textures. Ensuite nous dressons l'état de l'art de la modélisation paramétrique des textures 2-D. Nous décrivons en particulier les modèles les plus utilisés dans la "littérature" à savoir les modèles autorégressifs (AR), à moyennes ajustées (MA), autorégressifs à moyenne ajustées (ARMA) et les champs de Markov.

Dans le chapitre II, nous nous intéressons à la modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold. Dans un premier temps, nous décrivons le fondement de cette modélisation dans le cas des images 2-D. Dans un deuxième temps, on montre que la décomposition de Wold

permet de représenter tout processus stochastique homogène 3-D en une somme de quatre composantes, composante purement aléatoires, composante harmonique, et deux composantes évanescentes appelées respectivement composante évanescence de type 1 et composante évanescence de type 2. Nous présenterons notamment les modèles paramétriques correspondants à chacune des quatre composantes [Stit06a].

Dans le chapitre III, nous nous intéressons à la modélisation des processus purement aléatoires 3-D par des modèles AR 3-D. Deux problèmes liés à cette modélisation seront traités: l'estimation des paramètres et la sélection de l'ordre. L'estimation des paramètres est abordée dans le cas où le processus AR 3-D est perturbé par un bruit additif blanc gaussien [Stit05a]. Pour la sélection de l'ordre, nous introduisons dans un premier temps les extensions des critères d'informations les plus utilisés dans la 'littérature'. Ensuite, nous proposons une méthode algébrique fondée sur le calcul de rang et la décomposition en valeurs singulières (SVD) [Stit06b].

Dans le chapitre IV, nous développons des techniques d'analyse des processus déterministes 3-D issus de la décomposition de Wold 3-D. Ce chapitre est scindé en deux parties. La première partie est consacrée à l'estimation des paramètres des processus harmoniques 3-D perturbés par un bruit additif gaussien. Cette estimation est abordée principalement dans le cadre de l'analyse spectrale 3-D. Nous décrivons tout d'abord le fondement et les limitations des méthodes analytiques à haute résolution (HR) fondées sur les statistiques d'ordre 2. Ensuite, nous montrons que ces méthodes peuvent être enrichies en utilisant les statistiques d'ordre supérieur [Stit05b], [Stit06c]. Dans la deuxième partie, nous étudions les processus évanescents 3-D de type 1 et 2. Nous montrons que l'estimation de leurs paramètres peut être effectuée en utilisant les techniques d'estimation paramétrique 1-D et 2-D.

Dans le chapitre V, nous étudions les potentialités de la décomposition de Wold pour le filtrage des images et de blocs d'images sismiques. Après une brève introduction aux données sismiques, nous présentons deux méthodes pour décomposer les données sismiques en deux composantes: l'une appelée signal et l'autre appelée bruit. La première méthode est une approche spectrale basée sur la décomposition de Lebesgue d'une mesure spectrale en deux parties, une partie absolument continue et une autre partie singulière. La deuxième méthode est une approche paramétrique qui consiste à modéliser les données sismiques par un modèle harmonique 3-D perturbé par un bruit gaussien. Ces deux méthodes sont testées sur les données sismiques 2-D et 3-D. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par les méthodes les plus fréquemment utilisées pour traiter les images sismiques

# Chapitre 1

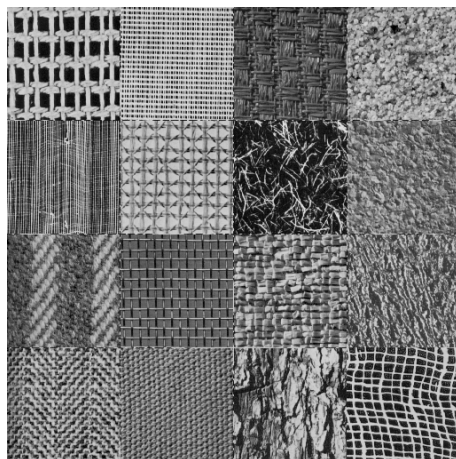
## Modélisation paramétriques de textures 2-D

### 1.1 Introduction

Un domaine d'application de la modélisation paramétrique des processus aléatoires définis sur  $Z^2$  est l'analyse des images texturées. Le but de ce chapitre est, dans un premier temps, d'essayer de préciser quelques notions liées aux textures et à la caractérisation des textures. Dans un deuxième temps, nous allons décrire brièvement différents modèles stochastiques 2-D qui ont été largement utilisés dans la « littérature ». Quatre types de modélisations seront décrites : modélisation linéaire de type ARMA, modélisation sinusoïdale, modélisation par les champs de Markov et la modélisation fondée sur la décomposition de Wold 2-D.

### 1.2 Textures

Malgré la somme considérable des travaux consacrés à l'analyse d'images texturées, il n'existe pas de définition précise universelle de la notion de texture. Les définitions proposées dans la littérature sont soit trop générales et imprécises soit trop restrictives pour s'adapter à la diversité des cas rencontrés [Gaga83] [Unse84]. La figure 1.1 montre quelques images qualifiées de textures extraites de l'album de Brodatz [Brod66].



*Fig. 1.1 Exemples de textures*

L'absence d'une définition précise est due au fait que la notion de texture est fortement liée à la perception visuelle humaine. En effet la capacité de l'œil à discerner la présence de motifs, plus au moins organisés ou totalement désordonnés détermine la présence ou non de texture dans une région de l'image. Nombreux sont les auteurs qui ont proposé une définition appropriée du terme texture [Jule83], [Gaga83]. Les définitions proposées sont souvent liées aux domaines de recherche ou d'application où elles ont été utilisées.

Parmi les multiples propriétés qui sont reconnues aux textures nous pouvons citer :

- La texture procède de l'arrangement de motifs structuraux élémentaires.
- La texture caractérise une relation structurelle entre les points d'une région de l'image.
- La texture est stationnaire : une répétition spatiale d'un motif de base dans différentes directions.
- La texture peut être perçue à différentes échelles ou à différents niveaux de résolution.
- La texture d'une image possède des qualités visuelles comme : l'uniformité, la densité, la finesse, la régularité, la directionnalité, la granularité,....

## 1.2.2 Définitions

A titre d'exemples nous donnons quelques définitions de textures introduites dans la littérature

- **Définition 2.1 [Gaga83]**

Une texture procède de l'arrangement, selon des lois stochastiques ou déterministes, de motifs structuraux élémentaires (ou primitives tonales) ayant éventuellement eux-mêmes un aspect aléatoire.

- **Définition 2.2 : [Unse84]**

Une texture est une région d'une image pour laquelle il existe une fenêtre de dimension réduite, telle qu'une observation au travers de celle-ci se traduise par une impression visuelle identique pour toutes les positions envisageables par translation à l'intérieur de la région considérée.

La définition suivante est une synthèse des deux définitions précédentes qui prend en compte la plupart des propriétés soulignées ci-dessus.

- **Définition 2.3 :**

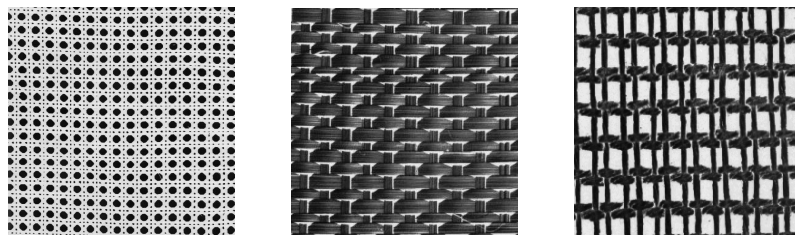
Une texture est un arrangement hiérarchique, répondant à des lois stochastiques ou déterministes, de motifs structuraux élémentaires ayant eux-mêmes un aspect aléatoire. Cet arrangement est tel que pour toute translation d'une fenêtre d'observation de taille quelconque, la perception visuelle de la texture au travers de cette fenêtre reste inchangée.

### 1.2.3 Types de textures

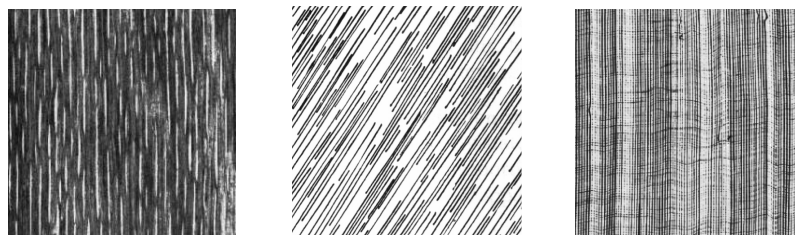
Les définitions rappelées plus haut soulignent un aspect important des textures qui est la disposition spatiale des objets d'une textures (motifs, primitives). Différentes textures peuvent être distinguées entre elles par la répartition spatiale de leurs motifs. Cette répartition spatiale permet de distinguer assez naturellement trois types de textures, entre lesquelles se positionnent un peu toutes les textures:

- Les textures structurées appelées également régulières, dans lesquelles la périodicité totale du motif est évidente comme dans les images représentées dans la figure 1.2.
- Les textures directionnelles dont les motifs texturaux sont orientés suivant une direction. Trois exemples de textures directionnelles sont illustrés dans la figure 1.3.
- Les textures aléatoires pour lesquelles les motifs sont répartis anarchiquement. Ces textures sont totalement désordonnées comme dans la figure 1.4.

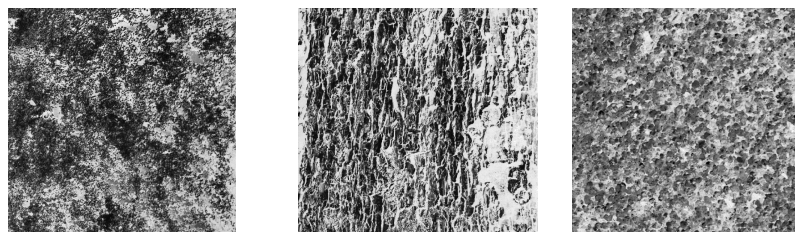
Toutefois, la plupart des textures naturelles ne sont ni strictement périodiques ni directionnelles ni totalement aléatoires. En effet, deux ou trois des aspects précédents peuvent être présents dans la même texture.



*Fig. 1.2 Exemples de textures structurées*



*Fig. 1.3 Exemples de textures directionnelles*



*Fig. 1.4 Exemples de textures aléatoires*

### 1.2.4 Analyse synthèse des textures :

La synthèse des textures consiste à créer artificiellement des textures simulant des images naturelles comme, tissus, bois, murs, soit à reconstruire des images ayant les mêmes apparences texturales d'une texture donnée. L'analyse de texture consiste souvent à extraire des paramètres dits attributs descriptifs ou attributs texturaux caractéristiques de cette texture. Certains de ces attributs texturaux peuvent quantifier l'une des trois propriétés visuelles précédentes (directionnalité, périodicité et aspect aléatoire). D'autres correspondent à des propriétés purement mathématiques auxquelles il est difficile d'associer une qualification perceptive. Les attributs texturaux obtenus peuvent être utilisés dans de nombreuses applications: segmentation, restauration, compression d'images, classification des textures, etc. Dans certains cas, les attributs texturaux obtenus par les méthodes d'analyse permettent aussi de synthétiser ou de reconstruire la texture originale. C'est la boucle « analyse-synthèse ».

De nombreuses approches de l'analyse de texture développées dans la littérature, permettent d'obtenir des attributs texturaux très variés. Parmi ces attributs nous pouvons citer :

- Les attributs issus des approches statistiques et calculés en fonction des niveaux de gris des pixels de l'image: moyenne, variance, matrices de cooccurrences, covariance ou les statistiques d'ordre supérieur [Hara81] [Gaga83], [Hall96].
- Les attributs provenant des transformations orthogonales appliquées aux images comme la transformée de Fourier, transformée en ondelettes [Chan93], [Unse95], [Truc98].
- Les attributs texturaux provenant de l'identification des paramètres d'un modèle stochastique associé à l'image comme le modèle autorégressif (AR), le modèle à moyenne ajustée (MA), le modèle autorégressif à moyenne ajustée (ARMA), champs markoviens ou modèles sinusoïdaux 2-D.

### 1.2.5 Modélisation stochastique des textures

Les approches stochastiques en traitement d'image considèrent la texture comme la réalisation d'un processus aléatoire stationnaire au sens large (stationnarité au second ordre) de taille finie  $\{y(m,n), 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N\}$ . La caractérisation de la texture s'effectue par l'étude des caractéristiques statistiques de ces processus comme la densité spectrale, les probabilités jointes, la fonction d'autocorrélation, ou les statistiques d'ordre supérieur. Les approches stochastiques peuvent être regroupées en deux grandes familles : les méthodes non paramétriques et les méthodes paramétriques. Ces dernières consistent à représenter les textures par un modèle mathématique adapté et gouverné par un ensemble fini de paramètres. Elles ont l'avantage d'offrir une représentation concise des textures par un nombre restreint de paramètres qui permettent non seulement d'analyser les textures, mais aussi leurs synthèses. Cependant, la qualité d'analyse/synthèse des textures est conditionnée par l'adéquation du modèle paramétrique considéré. Le choix du modèle dépend de la texture étudiée et de l'information que l'on désire extraire.

### 1.3 Modélisation paramétrique des textures 2-D

L'analyse des textures par une approche paramétrique peut s'avérer délicate pour différentes raisons. D'abord, un modèle restera toujours une approximation théorique de la réalité. De manière générale, plus le modèle est fidèle à la texture étudiée, plus l'analyse mathématique ultérieure risque d'être complexe. Deuxièmement, la modélisation paramétrique nécessite une étape d'estimation des paramètres du modèle qui est souvent une source d'erreurs. Cette étape repose souvent des hypothèses statistiques (stationnarité, ergodicité,...(voir Annexe A)) qui rend le modèle moins fidèle à la texture étudiée. La difficulté majeure rencontrée par la modélisation des textures est de disposer de modèles qui caractérisent une large classe de textures réelles. Comme nous pouvons le voir sur la figure 1.5, les textures naturelles sont très diverses et représentent des caractéristiques spectrales très différentes.

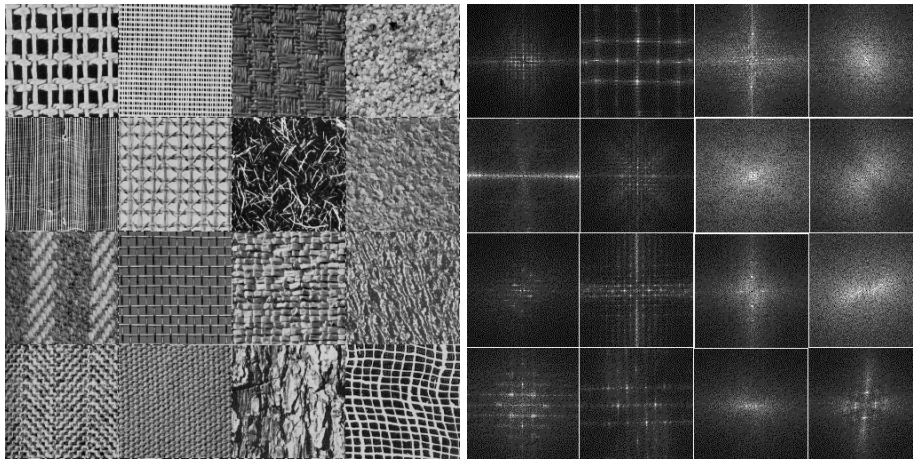


Fig. 1.5 Représentations spatiales et spectrales de textures 2-D

Compte tenu de la diversité des textures naturelles, différents modèles paramétriques ont été introduits pour analyser les images texturées. Ces modèles peuvent être classés en deux catégories: les modèles linéaires dont les plus connus sont les modèles AR, MA, ARMA, et ceux non linéaires comprenant les modèles harmoniques, les chaînes de Markov et les champs de Markov.

#### 1.3.2 Les modèles ARMA, AR, MA

La représentation ARMA d'un champ aléatoire stationnaire au second ordre  $y(m, n), (m, n) \in Z^2$  est donnée par l'équation aux différences suivante :

$$y(m, n) + \sum_{(k, l) \in D} a_{k, l} y(m - k, n - l) = \sum_{(k, l) \in D} b_{k, l} u(m - k, n - l) + u(m, n) \quad (1.1)$$

où  $D$  est le support de prédiction tel que  $(m, n) \notin D$ . Le processus  $\{u(m, n)\}$  est un bruit blanc 2-D de variance finie. En pratique, le support de prédiction  $D$  est fini et peut être causal, non causal ou semi causal.

On dit que  $\{y(m, n)\}$  est un processus AR 2-D si tous les coefficients  $\{b_{k,l}\}$  sont nuls. Dans le cas contraire et si les coefficients  $\{a_{k,l}\}$  sont nuls, le processus  $\{y(m, n)\}$  possède une représentation MA.

Le processus ARMA  $\{y(m, n)\}$  défini par (1.1) peut être vu comme la sortie d'un système linéaire excité par un bruit blanc  $\{u(m, n)\}$  et ayant une fonction de transfert donnée par :

$$H(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} \quad (1.2)$$

où  $A(z_1, z_2)$  et  $B(z_1, z_2)$  sont des polynômes à deux variables complexes données par :

$$A(z_1, z_2) = 1 + \sum_{(k,l) \in D} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l} \quad (1.3)$$

$$B(z_1, z_2) = 1 + \sum_{(k,l) \in D} b_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l} \quad (1.4)$$

Ainsi le processus ARMA 2-D se caractérise par sa densité spectrale donnée par :

$$S(\omega, \nu) = \frac{|B(e^{-j2\pi\omega}, e^{-j2\pi\nu})|^2}{|A(e^{-j2\pi\omega}, e^{-j2\pi\nu})|^2} \quad (1.5)$$

Ces modèles ont été largement utilisés dans de nombreuses applications en traitement d'images telles que la segmentation d'image [Alat05], [Come99], la classification des textures [Thom00], [Hu94] et l'analyse/synthèse des images texturées [Sark97], [Chel85], [Khot99]. L'une des difficultés qui apparaissent lors de l'utilisation des modèles AR, MA, ARMA est le choix du support de prédiction et de la nature de l'excitation. Plusieurs travaux supposent que l'excitation est gaussienne et montrent dans ce cas que le support de prédiction convenable peut être déterminé en étudiant les autocorrélations du processus [Khot99], [Sark97], [Aksa99], [Alat03].

Les travaux d'estimation des paramètres de ces modèles sont souvent des extensions de techniques d'identification utilisées dans le cas 1-D [Kash84], [Youl94], [Liu96], [Kada98], [Kayr04], [Marp00]. Cependant, ces extensions rencontrent quelques difficultés dues principalement à l'absence du théorème de factorisation de polynômes à deux variables.

### 1.3.3 Les modèles markoviens :

Avant d'introduire les champs markoviens il est nécessaire de définir la notion de voisinage :

Notons par  $S$  le réseau des sites de l'image et par  $Y = \{Y_s, s \in S\}$  une famille de variable aléatoires définies sur  $S$ . Chaque variable  $Y_s$  est à valeurs dans un espace discret ou continu noté  $\Omega$ . Si nous notons par  $N$  le cardinal de  $S$  ( $N = \text{card}(S)$ ), alors les réalisations du processus aléatoires  $Y$  sont les éléments de l'ensemble  $\Omega^N$ .



- **Définition 2.4**

$V = \{V_s, s \in S\}$  est un système de voisinage sur  $S$  si :

- $s \notin V_s, \forall s \in S$
- $\forall s, t \in S, s \in V_t \Leftrightarrow t \in V_s.$

L'ensemble  $V_s$  est appelé l'ensemble de voisins de  $s$ ,

- **Définition 2.5 :**

$(Y, \Omega^N, P)$  est appelé champ de Markov par rapport au système de voisinage  $V$  s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\forall y \in \Omega^N, P(Y = y) > 0$  (positivité)
- $P(Y_s = y_s / Y_r = y_r, r \in S / \{s\}) = P(Y_s = y_s / Y_r = y_r, r \in V_s)$  (propriété markovienne)

Cette dernière propriété est appelée propriété markovienne et traduit les interactions locales des champs markoviens. En outre, il est montré dans [Gema84], [Guyo93] que la distribution  $P(Y)$  d'un champ markovien est une distribution de Gibbs, i.e. :

$$P(Y) = \frac{\exp(-U(Y))}{\sum_{y \in \Omega^N} \exp(-U(y))} \quad (1.6)$$

où  $U(X)$  est une fonction d'énergie définie comme suit :

$$U(X) = \sum_{c \in C} V_c(X_s, s \in c) \quad (1.7)$$

- $c$  est une clique, i.e. un ensemble de sites voisins deux à deux ou un singleton.
- $C$  est l'ensemble des cliques liées au système de voisinage considéré.
- $V_c(\ )$  est une fonction de potentiel.

L'équation (1.7) montre donc que l'énergie globale  $U(X)$  est une somme d'énergies locales (ou somme de potentiels). Cela montre que les champs markoviens permettent de modéliser les propriétés globales de l'image en utilisant seulement des contraintes locales.

En pratique, l'analyse de texture par un champ de Markov nécessite la définition des cliques significatives et les potentiels qui lient les sites dans ces cliques [Khot99], [Piec94].

Les modèles markoviens ont été utilisés en traitement d'image comme outils de débruitage, de synthèse de textures [Khot99], de classification et d'analyse de textures [Cohe91]. Cependant, ces modèles sont abondamment utilisés pour segmenter des images texturées [Manj91], [Hu92], [Andr98] [Mela02].

### 1.3.4 Les modèles harmoniques

Les modèles harmoniques (ou sinusoïdaux) 2-D sont une extension naturelle des modèles harmoniques 1-D utilisés pour représenter les signaux périodiques ou quasi périodiques. Dans le cas général, un modèle harmonique 2-D est représenté par une somme finie d'exponentielles complexes comme suit :

$$h(m, n) = \sum_{k=1}^K C_k \exp[j2\pi(f_{1_k} m + f_{2_k} n) + j\varphi_k] \quad (1.8)$$

où,  $K$  est le nombre de composantes ou ordre de modèle, les  $C_k$  sont les amplitudes du modèle, les paires  $(f_{1_k}, f_{2_k})$  sont les fréquences spatiales normalisées et les termes  $\varphi_k$  présentent les phases du modèle.

L'estimation des fréquences des processus harmoniques 2-D se fait soit par les méthodes à balayage [Rouq99], [Hosn99], [Youl94], soit par les méthodes à haute résolution dites analytiques [Bert98], [Rouq01]. Nous reviendrons en détails sur ces méthodes dans le chapitre 4.

Les modèles harmoniques 2-D ont été utilisés dans plusieurs applications comme le traitement des images radar [Degr98] [Rouq98], ou encore l'analyse d'images par résonance magnétique [Li98].

### 1.3.5 La modélisation fondée sur la décomposition de Wold 2-D

Cette modélisation est fondée sur la décomposition de processus aléatoires 2-D en trois parties orthogonales : composante purement aléatoire, composante harmonique et composante évanescence. Du point de vue mathématique, cette décomposition est issue de la décomposition de tout espace de Hilbert de variables aléatoires en trois sous espaces orthogonaux. Cette décomposition théorique engendre un modèle approprié pour chacune des parties. Ce type de modélisation est l'objet principal du chapitre suivant. Nous y abordons également la modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold des processus stochastiques homogènes 3-D. Les notions liées à la prédiction linéaire 3-D et la représentation spectrale des processus stochastique 3-D sont rappelées dans les annexes A, C, et D.

# Chapitre 2

## Modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation des textures et de volumes d'images texturées tridimensionnelles (textures 3-D) par des modèles issus de la décomposition de Wold des processus stochastiques. Il se scinde en deux sections principales :

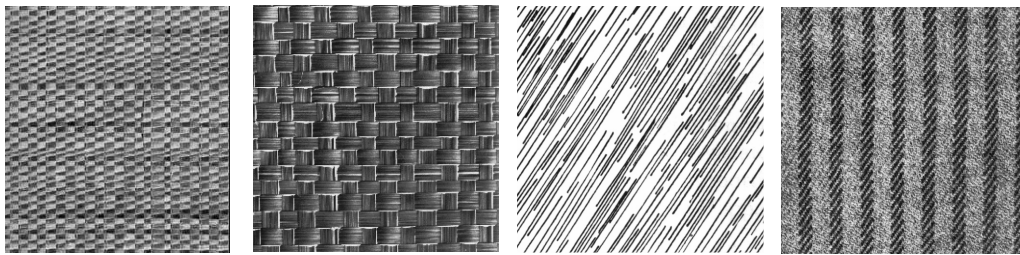
La première section portera sur la modélisation paramétrique des textures considérées comme des réalisations de taille finie de processus stochastiques discrets homogènes 2-D. Nous rappelons le fondement de la modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold 2-D introduite par Francos et al [Fran93]. Les avantages de cette modélisation seront analysés dans le cadre de l'analyse/synthèse des images texturées.

La deuxième section portera sur la modélisation paramétrique des textures 3-D fondée sur la décomposition de Wold des processus stochastiques 3-D. Les travaux que nous allons développer dans cette section sont fondés sur les travaux mathématiques développés récemment par Turcu et Najim dans [Turc06]. Ces nouveaux résultats théoriques abordent la décomposition de Wold dans un cadre plus général. Ils décrivent la structure de la décomposition de Wold pour des processus homogènes  $\{y_k, k \in G\}$  définis sur un groupe  $G$  muni d'un ordre non archimédien. Ces résultats sont intéressants pour modéliser les processus stochastiques discret m-D. En effet, le cas particulier qui concerne les applications est le cas des ordres de type lexicographique, qui sont toutes non archimédiennes. L'application de ces résultats mathématiques dans le cas particulier des processus homogènes 3-D, c'est-à-dire le cas où le groupe  $G$  coïncide avec  $Z^3$ , nous a permis de développer de nouveaux modèles paramétriques capables de caractériser efficacement une grande classe de volumes d'images texturées [Stit06].

## 2.2 Modélisation fondée sur la décomposition de Wold 2-D

L'introduction de la décomposition de Wold 2-D en analyse/synthèse de textures est récente par rapport aux autres approches paramétriques [Fran93]. Cette introduction est motivée en partie par les raisons suivantes :

Les modèles linéaires de type AR 2-D ont une densité spectrale absolument continue et ne permettent donc pas une caractérisation convenable des champs déterministes. En effet, dans le contexte d'analyse/synthèse des textures, les modèles AR se prêtent à la caractérisation des textures ayant un aspect aléatoire [Fran93], [Liu96], [Rama03]. Les limitations de ces modèles portent essentiellement sur la représentation des textures ayant certaines structures répétitives (textures déterministes). C'est le cas des textures totalement ou partiellement périodiques représentées dans la figure 2.1.



*Fig. 2.1 Exemples de textures structurées.*

L'analyse/synthèse de textures fondée sur la modélisation sinusoïdale 2-D n'a pas permis de caractériser une grande classe des textures réelles. En effet, ce type de modèle permet de décrire convenablement les textures fortement structurées, c'est à dire ayant un spectre concentré sur un nombre réduit de fréquences. Cependant, les textures aléatoires possèdent des spectres très diffus comme nous pouvons le voir sur les figures 2.2 et 2.3. Approximer de telles textures par une somme de sinusoïdes revient à approximer une densité spectrale continue (très riche) par une somme finie de fonction de Dirac 2-D. Cette approximation nécessiterait donc l'utilisation d'un nombre important de sinusoïdes. Cependant, un ordre de modélisation très élevé n'est pas toujours souhaitable en pratique et entraîne souvent des erreurs statistiques d'estimation.

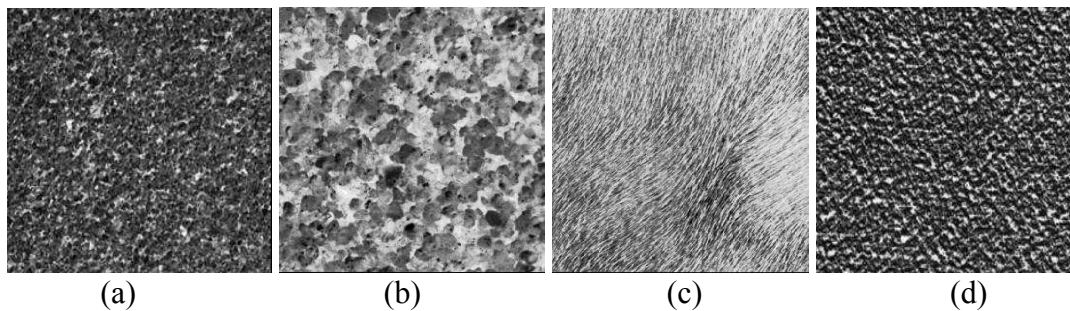


Fig. 2.2 Exemples de textures aléatoires

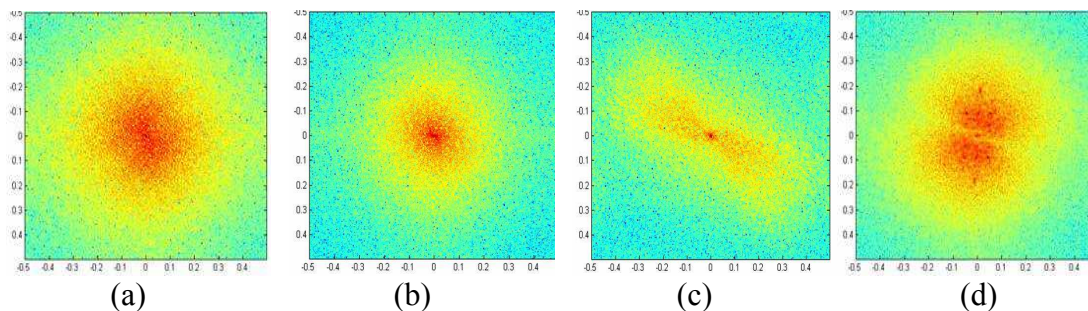


Fig. 2.3 Spectres des textures aléatoires dans 2.2

## 2.2.2 Décomposition de Wold 2-D

La décomposition de type Wold des processus stochastiques homogènes (SSL) est obtenue dans le cadre de la théorie de la prédiction linéaire. Dans sa version originelle, le théorème de Wold (1938) [Wold54] affirme que tout processus aléatoire régulier 1-D peut être décomposé en une partie déterministe et une partie purement aléatoire (cf. figure 2.4) :

$$y(n) = w(n) + h(n) \quad (2.1)$$

où les deux composantes sont orthogonales par rapport au produit scalaire défini par la covariance :

$$\langle w(n), h(n) \rangle = E[w(n)h(n)]. \quad (2.2)$$

Les modèles proposés pour les processus 1-D sont fondés sur l'équation (2.1): une décomposition en une partie purement aléatoire  $w(n)$  modélisée par un modèle MA ou un modèle AR et en une partie déterministe  $h(n)$  modélisée par un modèle harmonique.

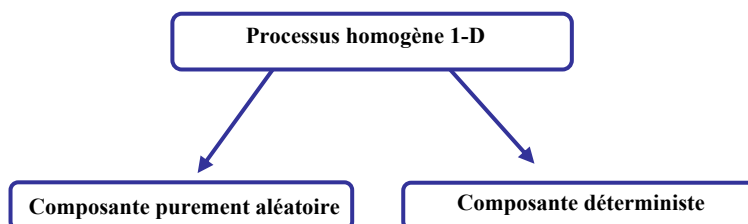


Fig. 2.4 Décomposition de Wold 1-D

Pour étendre ce résultat au cas 2-D, il est nécessaire de définir un ordonnancement sur  $Z^2$  dans la mesure ou où il n'existe pas de notions naturelles du passé, présent ou futur sur l'espace 2-D. D'après les travaux d'Helson et Lowdenslager [Hels59], le choix d'un support Demi plan Non Déterministe (DPNS) (cf. Fig. 2.5) garantit une extension « naturelle » des résultats obtenus du cas 1-D au cas 2-D. Ainsi ils obtiennent la décomposition de Wold dans le cas 2-D, qui est l'analogue de celle obtenue dans le cas 1-D, c'est-à-dire : tout processus stochastique 2-D régulier (voir annexe D.1)  $\{y(m,n), (m,n) \in Z^2\}$ , stationnaire au sens large peut être décomposé en une somme de deux composantes orthogonales, la première notée  $w(m,n)$  étant purement aléatoire, et la deuxième notée  $v(m,n)$  est déterministe :

$$y(m,n) = w(m,n) + v(m,n) \quad (2.3)$$

Cette décomposition en deux parties est unique est invariante par rapport à l'ordre total DPNS utilisé. Autrement dit, la composante aléatoire (déterministe) obtenue par rapport à un ordre total DPNS donné est identique à la composante purement aléatoire (déterministe) obtenue par rapport à tout autre ordre total DPNS. Mais la structure du champ déterministe obtenu dans le cas 2-D n'est pas similaire à celle du cas 1-D. Il est montré dans [Hels62] que le champ déterministe 2-D par rapport à un ordre DPNS se décompose encore en deux parties orthogonales. Ainsi, la décomposition de Wold obtenue par Helson et Lowdenslager dans le cas 2-D comporte trois composantes orthogonales (cf. Fig. 2.5) :

$$y(n,m) = w(n,m) + d(n,m) + e(n,m) \quad (2.4)$$

La troisième composante  $e(n,m)$  qui n'a pas d'analogue dans le cas 1-D est nommée « évanescente ». Alors que les la décomposition (2.2) est invariante par rapport à l'ordre, les deux composantes  $d(m,n)$  et  $e(n,m)$  ne le sont pas. Notons que les travaux de Helson [Hels62] sont relatifs à un ordre fixé arbitraire, comme par exemple un parcours horizontal du plan 2-D (cf Fig 2.5(a)). En considérant un ordre total « vertical » et un autre « horizontal » simultanément, Korezlioglu et Loubaton [Kore86] ont montré plus tard l'existence d'une décomposition à quatre composantes orthogonales dont deux sont des composantes évanescentes (composante évanescente verticale et composante évanescente horizontale). Ces résultats ont été étendus par les travaux de Francos et coauteurs [Fran93], qui ont montré que le champ évanescent 2-D est une infinité dénombrable de composantes orthogonales. Ce résultat a été obtenu à l'aide d'une famille dénombrable d'ordres totaux associés à des supports appelés DPNS Rationnel (DPNSR). Chaque support DPNSR est obtenu par la rotation du support DPNS par un angle  $\theta$  de tangente rationnelle (cf. Fig 2.5(c)). A chaque support DPNSR correspond une sous composante évanescente dans la décomposition de Wold 2-D. Les décompositions en deux, trois et quatre champs mentionnés précédemment ne sont que des cas particuliers de la décomposition proposée par Francos et al [Fran93].

Plus explicitement, si nous notons par  $O = \{o_{(\alpha,\beta)} / \alpha, \beta \text{ premiers entre eux}\}$  l'ensemble des ordres totaux définis par les supports DPNSR, la décomposition de Wold 2-D s'écrit sous la forme suivante :

$$y(n, m) = w(n, m) + h(n, m) + \sum_{o \in O} e_o(n, m) \quad (2.5)$$

La composante  $\{w(n, m)\}$  est un processus purement aléatoire,  $\{h(n, m)\}$  est un processus appelé demi-plan déterministe (ou harmonique) et le processus évanescents généralisé constitué d'une somme dénombrable de sous composantes évanescents. Ces trois composantes seront appelées dans toute la suite de ce document : les composantes de Wold.

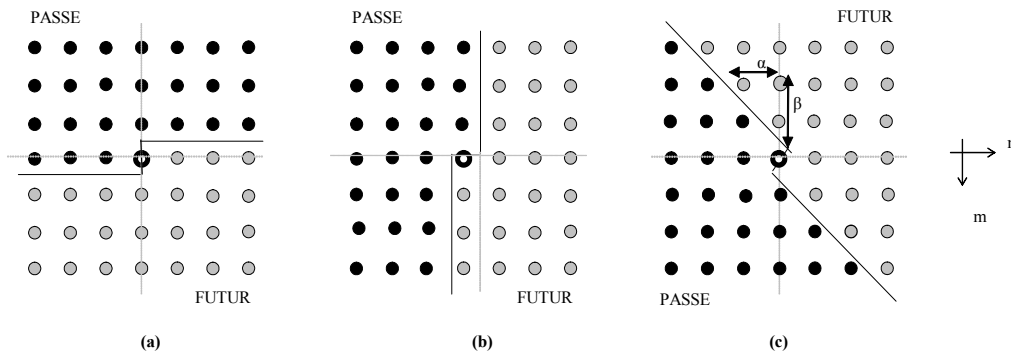


Fig. 2.5 Support de prédiction DPNS

(a): DPNS horizontal, (b): DPNS vertical, (c) : DPNSR avec  $\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\beta}$

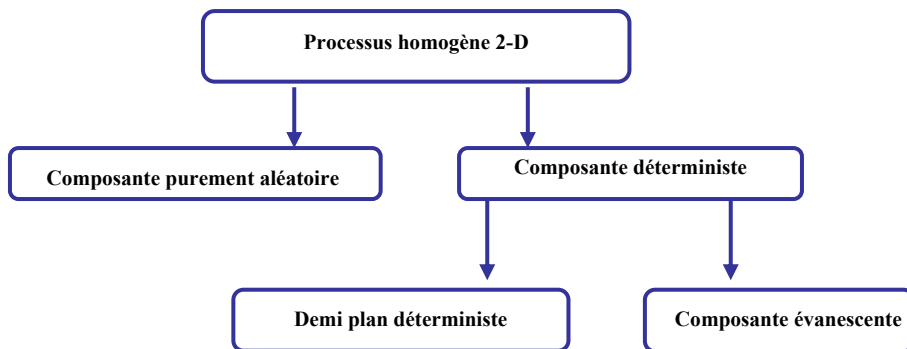


Fig. 2.6 Décomposition de Wold 2-D

En se basant sur les propriétés spectrales des composantes de Wold définies précédemment, Francos et coauteurs ont proposé les modèles mathématiques suivants [Fran93]:

### 2.2.3 Modèles associés au champs purement aléatoire 2-D

La composante purement aléatoire admet une densité spectrale absolument continue et représentée par un modèle AR2-D. Ce modèle AR 2-D est une relation linéaire entre les échantillons du processus  $\{w(n, m)\}$  et l'excitation de type bruit blanc  $\{u(n, m)\}$  de variance finie  $\sigma_u^2$ , qui peut s'exprimer comme suit :

$$w(m, n) = \sum_{(k,l) \in D} a_{k,l} w(m-k, n-l) + u(m, n) \quad (2.6)$$

où  $D$  est le support de prédiction, les coefficients  $\{a_{k,l}, (k,l) \in D\}$  sont les paramètres transverses du modèle. Les supports de prédiction utilisés en pratique sont de tailles finies et sont souvent définis de deux manières différentes : Quart de Plan (QP) et Demi Plan Non Symétrique (DPNS). Pour un point  $(m, n)$  ces deux supports sont représentés dans la figure Fig. 2.7.

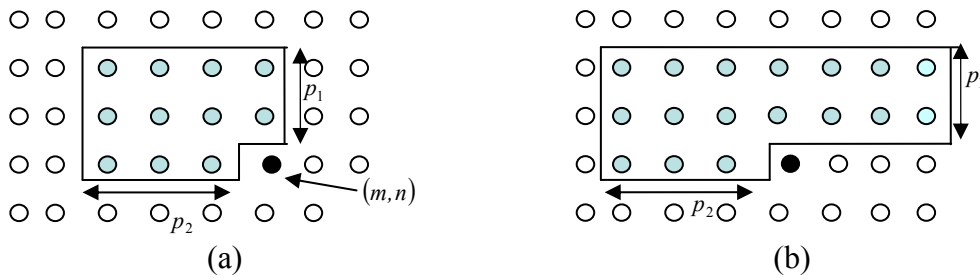


Fig. 2.7 Supports de prédiction 2-D d'ordre  $(p_1, p_2) = (2, 3)$ ,

(a) Support QP, (b) Support DPNS

Le support QP d'ordre  $(p_1, p_2)$  est donné par l'expression suivante :

$$D_{p_1, p_2} = \{(k_1, k_2) / 0 \leq k_1 \leq p_1, 0 \leq k_2 \leq p_2; (k_1, k_2) \neq (0, 0)\} \quad (2.7)$$

Avec ce support le modèle AR 2-D admet la représentation suivante :

$$y(m, n) = - \sum_{\substack{k_1=0 \\ (k_1, k_2) \neq (0, 0)}}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} a_{k_1, k_2} y(m - k_1, n - k_2) + u(m, n) \quad (2.8)$$

L'expression du support DPNS d'ordre  $(p_1, p_2)$  est donnée par :

$$D_{p_1, p_2} = \{(k_1, k_2) / k_1 = 0, 1 \leq k_2 \leq p_2\} \cup \{(k_1, k_2) / 1 \leq k_1 \leq p_1, -p_2 \leq k_2 \leq p_2\} \quad (2.9)$$

Le modèle AR 2-D associé à ce support est représenté par l'équation aux différences suivantes :

$$y(m, n) = - \sum_{k_2=1}^{p_2} a_{0, k_2} y(m, n - k_2) - \sum_{k_1=1}^{p_1} \sum_{k_2=-p_2}^{p_2} a_{k_1, k_2} y(m - k_1, n - k_2) + u(m, n) \quad (2.10)$$



La synthèse des textures par les modèles AR est réalisée en utilisant l'équation (2.8) ou (2.10) où les paramètres transverses sont donnés et le bruit blanc est généré sur ordinateur. Des exemples de textures générées par les modèles AR 2-D Gaussiens à supports QP sont représentés sur la figure 2.8. Les représentations spectrales des textures obtenues sont représentées dans la figure 2.9.

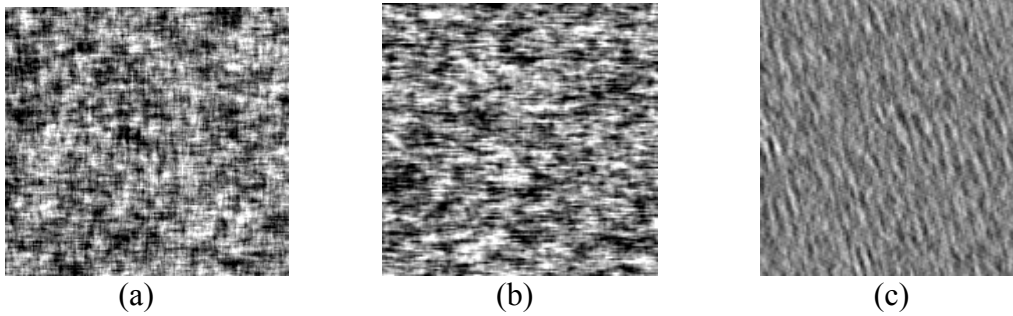


Fig. 2.8 Exemples de textures synthétisées par les modèles AR 2-D

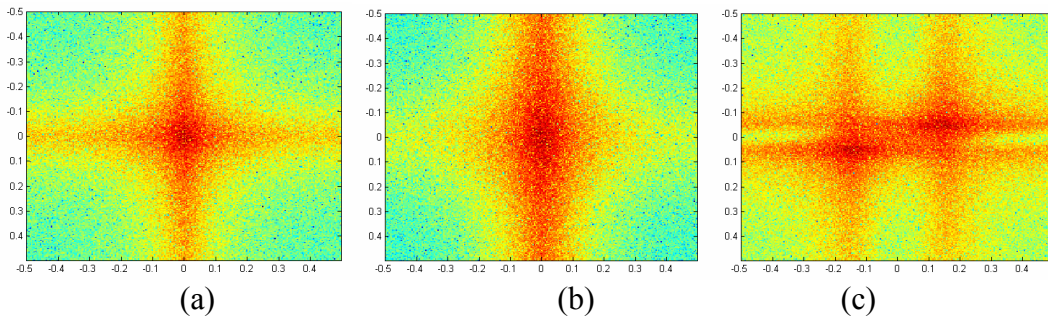


Fig. 2.9 Représentation spectrale des textures de la figure 2.8

## 2.2.4 Modèle associé au champ harmonique 2-D

Le champ demi-plan déterministe (harmonique) est représenté par un modèle harmonique 2-D. c'est à dire une somme finie de sinusôides 2-D comme dans l'expression suivante :

$$h(m, n) = \sum_{k=1}^K C_k \cos[2\pi(mf_{1k} + nf_{2k})] + D_k \sin[2\pi(mf_{1k} + nf_{2k})] \quad (2.11)$$

où les amplitudes  $C_k$  et  $D_k$  sont des variables aléatoires mutuellement orthogonales telles que  $E[C_k] = E[D_k] = \gamma_k^2$ , le paramètre  $K$  est le nombre de composantes ou ordre de modèle harmonique et les paires  $(f_{1k}, f_{2k})$  sont les fréquences spatiales normalisées.

Ce modèle permet de synthétiser avec peu de paramètres différentes textures totalement périodiques comme nous pouvons le voir sur la figure 2.10. Ce type de textures se caractérise dans le

domaine fréquentiel par la présence d'un ensemble fini de points à fortes énergies (pics) et symétriques par rapport à l'origine. La figure 2.10 représente les spectres correspondants aux textures de la figure 2. 11.

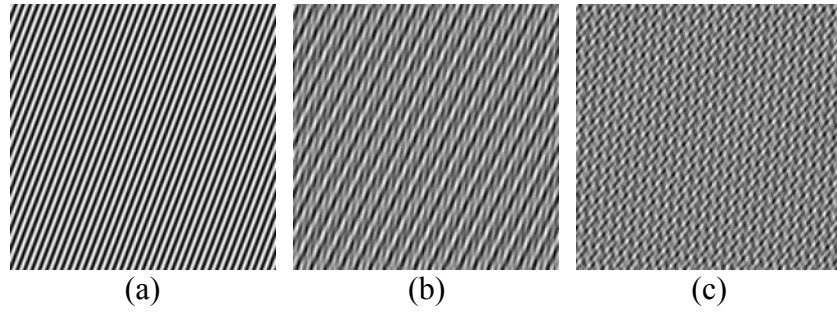


Fig. 2.10 : Exemples de textures harmoniques

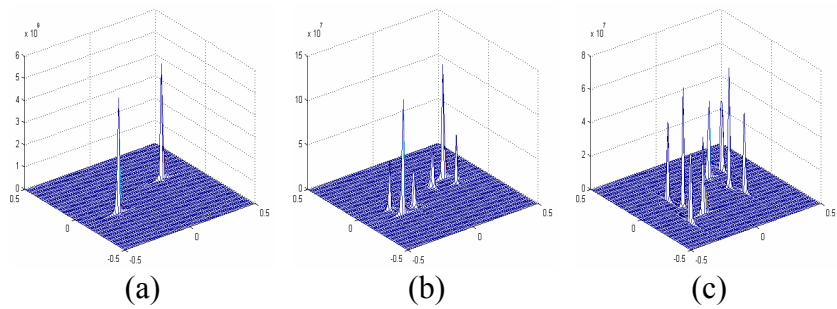


Fig. 2.11 Représentation spectrale des textures de 2.10.

## 2.2.5 Modèles associés au champ évanescé 2-D

Le processus évanescé qui constitue une particularité du cas 2-D par rapport aux signaux 1-D, est théoriquement représenté par une somme dénombrable de composantes évanescétes deux à deux orthogonales. Chaque composante est associée à un support DPNSR caractérisé par un couple de pente rationnelle  $(\alpha, \beta)$  comme illustré dans la figure (2.5).

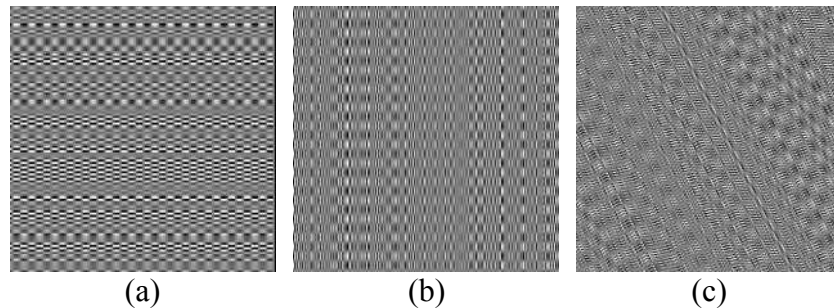
$$e(n, m) = \sum_{(\alpha, \beta) \in O} e_{(\alpha, \beta)}(n, m) \quad (2.12)$$

Le modèle associé à chaque composante est donné par :

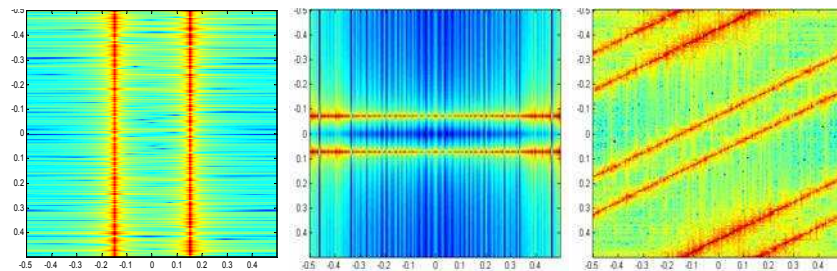
$$e_{(\alpha, \beta)}(n, m) = \sum_{i=1}^I [S_i(n\alpha - m\beta) \cos(2\pi(n\beta + m\alpha)\nu_i) + T_i(n\alpha - m\beta) \sin(2\pi(n\beta + m\alpha)\nu_i)] \quad (2.13)$$

où  $I$  est le nombre de composantes évanescétes élémentaires,  $\nu_i$  est la fréquence de la  $i^{\text{ème}}$  composante,  $\{S_i(n\alpha - m\beta)\}$  et  $\{T_i(n\alpha - m\beta)\}$  sont des processus 1-D purement aléatoires et mutuellement orthogonaux. La composante évanescéte est donc un processus séparable qui est

aléatoire dans une direction et périodique dans l'autre. Son spectre est par conséquent continu dans une direction et singulier dans l'autre. Ce qui engendre un spectre dont le support est une ligne continue de pente rationnelle. Des exemples de textures synthétiques évanescents sont montrés dans les figures 2.12. Les trois textures sont des réalisations des champs évanescents à une seule composante. La texture 2.12 (a) est générée par un champ évanescents horizontal  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ , la texture 2.12 (b) par un champ vertical  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$  et la texture dans 2.12(c) est générée avec  $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ . Les représentations spectrales des trois textures sont représentées dans la figure 2.13.

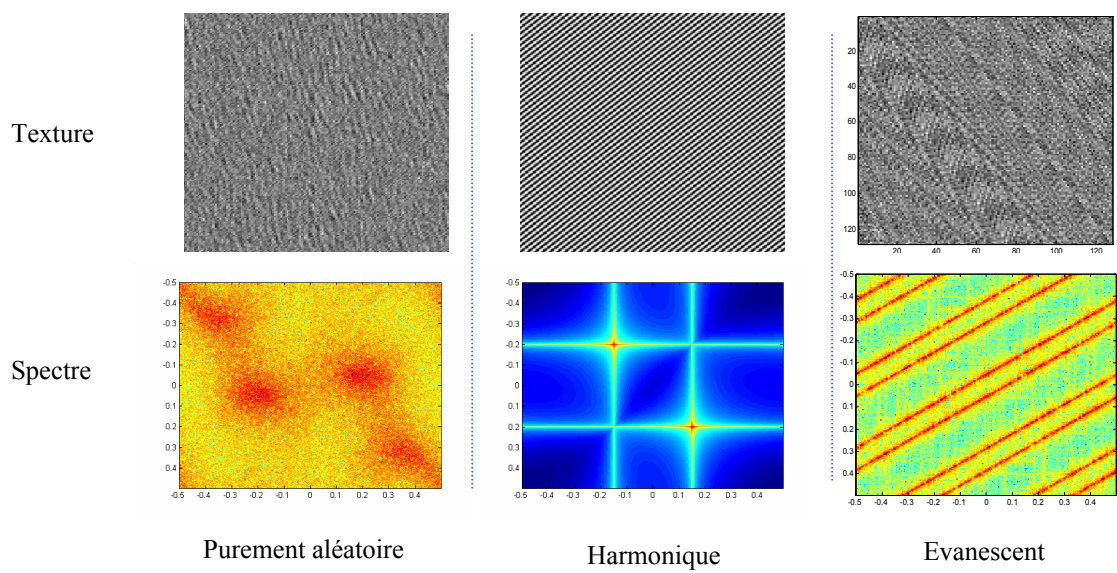


*Fig. 2.12 Exemples de textures évanescents*



*Fig. 2.13 Représentation spectrale des textures évanescents de la figure 2.11.*

A travers les textures synthétiques représentées dans les trois paragraphes précédents, nous voyons que la modélisation issue de la décomposition de Wold 2-D permet de représenter les trois aspects fondamentaux des images texturées. En effet, la composante purement aléatoire représente l'aspect anarchique et non structural de l'image (aspect aléatoire), la composante harmonique caractérise l'aspect périodique et la composante évanescents représente l'aspect directionnel ou l'orientation. Ces trois aspects se traduisent sur le plan fréquentiel par trois types de supports différents comme nous pouvons le voir sur la figure 2.14.



*Fig. 2.14 Caractéristiques des composantes de Wold 2-D*

## 2.2.6 Applications à la synthèse et l'analyse des textures 2-D

La modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold 2-D a permis d'obtenir de bons résultats en analyse/synthèse de texture [Fran93], [Fran94], [FLiu96], [Rama02], [Rama03]. En effet, elle permet, par rapport à ce qui peut être obtenu avec les modèles AR ou sinusoïdaux, de mieux synthétiser les textures qui ont à la fois un aspect aléatoire et périodique. Cette modélisation a été aussi utilisée dans d'autres domaines d'applications comme la restauration d'image [Kris96], la segmentation et l'indexation des images texturées [Stoi98].

### 2.2.6.1 Exemples

Pour mieux illustrer les avantages de la modélisation paramétrique issue de la décomposition de Wold 2-D pour synthétiser les textures réelles, considérons la texture D55 extraite de l'album de Brodatz [Brodatz96] et représentée dans la figure 2.15.

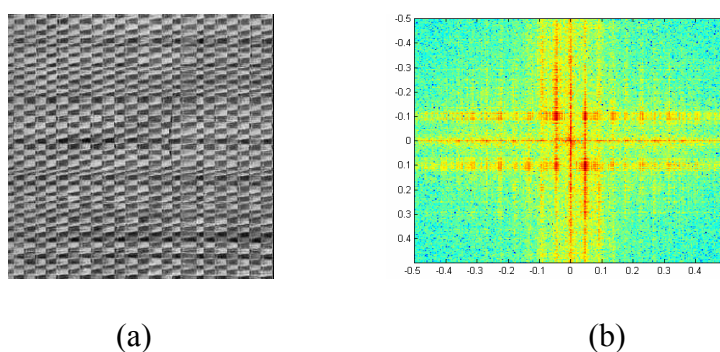


Fig. 2.15 (a) Texture D55, (b) : Spectre de l'image D55

Le spectre de cette image montre la présence de lignes verticales et horizontales (pics 1-D). Cela traduit la présence de composantes évanescentes suivant les directions  $(\alpha, \beta) = (0,1)$  et  $(\alpha, \beta) = (1,0)$ . L'absence de pics 2-D dominants et isolés sur le spectre atteste de l'absence d'une composante harmonique dans cette image. L'image reconstruite à partir des paramètres des composantes horizontales est illustrée sur la figure 2.16 (a), celle qui correspond aux composantes verticales est montrée sur la figure 2.16(b) et enfin, l'image reconstruite à partir de l'ensemble de toutes les composantes est illustrée dans la figure 2.17.

Deux autres exemples de la reconstruction des textures naturelles sont montrés sur la figure 2.18 et 2.19. Dans tous ces exemples l'extraction des composantes et l'estimation des paramètres sont effectués en se basant sur les algorithmes développés dans [Liu96], [Fran93], [Kris96], [Rama02], [Rama03].

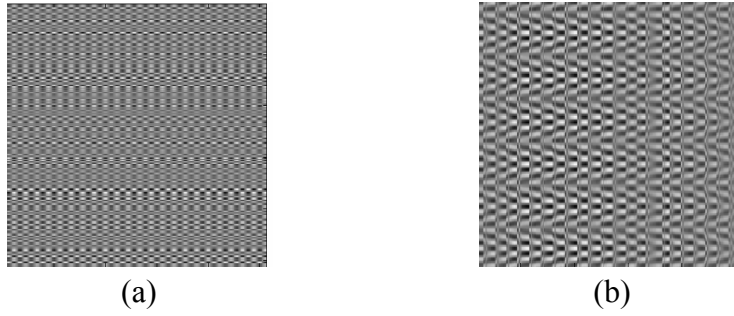


Fig. 2.16 Composantes évanescentes extraites de la texture D55  
 (a) composante évanescence horizontale, (b) composante évanescence verticale.

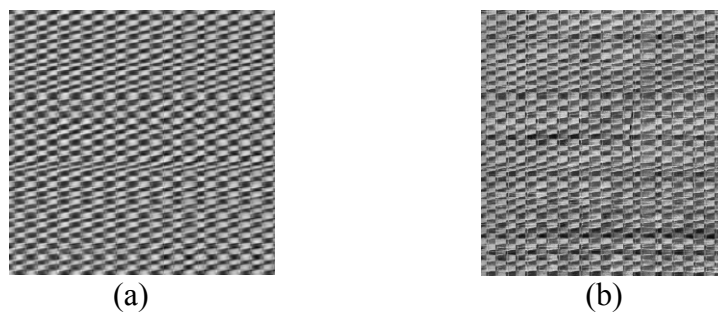


Fig. 2.17 Reconstruction de la texture D55 (a) : texture reconstruite, (b) : texture originale.

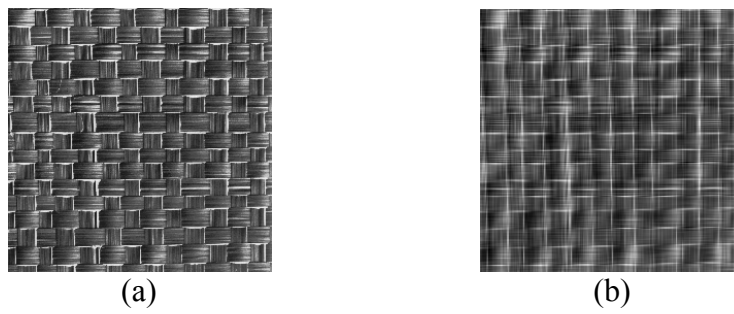


Fig. 2.18 Reconstruction de la texture D64. (a) : texture originale (b) : texture reconstruite.

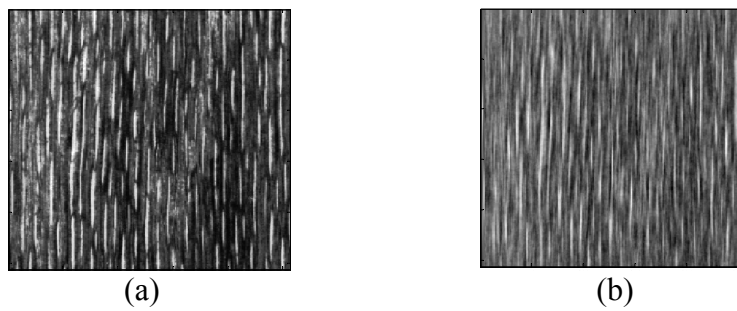


Fig. 2.19 Reconstruction de la texture D64. (a) : texture originale (b) : texture reconstruite.

## 2.3 Modélisation Paramétrique 3-D

Dans cette section nous nous intéressons à la décomposition de Wold dans le cas des processus stochastiques discrets tridimensionnels. Cette décomposition sera traitée à la fois sur le plan théorique et sur le plan applicatif. Sur le plan théorique, nous présenterons brièvement le formalisme mathématique de cette décomposition dans le contexte de la prédiction linéaire 3-D en mettant en évidence les différences par rapport au cas 1-D et 2-D. Sur le plan applicatif, nous allons introduire des nouveaux modèles paramétriques pour bien approximer ces différentes composantes. Ces approximations sont réalisées en se fondant sur les caractéristiques spectrales théoriques de chaque composante de Wold 3-D. Nous montrerons par des exemples synthétiques que chaque modèle proposé représente bien les caractéristiques théoriques, spatiales et spectrales, de la composante de Wold associée.

### 2.3.1 Décomposition de Wold 3-D

#### 2.3.1.1 Cas d'un seul ordre lexicographique sur $Z^3$

Pour introduire la décomposition de Wold 3-D, considérons l'ordre lexicographique sur  $Z^3$  suivant :

$$(j, k, l) < (m, n, t) \Leftrightarrow (j, k, l) \in \{(a, b, c) / a = m, b = n, c < t\} \cup \{(a, b, c) / a = m, b < n, c \in Z\} \cup \{(a, b, c) / a < m, b, c \in Z\} \quad (2.14)$$

Cet ordre lexicographique que nous noterons par  $\circ$  est associé à un support de prédiction demi espace non symétrique (DENS) représenté sur la figure 2.20. Il correspond à un parcours colonne par colonne de gauche à droite et de haut en bas, dans le plan 3-D.

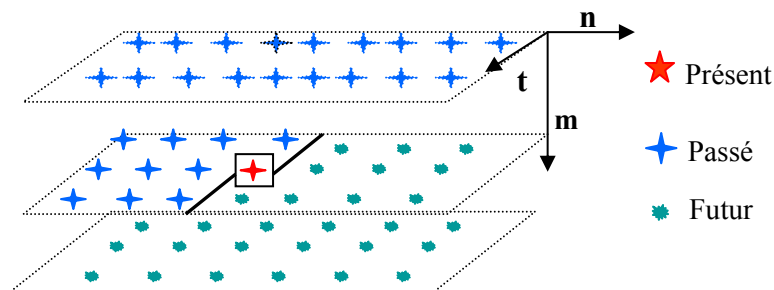


Fig. 2.20 Support DENS

Pour tout processus homogène  $y = \{y(m, n, t); (m, n, t) \in Z^3\}$  notons par  $H$  son espace d'Hilbert muni de la covariance comme produit scalaire :

$$H = \overline{\text{Sp}}\{ y(m, n, t), (m, n, t) \in Z^3 \} \quad (2.15)$$

Avec l'ordre considéré dans (2.13) toutes les notions de la prédiction linéaire et les sous espaces d'Hilbert  $H_{\text{det}}^o, H_{\text{ind}}^o$  et  $H_e^o$  rappelés en annexe (D) sont bien définis. D'après les travaux [Hels59], [Hels62], la décomposition de Wold 3-D est analogue à celle obtenue dans le cas 1-D, c'est-à-dire une décomposition de l'espace  $H$  en deux parties orthogonales :

$$H = H_{\text{ind}} \oplus H_{\text{det}} \quad (2.16)$$

Cette décomposition en sous espaces entraîne la décomposition de tout processus homogène  $y(m, n, t)$  en deux composantes orthogonales :

$$y(m, n, t) = w(m, n, t) + v(m, n, t) \quad (2.17)$$

Le processus  $w(m, n, t)$  est purement aléatoire,  $v(m, n, t)$  est déterministe. Cette décomposition en deux parties est unique et invariante par rapport à l'ordre total DENS : la composante purement aléatoire (déterministe) obtenue par rapport à un ordre total DENS donné est identique à la composante purement aléatoire (déterministe) obtenue par rapport à tout autre ordre total DENS.

En outre, la décomposition de Wold 3-D s'énonce sous une forme analogue à celle obtenue pour les processus stochastiques 2-D c'est-à-dire une décomposition à trois composantes orthogonales. En effet, la composante déterministe peut encore être décomposée en deux composantes déterministes notées  $h^o(m, n, t)$  et  $e^o(m, n, t)$  :

$$y(m, n, t) = w(m, n, t) + h^o(m, n, t) + e^o(m, n, t) \quad (2.18)$$

La composante  $h^o(m, n, t)$  est déterministe de type  $-\infty$  (ou demi espace déterministe) et  $e^o(m, n, t)$  représente la composante évanescence. Cette décomposition résulte de la décomposition de l'espace du processus en une somme orthogonale de trois sous espaces comme suit :

$$H = H_{\text{ind}} \oplus H_{-\infty}^o \oplus H_e^o \quad (2.19)$$

En effet, les trois composantes de Wold dans (2.17) s'obtiennent respectivement par la projection orthogonale de  $y$  sur les sous espaces  $H_{\text{ind}}, H_{-\infty}^o$ , et  $H_e^o$ .

Les propriétés spécifiques à la décomposition de Wold 3-D viennent du fait que le sous-espace évanescence  $H_e$  est une somme orthogonale de deux sous espaces comme suit [Turc06], [Stit06a] :

$$H_e^o = H_{e_1}^o \oplus H_{e_2}^o \quad (2.20)$$

Cette décomposition en sous espaces entraîne la décomposition de la composante évanescence 3-D en une somme de deux composantes orthogonales :

$$e^o(m, n, t) = e_1^o(m, n, t) + e_2^o(m, n, t) \quad (2.21)$$



Les deux nouvelles composantes  $e_1^o(m, n, t)$ , et  $e_2^o(m, n, t)$  sont appelées respectivement composante évanescence de type 1 et composante évanescence de type 2 et représentent des propriétés spatiales et spectrales distinctes.

Ainsi, la décomposition de Wold 3-D par rapport à un ordre lexicographique devient une décomposition à quatre composantes orthogonales. Cette décomposition est illustrée sur la figure 2. 21 et admet l'expression suivante :

$$y(m, n, t) = w(m, n, t) + h^o(m, n, t) + e_1^o(m, n, t) + e_2^o(m, n, t) \quad (2.22)$$

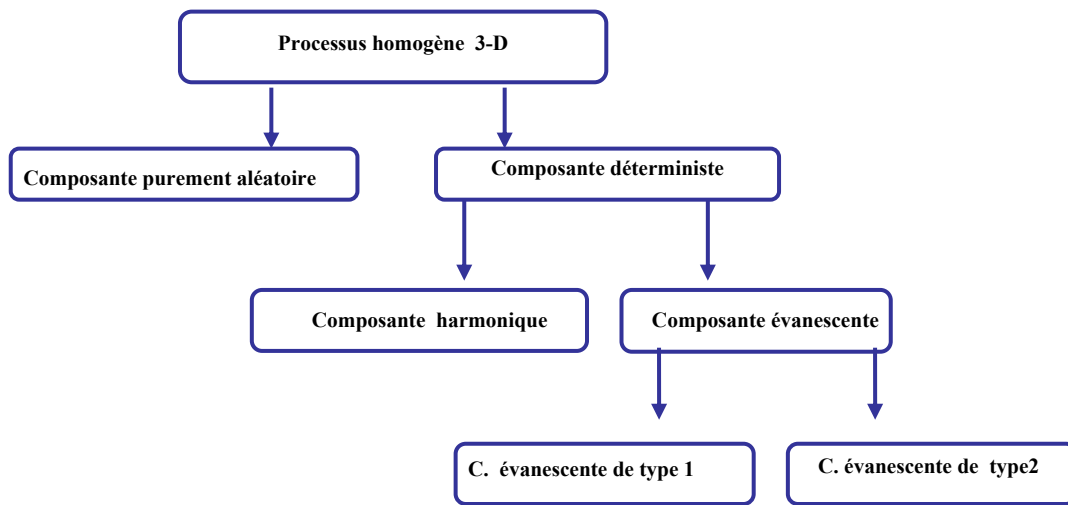


Fig. 2.21 Décomposition de Wold 3-D

Comme dans le cas 2-D, la décomposition spatiale dans (2.21) entraîne également une décomposition analogue dans le domaine spectral. En effet la mesure spectrale  $F_y$  du processus  $y$  est décomposée d'une manière unique comme la somme de quatre mesures mutuellement singulières

$$F_y(\omega, \nu, \eta) = F_w(\omega, \nu, \eta) + F_h(\omega, \nu, \eta) + F_{e_1}(\omega, \nu, \eta) + F_{e_2}(\omega, \nu, \eta) \quad (2.23)$$

où,  $F_w$ ,  $F_h$ ,  $F_{e_1}$  et  $F_{e_2}$  sont respectivement les mesures spectrales des composantes  $w$ ,  $h$ ,  $e_1$ , et  $e_2$ . Notons que toutes ces mesures sont définies sur la région cubique suivante :

$$[-1/2, -1/2] \times [-1/2, -1/2] \times [-1/2, -1/2] \quad (2.24)$$

De plus, si nous notons par  $F_y = f d\lambda_3 + F_y^s$  la décomposition de Lebesgue de la mesure  $F_y$  en une partie absolument continue  $F_a = f d\lambda_3$  et une partie singulière  $F_y^s$ , alors les quatre mesures spectrales vérifient la relation suivante:

$$\begin{cases} F_w = f d\lambda_3 \\ F_h + F_{e_1} + F_{e_2} = F_y^s \end{cases} \quad (2.25)$$

Cette relation nous montre que la mesure spectrale de la partie purement aléatoire est absolument continue, tandis que les mesures spectrales des différentes composantes déterministes sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_3$  (concentrées sur un ensemble de mesure de Lebesgue égale à zéro).

### 2.3.1.2 Cas des ordres multiples

La relation d'ordre totale considérée dans le paragraphe précédant n'est pas unique, car il est possible de définir une multitude d'ordres lexicographiques sur l'espace  $Z^3$ . Compte tenu du fait que la décomposition de la partie déterministe dépend de l'ordre total considéré, le changement de ce dernier conduit à une nouvelle décomposition à quatre composantes du processus  $y$ . Pour développer la décomposition de Wold par rapport aux ordres multiples simultanément, nous considérons l'ensemble de tous les ordres lexicographiques sur  $Z^3$  noté  $LO(3)$  et les sous espaces suivants :

$$H_E = \overline{Sp}\{H_e^o, o \in LO(3)\} = \overline{Sp}\{H_{e_1}^o \oplus H_{e_2}^o, o \in LO(3)\} \quad (2.26)$$

$$H_\infty = \bigcap_{o \in LO(3)} H_\infty^o \quad (2.27)$$

Le sous espace  $H_E$  défini dans (2.25) appelé espace évanescent généralisé est la somme de tous les sous espace  $H_e^o$ . Le sous espace  $H_\infty$  appelé sous espace harmonique est l'intersection de tous les sous espaces de type  $\infty$  associés à tous les ordres lexicographiques dans  $LO(3)$ . L'introduction de sous espaces  $H_E$  et  $H_\infty$  permet d'obtenir la décomposition de l'espace  $H$  du processus en trois parties orthogonales suivantes :

$$H = H_{ind} \oplus H_E \oplus H_\infty \quad (2.28)$$

En projetant le processus  $y$  sur les trois espaces dans (2.28) nous obtenons la décomposition de Wold 3-D à trois parties orthogonales, qui tient compte de tous les ordres lexicographiques dans  $LO(3)$  :

$$y(m, n, t) = w(m, n, t) + h(m, n, t) + e(m, n, t) \quad (2.29)$$

En outre, puisque l'espace évanescent généralisé dans (2.26) contient tous les sous espaces de type 1 et 2, la dernière expression peut s'écrire sous la forme :

$$y(m, n, t) = w(m, n, t) + h(m, n, t) + \sum_{o \in LO(3)} [e_1^o(m, n, t) + e_2^o(m, n, t)] \quad (2.30)$$

La somme

$$\sum_{o \in LO(3)} [e_1^o(m, n, t) + e_2^o(m, n, t)] \quad (2.31)$$

dans l'expression (2.30) n'est pas obligatoirement orthogonale pour n'importe quel processus. En effet, il est possible que pour certain processus et des ordres dans  $LO(3)$ , les sous espaces évanescents de type 1 et de type 2 ont des intersections non négligeables.

L'analogie très forte entre la décomposition spatiale donnée par (2.29) et la décomposition spectrale dans (2.23) constitue une des richesses de la modélisation basée sur la décomposition de

Wold. En effet, ces deux relations permettent d'un coté de passer du domaine spatial au domaine fréquentiel et réciproquement et d'un autre coté d'exploiter les caractéristiques spectrales afin de proposer des modèles mathématiques adéquats aux différentes composantes séparément. Cela constitue l'objectif des paragraphes suivants.

### 2.3.2 Modèle associé au champ purement aléatoire 3-D

La composante purement aléatoire issue de la décomposition de Wold est indépendante de l'ordre considéré sur la grille 3-D (choix de parcours du bloc). Cette composante admet une mesure spectrale absolument continue et une représentation théorique par un processus MA 3-D infini :

$$w(m, n, t) = - \sum_{(0,0,0) \leq (k_1, k_2, k_3)} b_{k_1, k_2, k_3} u(m - k_1, n - k_2, t - k_3) \quad (2.32)$$

où le processus  $u(m, n, t)$  est un processus aléatoire blanc et les paramètres  $\{b_{k_1, k_2, k_3}\}$  vérifient :

$$\begin{cases} b_{0,0,0} = 1 \\ \sum_{(0,0,0) \leq (k_1, k_2, k_3)} b_{k_1, k_2, k_3}^2 < \infty \end{cases} \quad (2.33)$$

Cependant, en pratique nous pouvons représenter les processus purement aléatoires par les modèles AR 3-D à support DENS fini donnés par la relation suivante :

$$w(m, n, t) = - \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in D} a_{k_1, k_2, k_3} w(m - k_1, n - k_2, t - k_3) + u(m, n, t) \quad (2.34)$$

Pour un ordre  $(p_1, p_2, p_3)$ , le support DENS est décrit par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} D_{NSHS} = & \{(k_1, k_2, k_3) / k_1 = 0; k_2 = 0, 1 \leq k_3 \leq p_3\} \\ & \cup \{(k_1, k_2, k_3) / k_1 = 0; 1 \leq k_2 \leq p_2, -p_3 \leq k_3 \leq p_3\} \\ & \cup \{(k_1, k_2, k_3) / 1 \leq k_1 \leq p_1, -p_2 \leq k_2 \leq p_2; -p_3 \leq k_3 \leq p_3\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ainsi, le modèle AR 3-D dans (2.34) s'exprime par l'équation aux différences suivante :

$$\begin{aligned} w(m, n, t) = & - \sum_{k_3=1}^{p_3} a_{0,0,k_3} w(m - k_1, n - k_2, t - k_3) \\ & - \sum_{k_2=1}^{p_2} \sum_{k_3=-p_3}^{p_3} a_{0,k_2,k_3} w(m - k_1, n - k_2, t - k_3) \\ & - \sum_{k_1=1}^{p_1} \sum_{k_2=-p_2}^{p_2} \sum_{k_3=-p_3}^{p_3} a_{k_1,k_2,k_3} w(m - k_1, n - k_2, t - k_3) + u(m, n, t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Les coefficients  $\{a_{k_1, k_2, k_3}\}$  sont les paramètres transverses du modèle. Comme dans le cas 2-D ce modèle caractérise convenablement les processus aléatoires ayant une densité spectrale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans le cadre d'analyse/synthèse des textures 3-D, l'utilisation des modèles AR 3-D est efficace pour les textures ayant un aspect aléatoire, ou d'une manière équivalente celles présentant un spectre assez lisse (spectre diffus). Les modèles AR ont

l'avantage de synthétiser avec peu de paramètres différents blocs images 3-D ayant un aspect aléatoire. Pour illustrer les caractéristiques spectrales et spatiales des modèles AR nous avons synthétisé une texture 3-D en utilisant (2.36) pour un ordre égal à (1,1,1). Le processus  $u(m, n, t)$  dans (2.36) est blanc gaussien généré par ordinateur. Trois tranches (slices) extraits du bloc synthétisé sont représentées sur la figure 2.22(a). Cette figure montre que la texture 3-D obtenue ne possède aucune structure particulière. En outre, sa densité spectrale est assez lisse comme nous pouvons le voir sur la figure 2.22(b).

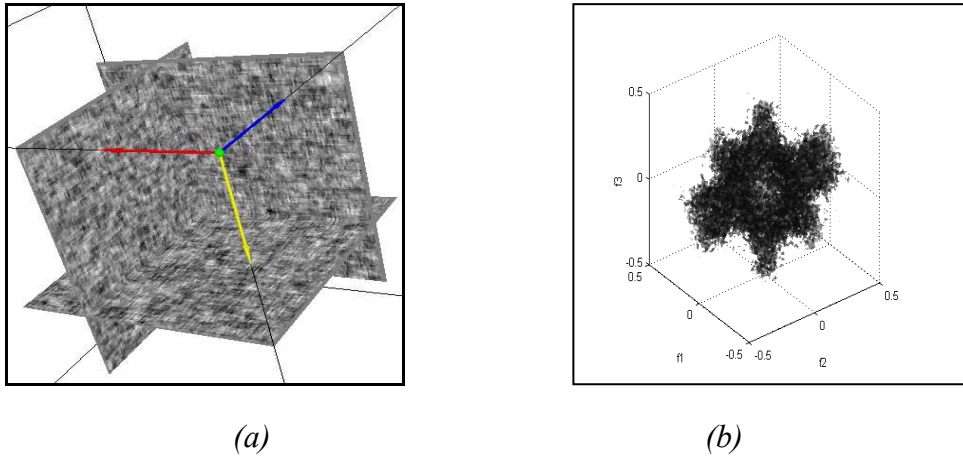


Fig. 2.22 Représentation spatiale et spectrale d'une texture AR 3-D

### 2.3.3 Modèle associé au champ harmonique 3-D

La composante harmonique 3-D est indépendante de l'ordre total considéré sur la grille 3-D, son spectre est supporté par un ensemble discret de points  $\{(\omega_i, \nu_i, \eta_i)\}$  dans l'espace  $K$ . Ainsi, sa densité spectrale peut être approximée par une somme dénombrable de fonctions de Dirac 3-D comme suit :

$$dF_h(\omega, \nu, \eta) = \sum_i \gamma_k^2 \{ \delta_3((\omega, \nu, \eta) - (\omega_i, \nu_i, \eta_i)) + \delta_3((\omega, \nu, \eta) + (\omega_i, \nu_i, \eta_i)) \} \quad (2.37)$$

Par conséquent, cette composante se modélise en pratique par une somme finie de sinusôides 3-D sous la forme suivante :

$$h(m, n, t) = \sum_{k=1}^P [C_k \cos(2\pi(m\omega_k + n\nu_k + t\eta_k)) + D_k \sin(2\pi(m\omega_k + n\nu_k + t\eta_k))] \quad (2.38)$$

où  $P$  désigne le nombre de fréquences. Les amplitudes  $\{C_k, D_k\}$  sont des variables aléatoires telles que  $E[C_k^2] = E[D_k^2] = \gamma_k^2$ .

Pour illustrer les caractéristiques spatiales et spectrales de cette composante, nous avons synthétisé un exemple de texture 3-D par le modèle (2.38) contenant deux composantes ( $P=2$ ). Les trois tranches représentées sur la figure 2.23(a) montrent que la texture générée est totalement périodique. Sur le domaine spectral, la composante harmonique réelle 3-D génère  $2P$  "pics 3-D" isolés et

symétriques par rapport à l'origine. Pour l'exemple considéré, le spectre contient 4 "pics 3-D" comme c'est illustré sur la figure 2.23(b).

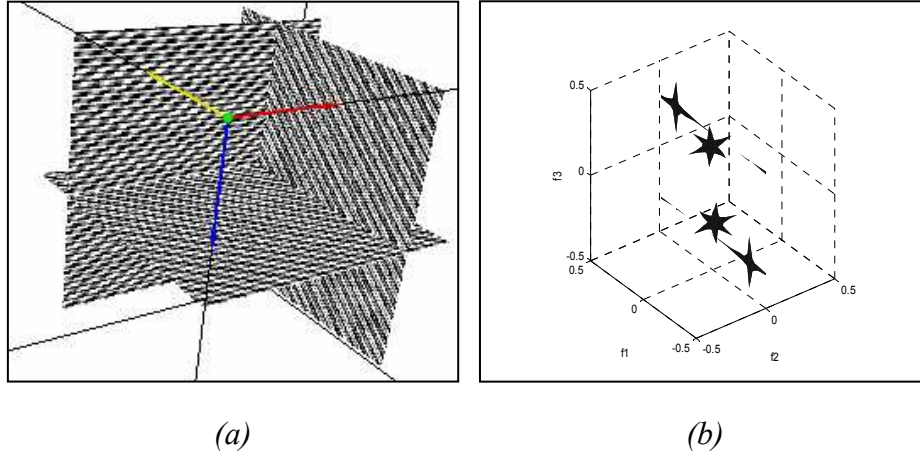


Fig. 2.23 Représentation spatiale et spectrale d'une texture harmonique 3-D.

### 2.3.4 Modèle associé au champ évanescent

Nous avons vu dans la section 2.2.1 que les deux composantes évanescentes (type 1 et type 2) dépendent de l'ordre total utilisé. Dans cette section nous allons proposer des modèles paramétriques à ces composantes par rapport à l'ordre lexicographique considéré dans (2.14). En pratique, la modélisation des deux composantes évanescents, présentes dans une texture 3-D donnée, sera déterminée à partir de son support spectral. Nous reviendrons sur ce point sous forme de remarques à la fin de cette section.

#### 2.3.4.1 Modèle associé au champ évanescent de type 1

La densité spectrale théorique  $dF_{e_1}$  du processus évanescent de type 1 ; relativement à l'ordre lexicographique considéré dans (2.14); admet l'expression suivante :

$$dF_{e_1}(\omega, \nu, \eta) = g(\omega) d\lambda_1(\omega) dF_2^s(\nu, \eta) \quad (2.39)$$

où  $F_2^s(\omega, \nu, \eta)$  est une mesure singulière 2-D,  $g(\omega)$  est une fonction densité à une variable et  $\lambda_1(\omega)$  désigne la mesure de Lebesgue 1-D. Cette relation nous montre que la densité spectrale du processus évanescent de type 1 est absolument continue suivant une dimension et singulière suivant les deux autres. En pratique la densité spectrale singulière  $dF_2^s(\nu, \eta)$ , peut être approximée par une combinaison linéaire finie de fonctions de Dirac 2-D. Ainsi, la FDS dans (2.39) peut être approximée par l'expression suivante:

$$dF_{e_1}(\omega, \nu, \eta) = g(\omega) d\lambda_1(\omega) \sum_i^{I_1} \beta_i^2 \{ \delta_2((\nu, \eta) - (\nu_i, \eta_i)) + \delta_2((\nu, \eta) + (\nu_i, \eta_i)) \} \quad (2.40)$$

Par conséquent, le processus évanescent de type 1 peut être modélisé par une somme finie de sinusoïdes 2-D suivant deux dimensions, modulées par des processus purement aléatoires suivant la dimension orthogonale :

$$e_1(m, n, t) = \sum_{i=1}^{I_1} S_{1_i}(m) \cos(2\pi(n\nu_i + t\eta_i)) + T_{1_i}(m) \sin(2\pi(n\nu_i + t\eta_i)) \quad (2.41)$$

où  $I_1$  désigne le nombre de composante,  $(\nu_i, \eta_i)$  est la fréquence 2-D de la  $i^{\text{ième}}$  composante élémentaire. Les processus purement aléatoires 1-D  $\{S_{1_i}(m)\}$   $\{S_{1_j}(m)\}$ ,  $\{T_{1_k}(m)\}$   $\{T_{1_l}(m)\}$  sont mutuellement orthogonaux pour tout  $i, j, k, l$ ,  $i \neq k$   $j \neq l$ . De plus, pour tout  $i$ , les processus  $\{S_{1_i}(m)\}$  et  $\{T_{1_i}(m)\}$  possèdent la même fonction d'autocorrélation.

Pour illustrer les propriétés spectrales et spatiales de cette composante, nous avons synthétisé une texture 3-D en utilisant une seule composante du modèle (2.41) où les amplitudes  $\{S_{1_i}(m)\}$  et  $\{T_{1_i}(m)\}$  sont des processus AR gaussien 1-D d'ordre 1. Les trois tranches extraites de la texture obtenue sont représentées sur la figure 2.24(a). Cet exemple montre que ce type de modèle génère des textures 3-D structurées uniquement suivant deux dimensions et possèdent un caractère aléatoire suivant la troisième dimension. La représentation spectrale illustrée dans la figure 2.24 (b) montre que le champ évanescent de type 1 est supporté par des droites parallèles dans l'espace fréquentiel.

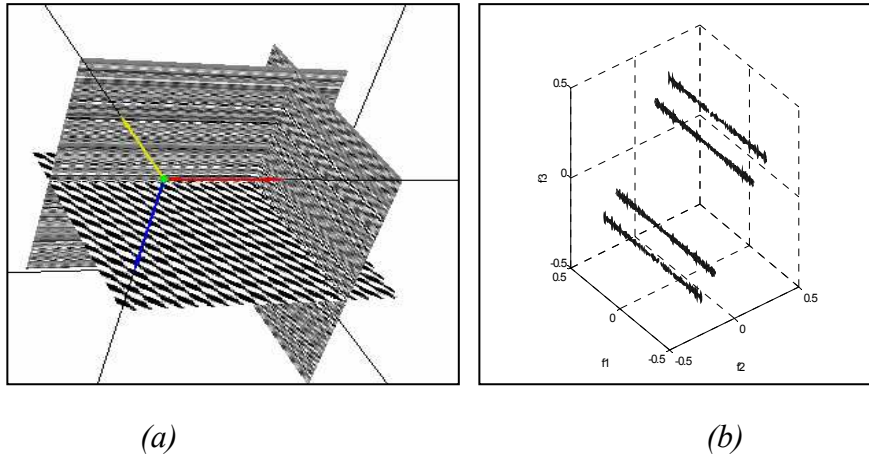


Fig. 2.24 Représentation spatiale et spectrale d'une texture 3-D évanescente de type 1

### 2.3.4.2 Modèle associé au champ évanescent de type 2

La densité spectrale  $dF_{e_2}$  du processus évanescent de type 2 est aussi une mesure produit en variables séparées. Elle est singulière suivant une seule dimension et absolument continue suivant les deux autres

$$dF_{e_2}(\omega, \nu, \eta) = f(\omega, \nu) d\lambda_2(\omega, \nu) dF_1^s(\eta) \quad (2.42)$$

où  $F_1^s$ , une mesure singulière 1-D,  $f(\omega, \nu)$  est une fonction densité 2-D et  $\lambda_2$  désigne la mesure de Lebesgue 2-D. En approximant  $F_1^s$  par une combinaison linéaire des fonction de Dirac 1-D, la FDS du processus évanescent de type 1 s'écrit sous la forme :

$$dF_{e_2}(\omega, \nu, \eta) = f(\omega, \nu) d\lambda_2(\omega, \nu) \sum_i \alpha_i^2 \{ \delta_1(\eta - \eta_i) + \delta_1(\eta + \eta_i) \} \quad (2.43)$$

Par conséquent, cette composante peut être approximée par une combinaison linéaire de produit de modèles. Chaque modèle est le produit d'un processus purement aléatoire 2-D suivant deux dimensions et un signal harmonique 1-D suivant la troisième dimension :

$$e_2(m, n, t) = \sum_{i=1}^{I_2} S_{2_i}(m, n) \cos(2\pi\eta_i t) + T_{2_i}(m, n) \sin(2\pi\eta_i t) \quad (2.44)$$

où  $\eta_i$  la  $i$ ème fréquence 1-D, les processus purement aléatoires 2-D  $S_{2_i}(m, n)$ ,  $S_{2_j}(m, n)$ ,  $T_{2_i}(m, n)$ ,  $T_{2_j}(m, n)$  sont mutuellement orthogonaux pour toutes  $i, j, k, l$ , telles que  $i \neq k$   $j \neq l$ , et pour tout  $i$ , les processus  $S_{2_i}(n, m)$  et  $T_{2_i}(m, n)$  ont la même fonction d'autocorrélation.

Pour visualiser les caractéristiques spectrales et spatiales de la composante évanescence de type 2, nous avons généré un exemple de texture 3-D par le modèle (2.44). Dans cet exemple les processus purement aléatoires  $S_{2_j}(m, n)$  et  $T_{2_k}(m, n)$  sont des processus gaussiens AR 2-D à support DPNS d'ordre (1,1). Comme nous pouvons le voir sur la figure 2. 25 (a), les processus évanescents de type 2 permettent de synthétiser des volumes d'images texturées qui sont structurées suivant une seule dimension. Il s'agit des textures directionnelles suivant un seul axe et présentant un aspect aléatoire suivant les deux autres axes orthogonaux. Dans l'espace fréquentiel, la représentation spectrale représentée sur la figure 2.25(b) montre que le spectre des processus évanescents de type 2 est supporté sur des plans parallèles.

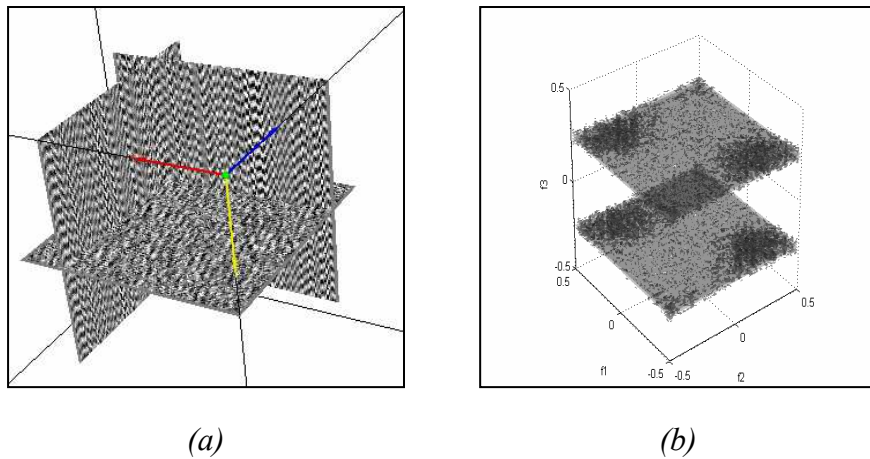


Fig. 2.25 Représentation spatiale et spectrale d'une texture évanescence de type 2

### 2.3.4.3 Remarques importantes :

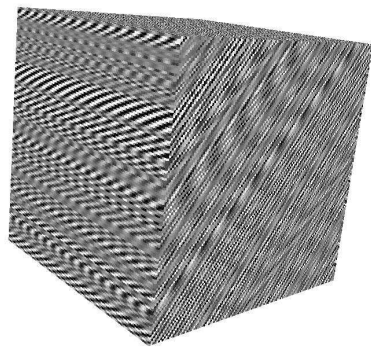
- **Remarque 1**

La composante évanescence (de type 1 ou de type 2) généralisée est une somme dénombrable de composantes dont chacune est associée à un ordre différent. Il est montré dans [Stit06] que changer l'ordre lexicographique sur  $Z^3$  revient à appliquer un automorphisme de  $Z^3$  sur les coordonnées  $(m, n, t)$ . Cet automorphisme est défini par une matrice  $A$  (taille  $3 \times 3$ ) non triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale tel que  $|\det(A)|=1$  :

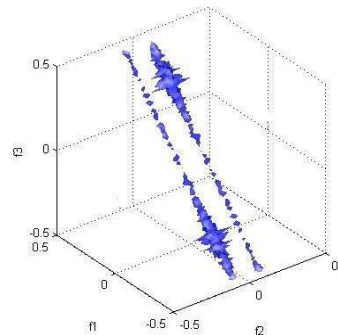
$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m \\ n \\ t \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Ainsi, la synthèse des textures évanescences 3-D suivant un ordre associé à un automorphisme  $A$ , s'effectue par les modèles introduits dans (2.41) et (2.44) mais avec les coordonnées  $(m', n', t')$  obtenues à partir de  $(m, n, t)$  par la relation (2.45). A titre d'exemple, la figure 2.26 montre un volume d'images texturées synthétisé par le modèle évanescence de type 1 suivant l'ordre lexicographique correspondant à l'automorphisme défini par la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$



(a)



(b)

Fig. 2.26 Représentation du bloc évanescence de type 1 associé à l'ordre défini par  $A_1$ .

- **Remarque 2**

En pratique, les composantes évanescences de type 1 présentes dans une texture 3-D donnée sont déterminées par la présence des lignes à forte énergie dans le domaine spectral. En outre, les composantes associées au même ordre sont caractérisées par des lignes ayant la même direction. Ainsi, modéliser une composante évanescence de type 1 revient à paramétrer ses lignes spectrales. Cette paramétrisation peut s'effectuer en fonction des angles d'Euler suivants  $\phi \in [-\pi/2, \pi/2[$  et



$\theta \in [-\pi/2, \pi/2[$ . Par suite la composante évanescence de type 1 peut se modéliser par un modèle similaire à (2.40) moyennant une transformation des coordonnées  $(m, n, t)$  de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ t \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

De la même façon, les composantes évanescences de type 2 associées à un même ordre sont caractérisées dans le domaine spectral par des plans ayant des vecteurs unitaires normaux suivant la même direction. Ces vecteurs peuvent être paramétrés aussi par les angles d'Euler précédents. Ainsi la composante évanescence de type 2 se modélise par un modèle similaire à (2.43) mais avec des coordonnées  $(m', n', t')$  obtenues par la transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Notons finalement que les deux relations (2.47) et (2.48) ne sont pas toujours directement utilisables car les valeurs des coordonnées  $(m', n', t')$  doivent être des entiers positifs. Pour s'affranchir de cet inconvénient il faut introduire une matrice de normalisation et des termes de correction convenables. Pour plus de détails sur ces techniques de correction dans le cas 2-D, nous nous référons à l'article [Fran93].

## 2.4 Conclusion

La décomposition de Wold 3-D permet de représenter tout processus homogène définis sur  $Z^3$  en une somme de quatre composantes orthogonales : la composante purement aléatoire, la composante harmonique, la composante évanescence de type 1 et la composante évanescence de type 2. Cette décomposition est particulièrement intéressante pour les processus qui ont des distributions spectrales mixtes car elle entraîne également la décomposition de celles-ci en quatre composantes mutuellement singulières. En effet, l'analyse de propriétés spectrales des quatre composantes permet de les approximer séparément par des modèles paramétriques adéquats. Ainsi, la modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold 3-D offre une combinaison de quatre modèles génériques caractérisant les trois aspects fondamentaux des volumes d'images texturées à savoir : l'aspect aléatoire, la périodicité totale (3-D) et en fin l'orientation (périodicité 2-D et périodicité 1-D).

L'application des modèles paramétriques proposés dans ce chapitre dans le cadre d'analyse des volumes d'images nécessite le développement d'algorithmes d'estimation et d'extraction de différentes composantes. Nous verrons dans les chapitres suivants comment estimer les paramètres des différents champs de Wold 3-D.



# Chapitre 3

## Etude des Modèles Autorégressifs 3-D

### 3.1 Introduction

La représentation des signaux tridimensionnels par les modèles AR 3-D suscite deux problèmes : l'estimation des paramètres transverses du modèle et la sélection de l'ordre. Dans ce chapitre nous abordons ces deux problèmes pour un modèle AR 3-D causal à support quart d'espace (QS). La restriction à ce type de support permet d'alléger les notations. Toutefois, l'extension aux modèles à support demi espace non symétrique s'en déduit facilement. Nous commençons, dans la première section, par la résolution du problème d'estimation des paramètres transverses. Dans la deuxième section, nous abordons le problème de l'estimation de l'ordre.

Pour l'estimation des paramètres du modèle AR 2-D, plusieurs méthodes et algorithmes d'estimation ont été proposés dans "la littérature". Ces méthodes peuvent être classées en deux familles. La première couvre les méthodes globales pour lesquelles l'estimation des paramètres se fait en prenant en compte toutes les données de l'image et en utilisant des approches fondées sur les équations de Yule Walker, le maximum de vraisemblance, etc. La seconde famille englobe les méthodes adaptatives pour lesquelles l'estimation des paramètres est réalisée d'une manière récursive de site en site suivant un parcours fixé dans l'espace 2-D [Bout89], [Youl92], [Liu96].

Avant d'exposer nos propres travaux concernant l'estimation des paramètres à partir des observations bruitées [stit05a], nous tenons à signaler que le problème d'estimation des paramètres transverses et de la sélection de l'ordre du modèle AR 3-D n'a fait l'objet que de très peu de travaux, parmi lesquels nous pouvons signaler ceux de [Choi99], [Kay03], [Liew05]. Tous ces travaux traitent uniquement du problème d'estimation des paramètres transverses des processus AR 3-D non bruités. Dans [Choi99] et [Liew05] les paramètres transverses sont estimés en résolvant les équations normales par un algorithme récursif sur l'ordre du modèle en exploitant la structure Toeplitz de la matrice d'autocorrélation. Dans [Kay03] la résolution des équations linéaires de Yule Walker multidimensionnelles est étudiée en se basant sur une approche d'espace vectoriel. Cette approche permet aussi d'obtenir les paramètres transverses pour un ordre donné sans inversion matricielle.

Dans la section suivante, nous allons estimer les paramètres transverses pour un processus AR 3-D perturbé par un bruit additif gaussien. Nous montrerons que la résolution des équations de Yule Walker, dans ce cas, se ramène à un problème de valeurs propres généralisées [Stit05a].

## 3.2 Estimations des paramètres transverses

### 3.2.1 Cas des observations non bruitées

Considérons un volume  $M \times N \times T$  de données 3-D dont chaque voxel  $(m, n, t)$  est décrit par un modèle AR 3-D d'ordre  $p = (p_1, p_2, p_3)$  à support quart d'espace défini par l'équation aux différences suivante :

$$\sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1, k_2, k_3} x(m - k_1, n - k_2, t - k_3) = u(m, n, t) \quad (3.1)$$

où  $\{a_{k_1, k_2, k_3}, 0 \leq k_i \leq p_i, a_{0,0,0} = 1\}$  sont les paramètres du modèle dits coefficients transverses. Le processus générateur  $\{u(m, n, t)\}$  est supposé être blanc gaussien, de moyenne nulle et de variance finie  $\sigma_u^2$ .

Afin de déterminer les paramètres transverses nous supposons dans ce paragraphe que l'ordre du modèle est connu a priori. Par ailleurs, pour tout processus AR 3-D donné par (3.1), il est facile de montrer que les paramètres transverses vérifient les équations normales de Yule Walker (YW) suivantes :

$$\sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1, k_2, k_3} r_x(h_1 - k_1, h_2 - k_2, h_3 - k_3) = \sigma_e^2 \delta(h_1, h_2, h_3) \quad (3.2)$$

où  $r_y(h_1, h_2, h_3)$  définit la fonction d'autocorrélation de  $\{x(m, n, t)\}$  et le symbole  $\delta(\dots)$  désigne la fonction delta de Kronecker 3-D. Pour faciliter le développement des algorithmes d'estimation des paramètres AR 3-D, nous commençons par réécrire ces équations sous forme matricielle. Cette réécriture n'est pas "évidente" comme dans le cas 1-D du fait de la complexité du support de prédiction et de la multiplicité des sens de parcours possibles dans l'espace 3-D.

Commençons d'abord par une réécriture vectorielle de l'équation (3.2). Pour tout  $(h_1, h_2, h_3)$  fixé, nous définissons deux vecteurs  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\mathbf{r}_{h_1}^{h_2, h_3}$  représentant respectivement les paramètres  $\{a_{k_1, k_2, k_3}\}$  et les autocorrélations correspondantes par :

$$\boldsymbol{\theta} = \left[ \underset{=0}{\boldsymbol{\theta}}, \underset{=1}{\boldsymbol{\theta}}, \dots, \underset{=p_1}{\boldsymbol{\theta}} \right], \mathbf{r}_{h_1}^{h_2, h_3} = \left[ \underset{=h_1}{\mathbf{r}}^{h_2, h_3}; \underset{=h_1-1}{\mathbf{r}}^{h_2, h_3}; \dots; \underset{=h_1-p_1}{\mathbf{r}}^{h_2, h_3} \right]^T \quad (3.3)$$

où

$$\underset{=k_1}{\boldsymbol{\theta}} = \left[ \underset{=k_1, 0}{\boldsymbol{\theta}}, \underset{=k_1, 1}{\boldsymbol{\theta}}, \dots, \underset{=k_1, p_2}{\boldsymbol{\theta}} \right]^T, \underset{=h_1-k_1}{\mathbf{r}}^{h_2, h_3} = \left[ \underset{=h_1-k_1}{\mathbf{r}}^{h_2, h_3}; \underset{=h_1-k_1}{\mathbf{r}}^{h_2-1, h_3}; \dots; \underset{=h_1-k_1}{\mathbf{r}}^{h_2-p_2, h_3} \right]^T \quad (3.4)$$

et

$$\underset{=k_1, k_2}{\boldsymbol{\theta}} = \left[ a_{k_1, k_2, 0}, \dots, a_{k_1, k_2, p_3} \right]^T, \underset{=h_1-k_1}{\mathbf{r}}^{h_2-k_2, h_3} = \left[ r_x(h_1 - k_1, h_2 - k_2, h_3), \dots, r_x(h_1 - k_1, h_2 - k_2, h_3 - p_3) \right]^T \quad (3.5)$$

Ainsi les équations de YW (3.2) s'écrivent pour tout décalage  $(h_1, h_2, h_3)$  sous la forme vectorielle suivante :

$$r_x(h_1, h_2, h_3) = -\theta r_{h_1}^{h_2, h_3} \quad (3.6)$$

En concaténant les  $(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)$  équations (3.6) correspondantes à différentes valeurs de  $h$  telles que  $h_i = 0, \dots, p_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\mathbf{R}_x \boldsymbol{\theta} = \sigma_u^2 \mathbf{h} \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{h}$  est un vecteur de dimensions  $(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1) \times 1$  donné par  $\mathbf{h} = [1, 0, \dots, 0]^T$ ,  $\mathbf{R}_x$  est une matrice Toeplitz bloc – bloc Toeplitz ( Cubique Toeplitz) structurée de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \cdots & \mathbf{R}_{-p_1} \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{R}_{-1} \\ \mathbf{R}_{p_1} & \cdots & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

où chacun des blocs individuels  $\mathbf{R}_k$  est aussi une matrice de type Toeplitz par bloc

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^0 & \mathbf{R}_k^{-1} & \cdots & \mathbf{R}_k^{-p_2} \\ \mathbf{R}_k^1 & \mathbf{R}_k^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{R}_k^{-1} \\ \mathbf{R}_k^{p_2} & \cdots & \mathbf{R}_k^1 & \mathbf{R}_k^0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

où chaque sous matrice  $\mathbf{R}_k^l$  est une matrice Toeplitz de taille  $(p_3 + 1) \times (p_3 + 1)$  donnée par :

$$\mathbf{R}_k^l = \begin{bmatrix} r_x(k, l, 0) & r_x(k, l, -1) & \cdots & r_x(k, l, -p_3) \\ r_x(k, l, 1) & r_x(k, l, 0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_x(k, l, -1) \\ r_x(k, l, p_3) & \cdots & r_x(k, l, 1) & r_x(k, l, 0) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Le système linéaire défini par (3.7) n'est pas directement utilisable pour l'estimation des paramètres transverses puisque la variance de l'entrée  $\sigma_u^2$  n'est pas connue. Cependant, la première composante du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ , étant supposée égale à l'unité i.e.  $a_{0,0,0} = 1$ , on peut éliminer la première équation de (3.7) et on obtient le système linéaire suivant :

$$\tilde{\mathbf{R}}_x \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\tilde{\mathbf{r}} \quad (3.11)$$

Les deux vecteurs  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{r}$  sont de tailles  $[(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1) - 1] \times 1$  et contiennent respectivement les paramètres transverses inconnus et les autocorrélations correspondantes. Par conséquent, les paramètres transverses seront déterminés en résolvant le système linéaire (3.11). La variance de l'excitation est ensuite estimée en revenant aux équations normales pour  $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$ , qui donnent :

$$\hat{\sigma}_u^2 = \sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} \hat{a}_{k_1, k_2, k_3} r_x(k_1, k_2, k_3) \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Cas d'un bruit additif blanc

Dans de nombreuses applications,  $x(m, n, t)$  est souvent observé dans un environnement bruité,

$$y(m, n, t) = x(m, n, t) + b(m, n, t) \quad (3.13)$$

où  $b(m, n, t)$  est un bruit blanc gaussien centré de variance finie  $\sigma_b^2$  et statistiquement indépendant du processus  $\{x(m, n, t)\}$ . Dans ce cas, l'estimation des paramètres par la méthode de YW décrite ci-dessus est biaisée puisque les autocorrélations du processus observé sont données par :

$$r_y(h_1, h_2, h_3) = r_x(h_1, h_2, h_3) + \sigma_b^2 \delta(h_1, h_2, h_3) \quad (3.14)$$

Plus explicitement, les équations normales dans le cas bruité s'expriment de la manière suivante :

$$\sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1, k_2, k_3} r_y(h_1 - k_1, h_2 - k_2, h_3 - k_3) = \begin{cases} \sigma_u^2 + \sigma_b^2, & h = (0, 0, 0) \\ a_{h_1, h_2, h_3} \sigma_b^2, & h \in [0, p]^* \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $[0, p]^* = [0, p_1] \times [0, p_2] \times [0, p_3] - \{(0, 0, 0)\}$ . Comme dans le cas non bruité, ces équations peuvent être réécrites sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{R}_y - \sigma_b^2 \mathbf{I}] \theta = \sigma_u^2 \mathbf{h} \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{R}_y$  est la matrice d'autocorrélation du processus bruité  $\{y(m, n, t)\}$  qui possède une structure Toeplitz comme la matrice  $\mathbf{R}_x$ . La matrice  $\mathbf{I}$  représente la matrice identité de taille  $(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)$ . Comme la variance du bruit additif,  $\sigma_b^2$ , doit également être estimée, la relation (3.16) nous montre que les équations normales dans le cas bruité forment un système d'équations non linéaires. Cet inconvénient peut cependant être contourné en résolvant les équations normales uniquement pour les valeurs de  $(h_1, h_2, h_3)$  vérifiant la relation  $p_i \leq h_i \leq 2p_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$

telles que  $(h_1, h_2, h_3) \neq (p_1, p_2, p_3)$ . Ainsi, les équations normales dans (3.15) ne font pas intervenir le terme  $r_y(0,0,0)$ , à l'origine du biais d'estimation. Par conséquent, le système d'équations devient linéaire et s'écrit comme suit

$$\sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1, k_2, k_3} r_y(h_1 - k_1, h_2 - k_2, h_3 - k_3) = 0 \quad (3.17)$$

Ce système d'équations est la version 3-D des équations normales étendues de Yule Walker noté EYW (Extended Yule Walker equations). La concaténation de toutes ces équations sous forme matricielle comme dans le cas non bruité permet d'estimer les paramètres inconnus du modèle. De plus, pour améliorer l'estimation des paramètres AR, on peut augmenter le nombre d'équations dans le système (3.17), ce qui conduit à une version 3-D des équations de Yule Walker surdéterminées –"Over Extended Yule Walker Equations" (OEYW). On obtient alors le système linéaire suivant

$$\tilde{\mathbf{R}}_y \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{p_1+1} & \tilde{\mathbf{R}}_{p_1} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_1 \\ \tilde{\mathbf{R}}_{p_1+2} & \tilde{\mathbf{R}}_{p_1+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{\mathbf{R}}_{p_1} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{p_1+q_1} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{p_1+2} & \tilde{\mathbf{R}}_{p_1+1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2+1} & \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^1 \\ \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2+2} & \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2} \\ \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2+q_2} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2+2} & \tilde{\mathbf{R}}_k^{p_2+1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_k^l = \begin{bmatrix} r_y(k, l, p_3 + 1) & r_y(k, l, p_3) & \cdots & r_y(k, l, 1) \\ r_y(k, l, p_3 + 2) & r_y(k, l, p_3 + 1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r_y(k, l, p_3) \\ r_y(k, l, p_3 + q_3) & \cdots & r_y(k, l, p_3 + 2) & r_y(k, l, p_3 + 1) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

avec  $q_i > p_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

Ces deux méthodes fournissent en pratique des estimations très approximatives car elles utilisent des autocorrélations avec des importants décalages. En effet, en pratique les valeurs de la fonction d'autocorrélation sont remplacées par leurs estimations (Annexe B), et il est montré dans [Choi00] [Davi01] que l'estimation des autocorrélations introduit des erreurs significatives pour des décalages

trop grands, i.e. pour  $h_1 > p_1$ , ou  $h_2 > p_2$ , ou  $h_3 > p_3$ . Pour s'affranchir de ces inconvénients, nous proposons dans la suite d'utiliser conjointement les équations normales linéaires et non linéaires. L'idée consiste à considérer l'équation (3.15) comme un problème de décomposition en valeurs propres généralisées.

D'après les équations (3.16) et (3.18), les paramètres du modèle AR 3-D bruité vérifient deux systèmes d'équations : le premier est non linéaire (3.16), tandis que le second, décrit dans (3.18), est linéaire. Le système non linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[\bar{\mathbf{R}}_y - \sigma_b^2 \mathbf{B}_1] \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (3.22)$$

où  $\bar{\mathbf{R}}_y$  est une matrice obtenue en supprimant la première ligne de la matrice  $\mathbf{R}_y$ . La matrice  $\mathbf{B}_1$  est donnée par :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Les deux systèmes (3.18) et (3.22) peuvent être combinés et réécrits comme un problème de valeurs propres généralisées

$$[\mathbf{R}_y - \sigma_b^2 \mathbf{B}] \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (3.24)$$

où

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_y \\ \tilde{\mathbf{R}}_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Par conséquent, les paramètres transverses et la variance du bruit additif sont solutions de la forme quadratique suivante :

$$[\mathbf{R} - \lambda \mathbf{B}]^T [\mathbf{R} - \lambda \mathbf{B}] \mathbf{v} = 0 \quad (3.26)$$

Cette dernière expression est équivalente à :

$$[\mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{H}_1 + \lambda^2 \mathbf{H}_2] \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont trois matrices symétriques données par  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{H}_1 = -(\mathbf{R}^T \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{R})$  et  $\mathbf{H}_2 = -\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ . Pour résoudre le problème quadratique (3.27), on utilise une approche classique [Hwan03] qui consiste à introduire un nouveau vecteur défini par  $w = \lambda v$ . De cette manière, résoudre (3.27) se ramène à la résolution du problème de décomposition en valeurs propres généralisées suivant :

$$[\mathbf{H} - \lambda \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{G}$  sont définies par:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$



et  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité de taille  $(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1) - 1$ .

Les valeurs propres relatives au problème (3.28) sont complexes conjuguées. Si  $(\lambda, [v, w]^T)$  est une solution, alors  $v$  est une solution du problème quadratique (3.27) associée à la valeur propre  $\lambda$ . De plus, les valeurs propres relatives à ce problème sont des estimées de la variance  $\sigma_b^2$ . Un seul vecteur propre solution de (3.28) correspond aux paramètres du modèle AR. Dans le cas non bruité, la valeur propre recherchée vaut théoriquement zéro car la variance du bruit additif est nulle. Dans ce cas, il existe une seule solution de (3.16) et (3.18) associée à la valeur propre  $\lambda = 0$ . Dans le cas bruité, la variance du bruit additif s'ajoute à toutes les valeurs propres de  $\mathbf{R}_y$  et la solution recherchée correspond donc à la seule valeur propre réelle  $\sigma_b^2$ . Ainsi les paramètres transverses sont obtenus à partir du vecteur propre associé à l'unique valeur propre réelle solution de (3.28). Finalement, la variance du processus générateur peut être estimée en utilisant les paramètres estimés et l'équation (3.15) pour  $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 0)$  :

$$\hat{\sigma}_u^2 = \sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} \hat{a}_{k_1, k_2, k_3} r_y(k_1, k_2, k_3) - \hat{\sigma}_b^2 \quad (3.30)$$

Dans la pratique, quelques modifications techniques peuvent être introduites dans l'algorithme proposé. En effet, l'estimation de la fonction d'autocorrélation introduit des erreurs calculatoires et les valeurs propres solution du problème quadratique (3.28) deviennent toutes complexes. Ainsi la valeur propre recherchée n'est pas rigoureusement réelle, mais sa partie imaginaire reste très petite par rapport aux parties imaginaires des autres valeurs propres obtenues. La variance du bruit additif peut donc être estimée par la valeur propre ayant le plus petit module.

L'algorithme décrivant la procédure à suivre en pratique est détaillé dans [Stit05a] et en Annexe E.

Dans cette section, nous avons vu comment estimer les paramètres transverses des modèles AR 3-D à support quart d'espace quand l'ordre est connu a priori. Dans la section suivante, nous allons examiner le problème d'estimation de l'ordre  $(p_1, p_2, p_3)$  des modèles AR 3-D.

### 3.3 Estimation de l'ordre d'un modèle AR 3-D

Comme on l'a déjà signalé, il y'a deux grandes familles de méthodes de sélection des ordres des modèles AR 1-D et 2-D : les méthodes basées sur la théorie de l'information et les méthodes basées sur les propriétés algébriques de régression linéaire du modèle ou d'une fonction de caractérisation comme la fonction d'autocorrélation.

#### 3.3.1 Méthodes à critère d'information (IC)

Les méthodes à critère d'information ont été développées pour la sélection de modèles depuis les années 70. Un des exemples classiques d'application de ces méthodes est le choix d'ordre du modèle autorégressif pour la prédiction. Dans ce contexte, ces méthodes extraient du comportement de la

variance de l'innovation de prédiction les informations concernant l'ordre du modèle AR 1-D. D'un point de vue théorique, augmenter l'ordre  $k$  du modèle AR 1-D diminue la variance estimée  $\hat{\sigma}_k^2$  de l'innovation correspondante. Il suffit, pour le montrer, de rappeler l'expression de l'algorithme de Levinson-Burg

$$\hat{\sigma}_k^2 = \hat{\sigma}_{k-1}^2 (1 - |\gamma_k|) \quad (3.31)$$

où  $|\gamma_k|$  est le coefficient de réflexion 1-D ayant toujours un module inférieur ou égal à l'unité. De ce fait, on doit choisir un ordre le plus élevé possible sauf dans le cas particulier où les coefficients de réflexion s'annulent ou sont égaux à 1 à partir d'un certain rang. Sur un plan pratique, les éléments qui conditionnent ce choix sont multiples. En effet, l'augmentation de l'ordre entraîne une complexité algorithmique importante et diminue la précision de l'estimation des paramètres, par rapport aux ordres faibles. Toutes ces considérations ont conduit Akaike [Akai69] à élaborer le critère FPE – Final Prediction Error - suivant :

$$FPE(k) = \frac{N+k}{N-k} \hat{\sigma}_k^2 \quad (3.32)$$

où  $N$  est le nombre d'observations,  $k$  le nombre de paramètres ou ordre du modèle AR 1-D, et  $\hat{\sigma}_k^2$  la variance de l'innovation. Ce critère traduit bien le compromis qui doit être trouvé entre la diminution de la variance  $\hat{\sigma}_k^2$  et la croissance du terme  $N+k/N-k$ . Sélectionner l'ordre du modèle AR, revient donc à minimiser le critère (3.32).

Dans ce qui suit, nous allons exposer brièvement l'extension du cas 1-D au cas 3-D de trois critères les plus utilisés dans "la littérature" à savoir:

- Le critère AIC : Akaike Information Criterion [Akai74],
- Le critère MDL : Minimum Description Length [Riss78],
- Le critère  $\varphi_\beta$  [Oliv99].
- Le critère MEV: Minimum Eigenvalue[Lian93].

Notons  $k = (k_1, k_2, k_3)$  et  $d(\theta)$  l'ordre et le nombre des paramètres indépendants du modèle AR 3-D. Les trois critères précédents peuvent être écrits sous la forme générale suivante :

$$IC(k_1, k_2, k_3) = -2L(\hat{\theta}_k, \hat{\sigma}_u^2) + d(\theta)C(M, N, T) \quad (3.34)$$

où  $L(\hat{\theta}_k, \hat{\sigma}_u^2)$  est la fonction log-vraisemblance lorsque le modèle est paramétré par  $\hat{\theta}_k$  correspondant à l'ordre  $k$ . Ce terme mesure donc l'adéquation du modèle aux données. Le deuxième terme de pénalisation  $d(\theta)C(M, N, T)$  dépend du nombre de paramètres et de la taille de l'échantillon.

Pour un processus AR 3-D gaussien à support quart d'espace, on a :

$$d(\theta) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \quad (3.35)$$

$$L(\hat{\theta}_k, \hat{\sigma}_u^2) \equiv \frac{MNT}{2} \log(\hat{\sigma}_u^2) \quad (3.36)$$

Le terme de pénalisation prend des valeurs différentes suivant le critère utilisé. Il est égal à 2,  $\log(MNT)$ , et  $(MNT)^\beta \log(\log(MNT))$ , pour AIC, MDL et  $\varphi_\beta$  respectivement. En remplaçant la fonction log-vraisemblance par son expression équivalente, nous avons :

$$AIC(k_1, k_2, k_3) = MNT \log(\hat{\sigma}_u^2) + 2d(\theta) \quad (3.37)$$

$$MDL(k_1, k_2, k_3) = MNT \log(\hat{\sigma}_u^2) + d(\theta) \log(MNT) \quad (3.38)$$

$$\varphi_\beta(k_1, k_2, k_3) = MNT \log(\hat{\sigma}_u^2) + d(\theta)(MNT)^\beta \log(\log(MNT)) \quad (3.39)$$

Pour le 3<sup>ième</sup> critère, le paramètre  $\beta$  est choisi dans l'intervalle suivant [Oliv99] :

$$\frac{\log(\log(MNT))}{\log(MNT)} \leq \beta \leq 1 - \frac{\log(\log(MNT))}{\log(MNT)} \quad (3.40)$$

En résumé, sélectionner l'ordre du modèle par les méthodes à critère d'information consiste à chercher le triplet  $(k_1, k_2, k_3)$  qui minimise un de ces critères en balayant une certaine plage de valeurs de l'ordre du modèle. Un algorithme décrivant la procédure à suivre en pratique pour sélectionner l'ordre des modèles AR 3-D est donné en Annexe E.2.

### 3.3.2 Méthode à valeur propre minimale (MEV)

La méthode MEV est issue du critère MDL et procède d'une façon assez différente. Elle a, en particulier, l'intérêt de s'appliquer sans aucune estimation des paramètres inconnus du modèle. Pour chaque ordre, on construit la matrice de covariance correspondant au processus AR 3-D et par un simple calcul de la valeur propre minimale, on sélectionne l'ordre optimal avec un gain en temps de calcul par rapport aux critères d'information déjà exposés [Stit05].

Pour un ordre fixé  $(k_1, k_2, k_3)$ , le processus AR 3-D donné dans l'expression (3.2) peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{U} \quad (3.41)$$

où  $\mathbf{Y}$  est la matrice des données,  $\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur des paramètres et  $\mathbf{U}$  le vecteur contenant le processus générateur. Avec cette écriture, il est facile de voir que la variance du processus générateur peut être estimée comme suit

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{U}}{MNT} = \frac{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\theta}}{MNT} \quad (3.42)$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice de covariance estimée du processus AR 3-D d'ordre  $(k_1, k_2, k_3)$ . En remplaçant  $\hat{\sigma}_u^2$  par l'expression ci-dessus, le critère MDL (3.38) devient :

$$MDL(k_1, k_2, k_3) = MNT \log\left(\frac{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\theta}}{MNT}\right) + d(\theta) \log(MNT). \quad (3.43)$$

La minimisation du terme  $\log(\hat{\sigma}_u^2)$  qui intervient dans le critère MDL, revient donc à minimiser la forme quadratique  $\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\theta}$ . Sous l'hypothèse que le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  soit de norme euclidienne unité, cette forme quadratique est minimale lorsque le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur propre associé à la valeur propre minimale de  $\mathbf{R}$ . Dans ce cas, le minimum de la forme quadratique est égale à  $\lambda_{\min}$ . Ainsi, le critère MDL peut encore s'écrire sous la forme

$$MDL(k_1, k_2, k_3) = MNT \log\left(\frac{\lambda_{\min}}{MNT}\right) + d(\boldsymbol{\theta}) \log(MNT). \quad (3.44)$$

En omettant les termes qui ne dépendent ni de l'ordre ni du vecteur des paramètres, et le fait que la fonction logarithme est croissante, Le critère MEV peut être défini par :

$$MDL(k_1, k_2, k_3) = \lambda_{\min} (MNT)^{d(\boldsymbol{\theta})/MNT} \quad (3.45)$$

Lorsqu'on dispose d'un grand nombre d'échantillons, c.à.d quand  $MNT \rightarrow \infty$ , le terme  $(MNT)^{d(\boldsymbol{\theta})/MNT}$  tend vers 1. En conséquence, le critère MEV pour un processus AR d'ordre  $(k_1, k_2, k_3)$  tend asymptotiquement vers la valeur propre minimale de la matrice de covariance associée :

$$MEV(k_1, k_2, k_3) = \lambda_{\min}(k_1, k_2, k_3) \quad (3.46)$$

En pratique, nous calculons la valeur propre minimale associée à chaque ordre  $(k_1, k_2, k_3)$  appartenant à une certaine plage de valeurs prédéfinies  $[1, P_1] \times [1, P_2] \times [1, P_3]$ . En examinant la structure du tableau 3-D contenant ces valeurs propres minimales, nous obtenons une estimation de l'ordre recherché.

Supposons que l'ordre effectif soit  $(p_1, p_2, p_3)$ . Pour les ordres  $(k_1, k_2, k_3)$  tels que  $k_1 < p_1$ , ou  $k_2 < p_2$ , ou  $k_3 < p_3$ , le modèle n'a pas suffisamment de paramètres pour représenter les données. De ce fait, la variance de l'erreur de prédiction et la valeur propre minimale sont importantes. Dans le cas d'une surparamétrisation du modèle c-à-d,  $k_1 > p_1$ ,  $k_2 > p_2$ , et  $k_3 > p_3$ , la valeur propre minimale devient faible par rapport aux cas précédents. Par conséquent, le tableau 3-D contenant les valeurs du critère MEV, pour un ensemble fini d'ordres possibles, contient deux zones différentes: une zone où  $MEV \approx 0$  et une deuxième zone telle que  $MEV \gg 0$ . Ces deux zones sont illustrées pour un modèle AR 2-D et AR 3-D respectivement par les figures 3.1 et 3.2. Sélectionner l'ordre par le critère  $MEV$  revient donc à localiser sur ce tableau le point de transition entre les deux zones  $MEV \approx 0$  et  $MEV \gg 0$ .

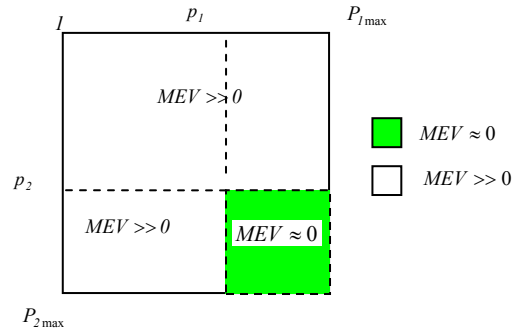


Fig. 3.1 Forme de tableau MEV 2-D

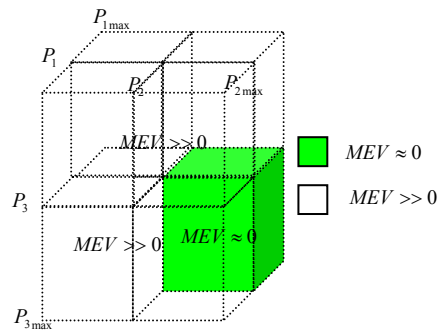


Fig. 3.2 Forme de tableau MEV 3-D

### 3.3.3 Méthode linéaire algébrique: RTP

La méthode que nous allons développer dans cette section, nommée RTP "Rank Test Procedure method", utilise un formalisme algébrique et ne requiert pas, comme la méthode MEV, l'estimation des paramètres transverses. Elle est fondée sur le fait que l'information sur l'ordre du modèle AR 3-D est implicitement contenue dans le rang d'une matrice d'autocorrélation convenablement construite. Dans le cas des modèles AR 1-D, les méthodes algébriques développées dans [Kons91], [Cadz82] montrent que l'ordre recherché est exactement le rang d'une matrice de covariance. Dans le cas 2-D, la méthode algébrique RTP permet de sélectionner l'ordre des modèles AR comme solution d'un système linéaire à deux inconnues [Aksa99]. Cependant, pour les modèles AR 3-D nous montrons dans la suite que l'ordre est la solution d'un système non linéaire à trois inconnues [Stit06b]. Sur la base des échantillons de la fonction d'autocorrélation nous allons construire une matrice structurée  $\mathbf{R}_0$  dont le rang contient explicitement l'information sur l'ordre  $(p_1, p_2, p_3)$  du modèle AR 3-D. La matrice que nous allons considérer a une structure de type  $m_1 \times n_1$  Hankel bloc-bloc Hankel

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_0 & \tilde{\mathbf{R}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{n_1-1} \\ \tilde{\mathbf{R}}_1 & \tilde{\mathbf{R}}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}_{m_1-1} & \tilde{\mathbf{R}}_{m_1} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{m_1+n_1-2} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

où chaque bloc  $\tilde{\mathbf{R}}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m_1 + n_1 - 2$ , est une matrice  $m_2 \times n_2$  de type Hankel bloc Hankel définie par :

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_k^0 & \tilde{\mathbf{R}}_k^1 & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{n_2-1} \\ \tilde{\mathbf{R}}_k^1 & \tilde{\mathbf{R}}_k^2 & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}_k^{m_2-1} & \tilde{\mathbf{R}}_k^{m_2} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{m_2+n_2-1} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{R}}_k^l$ ,  $k = 0, 1, \dots, m_1 + n_1 - 2$ ,  $l = 0, 1, \dots, m_2 + n_2 - 2$  est aussi une matrice  $m_3 \times n_3$  de type Hankel définie par:

$$\tilde{\mathbf{R}}_k^l = \begin{bmatrix} r_k^{l,0} & r_k^{l,1} & \cdots & r_k^{l,n_3-1} \\ r_k^{l,1} & r_k^{l,2} & \cdots & r_k^{l,n_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_k^{l,m_3-1} & r_k^{l,m_3} & \cdots & r_k^{l,m_3+n_3-2} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

où  $r_k^{l,m} = r_y(k, l, m)$ ,  $m = 0, 1, \dots, m_3 + n_3 - 2$ .

Les relations sur les contraintes relatives aux paramètres utilisés sont données par :  $m_i \gg n_i > p_i + 1$ . Pour comprendre ce choix, rappelons que l'outil d'estimation est basé sur le rang de la matrice structurée  $\mathbf{R}_0$ . Avec le choix de  $m_i \gg n_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  la détermination du rang  $g_0$  de la matrice  $\mathbf{R}_0$  se fait en calculant le nombre des colonnes linéairement indépendantes (LI). Dans ce cas le rang  $g_0$  vérifie l'inégalité suivante :

$$g_0 \leq \min(m_1 m_2 m_3, n_1 n_2 n_3) = n_1 n_2 n_3 \quad (3.54)$$

- **Proposition 3.1 :**

Le rang  $g_0$  de la matrice  $\mathbf{R}_0$  est égal à

$$g_0 = (n_1 - p_1)n_2 p_3 + p_1(n_2 - p_2)n_3 + n_1 p_2(n_3 - p_3) + p_1 p_2 p_3 \quad (3.54)$$

- **Preuve :**

Pour démontrer cette proposition, il suffit de déterminer le nombre de vecteurs colonnes de la matrice  $\mathbf{R}_0$  en utilisant l'équation (3.6). La démonstration complète de ce résultat est détaillée dans [Stit06b]

Nous voyons bien que le rang  $g_0$  de la matrice  $\mathbf{R}_0$  est exprimé en fonction de l'ordre du modèle. Pour déterminer le triplet inconnu  $(p_1, p_2, p_3)$ , nous avons donc besoin de trois équations indépendantes de type (3-54) pour former un système à trois inconnues. Pour cela, nous allons construire trois matrices  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  et  $\mathbf{R}_3$  structurées comme  $\mathbf{R}_0$ . Chaque matrice  $\mathbf{R}_i$  est déduite de  $\mathbf{R}_0$  en décrémentant le paramètre  $n_i$ , par 1. Notons par  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  les rangs respectifs de chacune de ces matrices. La proposition suivante établit la relation, non linéaire, entre l'ordre du modèle et les rangs de quatre matrices.

- **Proposition 3.2 :**

L'ordre  $(p_1, p_2, p_3)$  vérifie le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} g_0 - g_1 = n_2 p_3 + n_3 p_2 - p_2 p_3 \\ g_0 - g_2 = n_1 p_3 + n_3 p_1 - p_1 p_3 \\ g_0 - g_3 = n_1 p_2 + n_2 p_1 - p_1 p_2 \end{cases} \quad (3.55)$$

- **Preuve :**

Cela résulte de la proposition précédente. Il suffit d'exprimer les rangs  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  en appliquant le résultat (3.54) aux matrices  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  et  $\mathbf{R}_3$ . Ces trois matrices ont la même structure et diffèrent uniquement par leur taille. Notons que la seconde contrainte :  $n_i > p_i + 1$  pour  $i = 1, 2, 3$  a été introduite pour s'assurer que lors de la décrémentatation du nombre de colonnes de  $n_i$  à  $n_i - 1$ , la relation (3.54) reste vraie. Les expressions des rangs  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  obtenues et la relation (3.54) permettent de former le système (3.55) donné dans la proposition.

La relation (3.55) nous montre que l'ordre théorique du modèle AR 3-D est solution d'un système non linéaire. Pour le résoudre, nous allons utiliser la méthode de Newton – Raphson décrite dans le paragraphe suivant.

### 3.3.3.1 Méthode de Newton – Raphson

La résolution du système non linéaire précédant est équivalente à chercher les zéros du système non linéaire suivant :

$$F(p) = 0 \quad (3.56)$$

où

$$F(p) = \begin{cases} F_1(p) = g_0 - g_1 - n_2 p_3 - n_3 p_2 + p_2 p_3 \\ F_2(p) = g_0 - g_2 - n_1 p_3 - n_3 p_1 + p_1 p_3 \\ F_3(p) = g_0 - g_3 - n_1 p_2 - n_2 p_1 + p_1 p_2 \end{cases} \quad (3.57)$$

Considérons la matrice Jacobienne  $J(p)$  de la fonction  $F(\cdot)$  définie par:

$$J(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(p)}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1(p)}{\partial p_2} & \frac{\partial F_1(p)}{\partial p_3} \\ \frac{\partial F_2(p)}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2(p)}{\partial p_2} & \frac{\partial F_2(p)}{\partial p_3} \\ \frac{\partial F_3(p)}{\partial p_1} & \frac{\partial F_3(p)}{\partial p_2} & \frac{\partial F_3(p)}{\partial p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_3 - n_3 & p_2 - n_2 \\ p_3 - n_3 & 0 & p_1 - n_1 \\ p_2 - n_2 & p_1 - n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

À partir d'une valeur initiale  $p^{(0)}$ , que l'on se donne, on engendre une suite de triplets par l'expression suivante :

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - [J(p^{(k)})]^{-1} F(p^{(k)}) \quad (3.59)$$

Puisque la méthode cherche une solution de manière itérative, un critère de convergence doit être choisi pour stopper les itérations. Une solution possible consiste à tester à chaque itération la différence des valeurs de la fonction  $F$ ,  $dF = \|F(p^{(k+1)}) - F(p^{(k)})\|$ , ou bien la différence  $dp = p^{(k+1)} - p^{(k)}$ . Notons que le résultat dépend aussi de l'initialisation et de l'existence des maxima locaux.

### 3.3.3.2 Calcul du rang

Pour déterminer les rangs  $g_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  des matrices  $R_i$ , on utilisera la décomposition en valeurs singulières (SVD). Si  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) est une matrice de rang  $g$ , alors ses valeurs singulières vérifient la relation suivante :

$$s_1 \geq \dots \geq s_g > s_{g+1} = \dots = s_n = 0$$



Algébriquement, le nombre de valeurs singulières non nulles de la matrice  $A$  est également son rang. En pratique, compte tenu de différentes sources de bruit et du support limité de l'observation, les valeurs singulières supposées nulles prennent des valeurs très petites. Des critères pour la distinction entre les valeurs singulières significatives et non significatives ont été développés dans la "littérature" [Kons91] [Cadz82]. L'un des critères, le plus utilisé, est le critère des rapports normalisés défini par :

$$RN(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k s_i^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2}} \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.60)$$

Nous voyons que ce critère est majoré par 1 et son objectif est de sélectionner l'ensemble des valeurs propres indexées par  $k$  pour lequel le critère  $RN(k)$  soit 'suffisamment' proche de 1. Ainsi, la plus petite valeur de  $k$  satisfaisant  $RN(k) \geq \xi$  sera sélectionnée comme le rang de la matrice considérée, où  $\xi$  est un seuil prédéfini proche mais inférieur à l'unité.

### 3.3.4 Exemples Numériques

Dans ce paragraphe, nous allons tester les méthodes développées ci-dessus sur des exemples de simulation.

#### 3.3.4.1 Exemple 1 :

Dans un premier temps, le processus AR 3-D considéré est stable, à support quart d'espace d'ordre (1,1,1). Nous avons généré un bloc de taille  $64 \times 64 \times 64$  selon l'expression suivante :

$$y(m, n, t) = 0.9y(m-1, n, t) + 0.88y(m, n-1, t) + 0.95y(m, n, t-1) - 0.792y(m-1, n-1, t) - 0.855y(m-1, n, t-1) - 0.836y(m, n-1, t-1) + 0.7524y(m-1, n-1, t-1) + e(m, n, t) \quad (3.61)$$

Le processus générateur est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance unité. Les paramètres de la méthode algébrique utilisés pour construire les matrices  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ , et  $\mathbf{R}_3$ , sont  $n_i = 3$ ,  $m_i = 2n_i + 1$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Pour calculer la fréquence d'apparition (en %) des ordres estimés par chaque méthode, nous avons effectué 100 essais de type Monte-carlo. Les résultats sont fournis dans le tableau 3.1.

#### 3.3.4.2 Exemple 2

Pour avoir une idée sur la robustesse des méthodes développées vis-à-vis du bruit additif, nous considérons dans la suite le processus AR 3-D bruité donné par :

$$y(m, n, t) = x(m, n, t) + b(m, n, t) \quad (3.62)$$

Le bruit additif est un bruit blanc gaussien dont la variance  $\sigma_b^2$  est choisie pour avoir un rapport signal à bruit (RSB) de 10 dB. Le processus  $x(m,n,t)$  est le processus AR 3-D d'ordre (3,3,3) ayant les pôles suivants:

$$\begin{aligned} z_{11} &= 0.85, & z_{12} &= 0.88, & z_{13} &= 0.94; \\ z_{21} &= 0.70, & z_{22} &= 0.90, & z_{23} &= 0.80; \\ z_{31} &= 0.65, & z_{32} &= 0.58, & z_{33} &= 0.74 \end{aligned}$$

Le bloc de données généré dans cet exemple est de taille  $64 \times 64 \times 64$ . Les paramètres de la méthode algébrique RTP sont  $n_i = 6$ ,  $m_i = 2n_i + 1$ . Les résultats obtenus sont fournis dans le tableau 3.2.

Ordre	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(1,2,2)	(2,1,1)	(2,2,1)	(2,2,2)	(2,1,2)	(2,1,3)
RTP	<b>86</b>	5	4	0	4	1	0	0	0
AIC	<b>34</b>	20	12	8	10	0	7	5	4
MDL	<b>66</b>	14	10	4	6	0	0	0	0
MEV	<b>84</b>	6	5	3	2	0	0	0	0
$\varphi_\beta$	<b>88</b>	5	4	0	3	0	0	0	0

Tableau 3.1 Fréquences d'apparition des ordres estimés

Ordre	(3,2,2)	(3,3,2)	(3,3,3)	(3,4,3)	(3,4,4)	(4,4,4)	(4,4,5)	(4,5,5)	(5,5,5)
RTP	0	2	<b>58</b>	19	10	8	3	0	0
AIC	8	19	<b>25</b>	14	13	11	6	4	0
MDL	0	5	<b>39</b>	20	17	12	7	0	0
MEV	0	4	<b>60</b>	16	12	6	2	0	0
$\varphi_\beta$	0	2	<b>45</b>	23	16	8	5	1	0

Tableau 3.2 Fréquences d'apparition des ordres estimés de l'exemple 2

### 3.3.4.3 Commentaires

A partir des exemples de simulation nous remarquons que dans le cas non bruité toutes les méthodes sauf le critère AIC donnent "de bons résultats". Dans les deux exemples, le critère AIC a tendance à surestimer l'ordre du modèle. Dans le cas de données bruitées, nous remarquons (voir Tableau 3.2) que les résultats fournis par les critères d'information AIC, MDL, et  $\varphi_\beta$  sont sérieusement dégradés par rapport à ceux obtenus par les méthodes RTP et MEV. Ceci est dû au fait que les deux dernières méthodes sont basées uniquement sur la matrice des autocorrélations et ne font

pas intervenir l'estimation des paramètres. En effet, la fonction d'autocorrélation des observations bruitées coïncide théoriquement avec celle du processus non bruité sauf à l'origine (voir (3.14))

Puisque les matrices d'autocorrélation utilisées dans les méthodes RTP et MEV ne font pas intervenir le terme  $r_y(0,0,0)$ , la dégradation des résultats de ces deux méthodes est due principalement au fait que les observations bruitées ne sont plus modélisables par le modèle AR. En effet, le modèle le plus approprié aux observations bruitées est un modèle ARMA ou un modèle AR avec un ordre infini. En pratique, pour de très faibles rapports signal à bruit la modélisation des observations nécessite un modèle AR avec des ordres très élevés. C'est pour cette raison que dans le cas des observations bruitées toutes les méthodes développées ont tendance à surestimer l'ordre du modèle. Cette dégradation peut aussi s'expliquer par les erreurs introduites lors de l'estimation de la fonction d'autocorrélation. Ces erreurs sont dues principalement au bruit additif et à la taille limitée des données.

Les résultats des méthodes proposées dépendent aussi de la position des pôles du processus AR considéré. En effet, si les pôles sont proches du cercle unité les autocorrélations estimées sont bien celles d'un processus AR. Dans ce cas, les matrices construites par les méthodes RTP et MEV sont bien conditionnées. Pour les pôles proches de l'origine, la fonction d'autocorrélation décroît rapidement vers zéro, ceci conduit à des matrices mal conditionnées et par la suite à des erreurs sur le calcul des rangs. Finalement, notons que les méthodes RTP et MEV permettent de sélectionner l'ordre sans estimer les autres paramètres du modèle. Cependant, dans la pratique la méthode MEV est plus facile à mettre en oeuvre que la méthode RTP. Cette dernière comporte deux étapes qui peuvent être sources d'erreurs: calcul du rang et résolution du système non linéaire. La première étape dépend du critère et du seuil choisis pour calculer le nombre de valeurs propres significatives. Ce choix dépend du niveau de bruit et de la taille des observations. Néanmoins, le seuil doit être toujours proche mais inférieur à l'unité par exemple  $\xi = 0.998$ ,  $\xi = 0.999$  [Cadz82]. La seconde étape dépend de l'initialisation et de la présence du maxima locaux qui peuvent piéger la solution vers une valeur erronée.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé quelques résultats sur la modélisation AR 3-D. Tout particulièrement, nous avons étudié le modèle AR 3-D causal à support quart d'espace (QS). La restriction au support QS est faite pour alléger les notations, toutefois, la généralisation pour les modèles à support demi espace non symétrique s'en déduit facilement. Notre contribution principale dans ce chapitre se résume aux deux points suivants:

Nous avons proposé une méthode d'estimation des paramètres transverses lorsque le processus AR 3-D est perturbé par un bruit additif blanc. Cette méthode consiste à résoudre les équations normales de YW comme un problème de décomposition en valeurs propres généralisées.

Nous avons développé deux méthodes pour sélectionner l'ordre du modèle sans aucune estimation des paramètres transverses. La première méthode nommée MEV est basée sur le calcul de la valeur propre minimale de la matrice de covariance des données. La deuxième méthode nommée RTP est algébrique, et permet de sélectionner l'ordre comme solution d'un système non linéaire

# Chapitre 4

## Etudes des processus déterministes 3-D

### 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est le développement de techniques d'analyse de processus déterministes 3-D. Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 2, un tel processus se décompose en une somme de deux composantes : composante harmonique et composante évanescence. Ces deux composantes sont approximées par des modèles paramétriques. Ainsi, ce chapitre est organisé en deux sections principales :

La première section concerne l'étude des processus harmoniques 3-D constitués d'une somme d'exponentielles complexes. Cette étude est réalisée principalement dans le cadre de l'analyse spectrale, ce qui signifie que nous cherchons à estimer les fréquences du processus étudié. Plus précisément, nous étudions dans cette section deux méthodes à haute résolution 3-D en utilisant les statistiques d'ordre supérieur. Nous nous intéressons également à l'estimation des amplitudes et à l'ordre du modèle (nombre de fréquences). Les méthodes que nous allons étudier dans cette section prennent en compte le fait que les observations sont bruitées par un bruit additif gaussien.

La deuxième section est consacrée à l'étude des champs évanescents 3-D de type 1 et 2. Pour les processus évanescents de type 1, il s'agit d'estimer les fréquences 1-D et les paramètres caractérisant le processus aléatoire 2-D modélisant les amplitudes. Pour le processus évanescence de type 2, les paramètres à estimer sont les fréquences 2-D et les paramètres caractérisant le processus aléatoire 1-D qui modélise les amplitudes.

## 4.2 Identification des Processus Harmoniques 3-D

L'identification des processus harmoniques est un problème qui se pose dans plusieurs applications telles les télécommunications [Van98], le traitement d'antennes [Kris96], le traitement d'images radar [Degr98] [Rouq98], l'analyse d'images par résonance magnétique [Li98] ou encore le traitement d'images sismiques [Mari97]. Le point commun de ces différentes applications réside dans la modélisation des signaux étudiés par une somme d'exponentielles ou de sinusoides noyées dans un bruit additif.

Les méthodes d'analyse spectrale des signaux harmoniques développées dans "la littérature" peuvent se regrouper en deux grandes familles. La première couvre les méthodes nécessitant le calcul d'un spectre ou d'un pseudo spectre dont les maxima correspondent aux fréquences recherchées. La seconde couvre des méthodes permettant l'estimation directe des fréquences, c'est à dire sans le calcul intermédiaire d'un spectre ou d'un pseudo spectre. Ces dernières méthodes sont appelées : méthodes analytiques.

Dans la première famille, on trouve les techniques d'estimation fréquentielle fondées sur la transformée de Fourier pour estimer la densité spectrale du signal étudié. Cette dernière peut être calculée de deux manières différentes. La première méthode utilise la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, le spectre ainsi estimé est appelé Corrélogramme. La seconde méthode utilise directement la transformation de Fourier du processus étudié et conduit à un spectre appelé periodogramme. Les expressions de ces deux estimateurs sont données en annexe C. Ces deux méthodes ont l'avantage d'être faciles à mettre en oeuvre et ne nécessitent aucune hypothèse a priori sur les signaux étudiés. Elles présentent néanmoins un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, leur précision fréquentielle, c'est-à-dire la précision avec laquelle la fréquence peut être estimée, est limitée par la taille des échantillons utilisée pour calculer la transformation de Fourier. Cette première limitation peut cependant être contournée en prolongeant le signal utile par des zéros. Cependant, sa résolution fréquentielle, c'est-à-dire sa capacité à distinguer deux fréquences proches, est limitée par la taille du signal observé. Pour améliorer les performances de ces méthodes, des variantes du periodogramme comme le spectre de Bartlett, de Blackman-Turkey ont ensuite été développées mais les améliorations obtenues sont limitées par un compromis entre précision de l'estimation et résolution fréquentielle.

Pour s'affranchir des limitations inhérentes à l'analyse de Fourier, les méthodes dites à Haute Résolution (HR) ont été introduites en exploitant des informations supplémentaires fournies par la modélisation paramétrique du signal observé. L'origine des méthodes HR remonte aux travaux de R. Prony publié en 1795, qui visent à estimer une somme d'exponentielles en utilisant des techniques de prédiction linéaire. Cette approche a été approfondie ensuite par Pisarenko pour estimer les fréquences à partir des racines de polynôme prédictif. Suite à ces travaux, la méthode MUSIC a été introduite

plus récemment pour analyser les signaux 1-D [Pisa73]. Cette méthode utilise la décomposition en sous-espaces signal et bruit pour calculer un pseudo spectre dont les maxima correspondent aux fréquences recherchées. En raison de ses bonnes performances, cette méthode a fait l'objet de nombreuses études pour étendre son utilisation aux signaux 2-D [Rouq98] [Li98]. Cette technique et ses variantes 2-D offrent un pouvoir de résolution supérieur à celui du périodogramme mais leurs complexités calculatoires sont très pénalisantes. C'est pour cette raison que leur utilisation est envisageable lorsque le nombre de composantes est faible. Parmi les autres méthodes HR utilisées pour estimer les fréquences 2-D via le calcul d'un pseudo spectre on trouve celles fondées sur le maximum de vraisemblance [Fran96], les moindres carrées [Cohe02], le maximum d'entropie ou sur les techniques de prédiction linéaire [Hosn99] [Rouq99].

Dans notre étude, nous abordons dans ce qui suit le problème d'estimation fréquentielle 3-D par des méthodes HR analytiques. Ces méthodes exploitent les caractéristiques fréquentielles du modèle constitué d'une somme d'exponentielles complexes et fournissent une résolution supérieure à celles fondées sur la transformée de Fourier. Néanmoins, un nouveau problème qui n'apparaissait pas dans le cas 1-D se pose. En effet les fréquences correspondant à chaque dimension sont estimées séparément, une étape de formation des triplets à partir des fréquences estimées est nécessaire. Cette étape est délicate lorsque les composantes fréquentielles des données présentent des multiples, i.e. lorsque certaines fréquences ont au moins une composante identique sur l'un des axes. Une des principales méthodes analytiques d'estimation fréquentielle 1-D est la méthode appelée ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotation Invariant Techniques) [Roy89]. L'extension de cette méthode à l'analyse des signaux 2-D n'est pas unique. Les différentes extensions proposées diffèrent par les solutions introduites pour résoudre le problème de formation des paires de fréquences recherchées. Toutes les extensions de la méthode ESPRIT au cas 2-D se font à travers l'étude des matrices de données ou de covariance. Dans ce contexte on peut citer la méthode ACMP (Algebraically Coupled Matrix Pencil) [Vanp94], la méthode MEMP (Matrix Enhancement Matrix Pencil) développée par Hua [Hua92], [Yang96] et les variantes de la méthode ESPRIT 2-D introduite dans [Rouq01], [Haar95]. Notons que la méthode ACMP est basée sur la structure matricielle de type Bloc Hankel des données tandis que les méthodes MEMP et ESPRIT 2-D exploitent la structure Bloc Toeplitz de la matrice de covariance. Les performances de ces trois méthodes ont été comparées dans [Bert98], [Rouq98], [Rouq01]. D'un point de vue précision, les méthodes ESPRIT 2-D et MEMP sont meilleures que la méthode ACMP. Par ailleurs en présence d'un bruit additif gaussien blanc, la méthode ESPRIT 2-D est un peu moins précise que MEMP dans le cas d'un faible RSB, mais ces deux méthodes fournissent des résultats identiques pour un RSB élevé ( $RSB > 15$ ). D'un point de vue formation des paires, ces études ont montré une insuffisance de MEMP lorsque le signal présente certains multiples. Toutes ces études ont été effectuées sous l'hypothèse que le bruit additif est blanc gaussien. Comme nous allons le voir dans ce chapitre, des simulations ont montré cependant que la présence d'un bruit additif coloré diminue les performances de ces méthodes. Ceci est dû principalement au fait que ces méthodes utilisent les statistiques d'ordre deux [Chu96], [Hosn99].

Nous montrerons dans ce chapitre comment ces deux méthodes peuvent être enrichies par la prise en compte des statistiques d'ordre supérieur à 2 [Stit06c].

Avant de présenter notre contribution, à savoir le développement des méthodes ESPRIT et MEMP 3-D fondées sur les cumulants d'ordre 4, nous allons d'abord décrire le principe et les limitations de ces méthodes pour les statistiques d'ordre 2.

#### 4.2.1 Fondements et limitations des Méthodes basées sur l'autocorrélation

Soit  $\mathbf{Y}$  un bloc d'image 3-D de taille  $M \times N \times T$  considéré comme une réalisation finie d'un processus stochastique noté  $\{y(m, n, t)\}$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,  $1 \leq n \leq N$ ,  $1 \leq t \leq T$ . Chaque voxel  $(m, n, t)$  est constitué par la somme de deux voxels  $x(m, n, t)$  et  $b(m, n, t)$  des blocs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$y(m, n, t) = x(m, n, t) + b(m, n, t) \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{X}$  est le bloc non bruité et  $\mathbf{B}$  le bloc associé au bruit additif. Par ailleurs, nous supposons que le signal 3-D  $\{x(m, n, t)\}$  non bruité est modélisé par une somme de  $K$  exponentielles complexes :

$$x(m, n, t) = \sum_{k=1}^K a_k \exp[j2\pi(f_{1_k} m + f_{2_k} n + f_{3_k} t) + j\varphi_k] \quad (4.2)$$

Les triplets  $(f_{1_k}, f_{2_k}, f_{3_k})$  sont les fréquences 3-D normalisées, les paramètres  $a_k$  et  $\varphi_k$  sont respectivement l'amplitude réelle et la phase de la  $k^{ième}$  composante harmonique. Les phases  $\{\varphi_k\}$  sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Ceci assure la stationnarité du processus  $x(m, n, t)$ . Le bruit additif  $b(m, n, t)$  est supposé gaussien et indépendant statistiquement de  $x(m, n, t)$ . Nous supposons aussi dans cette section que l'ordre du modèle est connu, nous aborderons plus loin le problème de son estimation.

Grâce à la linéarité du modèle (4.1) et à l'hypothèse d'indépendance du bruit par rapport au signal utile, on montre aisément que les autocorrélations des observations sont la somme des autocorrélations du processus harmonique et de celles du bruit

$$r_{2y}(k_1, k_2, k_3) = r_{2x}(k_1, k_2, k_3) + r_{2b}(k_1, k_2, k_3) \quad (4.3)$$

Par ailleurs, les autocorrélations des observations non bruitées sont données par :

$$r_{2x}(k_1, k_2, k_3) = \sum_{k=1}^K a_k^2 \exp(j2\pi(f_{1_k} k_1 + f_{2_k} k_2 + f_{3_k} k_3)) \quad (4.4)$$

Cette expression montre que les autocorrélations du processus harmonique sont aussi périodiques et possèdent les mêmes fréquences recherchées.

Dans le cas où le bruit additif est blanc gaussien, les autocorrélations  $r_{2b}(k_1, k_2, k_3)$  sont nulles sauf au point  $(0, 0, 0)$ . Ainsi les autocorrélations des observations sont théoriquement identiques à celles du processus non bruité sauf à l'origine:

$$r_{2y}(k_1, k_2, k_3) = r_{2x}(k_1, k_2, k_3) + \sigma^2 \delta(k_1, k_2, k_3) \quad (4.5)$$

Les deux expressions (4.4) et (4.5) sont fondamentales pour la mise en oeuvre des méthodes analytiques fondées sur les autocorrélations. Elles permettent de construire trois matrices



d'autocorrélation  $\mathbf{R}_{y,i}, i=1,2,3$  ayant une structure Toeplitz Bloc-Bloc Toeplitz (TBBT) et dont la décomposition en sous espaces signal et bruit permet d'estimer les fréquences. Chaque matrice  $\mathbf{R}_{y,i}$  permet d'estimer les fréquences suivant la  $i^{ième}$  dimension. Ces trois matrices contiennent les mêmes éléments mais avec des emplacements différents [Aksa02]. Par exemple, afin d'estimer les fréquences associées à la première dimension, i.e.  $\{f_{1_k}, k=1, \dots, K\}$ , on considère la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}_{y,1}$  de taille  $PQL \times PQL$  définie par :

$$\mathbf{R}_{y,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \dots & \mathbf{R}_{-P+1} \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{R}_{-1} \\ \mathbf{R}_{P-1} & \dots & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Pour tout  $p \in [-P+1, P-1]$ , la matrice  $\mathbf{R}_p$  est de type Toeplitz Bloc Toeplitz (TBT) définie par

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p^0 & \mathbf{R}_p^{-1} & \dots & \mathbf{R}_p^{-Q+1} \\ \mathbf{R}_p^1 & \mathbf{R}_p^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{R}_p^{-1} \\ \mathbf{R}_p^{Q-1} & \dots & \mathbf{R}_p^1 & \mathbf{R}_p^0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

et chaque matrice  $\mathbf{R}_p^q$   $p \in [-P+1, P-1], q \in [-Q+1, Q-1]$  est une matrice Toeplitz de taille  $L \times L$  :

$$\mathbf{R}_p^q = \begin{bmatrix} r_y(p, q, 0) & r_y(p, q, -1) & \dots & r_y(p, q, -L+1) \\ r_y(p, q, 1) & r_y(p, q, 0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_y(p, q, -1) \\ r_y(p, q, L-1) & \dots & r_y(p, q, 1) & r_y(p, q, 0) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Conformément aux expressions analytiques (4.4) et (4.5) de la fonction d'autocorrélation, la matrice  $\mathbf{R}_{y,1}$  est une matrice hermitienne définie positive et se décompose de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_{y,1} = \mathbf{S}_{[PQL, K]}^1 \mathbf{\Psi} \mathbf{S}_{[PQL, K]}^{1H} + \sigma_b^2 \mathbf{I}_{PQL} \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{\Psi}$  est une matrice diagonale de taille  $K \times K$  contenant les carrés des amplitudes,  $\mathbf{\Psi} = \text{diag}(a_i^2)_{i=1}^K$ ,  $\mathbf{S}_{[PQL, K]}^1$  est la matrice dite de Vandermonde 3-D qui s'exprime en fonction du produit de Khatri Rao de trois matrices de Vandermonde (1-D). Nous reviendrons sur l'expression explicite de la matrice de Vandermonde 3-D dans le paragraphe 4.1.2. La définition et les propriétés du produit de Khatri Rao sont rappelées en Annexe F.

A partir de la relation (4.9), nous remarquons que la matrice d'autocorrélation des observations est la somme de la matrice d'autocorrélation des données non bruitées  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_{[PQL,K]}^{1H}$  et de la matrice diagonale  $\sigma_b^2 \mathbf{I}_{PQL}$  associée au bruit additif. En outre, en supposant que les paramètres  $P, Q$ , et  $L$  sont supérieurs à  $K$ , la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_{[PQL,K]}^{1H}$  est de rang  $K$ . Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{R}_{y,1}$  classées par ordre décroissant vérifient la relation :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K \geq \lambda_{K+1} = \dots \lambda_{PQL} = \sigma_b^2 \quad (4.10)$$

En utilisant cette relation et la décomposition en valeurs propres de la matrice  $\mathbf{R}_{y,1}$ , on obtient la décomposition en sous espaces signal et bruit. En effet, le sous espace signal engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  est également le sous espace engendré par les vecteurs propres associés aux  $K$  plus grandes valeurs propre de  $\mathbf{R}_{y,1}$ . Le sous-espace bruit est engendré par les  $PQL - K$  vecteurs propres associés à la valeur propre  $\sigma_b^2$ . Le calcul du sous-espace signal et la structure de la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  permettent d'estimer les fréquences 1-D  $\{f_{1_k}\}$ . Pour estimer les deux autres composantes fréquentielles  $\{f_{2_k}\}$  et  $\{f_{3_k}\}$ , on utilise respectivement la décomposition en sous espace des deux autres matrices  $\mathbf{R}_{y,2}$  et  $\mathbf{R}_{y,3}$ .

Dans le cas où le bruit additif est gaussien non blanc, les autocorrélations à différents décalages ne sont pas nulles. Ces autocorrélations s'ajoutent alors à celles des observations non bruitées pour tous les décalages  $(k_1, k_2, k_3)$  et pas uniquement à l'origine comme dans le cas précédant. Ceci implique que la périodicité des autocorrélations des observations décrites en (4.5) n'est plus vérifiée en présence d'un bruit gaussien non blanc. De plus, la décomposition de la matrice  $\mathbf{R}_{y,1}$  décrite en (4.9) devient :

$$\mathbf{R}_{y,1} = \mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_{[PQL,K]}^{1H} + \boldsymbol{\Sigma}_b \quad (4.11)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}_b$  est la matrice d'autocorrélation du bruit. La matrice d'autocorrélation du signal non bruité reste inchangée mais la matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_b$  n'est plus diagonale et ses valeurs propres ne sont plus identiques comme dans le cas du bruit blanc. Ainsi, l'expression (4.10) n'est plus valide et la décomposition en sous espaces signal et bruit devient difficile à réaliser en pratique. En effet, la construction des sous-espaces signal et bruit nécessitent l'estimation de l'ordre  $K$  du modèle, opération souvent réalisée à partir de la décomposition propre de  $\mathbf{R}_{y,1}$ . Cette estimation donne des résultats satisfaisants si la matrice d'autocorrélation du bruit est connue ou lorsque le bruit est blanc. Dans le dernier cas du bruit blanc, nous avons vu que la matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_b$  est proportionnelle à l'identité  $\boldsymbol{\Sigma}_b = \sigma_b^2 \mathbf{I}_{PQL}$  et que le sous espace bruit coïncide donc avec l'espace propre associé à la valeur propre  $\sigma_b^2$ . Pour ce dernier, l'estimation de l'ordre, c-à-d la dimension de l'espace signal, se fait en mesurant la similarité des valeurs propres associées au bruit. Cependant, lorsque le bruit n'est pas blanc et que sa matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_b$  est inconnue, les valeurs propres de  $\mathbf{R}_{y,1}$  associées au bruit ne sont plus identiques. Les valeurs propres associées au signal sont donc perturbées par les valeurs propres du bruit qui ne sont plus nécessairement de même ordre de grandeur. Cela entraîne souvent une mauvaise estimation du sous espace signal. Pour ces raisons, les performances des méthodes à haute résolution fondées sur les statistiques d'ordre deux se dégradent en présence d'un bruit additif gaussien non blanc [Hosn99][Kay90][Chu96]. Nous montrerons dans le paragraphe suivant comment ces méthodes d'estimation peuvent être enrichies par l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur.

## 4.2.2 Méthodes analytiques basées sur les statistiques d'ordre supérieur

Pour développer les techniques d'estimation HR à partir des statistiques d'ordre supérieur, nous allons utiliser les cumulants d'ordre 4 car les cumulants d'ordre 3 du processus harmonique étudié sont tous nuls. En effet, dans l'expression (4.2), lorsque la densité des phases  $\varphi_k$  est supposée constante sur  $[0, 2\pi]$ , les variables  $a_k e^{j\varphi_k}$  sont circulaires. La propriété de circularité entraîne que tous les cumulants ne comportant pas un nombre égal de termes non complexes conjugués et les termes complexes conjugués sont nuls [Laco97], [Swam91].

Pour alléger les équations, nous considérons dans toute cette section les notations suivantes :

$h = (h_1, h_2, h_3)$	$k = (k_1, k_2, k_3)$	$l = (l_1, l_2, l_3)$
$m + h = (m_1 + h_1, m_2 + h_2, m_3 + h_3)$ ,		
$m + k = (m_1 + k_1, m_2 + k_2, m_3 + k_3)$ ,		
$m + l = (m_1 + l_1, m_2 + l_2, m_3 + l_3)$		

Nous rappelons (voir Annexe A) que pour les processus à valeurs complexes, il existe trois cumulants d'ordre 4 différents. Pour le processus harmonique 3-D considéré ici, le seul cumulant d'ordre 4 non nul est celui qui contient deux termes non conjugués et deux termes conjugués. Avec les notations précédentes, les cumulants d'ordre 4 des observations que nous allons ensuite utiliser, sont définis par :

$$c_{4y}(h, k, l) = \text{cum}[y(m), y^*(m+h), y(m+k), y^*(m+l)] \quad (4.12)$$

En reprenant le modèle des observations bruitées donné en (4.1), les cumulants d'ordre 4 des observations sont donnés par :

$$c_{4y}(h) = c_{4x}(h) + c_{4b}(h) \quad (4.13)$$

Or les statistiques d'ordre supérieur à 2 de signaux gaussiens n'apportent pas d'information : les cumulants d'ordre supérieur à 2 sont nuls. Ainsi les cumulants d'ordre 4 des observations coïncident théoriquement avec ceux des observations non bruitées :

$$c_{4y}(h) = c_{4x}(h) \quad (4.14)$$

En comparant cette expression à (4.3) nous voyons que les statistiques d'ordre supérieur à 2 permettent d'éliminer théoriquement un bruit gaussien blanc ou coloré. Par ailleurs, nous avons montré dans [Stit05] que les cumulants d'ordre 4 du processus harmonique 3-D considéré vérifient la relation suivante :

$$c_{4x}(h, k, l) = -\sum_{i=1}^K a_i^4 \exp[j2\pi(-h+k+l)f_i^T] \quad (4.15)$$

avec :

$$(-h+k+l)f_i^T = (-h_1+k_1+l_1)f_{i_1} + (-h_2+k_2+l_2)f_{i_2} + (-h_3+k_3+l_3)f_{i_3} \quad (4.16)$$

Cette expression montre que les cumulants d'ordre 4 des observations sont aussi une somme de  $K$  exponentielles complexes avec les mêmes fréquences recherchées. Cependant cette expression n'est pas facile à exploiter car les cumulants d'ordre 4 utilisés sont fonction de trois variables à trois composantes. Autrement dit, les valeurs des cumulants considérés forment un tableau à neuf dimensions. En général, l'ensemble de ces valeurs donne "trop d'informations". Nous nous limiterons donc à certaines parties de l'espace des décalages, ne dépendant que d'une seule variable 3-D. Nous considérons dans la suite uniquement "la tranche diagonale" appelée la "diagonale des cumulants d'ordre 4" et définie par :

$$c_{4y}(h) = c_{4y}(h, h, h) \quad , \quad h = (h_1, h_2, h_3) \quad (4.17)$$

Les deux équations (4.14) et (4.15) nous permettent d'écrire

$$c_{4y}(h) = -\sum_{k=1}^K a_k^4 \exp[j2\pi(h_1 f_{k_1} + h_2 f_{k_2} + h_3 f_{k_3})] \quad (4.18)$$

Cette relation montre que la diagonale des cumulants d'ordre 4 des observations contient toute l'information utile pour estimer les fréquences du modèle harmonique. Cette relation est à la base de l'extension des techniques HR de l'ordre 2 à l'ordre 4. Dans la section suivante, nous montrerons comment estimer les fréquences avec les méthodes MEMP et ESPRIT 3-D en utilisant des matrices TBBT contenant les éléments de la diagonale des cumulants d'ordre 4.

#### 4.2.2.1 La Méthode MEMP 3-D

- **Estimation des fréquences suivant la première dimension**

Afin d'estimer les fréquences de la première dimension  $\{f_{1k}\}_{k=1}^K$ , nous considérons la matrice des cumulants de type TBBT suivante :

$$C_{y,1} = \begin{bmatrix} C_0 & C_{-1} & \cdots & \cdots & C_{-P+1} \\ C_1 & C_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & C_{-1} \\ C_{P-1} & \cdots & \cdots & C_1 & C_0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Pour chaque  $p \in [-(P-1), P-1]$ , la matrice  $C_p$  est de taille  $Q \times Q$  ayant une structure TBT telle que :

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p^0 & \mathbf{C}_p^{-1} & \dots & \dots & \mathbf{C}_p^{-Q+1} \\ \mathbf{C}_p^1 & \mathbf{C}_p^0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{C}_p^{-1} \\ \mathbf{C}_p^{Q-1} & \dots & \dots & \mathbf{C}_p^1 & \mathbf{C}_p^0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

et chaque bloc  $\mathbf{C}_p^q$ , tel que  $q \in [-(Q-1), Q-1]$  est une matrice  $L \times L$  elle-même Toeplitz :

$$\mathbf{C}_p^q = \begin{bmatrix} c_{4y}(i, j, 0) & c_{4y}(i, j, -1) & \dots & \dots & c_{4y}(i, j, -L+1) \\ c_{4y}(i, j, 1) & c_{4y}(i, j, 0) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & c_{4y}(i, j, -1) \\ c_{4y}(i, j, L-1) & \dots & \dots & c_{4y}(i, j, 1) & c_{4y}(i, j, 0) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

D'après l'expression analytique (4.18) de la diagonale des cumulants d'ordre 4, la matrice considérée  $\mathbf{C}_{y,1}$  possède la décomposition suivante :

$$\mathbf{C}_{y,1} = \mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1)^H \quad (4.22)$$

où,  $\boldsymbol{\Psi}$  est une matrice diagonale de taille  $K \times K$  telle que  $\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}(-a_k^4, k=1 \dots, K)$ , et  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  est la matrice de Vandermonde 3-D de taille  $PQL \times K$ . Cette dernière contient toute l'information fréquentielle des données et s'exprime en fonction du produit de Khatri-Rao noté  $\circ$  :

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 = \mathbf{S}_{[P,K]}^1 \circ \mathbf{S}_{[Q,K]}^2 \circ \mathbf{S}_{[L,K]}^3 \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{S}_{[G,K]}^m$  est la matrice de Vandermonde (1-D) associée aux fréquences  $\{f_{m_k}\}_{k=1}^K$  définie par :

$$\mathbf{S}_{[G,K]}^m = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j2\pi f_{m_1}} & \dots & e^{j2\pi f_{m_K}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ e^{j2\pi f_{m_1}(G-1)} & \dots & e^{j2\pi f_{m_K}(G-1)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

où  $m$  est la dimension spatiale  $m=1,2,3$  ; et  $G$  la taille des cumulants relatifs à la dimension  $m$ , i.e.  $G \in \{P, Q, L\}$ .

En comparant la relation (4.22) à (4.9), nous remarquons une parfaite similitude entre la forme de la matrice des cumulants considérée et celle de la matrice d'autocorrélation dans le cas d'un bruit additif blanc. Les deux relations font apparaître la même matrice de Vandermonde 3-D. Ce résultat permet d'introduire les sous espaces signal et bruit à l'ordre 4. En effet, sous l'hypothèse que  $K \leq \min\{P, Q, L\}$ , le rang de la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1)^H$  est exactement le nombre de fréquences  $K$  et son noyau est le sous espace bruit. La décomposition de la matrice des cumulants sur une base de Vandermonde 3-D de l'expression (4.22) n'est pas accessible en pratique puisqu'elle

requiert la connaissance des fréquences et des amplitudes. Il importe, donc, de déterminer explicitement une factorisation de la matrice des cumulants. Pour cela, on considère sa décomposition en valeurs propres notée :

$$\mathbf{C}_{y,1} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad (4.25)$$

avec

$$\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_K, u_{K+1}, \dots, u_{PQL}], \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_i; i = 1, \dots, PQL) \quad (4.26)$$

Les valeurs propres obtenues sont réelles car  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1)^H$  est hermitienne. En les classant par ordre décroissant, elles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > \lambda_{K+1} = \dots = \lambda_{LPQ} = 0 \quad (4.27)$$

Ainsi, le sous-espace signal est engendré à la fois par les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  et par les vecteurs propres de  $\mathbf{C}_{y,1}$  associés aux  $K$  valeurs propres non nulles  $\mathbf{U}_{S_1} = [u_1, u_2, \dots, u_K]$ . Cela entraîne l'existence d'une matrice inversible  $\boldsymbol{\Theta}$  de taille  $K \times K$  vérifiant la relation

$$\mathbf{U}_{S_1} = \mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 \boldsymbol{\Theta}_1 \quad (4.28)$$

En outre, la matrice de Vandermonde 3-D  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  possède une structure bloc comme le montre la relation suivante :

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{[QL,K]}^1 \\ \mathbf{S}_{[QL,K]}^1 \boldsymbol{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{[QL,K]}^1 \boldsymbol{\Phi}_1^{P-1} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

où  $\boldsymbol{\Phi}_1$ , est une matrice diagonale exprimée en fonction des fréquences de la première dimension  $\{f_{1_k}\}_{k=1}^K$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} e^{j2\pi f_{1_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{j2\pi f_{1_K}} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Cette relation montre que la matrice de Vandermonde 3-D s'exprime en fonction d'une matrice de Vandermonde 2-D à une forme diagonale près. Il s'agit de la matrice  $\mathbf{S}_{[QL,K]}^1$  associée aux fréquences des deuxième et troisième dimensions. C'est à dire le produit de Khatri Rao de deux matrices de Vandermonde 1-D suivant :

$$\mathbf{S}_{[QL,K]}^1 = \mathbf{S}_{[Q,K]}^2 \circ \mathbf{S}_{[L,K]}^3 \quad (4.31)$$

La structure bloc décrite en (4.29) est remarquable car elle fait apparaître séparément la matrice de Vandermonde 2-D  $\mathbf{S}_{[QL,K]}^1$  et la matrice diagonale contenant les fréquences recherchées c'est à dire celles de la première dimension. L'estimation de ces dernières revient donc à l'extraction de la matrice diagonale  $\boldsymbol{\Phi}_1$  à partir de  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$ . Pour cela nous allons partitionner la matrice de Vandermonde  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  de deux manières différentes comme dans la relation suivante :

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 = \left[ \begin{array}{c} \underline{\mathbf{S}}^1 \\ \mathbf{S}_{[PQ,K]}^1 \Phi_I^{P-1} \end{array} \right] \Downarrow QL = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{S}_{[QL,K]}^1 \\ \overline{\mathbf{S}}^1 \end{array} \right] \Downarrow QL \quad (4.32)$$

Les deux matrices  $\underline{\mathbf{S}}^1$  et  $\overline{\mathbf{S}}^1$  représentent la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  privée respectivement de ses  $QL$  dernières lignes et de ses  $QL$  premières lignes. En exploitant la structure bloc de la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  et (4.32), il est facile de vérifier que ces deux matrices sont liées par la relation suivante :

$$\underline{\mathbf{S}}^1 \Phi_I = \overline{\mathbf{S}}^1 \quad (4.33)$$

Les deux relations (4.32) et (4.33), traduisent la propriété de l'invariance par translation de ces blocs de cumulants. Pour exploiter cette propriété et la relation (4.28), nous allons considérer les mêmes partitionnements pour la matrice accessible  $\mathbf{U}_{S_1}$

$$\mathbf{U}_{S_1} = \left[ \begin{array}{c} \underline{\mathbf{xxx}} \\ \overline{\mathbf{U}}_{S_1} \end{array} \right] \Downarrow PQ = \left[ \begin{array}{c} \underline{\mathbf{U}}_{S_1} \\ \mathbf{xxx} \end{array} \right] \Downarrow PQ \quad (4.34)$$

où les deux matrices  $\underline{\mathbf{U}}_{S_1}$  et  $\overline{\mathbf{U}}_{S_1}$  représentent la matrice  $\mathbf{U}_{S_1}$  privée respectivement de ses  $QL$  dernières lignes et de ses  $QL$  premières lignes.

Ainsi, en utilisant les relations (4.28), (4.32) et (4.34) on obtient le système matriciel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathbf{S}}^1 \boldsymbol{\theta}_I = \overline{\mathbf{U}}_{S_1} \\ \mathbf{S}^1 \Phi_I^{-1} \boldsymbol{\theta} = \underline{\mathbf{U}}_{S_1} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

qui est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathbf{S}}^1 = \overline{\mathbf{U}}_{S_1} \boldsymbol{\theta}_I^{-1} \\ \overline{\mathbf{U}}_{S_1} \boldsymbol{\theta}_I^{-1} \Phi_I^{-1} \boldsymbol{\theta} = \underline{\mathbf{U}}_{S_1} \end{array} \right. \quad (4.36)$$

La résolution de l'équation  $\overline{\mathbf{U}}_{S_1} \boldsymbol{\theta}_I^{-1} \Phi_I^{-1} \boldsymbol{\theta} = \underline{\mathbf{U}}_{S_1}$  au sens des moindres carrés permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\Theta}_1^{-1} \boldsymbol{\Phi}_1^{-1} \boldsymbol{\Theta}_1 = (\overline{\mathbf{U}}_{S_1})^\dagger \underline{\mathbf{U}}_{S_1} \quad (4.37)$$

où le symbole  $()^\dagger$  désigne l'opérateur pseudo inverse. En considérant la notation  $\mathbf{F}_1 = (\overline{\mathbf{U}}_{S_1})^\dagger \underline{\mathbf{U}}_{S_1}$ , la dernière équation s'écrit sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{\Theta}_1 (\overline{\mathbf{U}}_{S_1})^\dagger \underline{\mathbf{U}}_{S_1} \boldsymbol{\Theta}_1^{-1} \quad (4.38)$$

Par conséquent les fréquences  $\{f_{1_k}\}$  contenues dans la matrice diagonale  $\boldsymbol{\Phi}_1$  seront estimées à partir des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{F}_1$ , par :

$$f_{1_k} = \frac{1}{2\pi} \text{Im}[\log(\lambda_k[\mathbf{F}_1])] \quad (4.39)$$

où  $\text{Im}$  désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe.

- **Estimation des fréquences suivant la deuxième dimension**

Pour estimer les fréquences associées à la deuxième dimension, nous introduisons une nouvelle matrice de cumulants  $\mathbf{C}_{y,2}$  de type TBBT construite comme suit

$$\mathbf{C}_{y,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_{-1} & \cdots & \mathbf{C}_{-Q+1} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{C}_{-1} \\ \mathbf{C}_{Q-1} & \cdots & \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

où chaque sous bloc  $\mathbf{C}_q$  est une matrice de type TBT donnée par :

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_q^0 & \mathbf{C}_q^{-1} & \cdots & \mathbf{C}_q^{-P+1} \\ \mathbf{C}_q^1 & \mathbf{C}_q^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{C}_q^{-1} \\ \mathbf{C}_q^{P-1} & \cdots & \mathbf{C}_q^1 & \mathbf{C}_q^0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

et chaque matrice  $\mathbf{C}_q^p$  est une matrice de Toeplitz définie par :

$$\mathbf{C}_q^p = \begin{bmatrix} c_{4y}(p, q, 0) & c_{4y}(p, q, -1) & \cdots & \cdots & c_{4y}(p, q, -L+1) \\ c_{4y}(p, q, 1) & c_{4y}(p, q, 0) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & c_{4y}(p, q, -1) \\ c_{4y}(p, q, L-1) & \cdots & \cdots & c_{4y}(p, q, 1) & c_{4y}(p, q, 0) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

La matrice des cumulants  $\mathbf{C}_{y,2}$  se décompose aussi sur une base de Vandermonde sous la forme

$$\mathbf{C}_{y,2} = \mathbf{S}_{[PQL,K]}^2 \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2)^H \quad (4.43)$$

où  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2$  est la matrice de Vandermonde 3-D définie par

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2 = \mathbf{S}_{[P,K]}^2 \circ \mathbf{S}_{[Q,K]}^1 \circ \mathbf{S}_{[L,K]}^3 \quad (4.44)$$

Cette matrice possède une structure bloc faisant apparaître séparément la matrice de Vandermonde 2-D relative aux fréquences de la première et la troisième dimension et la matrice diagonale  $\Phi_2$  contenant les fréquences de la deuxième dimension

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{[PL,K]}^2 \\ \mathbf{S}_{[PL,K]}^1 \Phi_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{[PL,K]}^1 \Phi_2^{Q-1} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$



avec  $\mathbf{S}_{[PL,K]}^2 = \mathbf{S}_{[P,K]}^1 \circ \mathbf{S}_{[L,K]}^3$ , et  $\Phi_2 = \text{diag}\{f_{1_k} \mid k = 1, \dots, K\}$ . Pour la matrice  $\mathbf{C}_{y,2}$ , la propriété de l'invariance par translation se traduit dans les relations suivantes :

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2 = \left[ \frac{\underline{\mathbf{S}}^2}{\mathbf{S}_{[PQ,K]}^2 \Phi_2^{P-1}} \right] \Downarrow PL = \left[ \frac{\mathbf{S}_{[QL,K]}^2}{\overline{\mathbf{S}}^2} \right] \Uparrow PL \quad (4.46)$$

$$\underline{\mathbf{S}}^2 \Phi_2 = \overline{\mathbf{S}}^2 \quad (4.47)$$

où les deux matrices  $\underline{\mathbf{S}}^2$  et  $\overline{\mathbf{S}}^2$  représentent la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2$  privée respectivement de ses  $PL$  dernières lignes et de ses  $PL$  premières lignes.

La décomposition en valeurs propres de la matrice  $\mathbf{C}_{y,2} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$  permet de construire la matrice  $\mathbf{U}_{S_2}$  qui engendre le sous-espace signal et qui est liée à la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2$  par la relation suivante:

$$\mathbf{U}_{S_2} = \mathbf{S}_{[PQL,K]}^2 \Theta_2 \quad (4.48)$$

où  $\Theta_2$  une matrice inversible de taille  $K \times K$ . En appliquant le même raisonnement, comme dans le paragraphe précédent, au sous espace signal  $\mathbf{U}_{S_2}$ , il est facile de démontrer que la matrice diagonale recherchée  $\Phi_2$  vérifie la relation :

$$\Theta_2^{-1} \Phi_2^{-1} \Theta_2 = (\overline{\mathbf{U}}_{S_2})^\dagger \underline{\mathbf{U}}_{S_2} \quad (4.49)$$

Ainsi, les fréquences de la deuxième dimension  $\{f_{2_k}\}$  sont estimées à partir des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{F}_2 = (\overline{\mathbf{U}}_{S_2})^\dagger \underline{\mathbf{U}}_{S_2}$  par la relation suivante:

$$f_{2_k} = \frac{1}{2\pi} \text{Im}[\log(\lambda_k[\mathbf{F}_2])] \quad (4.50)$$

- **Estimation des fréquences suivant la troisième dimension :**

Afin d'estimer les fréquences associées à la troisième dimension, nous considérons la matrice de cumulants  $\mathbf{C}_{y,3}$  de type TBBT suivante :

$$\mathbf{C}_{y,3} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_{-1} & \cdots & \mathbf{C}_{-L+1} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{C}_{-1} \\ \mathbf{C}_{L-1} & \cdots & \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

pour chaque  $l \in [-L+1, L-1]$ , le bloc  $\mathbf{C}_l$  est une matrice de type TBT définie par :

$$\mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_l^0 & \mathbf{C}_l^{-1} & \dots & \mathbf{C}_l^{-Q+1} \\ \mathbf{C}_l^1 & \mathbf{C}_l^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{C}_l^{-1} \\ \mathbf{C}_l^{Q-1} & \dots & \mathbf{C}_l^1 & \mathbf{C}_l^0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

où chaque sous bloc  $\mathbf{C}_l^q$  est une matrice de Toeplitz donnée par :

$$\mathbf{C}_l^q = \begin{bmatrix} c_{4y}(0, q, l) & c_{4y}(-1, q, l) & \dots & c_{4y}(-P+1, q, l) \\ c_{4y}(1, q, l) & c_{4y}(0, q, l) & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & c_{4y}(-1, q, l) \\ c_{4y}(P-1, q, l) & & c_{4y}(1, q, l) & c_{4y}(0, q, l) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Ce nouvel emplacement des cumulants  $c_{4y}(p, q, l)$  dans la matrice  $\mathbf{C}_{y,3}$  permet d'avoir la décomposition suivante :

$$\mathbf{C}_{y,3} = \mathbf{S}_{[PQL,K]}^3 \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3)^H \quad (4.54)$$

où  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3$  est la matrice de Vandermonde 3-D donnée par le produit de Khatri-Rao suivant :

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3 = \mathbf{S}_{[L,K]}^3 \circ \mathbf{S}_{[P,K]}^1 \circ \mathbf{S}_{[Q,K]}^2 \quad (4.55)$$

et admet la structure bloc suivante :

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{[PQ,K]}^3 \\ \hline \mathbf{S}_{[PQ,K]}^3 \boldsymbol{\Phi}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{[PQ,K]}^3 \boldsymbol{\Phi}_3^{L-1} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

où

$$\mathbf{S}_{[PQ,K]}^3 = \mathbf{S}_{[P,K]}^1 \circ \mathbf{S}_{[Q,K]}^2, \quad (4.57)$$

et

$$\boldsymbol{\Phi}_3 = \text{diag}\{f_{3_k}, k = 1, \dots, K\} \quad (4.58)$$

La propriété de l'invariance par translation de cette matrice se traduit dans les relations suivantes :

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{[PQ,K]}^3 \\ \hline \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \Downarrow PQ = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}_3} \\ \hline \mathbf{S}_{[PQ,K]}^3 \boldsymbol{\Phi}_3^{L-1} \end{bmatrix} \Downarrow PQ \quad (4.59)$$

$$\underline{\mathbf{S}}^3 \boldsymbol{\Phi}_3 = \overline{\mathbf{S}}^3 \quad (4.60)$$

Comme pour les deux matrices précédentes  $\mathbf{C}_{y,1}$  et  $\mathbf{C}_{y,2}$ , notons par  $\mathbf{U}_{S_3}$  la matrice contenant les vecteurs propres du sous espace signal relatif à la décomposition de la matrice  $\mathbf{C}_{y,3}$ . Notons que le sous espace signal est engendré également par les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3$ . Ainsi, il existe une matrice inversible  $\Theta_3$  de taille  $K \times K$  telle que :

$$\mathbf{U}_{S_3} = \mathbf{S}_{[PQL,K]}^3 \Theta_3 \quad (4.61)$$

En partitionnant la matrice des  $K$  vecteurs propres  $\mathbf{U}_{S_3}$  de la même façon qu'on a partitionné la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3$  dans (4.59) nous obtenons les matrices  $\overline{\mathbf{U}}_{S_3}$  et  $\underline{\mathbf{U}}_{S_3}$  telles que

$$\Theta_3^{-1} \Phi_3^{-1} \Theta_3 = (\overline{\mathbf{U}}_{S_3})^\dagger \underline{\mathbf{U}}_{S_3} \quad (4.62)$$

Cette relation montre que les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{F}_3 = (\overline{\mathbf{U}}_{S_3})^\dagger \underline{\mathbf{U}}_{S_3}$  contiennent l'information fréquentielle relative à la troisième dimension. Plus explicitement, les fréquences de la troisième dimension sont estimées par :

$$f_{3_k} = \frac{1}{2\pi} \text{Im}[\log(\lambda_k[\mathbf{F}_3])] \quad (4.63)$$

En conclusion, les fréquences  $\{f_{1_k}\}$ ,  $\{f_{2_k}\}$  et  $\{f_{3_k}\}$  sont estimées séparément à partir des valeurs propres de  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ , et  $\mathbf{F}_3$  issues respectivement de la décomposition de trois matrices  $\mathbf{C}_{y,1}$ ,  $\mathbf{C}_{y,2}$  et  $\mathbf{C}_{y,3}$ .

Une étape supplémentaire de reformation des triplets  $\{(f_{1_k}, f_{2_k}, f_{3_k})\}$  est nécessaire. Avant de détailler cette étape, nous signalons que dans la pratique la construction de trois matrices des cumulants n'est pas nécessaire. Il suffit de construire une seule matrice  $\mathbf{C}_{y,i}$  pour obtenir son espace signal  $\mathbf{U}_{S_i}$ , et en déduire les deux autres moyennant des matrices de permutations. Cela est possible car les matrices de Vandermonde 3-D  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$ ,  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2$  et  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3$  s'expriment en fonction du produit de Khatri-Rao de trois matrices  $\mathbf{S}_{[L,K]}^3$ ,  $\mathbf{S}_{[P,K]}^1$ , et  $\mathbf{S}_{[Q,K]}^2$  (voir (4.23), (4.44) et (4.55)). Puisque le produit de Khatri-Rao n'est pas commutatif, il faut introduire des matrices de permutation pour pouvoir lier les trois matrices de Vandermonde 3-D. Par exemple, supposons que nous avons construit la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3$  et calculé l'espace signal associé  $\mathbf{U}_{S_3}$ . les deux matrices  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1$  et  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2$  peuvent être obtenues à partir de  $\mathbf{S}_{[PQL,K]}^3$  par les relations suivantes

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^1 = \Pi_1 \mathbf{S}_{[PQL,K]}^3 \quad (4.64)$$

$$\mathbf{S}_{[PQL,K]}^2 = \Pi_2 \mathbf{S}_{[PQL,K]}^3 \quad (4.65)$$

où les deux matrices de permutations  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont données par :

$$\Pi_1 = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \sum_{k=1}^L \Pi_{i,j}^{P,Q} \otimes \Pi_{j,k}^{Q,L} \otimes \Pi_{k,i}^{L,P} \quad (4.66)$$

$$\Pi_2 = \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^P \Pi_{i,j}^{Q,L} \otimes \Pi_{j,k}^{L,P} \otimes \Pi_{k,i}^{P,Q} \quad (4.67)$$

Les matrices de permutations élémentaires  $\Pi_{i,j}^{P,L}$  sont de taille  $P \times L$  et contiennent la valeur 1 pour les coordonnées  $(i, j)$  et des 0 ailleurs. Les autres matrices de permutations  $\Pi_{j,k}^{L,Q}$  et  $\Pi_{k,i}^{Q,P}$  ont les mêmes propriétés que  $\Pi_{i,j}^{P,L}$ . Pour calculer les sous espaces signal  $\mathbf{U}_{S_1}$  et  $\mathbf{U}_{S_2}$ , il suffit alors d'appliquer ces matrices de permutations à l'espace signal  $\mathbf{U}_{S_3}$  :

$$U_{S_1} = \Pi_1 U_{S_3} \quad (4.68)$$

$$U_{S_2} = \Pi_1 U_{S_3} \quad (4.69)$$

L'utilisation de ces deux matrices de permutation est très importante d'un point de vue complexité calculatoire car elle dispense de décomposer en valeurs propres les matrices  $C_{y,1}$  et  $C_{y,2}$ .

### • Reformation des triplets

Nous avons vu dans (4.28) que le sous espace signal est aussi bien engendré par  $S_{[PQL,K]}^1$  que par  $U_{S_1}$ . Or, d'après la définition du produit de Khatri-Rao (Annexe F), la matrice  $S_{[PQL,K]}^1$  s'exprime en fonction du produit de Kronecker :

$$S_{[PQL,K]}^1 = [s_{11,P} \otimes s_{21,Q} \otimes s_{31,L}, \dots, s_{1K,P} \otimes s_{2K,Q} \otimes s_{3K,L}] \quad (4.70)$$

où  $s_{m,k,G}$  est la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $S_{[G,K]}^m$  avec  $m=1,2,3$  et  $G \in \{P,Q,L\}$ . Cette relation montre que la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $S_{[PQL,K]}^1$  est construite uniquement avec le triplet  $(f_{1_k}, f_{2_k}, f_{3_k})$ . Si  $(f_{1_i}, f_{2_j}, f_{3_k})$  est un triplet de fréquences du signal, le produit  $s_{1i,P} \otimes s_{2j,Q} \otimes s_{3k,L}$  est donc une colonne de la matrice  $S_{[PQL,K]}^1$ , sinon sa projection sur l'espace signal  $U_{S_1}$  serait théoriquement nulle. De ce fait, la reformation des triplets fréquentiels se réalise par la maximisation de la projection du vecteur relatif à tous les triplets possibles sur le sous espace signal. Par conséquent la technique à utiliser consiste à chercher les triplets qui maximisent le critère suivant :

$$J(i, j, k) = \sum_{l=1}^K \left\| U_{S_1}(l)^H (s_{1i,P} \otimes s_{2j,Q} \otimes s_{3k,L}) \right\|_2^2 \quad (4.71)$$

où  $U_{S_1}(l)$  est la  $l^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $U_{S_1}$ .

#### 4.2.2.2 La Méthode ESPRIT 3-D

La méthode ESPRIT 3-D estime les fréquences à partir des valeurs propres des matrices  $F_1$ ,  $F_2$ , et  $F_3$  qui sont également utilisées dans la méthode MEMP 3-D:

$$\begin{cases} F_1 = (\bar{U}S_1)^{\dagger} U_{S_1} = \Theta_1^{-1} \Phi_1^{-1} \Theta_1 \\ F_2 = (\bar{U}S_2)^{\dagger} U_{S_2} = \Theta_2^{-1} \Phi_2^{-1} \Theta_2 \\ F_3 = (\bar{U}S_3)^{\dagger} U_{S_3} = \Theta_3^{-1} \Phi_3^{-1} \Theta_3 \end{cases} \quad (4.72)$$

Cette méthode estime directement les triplets  $(f_{1_i}, f_{2_j}, f_{3_k})$  en utilisant une transformation  $\Theta$  qui diagonalise à la fois  $F_1$ ,  $F_2$ , et  $F_3$ . Cette transformation s'obtient en diagonalisant une combinaison linéaire de ces trois matrices :

$$\alpha F_1 + \beta F_2 + (1 - \alpha - \beta) F_3 = \Theta^{-1} \Delta \Theta, \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}^* \quad (4.73)$$

En appliquant successivement la transformation  $\Theta$  aux matrices  $F_1$ ,  $F_2$ , et  $F_3$ , les fréquences extraites des diagonales  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , et  $\Phi_3$  sont classées d'une manière correcte

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Theta F_1^{-1} \Theta^{-1} \\ \Phi_2 = \Theta F_2^{-1} \Theta^{-1} \\ \Phi_3 = \Theta F_3^{-1} \Theta^{-1} \end{cases} \quad (4.74)$$

Néanmoins, cette diagonalisation jointe des matrices  $F_1$ ,  $F_2$ , et  $F_3$  n'est pas parfaite, elle peut former parfois des triplets erronés lors de la présence des multiples. Pour améliorer cette procédure nous allons utiliser la matrice  $\Theta$  pour former trois matrices de permutations  $P_1$ ,  $P_2$ , et  $P_3$  telles que

$$\begin{cases} P_1 = \Theta^{-1} \Theta_1 \\ P_2 = \Theta^{-1} \Theta_2 \\ P_3 = \Theta^{-1} \Theta_3 \end{cases} \quad (4.75)$$

Finalement les fréquences classées de manière identique s'obtiennent à partir des matrices suivantes:

$$\begin{cases} \Phi'_1 = P_1^{-1} \Phi_1 P_1 \\ \Phi'_2 = P_2^{-1} \Phi_2 P_2 \\ \Phi'_3 = P_3^{-1} \Phi_3 P_3 \end{cases} \quad (4.76)$$

En pratique les matrices  $P_1$ ,  $P_2$ , et  $P_3$  obtenues par (4.71) ne sont pas des matrices de permutation. En effet, ces dernières contiennent plus d'un élément non nul par ligne à cause des perturbations dues aux bruit additif et aux erreurs d'estimation. Pour restituer les matrices de permutation, le plus grand élément en valeur absolue de chaque ligne est fixé à 1 et les éléments restants prennent la valeur zéro.

### 4.2.3 Estimation des paramètres : ordre, amplitudes complexes

Les méthodes exposées dans les sections précédentes estiment uniquement les fréquences 3-D du modèle harmonique 3-D. Nous nous intéressons maintenant à la sélection de l'ordre du modèle et à l'estimation des amplitudes.

#### 4.2.3.1 Estimation de l'ordre du modèle

Les méthodes analytiques MEMP et ESPRIT 3-D développées précédemment, présupposent que l'ordre du modèle  $K$  est connu, ce qui n'est généralement pas le cas en pratique. De nombreuses méthodes ont été proposées dans "la littérature" pour estimer le nombre de sinusoïdes complexes observées dans un bruit additif gaussien. Parmi ces méthodes, nous citerons celles basées sur un critère de maximum a posteriori [Fran05], et les techniques issues de la théorie de l'information déjà exposées dans le chapitre précédent. Cependant ces méthodes nécessitent l'estimation des paramètres

et reposent principalement sur l'hypothèse de blancheur de bruit additif. Dans la suite, nous adoptons les méthodes algébriques fondées sur l'approximation de rang matriciel [Gadz82], [Kons88].

Dans le cas où le bruit additif est gaussien blanc, la plupart des critères algébriques utilisés reposent sur la similarité des valeurs propres associées au sous espace bruit. En effet, nous avons vu que les valeurs propres de la matrice bloc de corrélation, classées en ordre décroissant, vérifient la relation (4.10). Cela entraîne que le sous espace bruit coïncide avec l'espace propre associé à la valeur propre  $\sigma_b^2$ . Sa dimension  $PQL - K$  fixe la multiplicité de cette valeur propre. Dans la pratique, les dernières  $PQL - K$  valeurs propres ne sont pas nécessairement égales mais elles sont du même ordre de grandeur. Parmi les critères d'estimation de l'ordre qui exploitent cette similarité, on trouve les critères EDC (Efficiently Detection Criteria) [zhao86]. Ces critères consistent à minimiser une fonction coût composée d'un premier terme commun qui mesure la similarité et d'un second terme qui constitue un facteur de pénalisation. Dans la pratique ces critères donnent des résultats satisfaisants mais ils ont tendance à surestimer l'ordre du modèle lorsque le bruit additif est coloré. Ceci est dû au fait que les dernières  $PQL - K$  valeurs propres de la matrice  $\mathbf{R}_y$  ne sont plus similaires. Pour s'affranchir de cet inconvénient, nous allons estimer l'ordre du modèle à partir de l'une des matrices de cumulants déjà utilisées pour estimer les fréquences.

Dans les paragraphes précédent, nous avons montré que l'ordre du modèle est également le rang de la matrice bloc des cumulants et que son noyau est le sous espace bruit. Le paramètre  $K$  peut donc être estimé directement en calculant le rang de l'une des matrices  $C_{y,i}, i=1,2,3$ . Théoriquement le rang d'une matrice est donné par le nombre de ses valeurs propres nulles. Dans la pratique toutes les valeurs propres de la matrice  $C_{y,i}$  sont non nulles, le calcul du rang revient donc à déterminer celles qui sont non significatives. Pour cela nous pouvons utiliser le critère de seuil présenté dans le chapitre précédant (voir (3.60)).

#### 4.2.3.2 Estimation des amplitudes complexes

Notons que les termes  $\varphi_k$  ne sont pas identifiables directement à partir de la matrice des cumulants considérée pour estimer les fréquences car ils n'apparaissent pas dans l'expression (5.18). Pour cette raison, nous allons estimer le vecteur des amplitudes complexes en exploitant la décomposition d'une matrice des données de type Hankel Bloc-Bloc Hankel (HBBH) :

$$\mathbf{Y}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \cdots & \mathbf{Y}_{M-P} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \ddots & \mathbf{Y}_{M-P+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{P-1} & \mathbf{Y}_P & \cdots & \mathbf{Y}_{M-1} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Chaque bloc  $\mathbf{Y}_m$  est une matrice de type Hankel par bloc construite de la manière suivante :

$$\mathbf{Y}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_m^0 & \mathbf{Y}_m^1 & \dots & \mathbf{Y}_m^{N-Q} \\ \mathbf{Y}_m^1 & \mathbf{Y}_m^2 & \ddots & \mathbf{Y}_m^{N-Q+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_m^{Q-1} & \mathbf{Y}_m^Q & \dots & \mathbf{Y}_m^{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

où chaque matrice  $\mathbf{Y}_m^q$  est une matrice Hankel de taille  $L \times (T-L+1)$  définie par:

$$\mathbf{Y}_m^q = \begin{bmatrix} y(m,q,0) & y(m,q,1) & \dots & y(m,q,T-L) \\ y(m,q,1) & y(m,q,2) & \dots & y(m,q,T-L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(p,q,L-1) & y(m,q,L) & \dots & y(m,q,T-1) \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Cette matrice possède la décomposition suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_L \mathbf{A} \mathbf{S}_R^H + \mathbf{B} \quad (4.80)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice de bruit construite de la même manière que  $\mathbf{Y}$ , la matrice  $\mathbf{A}$  est diagonale et contient les amplitudes recherchées,  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_k \exp(j\varphi_k))$ . La matrice  $\mathbf{S}_L$  est la même matrice de Vandermonde 3-D déjà définie plus haut et notée par  $\mathbf{S}_{[PQ,L,K]}^1$ . La matrice  $\mathbf{S}_R$  est construite de manière analogue à  $\mathbf{S}_L$  mais avec des paramètres  $M-P+1$ ,  $N-Q+1$  et  $T-L+1$  à la place de  $P, Q$  et  $L$ . Après la détection des  $K$  fréquences, ces deux matrices sont ainsi connues et les paramètres recherchés sont obtenus par la relation suivante :

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_L \mathbf{Y} \mathbf{S}_R^H \quad (4.81)$$

Notons aussi que les amplitudes complexes peuvent être estimées en utilisant la transformée de Fourier des données bruitées et les fréquences estimées de la manière suivante:

$$\alpha_k = \frac{I}{MNT} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} y(m,n,t) \exp(-j2\pi(n\hat{f}_{k_1} + m\hat{f}_{k_2} + t\hat{f}_{k_3})) \quad (4.82)$$

Ainsi,  $a_k = |\alpha_k|$  et  $\varphi_k = \arg(\alpha_k)$

- **Remarque 2 :**

Le lecteur remarquera sans doute que les méthodes développées dans cette section reposent sur un modèle de signal à valeurs complexes, alors que les textures 3-D sont à valeurs réelles. Nous avons fait ce choix car les résultats théoriques s'expriment d'une manière plus compacte et plus simple que dans le cas réel. De plus les résultats pour le modèle réel sont généralement obtenus en particulierisant les résultats pour les modèles complexes. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5 lors de l'utilisation des méthodes analytiques pour rehausser les blocs sismiques 3-D.

## 4.3 Estimation des paramètres du processus évanescent 3-D

### 4.3.1 Processus évanescent du type 1

Nous avons vu au deuxième chapitre que le processus évanescent de type 1 est modélisé par une somme de sinusoïdes 2-D modulées par un processus aléatoire 1-D comme suit :

$$e_1(m, n, t) = \sum_{i=1}^{I_1} S_{1_i}(m) \cos(2\pi(n v_i + t \eta_i)) + T_{1_i}(m) \sin(2\pi(n v_i + t \eta_i)) \quad (4.83)$$

Pour tout point  $m$  fixé sur le premier axe notons  $e_{1,m}(\cdot, \cdot)$  le processus 2-D représentant les valeurs du processus évanescent  $e_1(\cdot, \cdot)$  uniquement le long des deux autres axes :

$$e_{1,m} = \{e_1(m, n, t), 1 \leq n \leq N, 1 \leq t \leq T\} \quad (4.84)$$

Conformément à l'expression (4.81), ce processus est une somme de sinusoïdes 2-D ayant les fréquences  $(v_i, \eta_i)$  et les amplitudes  $S_{1_i}(m)$ , et  $T_{1_i}(m)$  pour  $i=1, \dots, I_1$ . Ce processus 2-D obtenu possède donc les mêmes fréquences que nous cherchons à estimer. Il suffit alors d'estimer les fréquences de ce signal 2-D par l'une des techniques d'analyse spectrale 2-D. Par exemple en localisant les maxima locaux de la FFT 2-D ou en utilisant les versions 2-D des méthodes analytiques développées plus haut ou celles basées sur les statistiques d'ordre 2 [Hua92][Rouq01].

Notons les fréquences estimées par  $(\hat{v}_i, \hat{\eta}_i)$ , les valeurs en chaque point  $m$  des processus aléatoires 1-D peuvent alors être estimées comme les amplitudes constantes du processus harmonique 2-D correspondant. Par la méthode de démodulation en fréquence, ces amplitudes sont données par les expressions suivantes :

$$\hat{S}_{1_i}(m) = \frac{2}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} h(m, n, t) \cos(2\pi(n \hat{v}_i + t \hat{\eta}_i)) \quad (4.85)$$

$$\hat{T}_{1_i}(m) = \frac{2}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{T-1} h(m, n, t) \sin(2\pi(n \hat{v}_i + t \hat{\eta}_i)) \quad (4.86)$$

Cette procédure permet d'estimer une réalisation pour chaque processus 1-D  $S_{1_i}(m)$ , et  $T_{1_i}(m)$ . Pour avoir une description paramétrique complète du processus évanescent 3-D de type 1, ces réalisations sont ensuite modélisées par des modèles AR 1-D.

### 4.3.2 Processus évanescent de type 2

Le processus évanescent 3-D de type 2 est modélisé par :

$$e_2(m, n, t) = \sum_{i=1}^{I_2} S_{2_i}(m, n) \cos(2\pi \eta_i t) + T_{2_i}(m, n) \sin(2\pi \eta_i t) \quad (4.87)$$

Les paramètres à estimer sont les fréquences 1-D notées  $\{\eta_i\}$  et les paramètres autorégressifs des processus aléatoires 2-D  $S_{2_i}(\cdot, \cdot)$  et  $T_{2_i}(\cdot, \cdot)$  pour  $i=1, \dots, I_2$ .



A partir de l'expression du modèle (4.84), nous remarquons que si nous considérons uniquement les valeurs du processus étudié le long des premiers axes, nous obtenons un signal harmonique 1-D que nous notons par  $e_{2,m,n}(\cdot)$

$$e_{2,m,n} = \{e_2(m, n, t), 1 \leq t \leq T\} \quad (4.88)$$

Ce processus possède des amplitudes constantes  $S_{2_i}(m, n)$  et les mêmes fréquences 1-D que le processus évanescent  $e_2(m, n, t)$ . Il suffit alors comme dans le paragraphe précédant d'extraire  $e_{2,m,n}(\cdot)$  à partir des données et d'estimer ses fréquences par des techniques classiques d'analyse spectrale 1-D. Pour chaque fréquence estimée  $\hat{\eta}_i$ , les valeurs des processus aléatoires 2-D en chaque point  $(m, n)$  sont estimées comme les amplitudes constantes du processus harmonique 1-D  $e_{2,m,n}(\cdot)$  comme suit :

$$\hat{S}_{2_i}(m, n) = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} h(m, n, t) \cos(2\pi t \hat{\eta}_i) \quad (4.89)$$

$$\hat{T}_{2_i}(m, n) = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} h(m, n, t) \sin(2\pi t \hat{\eta}_i) \quad (4.90)$$

Les séquences estimées  $\hat{S}_{2_i}(m, n)$ , et  $\hat{T}_{2_i}(m, n)$  sont ensuite modélisées par des modèles AR 2-D causaux et à support fini. Cette étape peut être effectuée en utilisant par exemple les algorithmes développés dans [FLiu96] [Marp00].

## 4.4 Résultats expérimentaux

Nous allons dans ce paragraphe étudier les performances des deux méthodes analytiques ESPRIT, et MEMP en utilisant les cumulants d'ordre 4 et leurs variantes fondées sur les statistiques d'ordre 2. Les observations générées sont modélisées par un processus harmonique réel 3-D perturbé par un bruit gaussien coloré.

### • Exemple 1

Dans cet exemple, nous considérons une seule réalisation d'un processus réel 3-D de taille  $M \times N \times T$  donné par l'expression suivante :

$$y(m, n, t) = x(m, n, t) + b(m, n, t) \quad (4.91)$$

où

$$x(m, n, t) = \sum_{k=1}^2 a_k \cos[2\pi(f_{1_k} m + f_{2_k} n + f_{3_k} t) + j\varphi_k] \quad (4.92)$$

et

$$b(m, n, t) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ (k_1, k_2, k_3) \neq (0,0,0)}}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1, k_2, k_3} b(m - k_1, n - k_2, t - k_3) + u(m, n, t) \quad (4.93)$$

Les paramètres de simulation et ceux du processus harmonique sont donnés dans le tableau 4.1. Le bruit coloré est un processus AR 3-D gaussien à support quart d'espace généré avec les paramètres donnés dans le tableau 4.2. Le processus d'excitation  $\{u(m, n, t)\}$  est un bruit blanc gaussien de

variance  $\sigma_u^2$ . Tous les paramètres de cet exemple ont été choisis pour avoir un rapport signal à bruit de 5 dB.

Fréquences de la première dimension	0.1400	0.1800
Fréquences de la deuxième dimension	0.1000	0.2200
Fréquences de la troisième dimension	0.2700	0.3000
Amplitudes	3	3
(M, N, T)=	(32, 32, 32)	
(P, Q, L) =	(5, 5, 5)	

Tableau 4.1 Paramètres du processus harmonique

$a_{0,0,0} = 1$	$a_{1,0,0} = 0.65$	$a_{1,0,1} = 0.75$	$a_{1,1,0} = 0.4875$
$a_{0,0,1} = 0.54$	$a_{1,0,1} = 0.3510$	$a_{1,0,1} = 0.405$	$a_{1,1,1} = 0.2633$
$(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1)$		$\sigma_u^2 = 1$	

Tableau 4.2 Paramètres du processus AR 3-D

Nous comparons la précision de l'estimation des fréquences obtenues par les quatre techniques suivantes :

- Méthode ESPRIT 3-D fondée sur les autocorrélations : ESPRIT - SOS
- Méthode ESPRIT 3-D fondée sur les cumulants d'ordre 4 : ESPRIT - HOS
- Méthode MEMP 3-D fondée sur les autocorrélations : MEMP - SOS
- Méthode MEMP 3-D fondée sur les cumulants : MEMP - HOS

Les résultats fournis par les quatre méthodes sont donnés dans le tableau 4.3.

Fréquences		ESPRIT -SOS		ESPRIT HOS		MEMP SOS		MEMP HOS	
0.1400	0.1800	0.1366	0.1786	0.1397	0.1799	0.1370	0.1780	0.1398	0.1797
0.1000	0.2200	0.969	0.2174	0.1003	0.2200	0.9710	0.2170	0.1002	0.2201
0.2700	0.3000	0.2671	0.2991	0.2694	0.2999	0.2674	0.2905	0.2698	0.3001

Tableau 4.3 Résultats d'estimation fréquentielle

## • Exemple 2

Nous comparons, dans cet exemple, la précision de l'estimation obtenue par les différentes méthodes pour différentes valeurs du RSB allant de -5 dB à 25 dB avec un pas de 5. Le processus harmonique considéré est le même que dans l'exemple 1, cependant les paramètres du bruit coloré

sont modifiés pour obtenir les valeurs de RSB désirées. Des simulations de Monte-Carlo sont réalisées pour différentes valeurs de RSB. L'erreur quadratique moyenne de l'estimation est calculée pour les différentes méthodes prises en compte. Les résultats sont représentés par les figures suivantes :

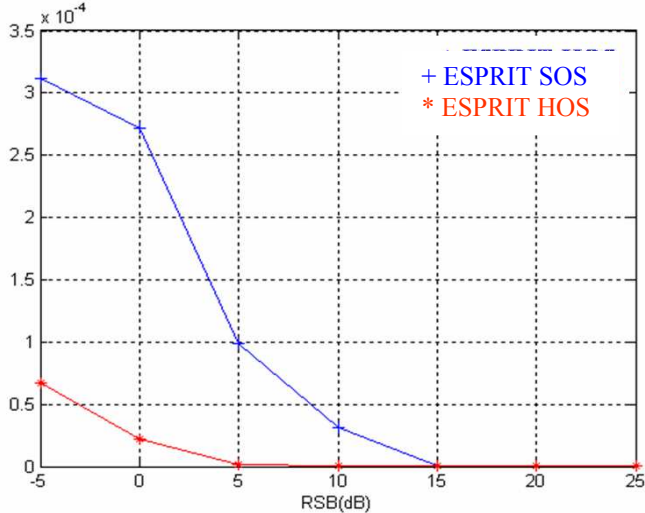


Fig. 4.1 Erreur d'estimation par ESPRIT 3-D

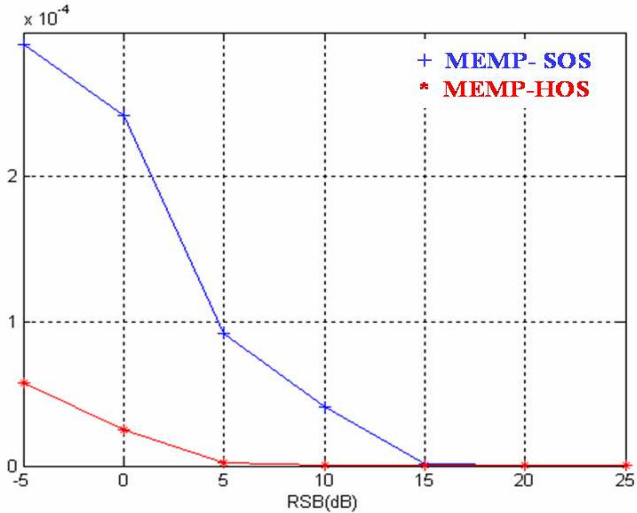


Fig. 4.2 Erreur d'estimation par MEMP 3-D

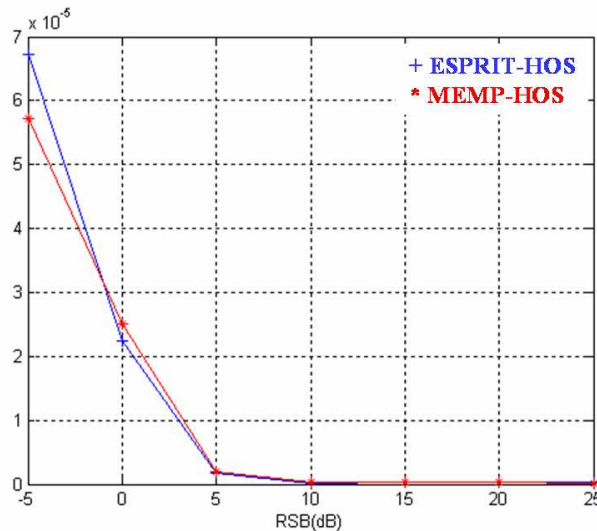


Fig. 4.3 Erreur d'estimation par MEMP - HOS et ESPRIT -HOS

- **Commentaires**

Sur la figure 4.3, nous observons que les deux méthodes ESPRIT et MEMP basées sur les cumulants ont des performances identiques. Cependant, à partir des figures 4.1 et 4.2, nous voyons que ces deux méthodes ont une précision supérieure à leurs variantes basées sur les statistiques d'ordre 2. Notons aussi que toutes ces figures montrent que les quatre méthodes ont des performances équivalentes pour les valeurs de RSB supérieures à 15 dB.

Ces simulations mettent en évidence l'intérêt des méthodes à haute résolution fondées sur les statistiques d'ordre supérieur que nous proposons. Dans les exemples considérés les processus harmoniques générés comportent un faible nombre de composantes, or les performances des méthodes HR peuvent être différentes selon que le nombre de fréquences est plus ou moins important. Nous reviendrons sur les performances de ces méthodes sur des signaux sismiques 3-D constitués d'un grand nombre de fréquences au chapitre 5, section 5.2.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'estimation des paramètres des modèles de signaux 3-D déterministes issus de la décomposition de Wold 3-D introduite dans le chapitre 1.

Dans un premier temps, nous avons abordé le problème d'estimation des paramètres d'un modèle harmonique 3-D représenté par une somme d'exponentielles complexes perturbées par un bruit additif gaussien. Notre contribution pour résoudre ce problème a porté sur l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur pour estimer l'ordre du modèle et les fréquences normalisées. Nous avons montré que les méthodes analytiques développées à l'ordre 2 peuvent être enrichies en utilisant les statistiques d'ordre supérieur. Deux techniques d'estimation fondées sur les matrices des cumulants d'ordre 4 sont

présentées : la méthode MEMP et ESPRIT 3-D. Les performances de ces deux techniques développées à la fois avec les statistiques d'ordre 2 et avec les cumulants ont été comparées en réalisant des simulation numériques. Ces simulations mettent en évidence les améliorations apportées par l'utilisation des cumulants en particulier lorsque le bruit additif est gaussien coloré.

Dans la dernière section de ce chapitre nous avons traité le problème de l'estimation des paramètres des processus évanescents de type 1 et 2. A partir des modèles paramétriques associés à ces composantes, nous avons montré que l'estimation de leurs paramètres peut être effectuée en utilisant les techniques d'estimation paramétrique 1 et 2-D.

Les algorithmes d'estimation développés dans ce chapitre seront utilisés dans le chapitre suivant pour analyser les blocs d'images sismiques 3-D.



# Chapitre 5

## Applications au filtrage des données sismiques

### 5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter une application de la modélisation paramétrique 3-D au traitement de blocs d'images. Nous nous intéressons au filtrage des images et de blocs d'images sismiques pour l'interprétation des géologues en améliorant la lisibilité des couches géologiques et du réseau de failles qui les fracturent.

Ce chapitre est organisé en quatre parties :

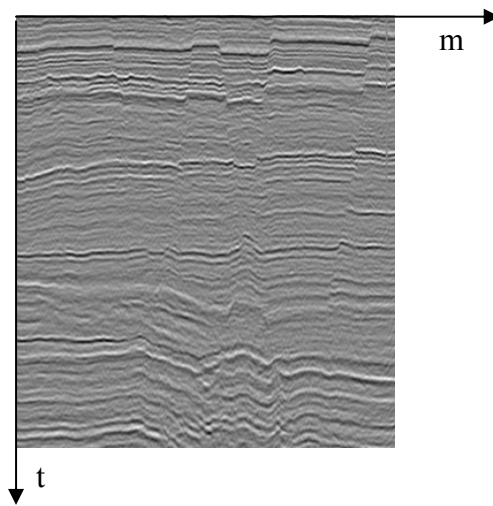
Dans la première partie, nous présentons une introduction aux données sismiques. Ces données se présentent sous forme d'images 2-D ou 3-D qui reproduisent l'agencement des couches géologiques du sous-sol. Nous y décrivons brièvement les principales caractéristiques de ces données tant du point de vue de l'information géologique que du bruit spécifique à ce domaine d'application.

Dans la deuxième partie, nous présentons brièvement deux méthodes de filtrage des données sismiques. Dans la troisième partie, nous proposons deux méthodes paramétriques pour filtrer les blocs sismiques 3-D. Nous y abordons premièrement le problème de la séparation du signal et du bruit par une approche spectrale. La méthode proposée est théoriquement fondée sur la décomposition de Lebesgue d'une mesure spectrale en deux parties, une partie absolument continue et une autre singulière. Des résultats expérimentaux issus de l'analyse de blocs sismiques 3-D sont commentés afin de conclure sur les avantages et les limites de la méthode. Ensuite, nous développons une deuxième méthode paramétrique appelée *filtre propre 3-D* (3-D Eigen Filter). Elle est fondée sur une analyse fréquentielle et sur la projection orthogonale des données sur le sous-espace engendré par une sélection de composantes fréquentielles issue de l'analyse. Le point de départ de cette méthode est la modélisation des images sismiques par un modèle harmonique 3-D perturbé par un bruit additif. La construction du masque de convolution, utilisé pour rehausser le signal sismique, fait appel aux techniques d'estimation fréquentielle développées dans le chapitre 4. Des résultats expérimentaux obtenus par cette méthode seront présentés et comparés avec ceux obtenus par les méthodes les plus fréquemment utilisées pour traiter les images sismiques.

## 5.2 Images sismiques 2-D et 3-D

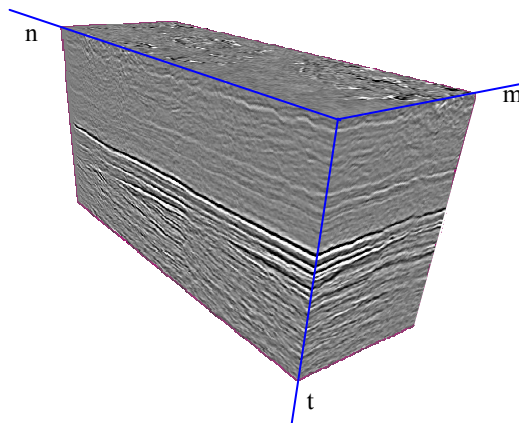
La technique de sismique réflexion est l'un des principaux outils d'exploration de champs pétrolifères. Elle fournit aux géologues des images 2-D ou 3-D représentant la succession et les limites des couches géologiques du sous sol. Cette technique consiste à étudier les réflexions d'ondes élastiques produites en surface et qui se propagent à travers les différentes couches du sous-sol. Les ondes réfléchies sont recueillies en surface par des capteurs (géophones, hydrophones,...) qui les convertissent en tension électrique. Les capteurs, repartis en surface régulièrement le long de ligne, permettent d'obtenir des images sismiques bidimensionnelles (Fig. 5.1). Des blocs d'images sismiques 3-D (Fig. 5.2) sont obtenus en multipliant et en déplaçant de telles lignes de capteurs.

Les images sismiques 3-D se présentent sous la forme d'une matrice tridimensionnelle  $y(m,n,t)$  qui possède deux dimensions spatiales  $(m,n)$  et une dimension temporelle notée  $t$ . Les variables spatiales sont relatives à la position des capteurs en surface, et la variable temporelle correspond au temps d'aller retour de l'onde. L'image  $(m,t)$  prise dans la direction des lignes de capteurs est dite "inline" (en ligne), tandis que l'image  $(n,t)$  est appelé "crossline". Les images 2-D inline et crossline sont appelées sections sismiques. La variable temporelle s'interprète aussi comme la troisième dimension spatiale correspondant à la profondeur, dans le cas où l'on dispose de la connaissance de la vitesse de propagation des ondes.



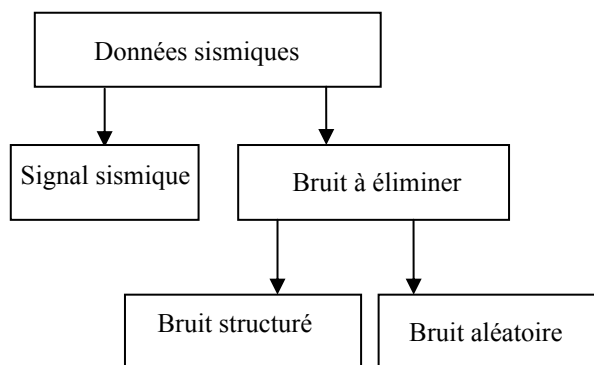
*Fig. 5.1 Exemple de section sismique 2-D (inline)*





*Fig. 5.2 Exemple de bloc sismique 3-D*

Dans le contexte de l'exploration pétrolière, l'interprétation des images sismiques permet aux géologues d'identifier les roches mères, où se sont formés les hydrocarbures, d'analyser les migrations possibles de ces hydrocarbures et de déterminer les réservoirs potentiels où ils pourraient s'être accumulés. Cette interprétation est souvent précédée par d'autres traitements pour améliorer la qualité des images interprétées. En effet, comme toutes les données issues de capteurs physiques, les images sismiques sont perturbées par des bruits de natures différentes: les bruits aléatoires et les bruits structurés ou cohérents. Ainsi nous considérons, dans toute la suite, que les données sismiques ont la structure représentée dans la figure 5.3. Un exemple d'image sismique 2-D perturbée par un bruit structuré et montré dans la figure 5.4.



*Fig. 5.3 Composantes des données sismiques*

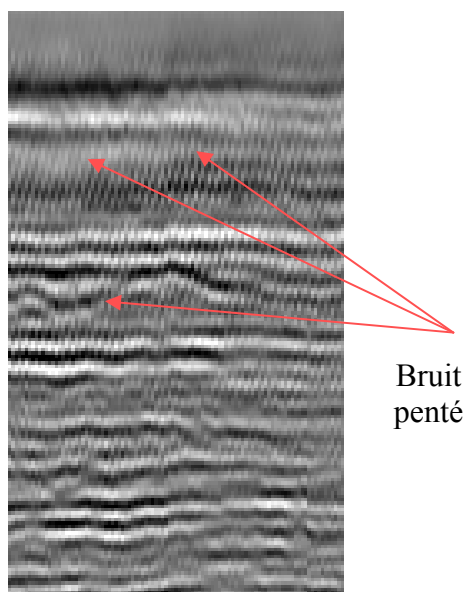


Fig. 5.4 Exemple de bruit structuré

## 5.3 Filtrage des données sismiques

Il existe une grande diversité dans les approches utilisées pour l'amélioration des images sismiques. Certaines méthodes s'appuient sur des modèles paramétriques comme les modèles AR, MA ou ARMA [Guit03], [Guit05], [Fom03]. D'autres approches appelées non paramétriques s'appuient sur des calculs statistiques, des transformations orthogonales, ou autres opérateurs mathématiques. Parmi ces dernières nous pouvons citer les méthodes suivantes [Mari97][Tric03][Stew93] :

- Le filtrage FK: filtrage dans le domaine des fréquences spatiales ( $f$ ) et temporelle ( $k$ )
- Le filtrage propre : eigen filter
- Les filtres non linéaires : filtre de semblance, filtre médian.

La majorité de ces méthodes s'appliquent souvent à l'étape de prétraitement (phase de sommation) pour obtenir des images post-strack que nous considérons ici. Cependant quelques méthodes, comme le filtre FK, ou le filtre propre peuvent aussi être utilisée pour filtrer les données post-strack moyennant quelques adaptations.

### 5.3.1 Les filtres propres :

Cette classe de filtres couvre toutes les méthodes fondées sur la décomposition en valeurs singulière (SVD). En traitement sismique, ces méthodes s'appliquent dans le domaine fréquentiel et sont connues sous les noms, " $F-x$  eigenimage filtering" dans le cas des image 2-D [Tric02] et " $F-xy$  eigenimage filtering" pour le cas 3-D.

Considérons une section sismique 2-D qui contient  $N$  traces ( $N$  colonnes),  $y_n(t), n = 1 \dots, N$ . Le point de départ de la méthode propre  $F - x$  est le calcul de la TFD 1-D  $h_n$  de chaque trace  $y_n$  pour obtenir une matrice complexe à deux dimensions : fréquences temporelles et fréquences spatiales. Pour chaque fréquence temporelle fixe  $f$ , il correspond un vecteur  $h(f)$  de taille  $N$  qui contient les valeurs de la TFD en  $f$  de toutes les traces

$$h(f) = [h_1(f), \dots, h_N(f)] \quad (5.1)$$

A partir de ce vecteur, on construit une matrice  $H(f)$  de type Hankel de la manière suivante :

$$H(f) = \begin{bmatrix} h_1(f) & h_2(f) & h_3(f) & \dots & h_m(f) \\ h_2(f) & h_3(f) & h_4(f) & & h_{m+1}(f) \\ h_3(f) & h_4(f) & h_5(f) & & h_{m+2}(f) \\ \vdots & & & & \\ h_{N-m+1}(f) & h_{N-m+2}(f) & h_{N-m+3}(f) & & h_N(f) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Pour réduire le niveau du bruit aléatoire, le filtre  $F - x$  utilise la SVD de la matrice  $H(f)$  pour l'approximer par une autre matrice  $H_K(f)$  obtenue par une réduction du rang. En effet, cette dernière est obtenue par sommation des matrices propres élémentaires associées aux plus fortes valeurs propres. Après le calcul de la matrice  $H_K(f)$ , on remplace ses éléments anti-diagonaux par leur moyenne pour avoir une matrice  $\hat{H}_K(f)$  de type Hankel. Cette dernière contient les nouvelles valeurs du vecteur  $\hat{h}(f)$  de La TFD 1-D en  $f$  pour toutes les traces sismiques. Après le calcul du vecteur  $\hat{h}(f)$ , la calcul de La TFD inverse de chaque trace permet d'obtenir une section filtrée.

Les étapes principales du filtre propre  $F - x$ , se résument dans les points suivants :

- Calcul de la TFD  $h_n$  de chaque trace sismique  $y_n$
- Pour chaque fréquence temporelle  $f$ , extraire  $h(f)$ 
  - Construire la matrice Hankel  $H(f)$
  - Calcul de la matrice  $H_K(f)$  associée aux  $K$  plus grandes valeurs propres de  $H(f)$ .
  - Moyenne sur les anti-diagonales pour obtenir  $\hat{H}_K(f)$ .
- Calcul de La TFD inverse de chaque trace  $h_n$ .

Cette méthode a l'avantage de s'appliquer à la fois sur les images sismiques 2-D et 3-D et sans information a priori. Cependant, elle permet uniquement de réduire les bruits aléatoires et reste inefficace pour les bruits structurés. De plus, elle nécessite un temps de calcul important car la taille de la matrice  $H(f)$  est liée à la taille des traces sismiques.

D'après les travaux de [Tric02], il est recommandé d'appliquer cette méthode à un petit nombre de traces et de construire la matrice  $H(f)$  la plus carrée possible, c.à.d. prendre  $m = N / 2$ . Pour traiter

une image sismique 2-D de taille importante, il faut procéder d'une manière évolutive ou glissante sur l'ensemble de l'image.

### 5.3.2 Filtrage FK

Le filtre FK opère dans le domaine de Fourier et se résume aux trois points suivants:

- Calcul de la transformée de Fourier discrète des données (2-D ou 3-D)
- Calcul d'un gabarit fréquentiel : séparation du signal et du bruit dans le domaine spectral
- Calcul de la transformée inverse pour obtenir l'image filtré dans le domaine spatial.

La calcul du gabarit fréquentiel nécessite la définition de deux zones dans l'espace de Fourier: zone de rejection et zone permission. Nous reviendrons sur ce point dans la section 5.3.

Dans la section suivante nous allons présenter une méthode spectrale pour réduire les bruits dans les images sismiques 3-D. Cette méthode est fondée sur les résultats théoriques de la décomposition de Wold 3-D exposés dans le chapitre 2.

## 5.4 Méthodes proposées

### 5.4.1 Filtrage par décomposition spectrale

Considérons une image sismique 3-D  $\{y(m, n, t), 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N, 1 \leq t \leq T\}$  dont chaque voxel  $(m, n, t)$  est décrit par le modèle suivant :

$$y(m, n, t) = x(m, n, t) + b(m, n, t) \quad (5.3)$$

où la composante  $x(m, n, t)$  est un processus déterministe 3-D représentant la composante signal. La composante  $b(m, n, t)$  est un processus purement aléatoire représentant le bruit additif. Nous supposons que les deux composantes sont stationnaires et indépendantes.

Nous avons vu, dans le chapitre 2, que le spectre du processus  $y(m, n, t)$  est généralement mixte, c.a.d. une superposition de deux spectres de natures différentes :

$$S_y(\omega, \nu, \eta) = S_x(\omega, \nu, \eta) + S_b(\omega, \nu, \eta) \quad (5.4)$$

où le spectre  $S_x(\omega, \nu, \eta)$  est absolument continu et  $S_b(\omega, \nu, \eta)$  singulier. La méthode de filtrage, que nous allons développer, est fondée sur les deux relations (5.3) et (5.4) et se résume en deux étapes principales :

- Décomposition du spectre de Fourier de données  $F_y$  en deux parties : une partie continue  $F_a$  et une partie singulière  $F_s$ .

- Estimation du signal sismique et du bruit additif en calculant respectivement la TFD inverse de la partie singulière et de la partie continue.

La décomposition du spectre en deux parties  $F_a$  et  $F_s$  nécessite la connaissance des fréquences associées à la composante déterministe. Nous avons vu, dans le chapitre 3, que la composante déterministe est, théoriquement, une somme de trois composantes orthogonales : composante harmonique, composante évanescence de type 1 et composante évanescence de type 2. De plus, les fréquences de ces composantes sont réparties sur des supports ayant la mesure de Lebesgue égale à zéro. En pratique, les composantes déterministes se caractérisent dans le domaine spectral par la présence de trois types de singularités qui apparaissent sous les trois formes suivantes :

- « Pics 3-D » : des pics harmoniques supportés par des points isolés.
- « Pics 2-D » : des points à fortes énergies repartis sur des lignes.
- « Pics 1-D » : des points à fortes énergies repartis sur des plans.

De ce fait, la décomposition d'un volume d'image en deux parties, une partie structurée et une autre aléatoire, peut s'effectuer en utilisant un critère énergétique dans le domaine de Fourier. Cette technique a été développée dans [Kris96], [Fran96] pour décomposer les textures 2-D et consiste à considérer les fréquences dont le module est supérieur à un certain seuil comme les fréquences associées à la composante déterministe. En effet, pour un seuil sélectionné  $\alpha \in ]0,1[$ , si nous notons par  $M_S$  le maximum en module du spectre  $S_y(\omega, \nu, \eta) : M_S = \max\{|S_y(\omega, \nu, \eta)|, (\omega, \nu, \eta) \in \Lambda\}$ , le support spectral de la composante déterministe est défini par la relation suivante :

$$\Lambda_d = \{(\omega, \nu, \eta) \in \Lambda \mid |S_y(\omega, \nu, \eta)| \geq \alpha \cdot M_S\}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (5.5)$$

Après la détermination de l'ensemble des fréquences  $\Lambda_d$ , la décomposition du spectre de Fourier en deux parties  $F_a$  et  $F_s$  s'obtient par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{F}_s(\omega, \nu, \eta) = F_y(\omega, \nu, \eta) & \forall (\omega, \nu, \eta) \in \Lambda_d \\ F_s(\omega, \nu, \eta) = 0 & \forall (\omega, \nu, \eta) \notin \Lambda_d \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\begin{cases} \tilde{F}_a(\omega, \nu, \eta) = F_y(\omega, \nu, \eta) & \forall (\omega, \nu, \eta) \notin \Lambda_d \\ F_a(\omega, \nu, \eta) = 0 & \forall (\omega, \nu, \eta) \in \Lambda_d \end{cases} \quad (5.7)$$

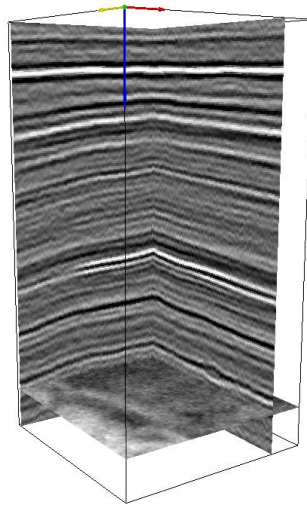
Finalement, les deux composantes signal et bruit seront estimées en calculant la TFD 3-D inverse des deux parties  $F_a$  et  $F_s$  respectivement.

### 5.4.1.1 Exemples

Pour mieux comprendre le principe de cette méthode, nous considérons deux exemples d'images sismiques 3-D issus de deux environnements géologiques différents.

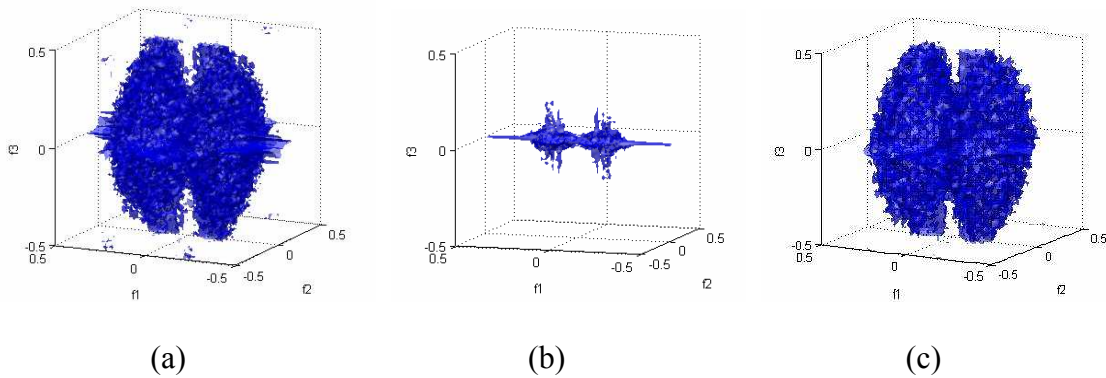
#### • Exemple 1

Considérons le bloc sismique de taille 256\*128\*128 représenté sur la figure 5.5.



*Fig. 5.5 Image sismique 3-D*

Avec la technique graphique développée dans [Kris96], le seuil sélectionné pour cet exemple est  $\alpha = 0.75$ . En utilisant les équations (5.5) (5.6) et (5.7), nous obtenons les deux parties singulière et continue du spectre représentées sur la figure 5.6. La décomposition finale du bloc en signal sismique et bruit additif obtenue en calculant la TFD 3-D inverse est montrée sur la figure 5.7.



*Fig. 5.6 Décomposition du spectre en deux parties : (a) spectre du bloc original, (b) spectre de la composante déterministe, (c) spectre de la partie aléatoire.*

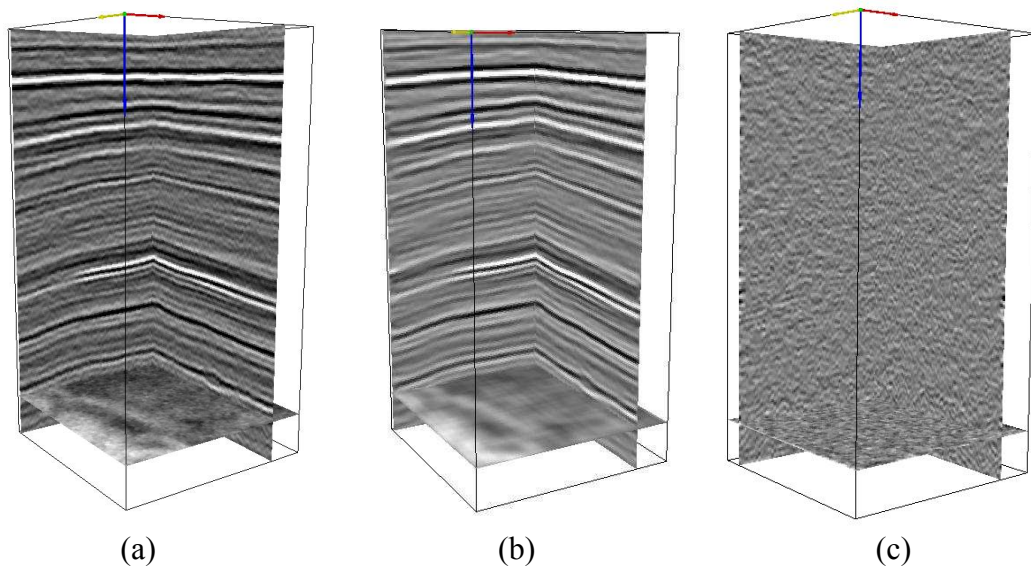


Fig. 5.7 Décomposition de l'image sismique 3-D de 5.5  
 (a) : bloc original, (b) : composante signal, (c) : composante bruit.

Ces résultats montrent que la composante signal est restaurée dans sa continuité et son intensité énergétique ainsi que dans ses variations. Ceci rend l'image plus lisible et plus facile à interpréter pour identifier et positionner en profondeur les différentes couches géologiques et leur terminaison

- **Exemple 2 :**

Nous considérons un deuxième bloc sismique que nous représentons sur la figure 5.8 (a). La décomposition en deux composantes déterministes et purement aléatoires correspondant à un seuil  $\alpha = 0.78$  est représentée sur la figure 5.8. Cette figure montre que sur la composante signal 5.8 (b), les détails dans les niveaux énergétiques et les ruptures de continuité des couches géologiques (failles) de faibles extensions verticales deviennent visibles (zone A). Il en est de même dans la zone B pour laquelle les ambiguïtés, présentes dans l'image d'origine entre terminaison de couches et ruptures (failles) sont clairement levées une fois la composante signal isolée.

#### 5.4.1.2 Avantages et inconvénients :

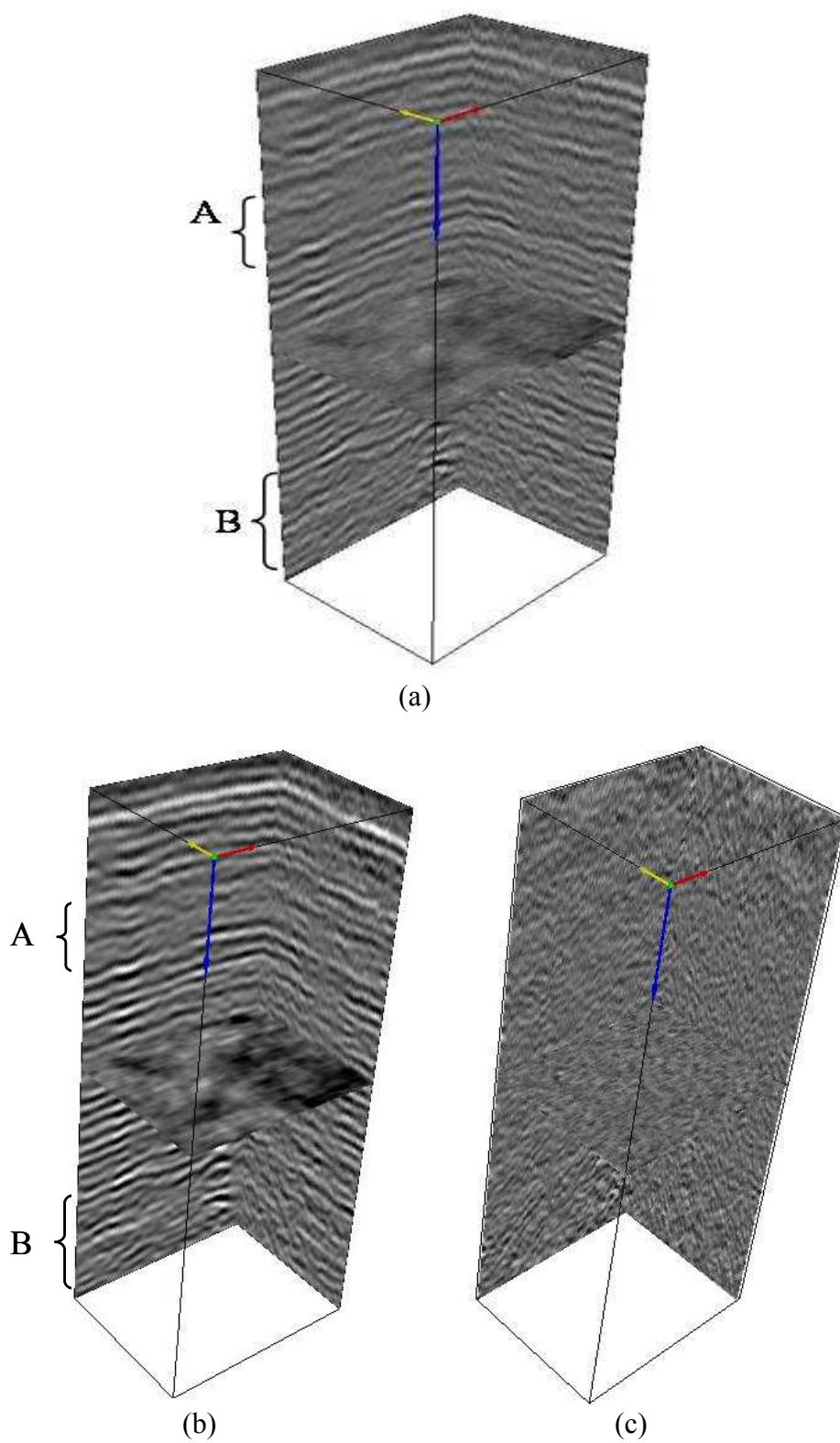
L'avantage principal de la méthode développée dans cette section, est sa facilité de mise en oeuvre car elle est fondée sur des calculs classiques de la transformée de Fourier et sur la technique de seuillage. Cependant, elle présente deux inconvénients majeurs. Premièrement, elle dépend d'un seuil difficile à déterminer avec précision. Deuxièmement, elle ne permet pas d'éliminer ou de réduire les bruits structurés. En effet, la présence de bruit structuré dans une image sismique se traduit dans le domaine spectral par la présence d'une composante fréquentielle singulière. Autrement dit, le bruit structuré possède des fréquences d'énergies supérieures ou de niveau équivalent à celles du signal sismique. Ainsi, l'utilisation du critère énergétique, à lui seul, ne permet pas de distinguer parmi les fréquences à fortes énergies celles qui correspondent au signal et celles qui correspondent au bruit

structuré. Pour mieux illustrer ce problème nous montrons dans la figure 5.10 une image inline extraite du bloc 2 filtré. Cette figure montre la présence marquée d'un bruit oblique (penté) sur la partie supérieure de l'image.

Avant de développer dans la section suivante une méthode qui permettra d'éliminer à la fois les bruits aléatoires et structurés, nous notons que la méthode de filtrage par décomposition spectrale peut être améliorée en lui ajoutant une étape supplémentaire. Cette étape consiste à séparer les différentes parties déterministes composant la donnée sismique et à distinguer celles qui correspondent au signal de celles qui correspondent au bruit. Cependant cette étape est délicate à mettre en oeuvre dans le cas 3-D car la donnée sismique ne présente pas souvent des composantes spectrales faciles à identifier sans ambiguïté.

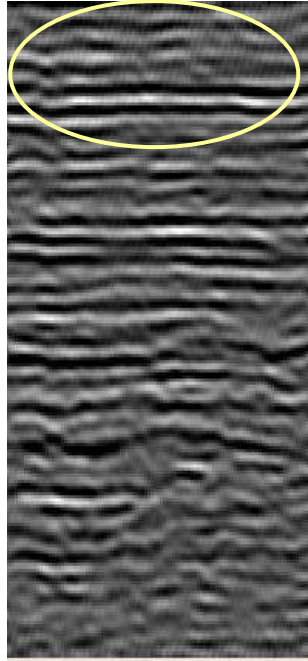
Néanmoins, nous pouvons montrer l'amélioration obtenue par cette étape supplémentaire par rapport à la méthode précédente sur une image sismique 2-D. Pour cela, nous considérons la donnée sismique 2-D de la figure 5.10(a). Le résultat obtenu par la décomposition spectrale, pour un seuil  $\alpha = 0.75$ , est représenté sur la figure 5.10. En examinant le spectre de l'image filtrée représenté sur la figure 5.11 nous remarquons la présence de deux lignes horizontales qui traduit l'existence d'une composante évanescence 2-D. En utilisant les techniques d'estimation paramétrique d'un champ de Wold 2-D développées dans [Liu96] [Rama02], nous pouvons réaliser une deuxième décomposition de l'image filtrée par extraction de la composante évanescence 2-D. La composante extraite et sa représentation spectrale sont respectivement montrées sur la figure 5.12 et 5.13.



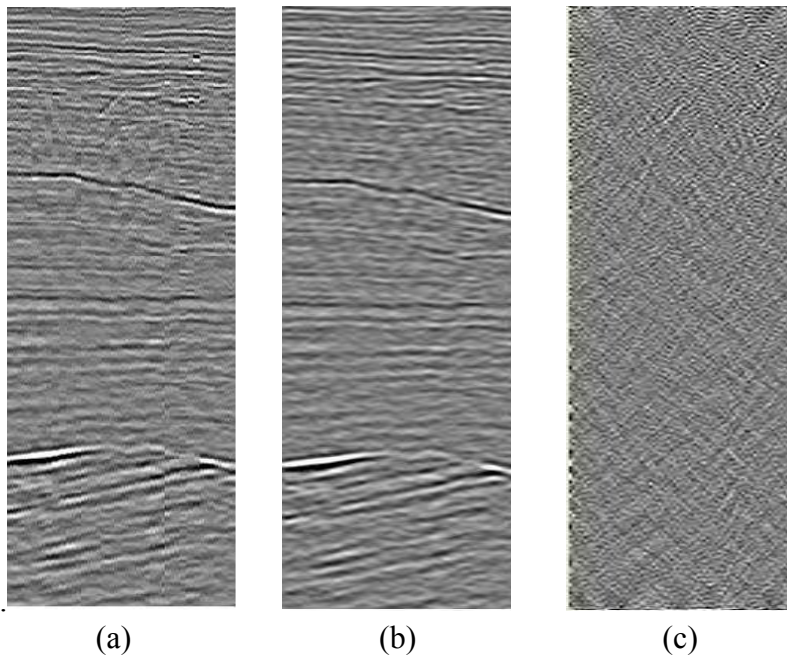


*Fig. 5.8 Décomposition d'image sismique 3-D*

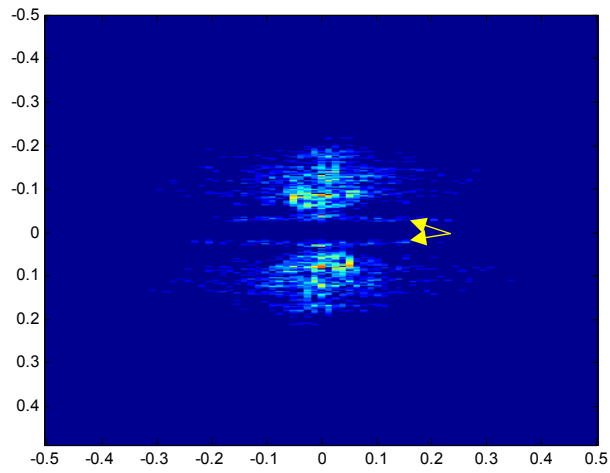
*(a) : Bloc sismique, (b) : Composante signal, (c) : Composante bruit*



*Fig. 5.9 Présence du bruit structuré dans la composante signal*



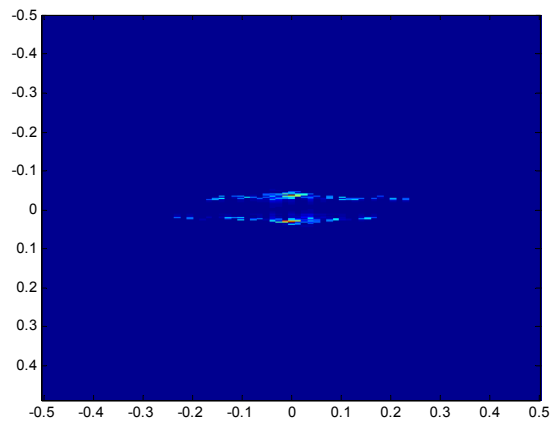
*Fig. 5.10 Première séparation du signal et du bruit  
(a): Image originale, (b) : Image filtrée, (c) Bruit éliminé*



*Fig. 5.11 Spectre de l'image filtrée de la figure 5.11 (b)*

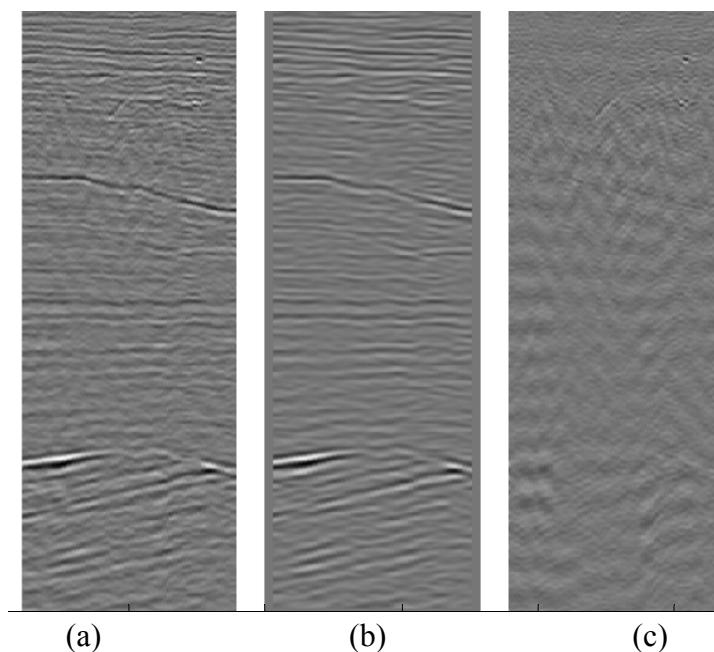


*Fig. 5.12 Composante évanescente extraite de l'image 5.11 (b)*



*Fig. 5.13 Spectre de la composante évanescente.*

Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.12, la composante évanescente extraite ne présente aucune structure sismique à préserver. Ainsi, nous pouvons la considérer comme une composante de bruit à éliminer. Le résultat final, obtenu après l'élimination de la composante évanescente, est représenté sur la figure 5.14.



*Fig. 5.14 Décomposition obtenue après l'extraction de la composante évanescente*

L'image (a), de la figure 5.10 (a) présente l'image originale 5.10, l'image (b) est sa version filtrée, tandis que la composante bruit est la somme de deux composantes éliminées: le bruit aléatoire illustré dans la figure 5.11 (c) et la composante évanescente 5.12.

## **5.4.2 Approche paramétrique : Filtre propre**

La méthode paramétrique que nous allons développer dans cette section est un outil dédié à l'atténuation à la fois du bruit aléatoire et du bruit structuré dans les images sismiques tridimensionnelles [Stit06].

### **5.4.2.1 Modélisation des données sismiques 3-D**

Nous supposons dans cette section que les données sismiques 3-D sont modélisées de la façon suivante:

$$y(m, n, t) = x(m, n, t) + b_1(m, n, t) + b_2(m, n, t) \quad (5.8)$$

où  $x(m, n, t)$ ,  $b_1(m, n, t)$ , et  $b_2(m, n, t)$  représentent respectivement le signal sismique utile, le bruit structuré et le bruit aléatoire. De plus, nous supposons que  $x(m, n, t)$  et  $b_1(m, n, t)$  sont modélisés par des modèles harmoniques 3-D à valeurs réelles comme suit:

$$x(m, n, t) = \sum_{k=1}^J a_k \cos(2\pi(mf_{k_1} + nf_{k_2} + tf_{k_3}) + \varphi_k) \quad (5.9)$$

$$b_1(m, n, t) = \sum_{k=I+1}^{K_I} a_k \cos(2\pi(mf_{k_1} + nf_{k_2} + tf_{k_3}) + \varphi_k) \quad (5.10)$$

Les triplets  $(f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3})$  représentent les fréquences 3-D normalisées. Les termes  $\{a_k\}$  et  $\{\varphi_k\}$  représentent respectivement les amplitudes et les phases. Ces dernières sont supposées indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Finalement, le bruit aléatoire  $b_2(m, n, t)$  est supposé gaussien et de moyenne nulle.

Pour utiliser les mêmes notations que dans le chapitre 4, les deux équations (5.9) et (5.10) peuvent être combinées sous la forme d'un modèle exponentiel formé d'une somme de composantes complexes conjugués. Ainsi, le modèle précédent s'écrit sous la forme suivante :

$$x(m, n, t) = \sum_{k=1}^K c_k \exp[j2\pi(mf_{k_1} + nf_{k_2} + tf_{k_3}) + \varphi_k] + b_2(m, n, t) \quad (5.11)$$

où  $K = 2K_I$ .

#### 5.4.2.2 Fondement du filtre proposé

Avant de développer les détails de cette méthode, nous pouvons résumer ses principales étapes dans les trois points suivants:

- Estimation de l'ensemble des fréquences 3-D:  $\Lambda = \{(f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3}), k = 1, \dots, K\}$ .
- Séparation des fréquences : élimination des fréquences  $\Lambda_b$  associées au bruit structuré.
- Construction du filtre dans le domaine spatial : calcul d'un masque de convolution 3-D.

#### • Estimation fréquentielle 3-D

L'estimation des fréquences consiste à déterminer les  $K$  triplets  $(f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3})$  qui représentent l'ensemble des fréquences correspondantes au signal sismique et au bruit structuré. Cette étape s'effectue à l'aide des méthodes d'analyse spectrale à haute résolution. Comme nous l'avons déjà signalé dans le chapitre 4, l'estimation fréquentielle peut être réalisée à partir de la matrice d'autocorrélation ou celle construite à partir des éléments de la diagonale des cumulants d'ordre 4. Ces deux matrices sont inconnues et doivent être estimées à partir des données. Pour estimer la matrice d'autocorrélation de taille  $PQL \times PQL$  (avec  $P, Q$ , et  $L$  impairs), nous allons utiliser l'estimateur suivant:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{(M - P + 1)(N - Q + 1)(T - L + 1)} \sum_{p=I+P/2}^{M+1-P/2} \sum_{q=I+Q/2}^{N+1-Q/2} \sum_{l=I+L/2}^{T+1-L/2} \mathbf{Y}_{pql} \cdot (\mathbf{Y}_{pql})^H \quad (5.12)$$

où  $\hat{\mathbf{Y}}_{p,q,l}$  est le vecteur observation obtenu par la concaténation ligne par ligne et couche par couche des données contenues dans une fenêtre cubique de taille  $P \times Q \times L$  (voir figure 5.15). Pour un point  $(p, q, l)$  de la grille 3-D, cette fenêtre de voisinage est décrite par l'ensemble suivant :

$$y_{pql} = \{y(m, n, t) / p - P/2 \leq m \leq p + P/2, q - Q/2 \leq m \leq q + Q/2, l - L/2 \leq t \leq l + L/2\} \quad (5.13)$$

Pour estimer la matrice des cumulants d'ordre 4 nous pouvons utiliser l'expression suivante :

$$\hat{\mathbf{C}}_y = \hat{\mathbf{M}}_4 - 3\hat{\mathbf{R}}(0,0,0) \cdot \hat{\mathbf{R}} \quad (5.14)$$

où la matrice  $\hat{\mathbf{M}}_4$  est la matrice estimée des moments d'ordre 4. Les relations liant les cumulants et les moments d'ordre 4 sont développées en Annexe A et leur estimation est développée dans l'annexe B.

### • Séparation des fréquences

Après l'étape d'estimation fréquentielle, nous allons séparer l'ensemble de fréquences obtenues  $\Lambda = \{f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3}, k = 1, \dots, K\}$  en deux ensembles  $\Lambda_b$  et  $\Lambda_s = \Lambda / \Lambda_b$ . Le premier contient les fréquences associées au bruit structuré et le deuxième contient toutes les fréquences associées au signal sismique. Ces dernières doivent être sélectionnées en tenant compte de la structure des données dans le domaine spatial. En effet, les fréquences associées au signal sismique doivent correspondre à la structure et à l'inclinaison des couches géologiques. Dans la plupart des images sismiques, nous remarquons que les horizons géologiques ont une faible inclinaison par rapport à l'axe horizontal et que certains bruits structurés présentent une plus forte pente. Ainsi, la sélection des fréquences que l'on va associer au signal sismique peut s'effectuer selon leurs positions par rapport à l'axe représentant l'horizontal dans le domaine spatial.

Une manière de distinguer les fréquences de signal parmi les fréquences estimées consiste à définir dans le domaine spectral deux zones: la *zone de permission* et la *zone de réjection*. La zone de permission s'interprète comme le domaine spectral acceptable pour le signal sismique et la zone de rejection correspond aux fréquences de bruit structuré.

Pour les images sismiques 2-D, la zone de permission est définie par un angle  $\theta_0$  comme dans la figure 5.18. L'angle  $\theta_0$  représente dans le domaine spatial l'inclinaison maximale des horizons par rapport à l'horizontale. Dans le cas des images sismiques 3-D, la zone de permission est définie par un cône ayant pour axe de révolution ( $of_1$ ) et à base elliptique. Les limites de ce cône sont données par les paramètres  $a$  et  $b$  comme nous pouvons le voir sur la figure 5.17. Ces paramètres correspondent, dans le domaine spatial, à deux angles  $\theta$  et  $\phi$ , représentant les inclinaisons maximales des horizons par rapport à l'horizontale, respectivement dans chacune des vues de face et de côté. Le cône est également limité dans la direction de son axe ( $of_1$ ) par un seuil  $c$ , correspondant à la limite des hautes fréquences.

Conformément à la zone de permission définie ci-dessus, les fréquences de signal sismique sont celles qui vérifient la relation suivante:

$$\left(\frac{f_3}{a}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{b}\right)^2 - \left(\frac{f_1}{c}\right)^2 \leq 0 \quad (5.15)$$

Pour les images sismiques 2-D, le vecteur d'observation  $Y_{p,q}$  est une fenêtre rectangulaire de taille  $PQ$  montrée sur la figure (5.16)

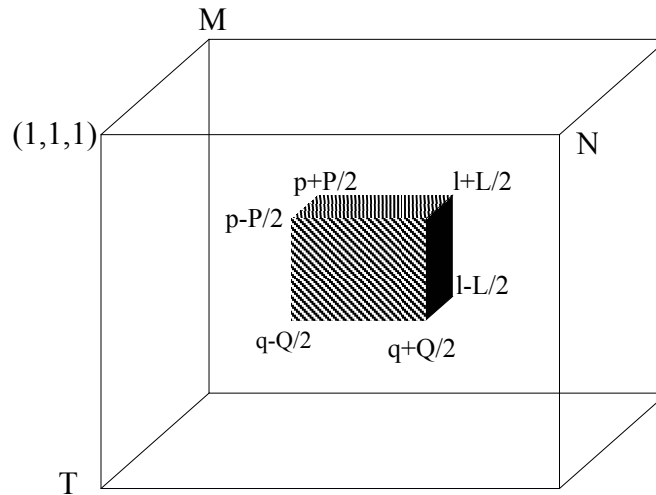


Fig. 5.15 Fenêtre d'observation 3-D

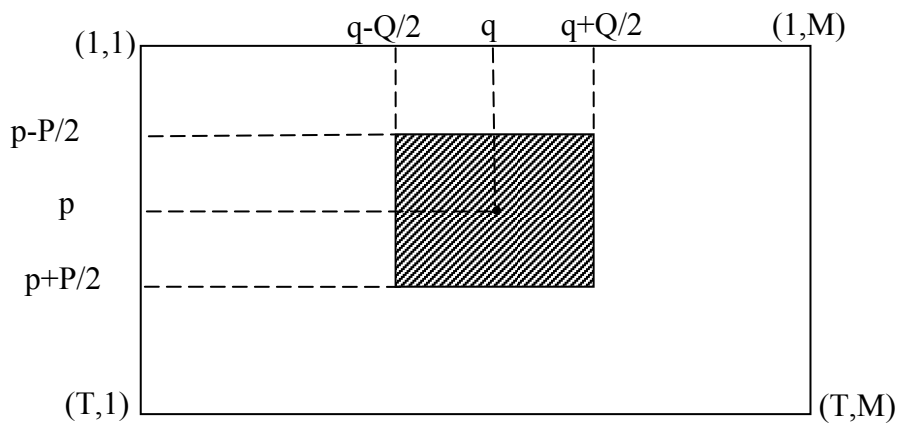


Fig. 5.16 Fenêtre d'observation 2-D.

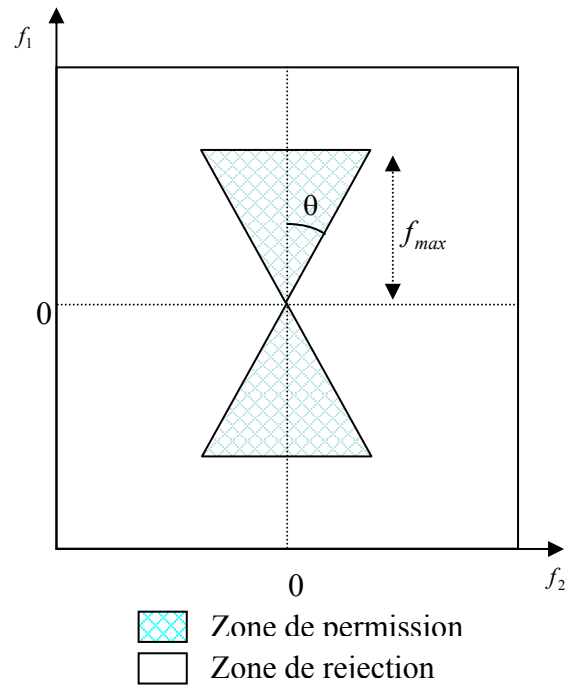


Fig. 5.17 Zone de permission et de rejection dans l'espace fréquentiel 2-D

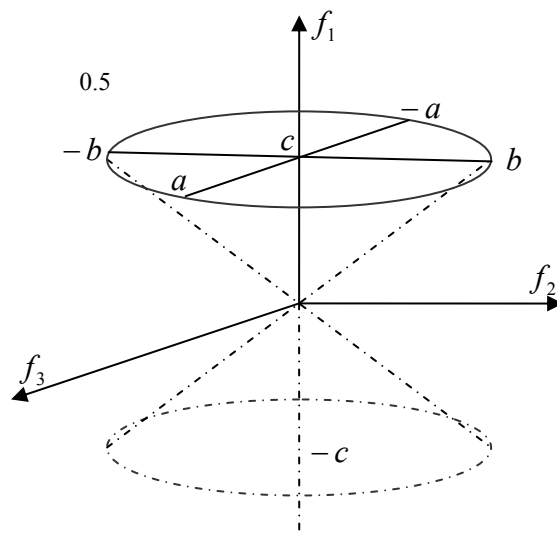


Fig. 5.18 Zone de permission dans l'espace fréquentiel 3-D



- **Construction du filtre dans le domaine spatial**

La détermination des fréquences de signal  $\Lambda_s = \{f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}, i = 1, \dots, 2I\}$  par l'étape précédente permet de déterminer les sous-espaces signal et bruit. La construction du sous-espace signal va nous permettre de réduire le bruit. En effet, en projetant les observations sur le sous espace signal, nous éliminons à la fois une partie de bruit aléatoire et de bruit structuré.

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, le sous espace signal des observations est engendré par les colonnes de la matrice de Vandermonde 3-D notée  $\mathbf{S}_{[PQL,2I]}^1$ . Cette matrice est construite en utilisant les fréquences estimées  $\Lambda_s$  et le produit de Khatri-Rao suivant :

$$\mathbf{S}_{[PQL,2I]}^1 = \mathbf{S}_{[P,2I]}^1 \circ \mathbf{S}_{[Q,2I]}^2 \circ \mathbf{S}_{[L,2I]}^3 \quad (5.16)$$

Les trois matrices  $\mathbf{S}_{[P,2I]}^1$ ,  $\mathbf{S}_{[Q,2I]}^2$ ,  $\mathbf{S}_{[L,2I]}^3$  sont des matrices de Vandermonde 1-D associées aux fréquences conservées  $\Lambda_s$ . Ces matrices sont définies par la relation (4.23). La définition du produit de Khatri-Rao est rappelé en Annexe F.

La projection orthogonale sur l'espace engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}_{[PQL,2I]}^1$  est donnée par l'opérateur matriciel suivant :

$$\hat{\mathbf{P}}\mathbf{r} = \mathbf{S}_{[PQL,2I]}^1 (\mathbf{S}_{[PQL,2I]}^1)^\dagger \quad (5.17)$$

où  $(.)^\dagger$  désigne l'opérateur pseudo inverse. La matrice obtenue  $\hat{\mathbf{P}}\mathbf{r}$  est de taille  $PQL \times PQL$ .

Considérons une fenêtre cubique d'observation  $\mathbf{Y}_{m,n,t}$  de taille  $P \times Q \times L$  donnée par (5.11). Pour filtrer le voxel central  $y(m,n,t)$ , nous allons extraire la ligne du milieu de la matrice  $\hat{\mathbf{P}}\mathbf{r}$  et la transformer en un masque de convolution tridimensionnel de dimension  $P \times Q \times L$ . Notons le masque obtenu par  $H = [h_{p,q,l}]$ , la version filtrée du voxel  $y(m,n,t)$  est donnée par la relation suivante :

$$\hat{y}(m,n,t) = \sum_{p=-P/2}^{P/2} \sum_{q=-Q/2}^{Q/2} \sum_{l=-L/2}^{L/2} h_{p,q,l} y(m-p, n-q, t-l) \quad (5.18)$$

Le bruit éliminé est donné par la différence entre le bloc original et le bloc filtré:

$$b(m,n,t) = y(m,n,t) - \hat{y}(m,n,t) \quad (5.19)$$

Notons que pour les images sismiques 2-D la matrice de Vandermonde 2-D qui engendre le sous- espace signal est donnée par la formule suivante:

$$\mathbf{S}_{[PQ,2I]}^1 = \mathbf{S}_{[P,2I]}^1 \circ \mathbf{S}_{[Q,2I]}^2 \quad (5.20)$$

L'opérateur projection orthogonale 2-D et le masque de convolution correspondant sont définis de la même manière que dans le cas 3-D.

## 5.4.3 Résultats expérimentaux

### 5.4.3.1 Cas d'images sismiques 2-D

- Exemple 3

Considérons l'image sismique 2-D représentée sur la figure 5.19. Notre objectif est de réduire le bruit structuré (penté) présent d'une façon plus marquée sur sa partie supérieure (zone A). Pour cela, nous avons estimé une matrice de cumulants d'ordre 4 avec les paramètres  $P=Q=9$ . Avec ces paramètres, la matrice obtenue est de taille  $81 \times 81$ . Pour estimer l'ordre du modèle (nombre de fréquences  $K$ ), nous avons utilisé la SVD de la matrice  $C_y$  et le critère à seuil de (3.60). Rappelons que ce critère permet de détecter le nombre de valeurs singulières significatives de  $C_y$ . Pour un seuil de  $\varepsilon=0.999$ , le nombre de fréquences estimées est  $K=22$ . La courbe représentant les valeurs singulières de la matrice des cumulants est représentée dans la figure 5.20. Par la méthode ESPRIT 2-D fondée sur la matrice des cumulants, nous avons obtenu les fréquences représentées sur la figure 5.21. Pour cet exemple la zone de permission 2-D (figure 5.17) est construite avec un angle  $\theta_0 = 35^\circ$  et une fréquence de coupure  $f_{\max} = 0.3$ . Sur la figure 5.22 nous remarquons que le bruit oblique présent de la zone A de l'image a bien été éliminé.

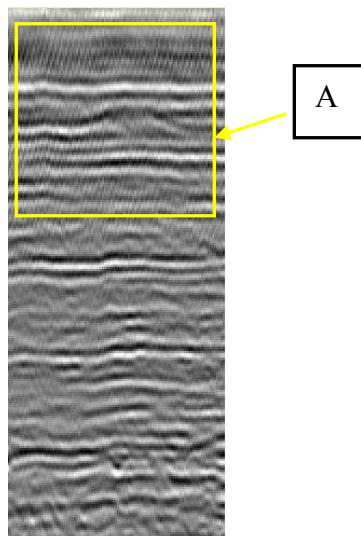


Fig. 5.19 Image sismique 2-D

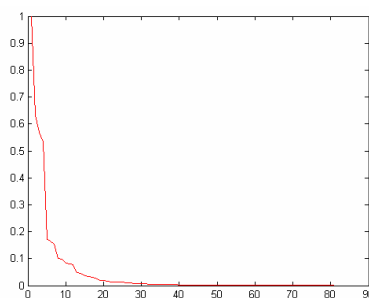
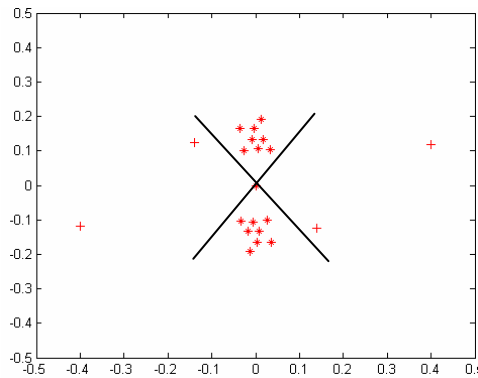
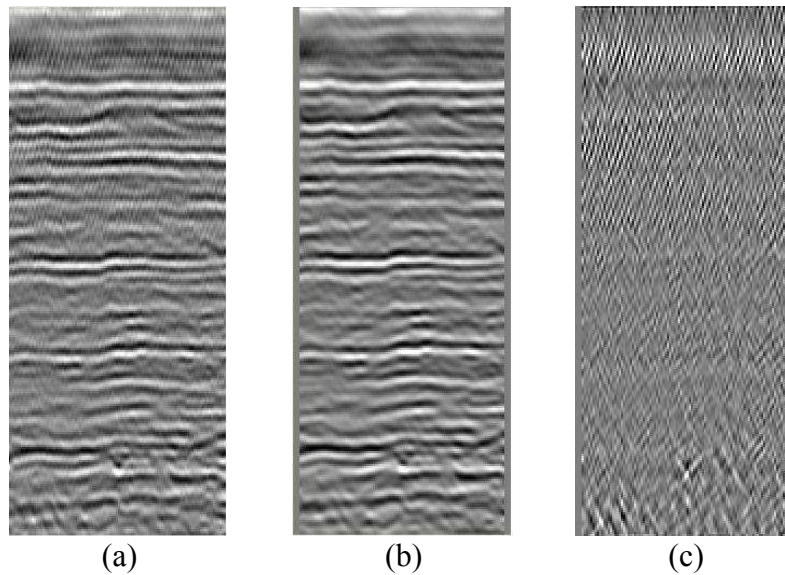


Fig. 5.20 Représentation des valeurs singulières de la matrice  $C_y$



*Fig. 5.21 Fréquences estimées*



*Fig. 5.22 Résultat du filtrage 2-D de l'exemple 3, (a) : Image originale, (b) : Image filtrée, (c) Bruit éliminé*

• **Exemple 4**

Nous nous intéressons dans cet exemple à la comparaison entre les deux méthodes paramétriques suivantes :

- Filtre propre fondé sur les statistiques d'ordre deux : l'estimation fréquentielle est réalisée par la méthode ESPRIT 2-D – SOS.
- Filtre propre fondé sur les cumulants d'ordre 4: l'estimation fréquentielle est effectuée par la méthode ESPRIT 2-D – HOS.

Pour cela, nous avons estimé à partir de l'image sismique 5.10 la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  et celle des cumulants d'ordre 4  $\mathbf{C}$  avec les mêmes paramètres  $P$  et  $Q$  et nous avons fixé l'angle d'ouverture de la zone de permission  $\theta$  à la valeur  $45^\circ$ .

**Première cas:**  $P = Q = 9$

La figure 5.23 montre les courbes présentant les valeurs propres des deux matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$ . La courbe en rouge présente les valeurs propres de la matrice des cumulants.

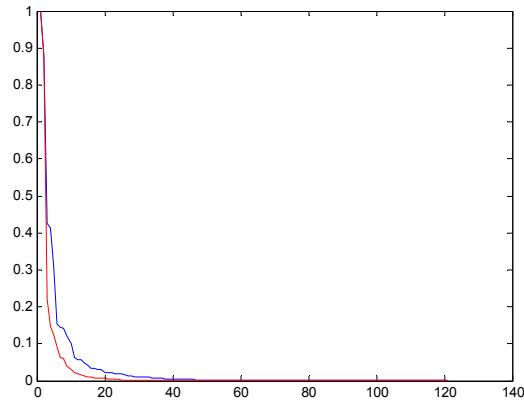


Fig. 5.23 Valeurs singulières de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$ .

Afin de comparer les deux méthodes au niveau du nombre de fréquences estimées, nous avons utilisé le critère (3.60) avec le seuil  $\xi = 0.999$ . Les figures 5.24 et 5.25 fournissent les résultats obtenus par les deux méthodes. Sur ces figures, les fréquences en bleu sont celles qui appartiennent à la zone de permission.

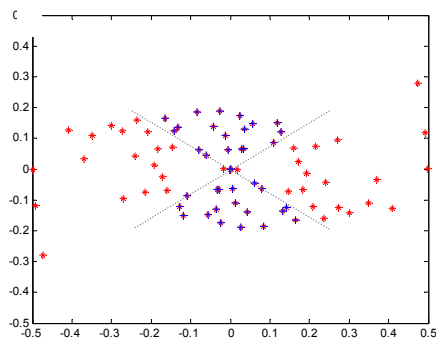
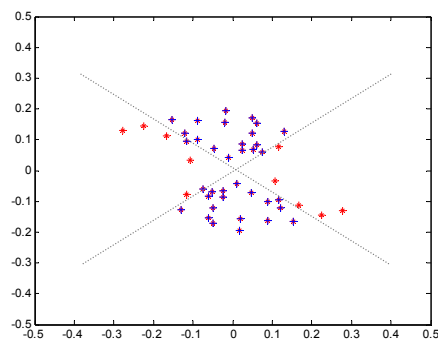
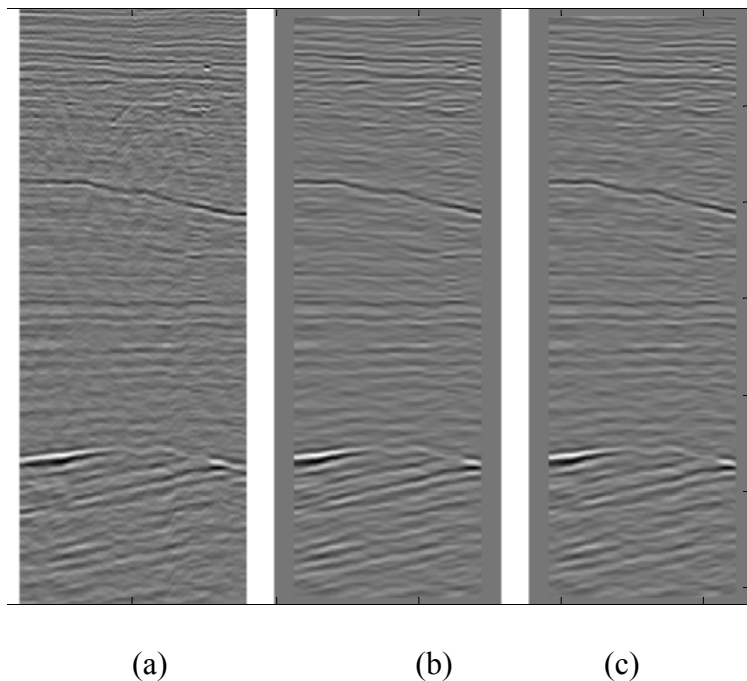


Fig. 5.24 Fréquences estimées par ESPRIT – SOS.



*Fig. 5.25 Fréquences estimées par ESPRIT- HOS.*

Ces deux figures montrent d'une part que la méthode ESPRIT-SOS détecte plus de fréquences que la méthode ESPRIT – HOS. Le nombre de fréquences détectées, par la première méthode, est égal 74 tandis que la deuxième détecte un nombre égal à 46. Cela est dû au fait que les valeurs singulières de la matrice des cumulants décroissent plus rapidement vers zéros que celles de la matrice d'autocorrélation. D' autre part, ces figures montrent que les fréquences estimées par ESPRIT-HOS sont concentrées dans la zone de permission. En effet, pour une même ouverture angulaire, 38 fréquences estimées par ESPRIT-SOS sont rejetées tandis que 10 sont rejetées par ESPRIT-HOS. Le nombre de fréquences utilisées pour construire le masque de convolution dans le domaine spatial est le même (36 fréquences). Ainsi, les résultats obtenus par les deux méthodes, pour cet exemple, sont visuellement très proches comme nous pouvons le voir sur le figure 5.26.

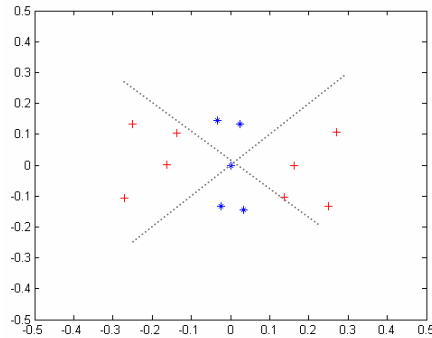


*Fig. 5.26 Résultats du filtrage avec ESPRIT-SOS et ESPRIT-HOS,  
(a): image originale, (b) image filtrée avec SOS, (c) image filtrée avec HOS.*

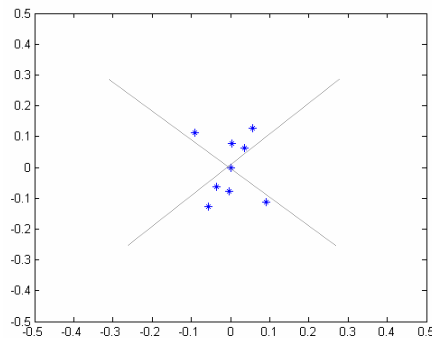
**Deuxième cas :  $P = Q = 7$**

Pour une deuxième comparaison entre les deux méthodes ESPRIT-SOS et ESPRIT-HOS , nous avons estimé les matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$  de taille  $49 \times 49$  . En utilisant le même seuil que précédemment, les fréquences obtenues par les deux méthodes sont montrées dans les figures 5.27 et 5.28. Nous remarquons comme dans le cas précédent que le nombre de fréquences estimées avec les HOS ( $K=10$ ) est inférieur à celui des fréquences estimées en utilisant les SOS ( $K=14$ ). La figure 5.28 montre que

toutes les fréquences estimées par la méthode ESPRIT-HOS sont concentrées dans la zone spectrale qui correspond à la composante signal de l'image (zone de permission). Cependant la majorité des fréquences estimées avec la matrice d'autocorrélation sont rejetées (voir figure 5.27) et uniquement six fréquences parmi les 14 estimées sont retenues pour construire le filtre propre.

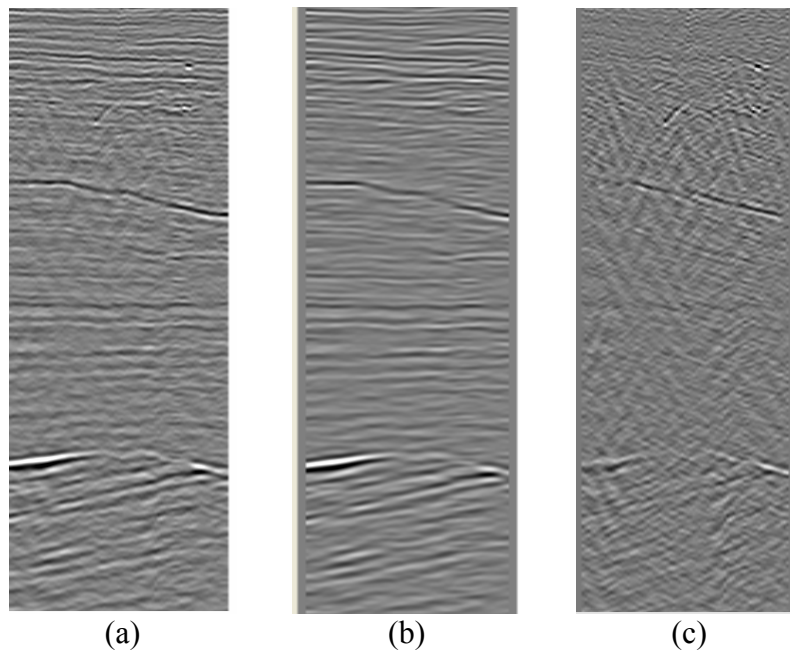


*Fig. 5.27 Fréquences estimées par ESPRIT – SOS pour  $P = Q = 7$*

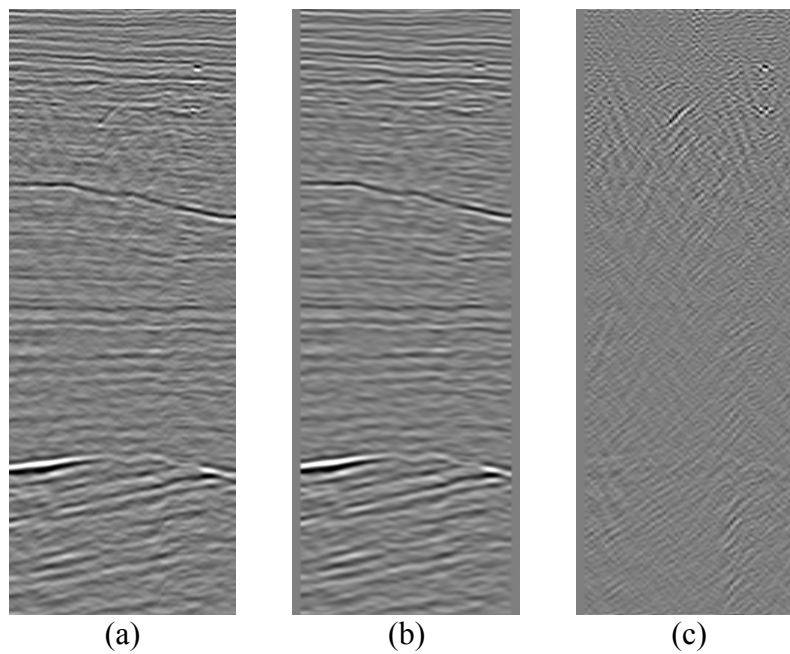


*Fig. 5.28 Fréquences estimées par ESPRIT-HOS pour  $P = Q = 7$*

Les deux figures 5.29 et 5.30 fournissent les résultats obtenus en utilisant les deux méthodes d'estimation ESPRIT-SOS et ESPRIT-HOS. Du fait du nombre réduit des fréquences utilisées par les deux méthodes, les images filtrées 5.29 (b) et 5.30 (b) sont très proches. Toutefois, l'image filtrée par les SOS est beaucoup lisse que celle obtenue par les HOS. En effet, en examinant les bruits enlevés par les deux méthodes nous constatons que le bruit de 5.29 (c) filtré en utilisant les SOS contient plus de signal sismique que celui de la figure 5.30(c).



*Fig. 5.29 Résultat obtenu avec ESPRIT-SOS  
(a): image originale, (b): image filtrée, (c): bruit enlevé*



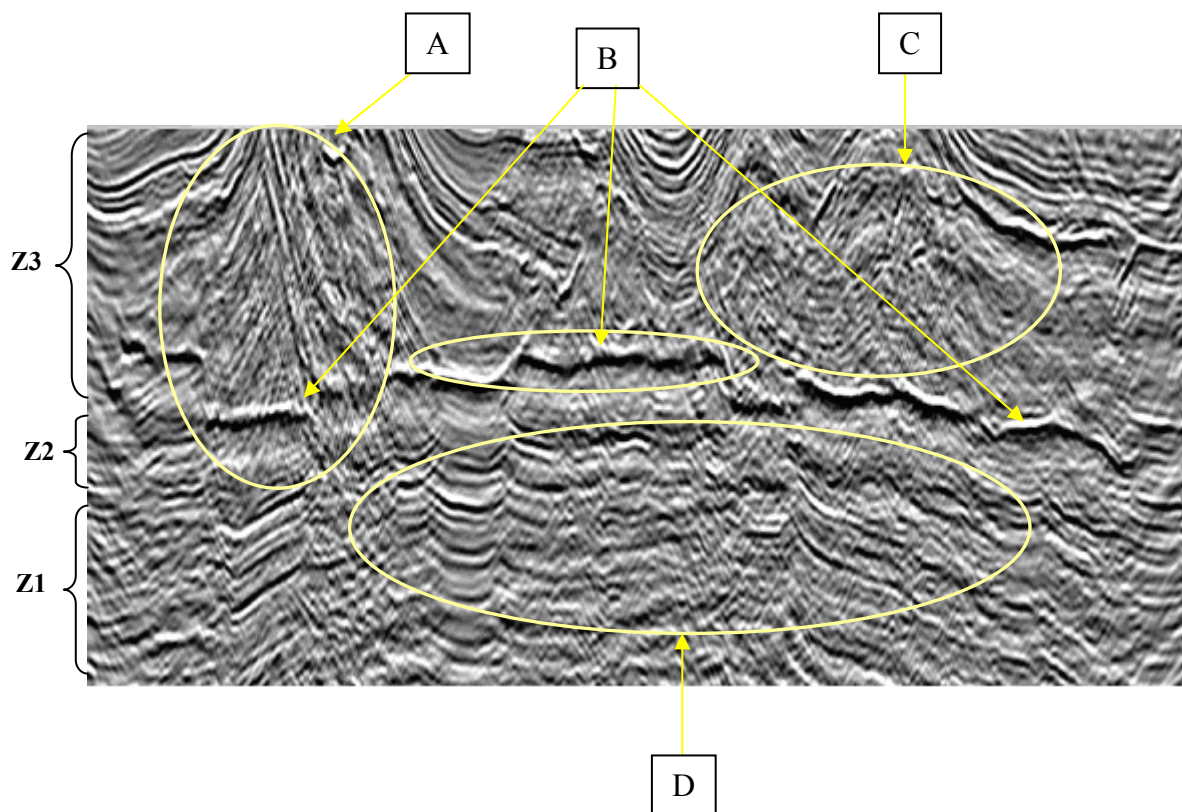
*Fig. 5.30 Résultat obtenu avec ESPRIT-HOS  
(a): image originale, (b): image filtrée, (c): bruit enlevé*

### • Exemple 5

Dans cet exemple, nous avons choisi l'image sismique 5.31, présentant une grande variété de structures. Dans le but de mieux comprendre la qualité de l'image filtrée, nous commençons par définir les éléments importants du point de vue de l'expert.

Au milieu de l'image, nous voyons un marqueur sub-horizontale très puissant et discontinu que nous appelons dans la suite marqueur principal (voir zone B). Ce marqueur permet d'identifier trois zones superposées de bas en haut:

- Zone inférieure de l'image notée Z1 : elle contient des réflecteurs organisés en dôme (arc de cercle) fracturés par des failles verticales.
- Zone centrale notée Z2 : elle est située entre le marqueur principal et la zone inférieure. Cette zone est peu épaisse et contient des réflecteurs de faible intensité et parallèles au marqueur principal.
- Zone supérieure notée Z3 : elle est située au dessus du marqueur principal et contient des réflecteurs plissés et d'intensités variables.



*Fig. 5.31 Exemple d'image sismique 2-D*

Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.31, l'image considérée est affectée par un bruit oblique plus au moins intense. Par exemple, le rapport signal à bruit est très faible dans la zone A et il est plus élevé dans les deux zones C et D.

Parmi les objectifs de notre traitement nous citons les points suivants :



- Eliminer le bruit sans atténuer la sismique.
- Rehausser la continuité des marqueurs sans détériorer les ruptures géologiques.
- Rehausser les contrastes d'intensité notamment dans la zone centrale.
- Rehausser pour rendre lisible le contact entre la zone principale et la zone inférieure que nous ne pouvons pas voir sur l'image 5.32.

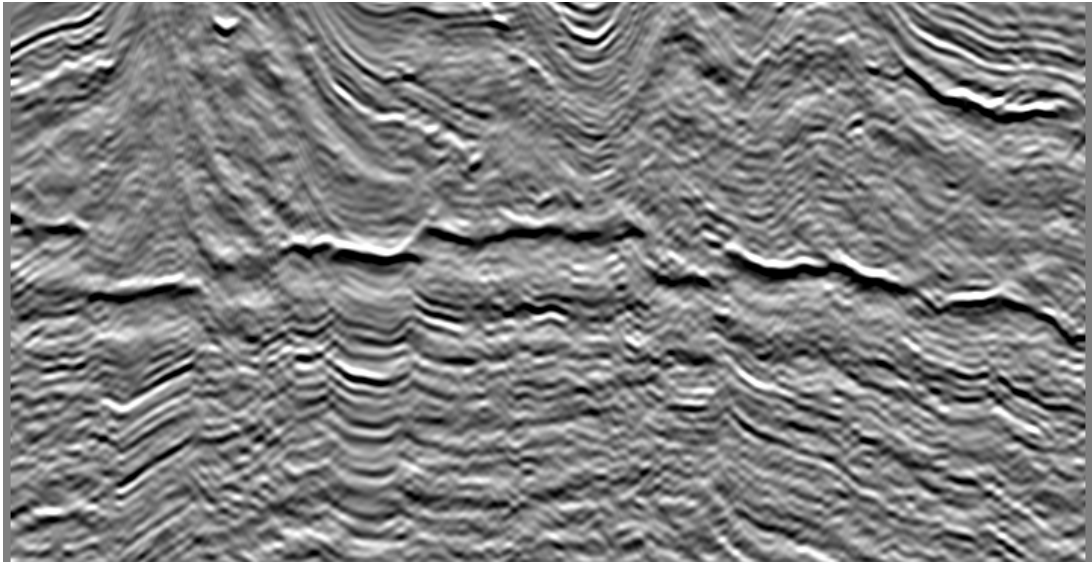
Pour atteindre ces objectifs, nous avons estimé une matrice des cumulants d'ordre 4 de taille  $121 \times 121$ . Cette taille correspond aux paramètres P et Q égaux à 11. Le nombre de fréquences estimées est égal à 42. L'ouverture angulaire qui définit la zone de permission de la figure 5.17 est fixé à  $35^\circ$ . L'image filtrée est représentée sur la figure 5.32. Le bruit éliminé est représenté sur la figure 5.33. La quasi-totalité du bruit oblique a été enlevée à l'exception de quelques hautes fréquences dans la zone critique A et la sismique a été bien préservée. Seules d'infimes traces du marqueur principal (B) et des forts marqueurs de la zone Z1 sont présentes dans la figure de bruit. On peut donc considérer que le premier objectif que l'on s'était fixé, éliminer le bruit sans atténuer la sismique, est atteint.

Dans la zone B, les couches géologiques qui présentaient un aspect haché dû à la présence de bruit ont été restaurées dans leur continuité et le contraste des niveaux de gris a été amélioré. Cela fait apparaître la structure de la zone plissée au dessus du marqueur principal. Sans atteindre autant de précision dans la zone critique A où le rapport signal à bruit est particulièrement défavorable à la sismique, les différentes couches géologiques sont maintenant nettement visibles. Il en est de même, dans la zone D, où les nombreuses coupures induites artificiellement par le bruit ont été supprimées, rendant ainsi aux couches géologiques leur réelle continuité. Les ruptures et les décalages verticaux dus aux failles sont bien mis en évidence dans toute la zone Z1. La continuité des marqueurs a donc bien été restaurée sans porter atteinte aux ruptures géologiques.

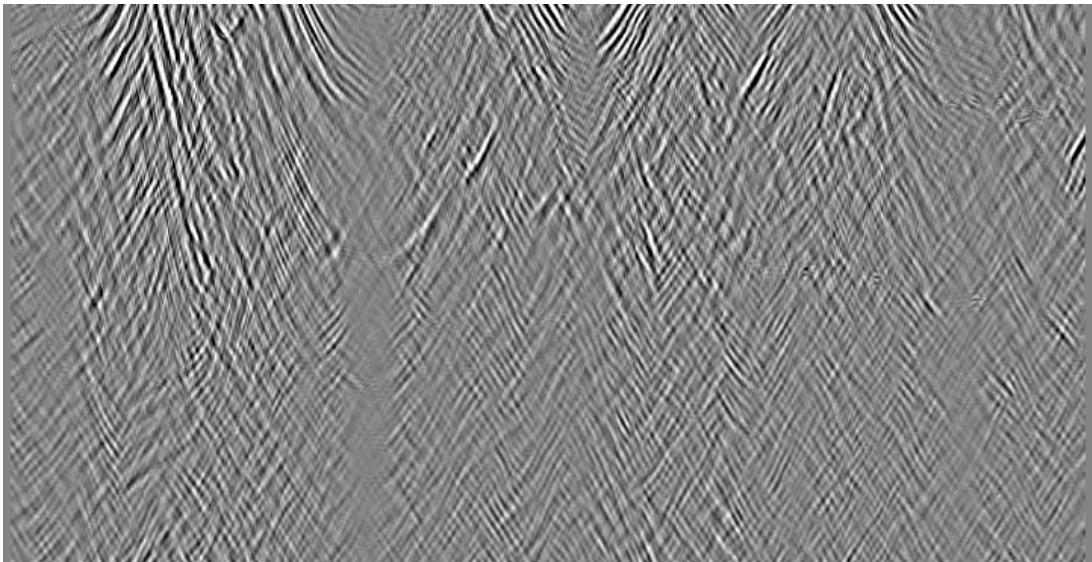
La préservation des détails dans les niveaux de gris a permis d'améliorer les contrastes entre les couches subhorizontales situées sous le marqueur principal dans la zone Z2.

Les améliorations conjointes obtenues dans les zones Z1 et Z2 rehausser la ligne de contact entre la zone principale et la zone inférieure, la rendant plus lisible et plus précise et permettant ainsi à l'interprète de mieux la définir.

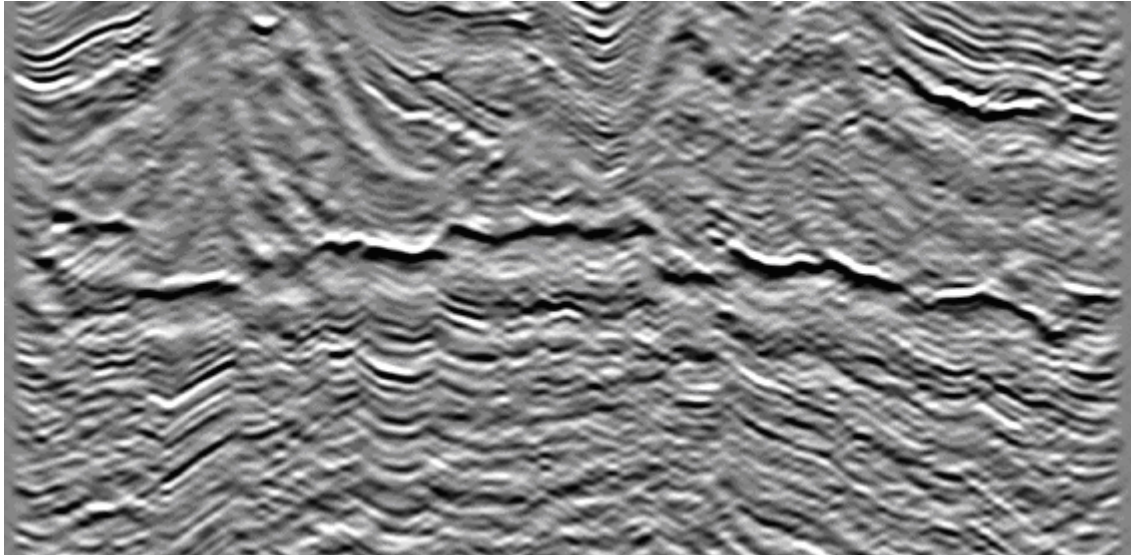
A titre de comparaison, nous montrons dans la figure 5.36, le résultat obtenu par la méthode FK 2-D pour une même ouverture angulaire de  $35^\circ$ .



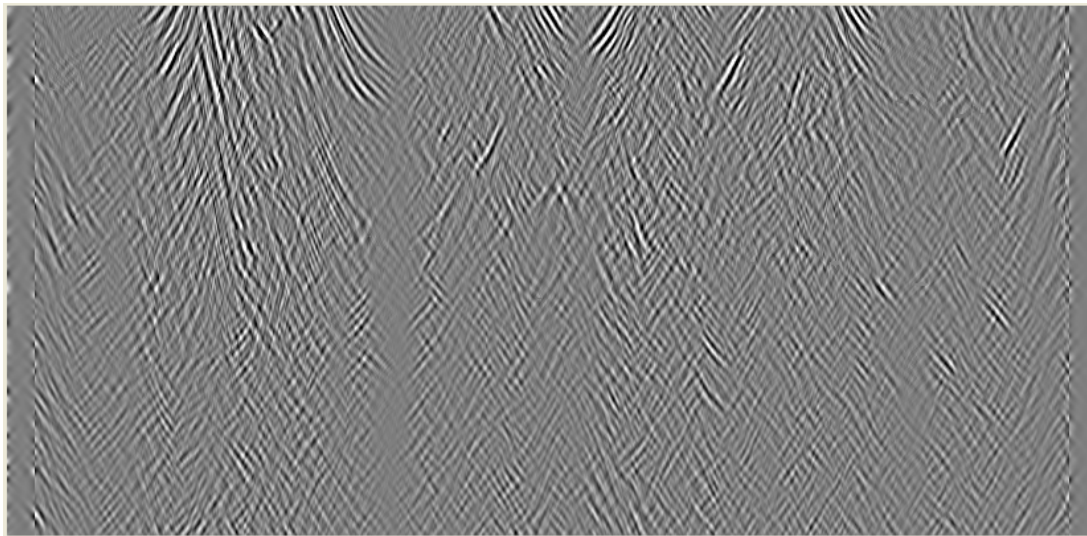
*Fig. 5.32 Image filtrée par le filtre propre ( méthode paramétrique)*



*Fig. 5.33 Bruit enlevé par le filtre propre*



*Fig. 5.34 Image filtrée par le filtre FK 2-D.*



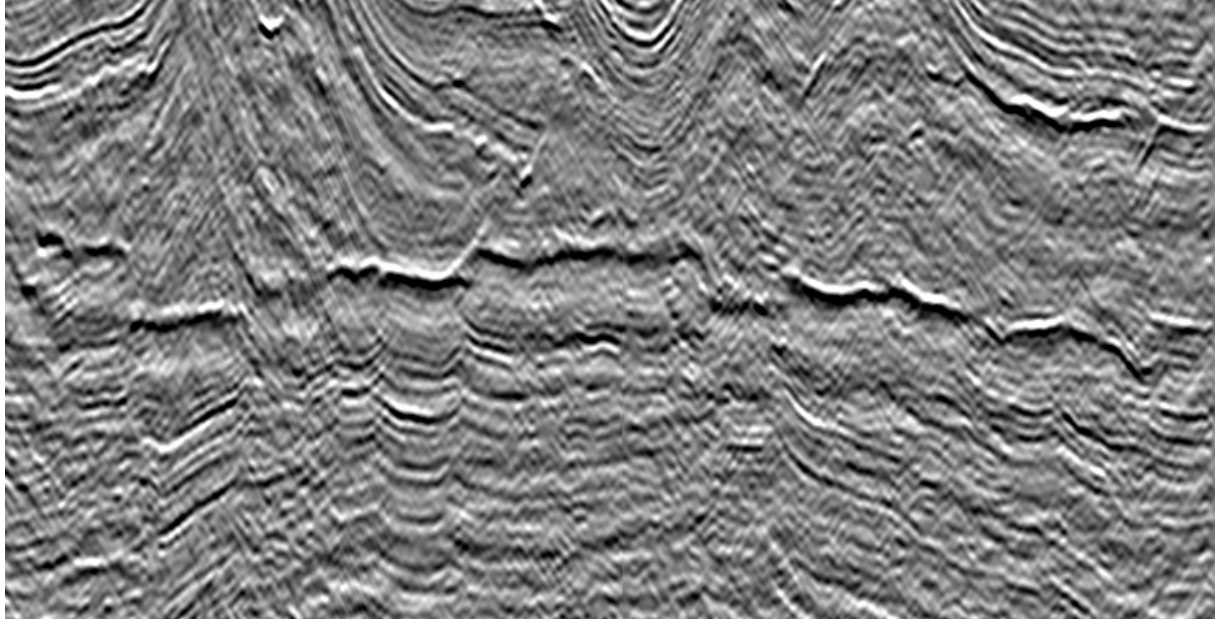
*Fig. 5.35 Bruit filtré par la méthode FK 2-D*

Des améliorations importantes ont été apportées à l'image sismique par le filtrage FK sur les quatre objectifs que nous nous étions fixés. Cependant, l'élimination du bruit est plus performante par la méthode paramétrique en particulier dans la zone critique A où seules persistent quelques hautes fréquences peu gênantes alors que la méthode FK n'élimine pas les basses fréquences qui continuent de perturber la lisibilité de l'image.

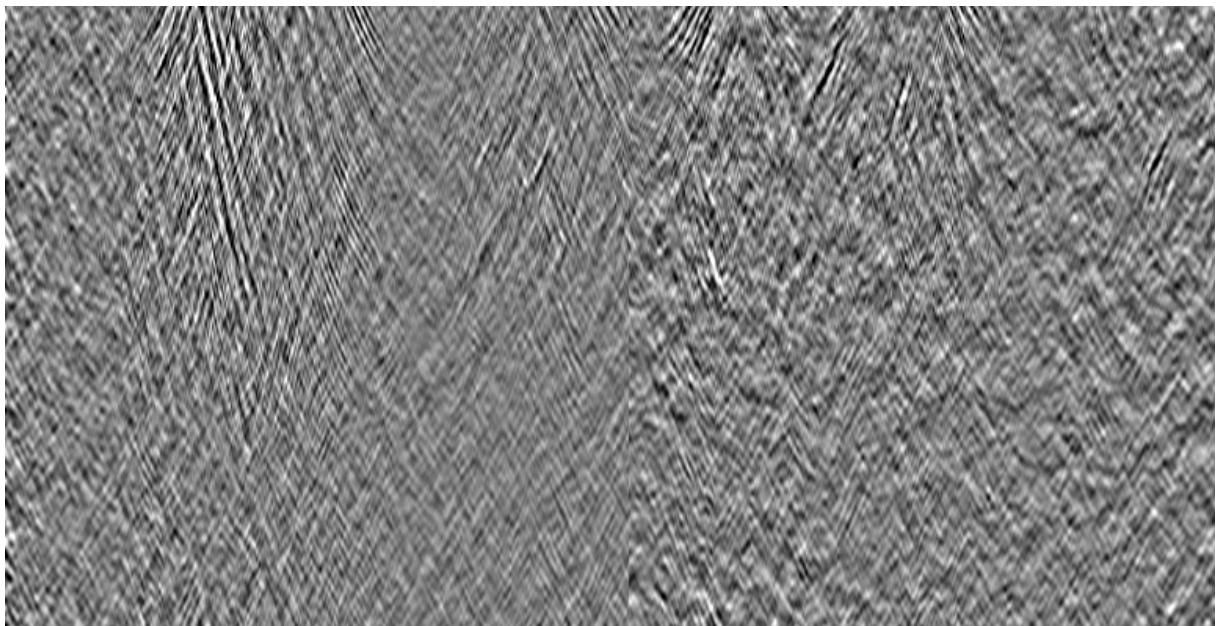
Le contraste d'intensité dans les niveaux de gris est nettement supérieur avec la méthode que nous proposons ce qui donne une meilleure définition de l'image et renforce la visibilité des détails des

couches géologiques partout dans l'image. Leur continuité étant également mieux préservée par notre méthode, le contact entre la zone centrale et la zone inférieure est aussi mieux définie et plus précise de même que la position des ruptures dues aux nombreuses failles de la zone inférieure Z1.

Sur cet exemple, la méthode paramétrique est donc plus précise, préserve et restaure mieux le signal géologique que la méthode de filtrage FK2-D.



*Fig. 5.36 Image filtrée par f-x eigen filter*



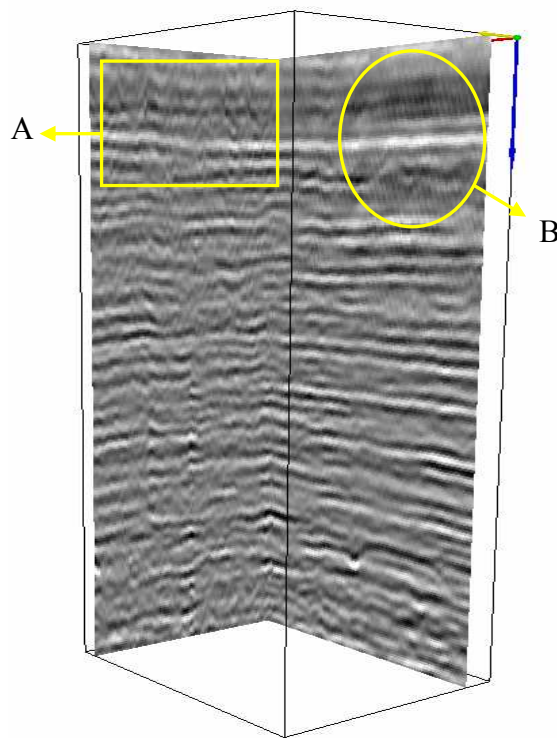
*Fig. 5.37 Bruit filtré par la méthode f-x eigen filter*

### 5.4.3.2 Cas d'images sismiques 3-D

Dans cette sous-section, nous montrons deux résultats obtenus par la méthode paramétrique dans le cas des images sismiques 3-D.

- **Exemple 6**

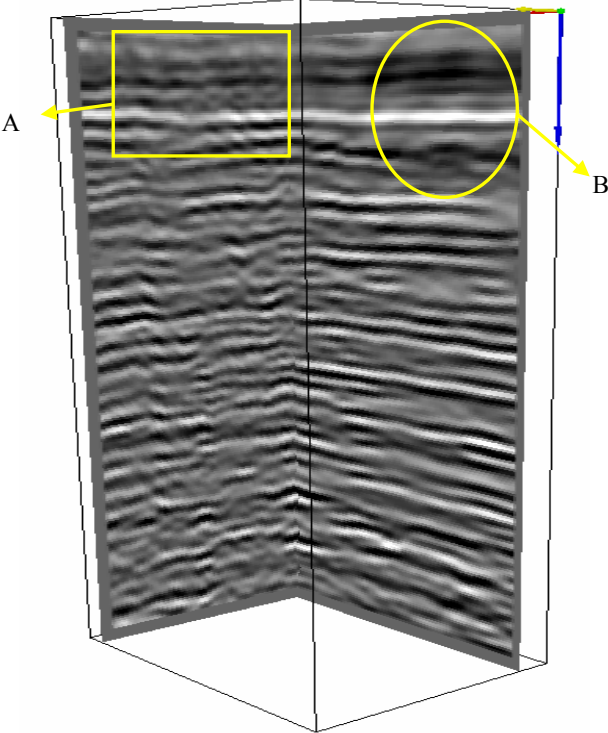
Deux images ( inline et crosline ) extraites du bloc sismique considéré dans cet exemple sont montrés sur la figure 5.38. Comme nous pouvons le voir sur les deux zones A et B, les couches géologiques sont perturbées par un bruit oblique.



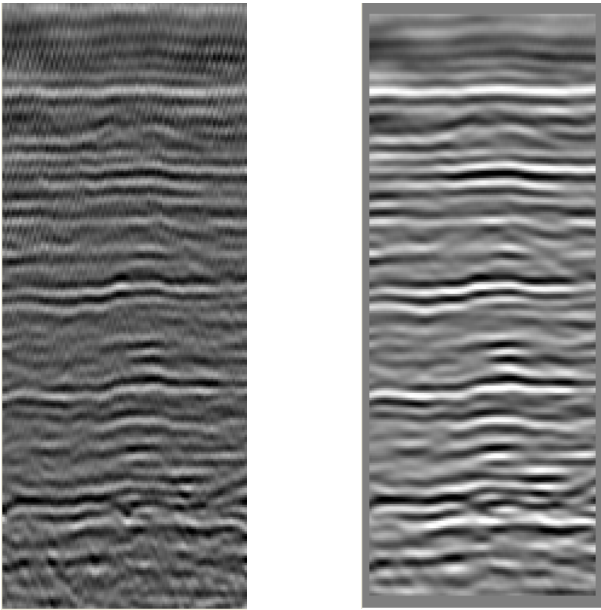
*Fig. 5.38 Bloc sismique 3-D.*

A partir d'une matrice des autocorrélations de taille  $693 \times 693$ , ( $P = 11, Q = 7, L = 9$ ), le nombre de fréquences estimées par le critère (3.60) pour un seuil de  $\xi = 0.999$  est égale à 90. En considérant une zone de permission définie par les angles  $\theta = 45^\circ$  et  $\phi = 45^\circ$  le nombre de fréquence retenues est égal à 46. Les deux images (inline et crosline) extraites du bloc filtré sont montrées dans la figure 5.39. Comme nous pouvons le constater sur cette figure, le bruit oblique présent sur la zone B et le bruit

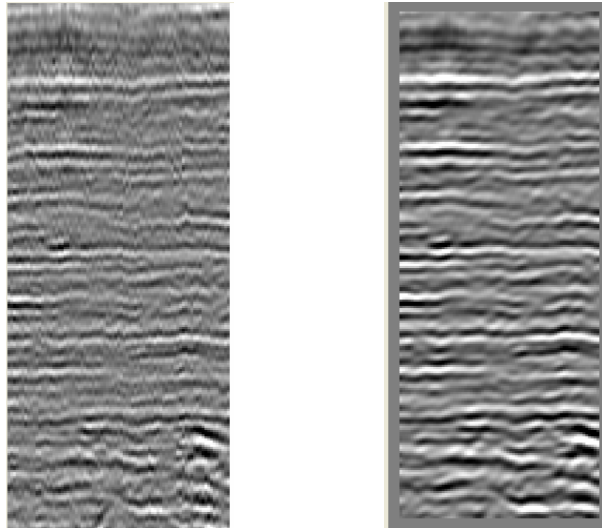
vertical présent sur la zone A de la figure 5.38 ont été supprimés. Le résultat du filtrage est aussi montré sur deux autres images du même bloc dans les figures 5.40 et 5.41



*Fig. 5.39 Bloc sismique filtré par la méthode paramétrique 3-D*



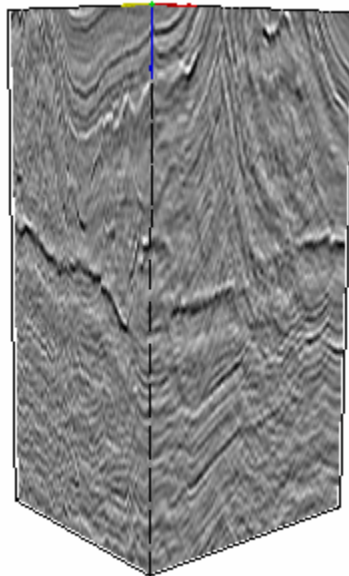
*Fig. 5.40 une image inline et sa version filtrée*



*Fig. 5.41 une image crosline et sa version filtrée*

- **Exemple 7**

Considérons le bloc sismique 3-D représenté sur la figure 5.42. Pour justifier le choix de la zone de permission et de rejection définies plus haut, nous commençons par calculer la représentation spectrale du bloc considéré. La représentation obtenue par la transformée de Fourier discrète 3-D est montrée sur la figure 5.43.



*Fig. 5.42 Bloc sismique 3-D*

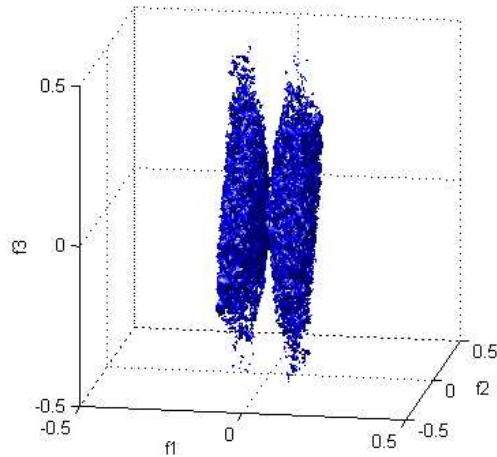


Fig. 5.43 Représentation spectrale du bloc sismique 3-D de l'exemple 6.

Les figures (5.44), (5.45) et (5.46) fournissent respectivement la projection du spectre 5.37 sur les espaces fréquentiels 2-D  $(of_1, of_2)$ ,  $(of_1, of_3)$  et  $(of_2, of_3)$ . La figure 5.47 montre que le spectre de la donnée sismique considérée, est plus étalé suivant l'axe  $(of_3)$  que sur l'axe  $(of_2)$ . Le support spectral sur ces deux axes peut être approximé par une forme elliptique. Cependant, les projections du spectre sur les deux autres espaces  $(of_1, of_2)$  et  $(of_1, of_3)$  (figures 5.45 et 5.46) présentent une forme identique à la zone de permission et de rejection 2-D définie sur la figure 5.20. Ainsi, le support spectral du signal sismique 3-D peut bien être approximé par un cône à base elliptique et ayant  $(of_1)$  comme axe de révolution (figure 5.21).

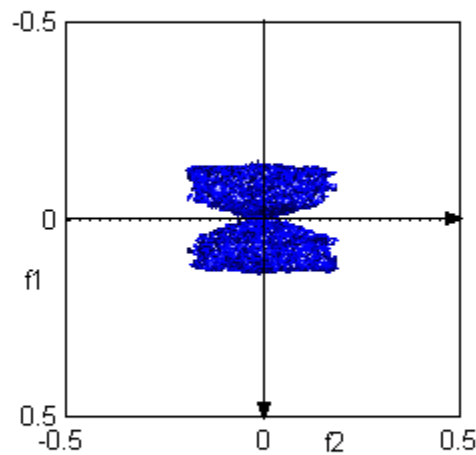


Fig. 5.44 Projection du spectre 3-D sur l'espace  $(of_1, of_2)$



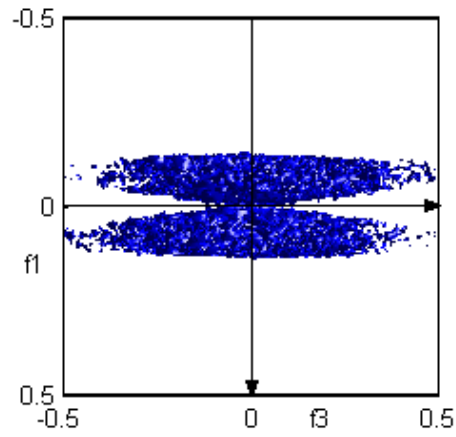


Fig. 5.45 Projection du spectre 3-D sur l'espace  $(of_1, of_3)$

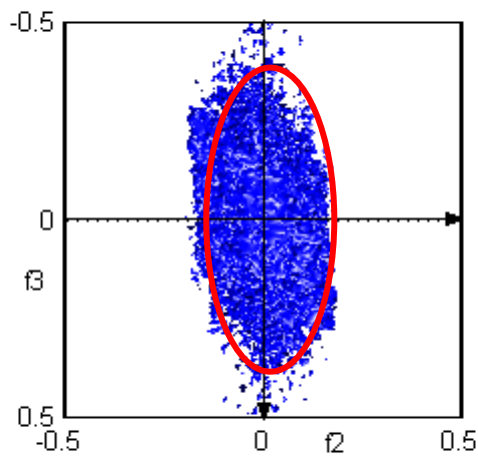


Fig. 5.46 Projection du spectre 3-D sur l'espace  $(of_2, of_3)$

Le résultat du filtrage par la méthode paramétrique est montré dans les figures 5.47, 5.48, et 5.49.

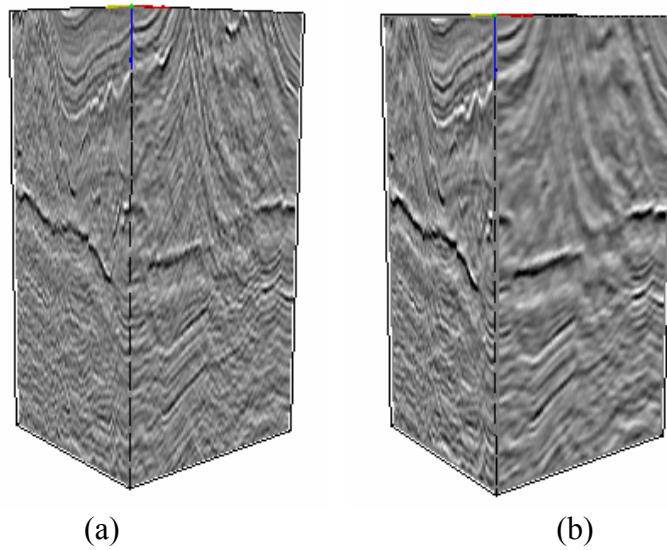
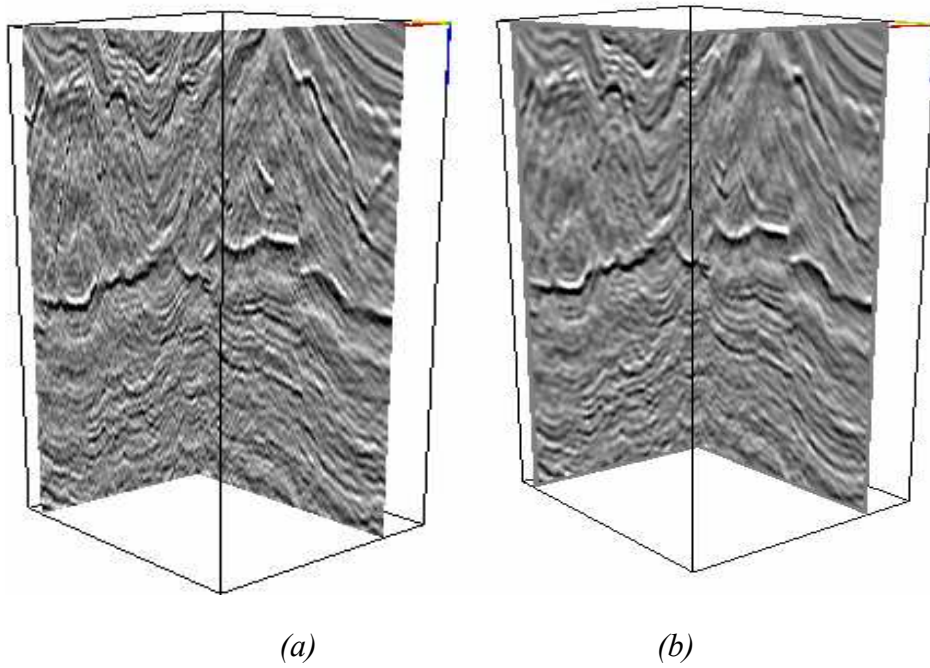
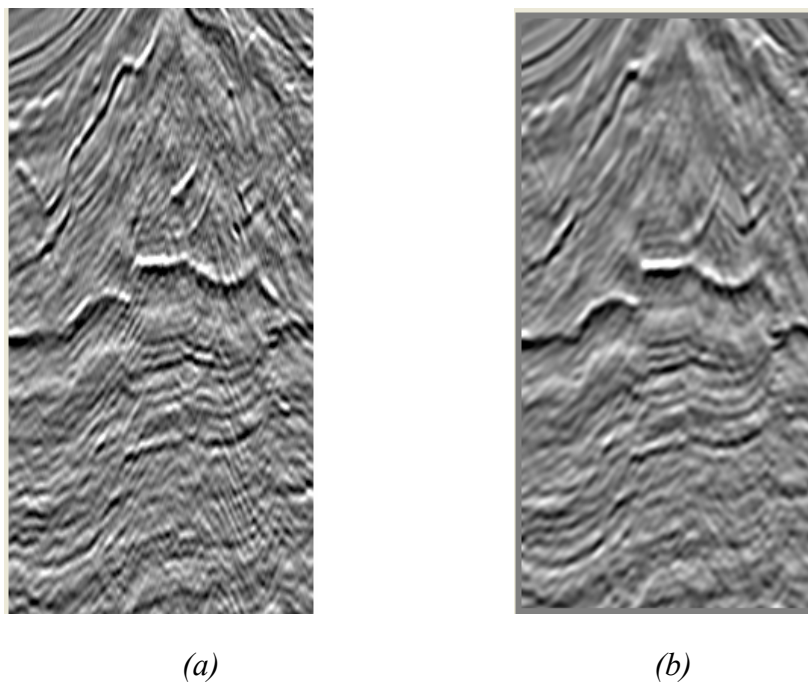


Fig. 5.47 Résultat du filtrage par la méthode propre 3-D, (a) bloc original, (b) bloc filtré



*Fig. 5.48 Résultat du filtrage par la méthode propre 3-D  
 (a) Bloc original, (b) Bloc filtré*



*Fig. 5.49 Résultat du filtrage par la méthode propre 3-D (image inline)  
 (a) Image originale , (b) image filtrée*

### 5.4.3.3 Limites et avantages:

D'après les exemples expérimentaux introduits dans cette section, nous constatons que la méthode paramétrique fondée sur l'analyse spectrale à haute résolution est particulièrement « efficace » pour éliminer les bruits obliques. Notons que l'atténuation du bruit aléatoire par cette méthode se fait implicitement lors de la construction du sous espace signal. En pratique, cette méthode est relativement difficile à mettre en œuvre, en raison d'un paramétrage relativement complexe. En effet, comme la méthode FK, la définition du gabarit fréquentiel nécessite la détermination des ouvertures angulaires  $\theta$  et  $\varphi$  et la fréquence de coupure  $f_{\max}$ . Cette dernière est relativement facile à fixer car le spectre des images sismiques est souvent concentré sur les basses fréquences. Dans toutes les images sismiques considérées dans ce chapitre la valeur de  $f_{\max}$  est fixée à 0.3 dans l'espace des fréquences normalisées. La détermination des angles d'ouverture n'est pas toujours facile surtout dans le cas des images sismiques 3-D. Sur les images 2-D il est facile de visualiser les inclinaisons des couches géologiques représentées, et par suite avoir une valeur approximative de l'angle  $\theta$ . D'une manière générale, ces paramètres doivent être ajustés pour chaque bloc à traiter pour obtenir un bon résultat. Pour cela, il faut tester un ensemble de paramètres prédéfinis.

## 5.5 Conclusion

Afin de rehausser les données sismiques nous avons présenté deux méthodes de filtrage fondées sur la modélisation des processus aléatoires 2-D et 3-D. Nous avons, tout d'abord, présenté une méthode spectrale pour séparer les blocs sismiques 3-D en deux composantes: une composante structurée représentant le signal sismique et une composante aléatoire correspondant au bruit. A travers des résultats expérimentaux, il nous est apparu que cette méthode ne permet pas d'éliminer efficacement les bruits structurés. Nous avons, ensuite, introduit une méthode paramétrique fondée sur les approches en sous-espace. A travers des résultats expérimentaux, nous avons montré que la méthode proposée est capable d'éliminer le bruit structuré de type oblique et d'atténuer les bruits de type aléatoires. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par deux méthodes souvent utilisées pour rehausser les images sismiques, la méthode FK et le filtre propre f-x.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé la modélisation des processus aléatoires homogènes 3-D et plus particulièrement, la modélisation paramétrique fondée sur la décomposition de Wold. Notre travail a été motivé en partie par les résultats encourageants obtenus par cette modélisation dans de nombreuses applications en traitement d'images 2-D. Notre principal objectif dans cette thèse a été de développer de nouveaux modèles paramétriques 3-D et des algorithmes d'estimation en vue d'applications en traitement de blocs d'images.

Pour atteindre ces objectifs, nous nous sommes appuyés sur les résultats obtenus récemment au sein de l'équipe Signal et Image sur la décomposition de Wold pour les processus stochastiques multidimensionnels. Ces travaux décrivent, théoriquement, la structure de la décomposition de Wold pour des processus homogènes définis sur un groupe muni d'un ordre non archimédéen. L'application de ces résultats dans le cas particulier des processus homogènes 3-D, montre que de tels processus se décomposent comme dans le cas 2-D en trois champs orthogonaux. Cependant, la composante évanescence dans le cas 3-D se décompose à son tour en une somme de deux composantes orthogonales dites champ évanescence de type 1 et champ évanescence de type 2. Ainsi, un bloc d'images texturées est considéré comme la somme de quatre composantes orthogonales ayant des caractéristiques spectrales et spatiales différentes: une composante purement aléatoire, une composante harmonique, et deux composantes évanescences. Cette décomposition spatiale des processus homogènes 3-D entraîne également une décomposition dans le domaine spectral en quatre mesures mutuellement singulières.

Pour appliquer la décomposition de Wold 3-D à l'analyse/synthèse des volumes d'images, nous avons, dans un premier temps, proposé des nouveaux modèles paramétriques 3-D pour approximer séparément les quatre composantes. Ces approximations sont fondées sur l'analyse des caractéristiques spectrales de chaque composante. La composante purement aléatoire ayant une distribution spectrale absolument continue est représentée par un modèle autorégressif (AR 3-D). La composante harmonique est modélisée par une somme d'exponentielles (modèle harmonique 3-D). La composante évanescence de type 1 est modélisée par une somme de sinusoïdes 1-D modulées par des processus purement aléatoires 2-D. La composante évanescence de type 2 est modélisée par une somme de sinusoïdes 2-D dont les amplitudes sont modélisées par un processus purement aléatoire 1-D. A travers des exemples synthétiques nous avons montré que les quatre composantes de Wold 3-D caractérisent les trois aspects fondamentaux des volumes texturés à savoir: l'aspect aléatoire, la périodicité totale (3-D) et enfin l'aspect directionnel (périodicité 2-D et périodicité 1-D). Ainsi, la modélisation fondée sur la décomposition de Wold 3-D offre la possibilité de synthétiser des images

volumiques représentant séparément ou à la fois les trois caractères précédents. Elle permet aussi d'analyser les textures 3-D homogènes qui sont dans le cas général un mélange de champs déterministes et aléatoires.

L'application des modèles paramétriques issus de la décomposition de Wold 3-D pour l'analyse des volumes d'images nécessite le développement d'algorithmes d'estimation et d'extraction de différentes composantes. Pour cela, nous avons d'abord traité l'estimation des paramètres transverses et la sélection de l'ordre de modèles AR 3-D par des techniques algébriques. Ensuite, nous avons proposé des algorithmes pour estimer les paramètres caractérisant les composantes déterministes 3-D. Sur ce point, nous avons développé une méthode spectrale à haute résolution fondée sur les statistiques d'ordre supérieur. Les simulations numériques ont mis en évidence les améliorations apportées par cette méthode par rapport aux méthodes fondées sur les statistiques d'ordre deux notamment dans le cas où le bruit additif est gaussien coloré.

Ces algorithmes ont été testés pour le filtrage des données sismiques fournies par le laboratoire LASIS CNRS-TOTAL. Ces données sont souvent perturbées par des signaux parasites de deux types : les bruits aléatoires et les bruits structurés. L'utilisation de la décomposition de Wold 3-D comme outil de filtrage consiste d'une part à identifier et à séparer les différents signaux composant la donnée sismique, puis, à distinguer parmi les composantes extraites celles qui représentent le signal sismique et celles qui correspondent aux bruits. Pour cela, nous avons, dans un premier temps, proposé un algorithme de décomposition fondé sur une approche spectrale. Les résultats obtenus par cet algorithme montrent qu'il est "efficace" pour éliminer les bruits aléatoires. Cependant, des améliorations méthodologiques sont nécessaires pour le rendre aussi opérant pour les bruits structurés. Dans un deuxième temps, nous avons, proposé une méthode paramétrique, qui peut être classée parmi les filtres propres, pour éliminer les bruits structurés. Les résultats obtenus par cette méthode sont comparés avec ceux obtenus par les méthodes du filtrage les plus fréquemment utilisées pour les images sismiques, suivant un critère d'évaluation visuel. Ce critère est subjectif et consiste essentiellement à comparer l'allure générale de l'image filtrée ainsi que sa qualité dans certaines zones d'intérêt. Cette comparaison montre l'apport de la méthode proposée pour éliminer les bruits structurés.

# Annexe A: Processus Stochastiques 3-D

## A.1 Notions de base

Pour simplifier les notations, les variables spatiales, i.e. les coordonnées dans l'espace  $Z^3$  ou dans l'espace fréquentiel 3-D seront notés par :

$$m = (m_1, m_2, m_3), \quad h = (h_1, h_2, h_3), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Les opérations de l'addition et de soustraction sur  $Z^3$  seront notées comme suit :

$$m + h = (m_1 + h_1, m_2 + h_2, m_3 + h_3), \quad m - h = (m_1 - h_1, m_2 - h_2, m_3 - h_3)$$

Le produit scalaire de deux éléments  $m$  et  $h$  dans  $Z^3$  est défini par la relation suivante :

$$\langle m, h \rangle = m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3$$

### • Définition 1

Un processus stochastique 3-D (ou processus aléatoire 3-D) noté  $y = \{y(m), (m) \in Z^3\}$  est une famille de variables aléatoires, indexées sur  $Z^3$ , définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs réelles ou complexes.

Sans perte de généralité nous supposons dans tout ce travail que le processus  $y$  vérifie les conditions suivantes :

- $y$  est de moyenne statistique finie  $E[y(m)] < \infty, \forall m \in Z^3$ .
- Le processus  $y$  est borné dans l'espace d'Hilbert  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , i.e :

$$\sup_{m \in Z^3} E[y^2(m)] < +\infty$$

Rappelons que l'ensemble  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne l'espace des variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et qui sont de carrés intégrables.

## A.2 Stationnarité

Un processus stochastique 3-D est dit stationnaire à l'ordre  $k$  si la loi statistique de toute famille de  $k$  variables aléatoires  $[y(m_1), y(m_2), \dots, y(m_k)]$  est invariante par translation spatiale (changement d'origine dans l'espace 3-D).

Autrement dit, la probabilité jointe de  $k$  variables  $[y(m_1 + \tau), y(m_2 + \tau), \dots, y(m_k + \tau)]$  avec  $\tau \in Z^3$  ne dépend pas de  $\tau$ .

Si la stationnarité d'ordre  $k$  est vérifiée pour tout  $k$ , le processus est dit strictement stationnaire. Un processus stochastique est dit stationnaire au sens large (ou homogène) s'il est stationnaire à l'ordre 2.

### A.3 Statistiques de processus aléatoire

Dans de nombreuses situations expérimentales, les processus aléatoires sont décrits par leurs propriétés statistiques sous forme de grandeurs moyennes comme les moments et les cumulants. Ces statistiques sont souvent classées en deux classes : statistiques d'ordre deux et les statistiques d'ordre supérieur.

- **Statistiques d'ordre deux**

Les statistiques d'ordre deux d'un processus  $y = \{y(m), (m) \in Z^3\}$  sont les moments d'ordre deux définis par la relation suivante :

- Moments d'ordre 2 :

$$M_y^2(m, n) = E[y(m)y(n)] = \int \int_{\Omega \Omega} xy p_{m,n}(x, y) dx dy \quad (A.1)$$

où  $p_{m,n}(\cdot)$  est la densité de probabilité conjointe des deux variables aléatoires  $y(m)$  et  $y(n)$ . En règle générale les moments d'ordre deux dépendent des deux variable  $m$  et  $n$ . Notons que les moments d'ordre 1 du processus  $y$  sont également les valeur moyennes statistiques des variable  $y(m)$  définis par :

$$M_y(m) = E[y(m)] = \int_{\Omega} xp_m(x) dx \quad (A.2)$$

où  $p_m$  est la loi de probabilité de la variable aléatoire  $y(m)$ .

La quantité  $M_y^2(m, n)$  définie dans (A.1) est appelée aussi fonction d'autocorrélation et elle est souvent notée par  $r_y(m, n)$  ou par  $c_{2,y}(m, n)$ .

Si le processus est homogène alors nous avons les propriétés suivantes :

- La moyenne de processus définie dans (A.2) est indépendante de  $m$  :

$$m_y = E[y(m)], \forall m \in Z^3 \quad (A.3)$$

- La fonction d'autocorrélation définie par (A.1) ne dépendra que de la différence  $m - n$ . Ainsi la fonction d'autocorrélation d'un processus homogène 3-D devient une fonction à une seule variable 3D:

$$r_y(h) = E[y(m)y(m+h)] \quad (A.4)$$

- **Statistiques d'ordre supérieur à 2**

Les statistiques d'ordre supérieur à 2 d'un processus stochastique sont ses moments et ses cumulants d'ordre supérieur à deux. Pour un processus à valeurs réelles nous avons les définitions suivantes :

- Moment d'ordre  $k$  : c'est la fonction à  $k$  variables définie par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} M_y^k(m_1, m_2, \dots, m_k) &= E[y(m_1)y(m_2)\dots y(m_k)] \\ &= \int_{\Omega^k} x_1 x_2 \dots x_k p_{m_1, m_2, \dots, m_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où  $p_{m_1, m_2, \dots, m_k}$  est la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires  $y(m_1), y(m_2), \dots, y(m_k)$ .

Les cumulants d'ordre  $k$  d'un processus réel peuvent être calculés à partir des moments d'ordre inférieur ou égal à  $k$ . Les statistiques d'ordre supérieur qui sont souvent utilisés pour caractériser les processus aléatoires sont les cumulants d'ordre 3 et 4.

Notons que pour les ordres 1,2, et 3 les cumulants sont exactement les moments d'ordre 1,2, et 3 du processus.

$$\begin{aligned} cum[y(i)] &= M_y[i] \\ cum[y(i), y(j)] &= M_y^2[i, j] \\ cum[y(i), y(j), y(k)] &= M_y^3[i, j, k] \end{aligned}$$

- Cumulant d'ordre 4 :

Pour l'ordre 4, les cumulants s'expriment en fonction des moments d'ordre 4 et 2 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} cum[y(i), y(j), y(k), y(l)] &= M_y^4(i, j, k, l) - M_y^2(i, j)M_y^2(k, l) \\ &\quad - M_y^2(i, k)M_y^2(j, l) - M_y^2(i, l)M_y^2(j, k) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Si le processus  $y = \{y(m), (m) \in Z^3\}$  est stationnaire à l'ordre 4 alors ses cumulants d'ordre inférieur à 4 sont invariants par translation spatiale. Dans ce cas, pour tout  $\tau \in Z^3$  nous avons les égalités suivantes :

$$cum[y(i), y(j), y(k)] = cum[y(i + \tau), y(j + \tau), y(k + \tau)] \quad (\text{A.7})$$

$$cum[y(i), y(j), y(k), y(l)] = cum[y(i + \tau), y(j + \tau), y(k + \tau), y(l + \tau)] \quad (\text{A.8})$$

Ainsi les cumulants d'ordre 3 sont des fonctions à deux variables,

$$c_{3,y}(i, j) = cum[y(m), y(m + i), y(m + j)], \forall i, j \in Z^3 \quad (\text{A.9})$$

Les moments et les cumulants d'ordre 4 sont des fonctions à 3 variables :

$$M_y^4(i, j, l) = E[y(m), y(m + i), y(m + j), y(m + l)], \forall i, j, l \in Z^3 \quad (\text{A.10})$$



$$c_{4,y}(i, j, l) = \text{cum}[y(m), y(m+i), y(m+j), y(m+l)], \forall i, j, l \in \mathbb{Z}^3 \quad (\text{A.11})$$

A partir de (A.6) et (A.11) les cumulants d'ordre 4 d'un processus stationnaire sont donnés sous la forme suivante :

$$c_{4,y}(i, j, k) = M_y^4(i, j, k) - M_y^2(i-j)M_y^2(k-l) - M_y^2(i-k)M_y^2(j-l) - M_y^2(i-l)M_y^2(j-k) \quad (\text{A.12})$$

Les cumulants d'ordre  $k$  d'un processus stochastique stationnaire sont appelés parfois « multicorrélations » d'ordre  $k-1$ . Par exemple, le cumulant d'ordre deux est la corrélation, le cumulant d'ordre 3 est appelé « bicorrélation » et le cumulant d'ordre 4 est appelé « tricorrélation ».

• **Remarque :**

Pour un processus stationnaire à valeurs complexes la définition des cumulants d'ordre  $k$  n'est pas unique. Nous pouvons définir  $k = p + q$  cumulants différents selon le nombre de termes complexes conjugués [Laco97], [Swam91]

$$c_{y(p)}^{(q)}(i_1, i_2, \dots, i_{p+q-1}) = \text{cum}[y(m), y(m+i_1), \dots, y(m+i_{p-1}), y^*(m+i_p), \dots, y^*(m+i_{p+q-1})]$$

Dans la notation utilisée,  $p$  est le nombre de complexes non conjugués,  $q$  est le nombre de complexes conjugués. Cette définition englobe le cas des signaux à valeurs réelles pour lesquels les  $p + q$  cumulants sont égaux. Dans ce cas, les cumulants d'ordre  $k$  seront simplement notés par :

$$c_{k,y}(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}) = \text{cum}[y(m), y(m+i_1), \dots, y(m+i_{k-1})]$$

## Annexe B:

### Estimation des moments et cumulants

- **Ergodicité**

Dans les définitions précédentes, nous avons exprimé les cumulants et les moments statistiques en terme de moyennes d'ensemble (espérances mathématiques). Pour calculer ces moyennes d'ensembles avec précision, il faut disposer de plusieurs réalisations du processus aléatoire. Dans un grand nombre de cas pratiques, une seule réalisation (observation) de taille finie  $M = M_1 M_2 M_3$  est accessible. A partir de ces observations notées par  $\{y(m_i) = y(m_1, m_2, m_3); m_i = 1, \dots, M_i\}$ , nous pouvons uniquement estimer les moyennes spatiales (temporelles pour 1-D) du processus. L'ergodicité régit les relations qui existent entre les moyennes d'ensemble et les moyennes spatiales.

- **Définition 2:**

On dit qu'un processus stochastique  $y = \{y(m), (m) \in Z^3\}$  est ergodique si pour tout fonction  $f$  réelle qui satisfait la condition

$$E[f(y)] < \infty$$

nous avons la relation :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(y(m)) = E[f(y)] \quad (\text{B.13})$$

Notons que la sommation utilisée dans cette définition est une triple sommation suivant les trois composantes de  $m$  :

$$\sum_{m=0}^M = \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \sum_{m_3=0}^{M_3} \quad (\text{B.214})$$

La notation  $M \rightarrow \infty$  signifie que le triplet  $(M_1 M_2 M_3)$  tend vers l'infini :  $(M_1 M_2 M_3) \rightarrow (\infty, \infty, \infty)$ .

L'expression (B.1) dans la définition précédente montre que l'ergodicité se présente comme la légitimité d'estimer un moment statistique d'ensemble exact, par une moyenne empirique calculée sur une seule réalisation de taille suffisamment grande.

Par conséquent, sous l'hypothèse que le processus stochastique est stationnaire et ergodique nous avons les estimations suivantes :

- **Estimation de la moyenne :**

$$\hat{m}_y = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M y(m)$$

- **Estimation de l'autocorrélation :**

L'estimation non biaisée de la fonction d'autocorrélation est donnée pour tout  $h = (h_1, h_2, h_3)$ , par :

$$\hat{r}_y(h) = \frac{1}{(M_1 - h_1)(M_2 - h_2)(M_3 - h_3)} \sum_{m_1=1}^{M-h_1} \sum_{m_2=1}^{M_2-h_2} \sum_{m_3=1}^{M_3-h_3} y(m) y(m+h)$$

L'estimation biaisée est donnée par:

$$\hat{r}_y(h) = \frac{1}{M_1 M_2 M_3} \sum_{m_1=1}^{M-h_1} \sum_{m_2=1}^{M_2-h_2} \sum_{m_3=1}^{M_3-h_3} y(m) y(m+h)$$

- **Estimation des moments d'ordre 4 :**

$$\hat{m}_y^4(i, k, l) = \frac{1}{(M_1 - h_1)(M_2 - h_2)(M_3 - h_3)} \sum_{m_1=1}^{M-h_1} \sum_{m_2=1}^{M_2-h_2} \sum_{m_3=1}^{M_3-h_3} y(m) y(m+i) y(m+k) y(m+l)$$

où  $h_1 = \max[i_1, k_1, l_1]$ ,  $h_2 = \max[i_2, k_2, l_2]$ , et  $h_3 = \max[i_3, k_3, l_3]$ .

- **Estimation des cumulants d'ordre 4**

L'estimation des cumulants peut s'effectuer en remplaçant dans (A.12) les moments d'ordre deux et d'ordre 4 par leurs estimés.

## Annexe C :

# Rappel sur les représentations spectrales

### C.1 Transformé de Fourier discrète 3-D

La transformée de Fourier Discrète (TFD) notée  $TF_y$  donne une représentation fréquentielle du processus stochastique  $\{y(m), m \in \mathbb{Z}^3\}$ . Elle est définie sur la région  $\Lambda = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$  par la relation suivante :

$$TF_y(\omega) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} y(m) \exp[-j2\pi \langle m, \omega \rangle], \quad \omega \in \Lambda$$

Pour un champ aléatoire défini sur une grille 3-D de taille finie  $M_1 \times M_2 \times M_3$ , on définit la TFD par l'équation :

$$TF_y(\omega) = \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \sum_{m_3=0}^{M_3} y(m) \exp[-j2\pi \langle m, \omega \rangle]$$

### C.2 Mesures spectrales

Pour tout processus aléatoire homogène  $y = \{y(m), m \in \mathbb{Z}^3\}$ , la fonction d'autocorrélation  $(r(h), h \in \mathbb{Z}^3)$  est définie positive puisque pour toute partie finie  $\Delta \subset \mathbb{Z}^3$  et toute famille de nombres complexes  $(c_h, h \in \mathbb{Z}^3)$  nous avons :

$$\sum_{h,k \in \Delta} c_h \bar{c}_k r(h-k) = E \left| \sum_{h \in \Delta} c_h y(h) \right|^2 \geq 0$$

D'après le théorème de Bochner [Guyo93], la fonction d'autocorrélation admet la représentation suivante :

$$r(h) = \int_{\Lambda} \exp[j2\pi \langle n, \omega \rangle] F(d\omega)$$

où  $F$  est une mesure non négative, régulière bornée sur  $\Lambda$ . La mesure  $F$  est appelée la mesure spectrale du processus  $y$ . Si la mesure spectrale est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\Lambda$ , la densité  $f(\omega)$  de  $F$  définie par

$$f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

est appelée densité spectrale du processus. Si le processus  $y$  est à valeurs réelles, la densité spectrale  $f$  est une fonction paire sur  $\Lambda$ .

De plus, si la fonction d'autocorrélation est dans  $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ , c-à-d si elle est de carré sommable

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}^3} |r(h)|^2 < \infty$$

alors la densité spectrale  $f$  est de carré intégrable et admet la représentation suivante[Guyo93]:

$$f(\omega) = \sum_{h_1=-\infty}^{\infty} \sum_{h_2=-\infty}^{\infty} \sum_{h_3=-\infty}^{\infty} r(h) \exp[-j2\pi \langle h, \omega \rangle], \quad \omega \in \Lambda$$

Cette expression montre que la densité spectrale est la transformation de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Cette expression est aussi connue sous le nom de la densité spectrale de puissance (DSP) ou tout simplement spectre.

En pratique, le processus est uniquement observé sur un domaine de taille fini  $[1, M_1] \times [1, M_2] \times [1, M_3]$ , la sommation précédentes sera limitée à un ensemble fini de coefficients :

$$f(\omega) = \sum_{h_1=-M_1}^{M_1} \sum_{h_2=-M_2}^{M_2} \sum_{h_3=-M_3}^{M_3} r(h) \exp[-j2\pi \langle h, \omega \rangle], \quad \omega \in \Lambda$$

- **Périodogramme :**

Le périodogramme est un estimateur de la DSP exprimé en fonction de la TFD des observations par la relation suivante :

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{1}{M_1 M_2 M_3} \left| \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \sum_{m_3=0}^{M_3} y(m) \exp[-j2\pi \langle m, \omega \rangle] \right|^2 \quad (\text{C.1})$$

- **Corrélogramme :**

Le corrélogramme est un estimateur de la DSP qui consiste à remplacer dans la définition (C.1) les coefficients d'autocorrélation  $r(h)$  par les estimés  $\hat{r}(h)$  :

$$\hat{S}_y(\omega) = \sum_{h_1=-M_1}^{M_1} \sum_{h_2=-M_2}^{M_2} \sum_{h_3=-M_3}^{M_3} \hat{r}(h) \exp[-j2\pi \langle h, \omega \rangle], \quad \omega \in \Lambda$$

## Annexe D:

### Notions de prédiction linéaire sur $Z^3$

La théorie de la prédiction linéaire est fondamentale dans le domaine de la modélisation paramétrique des processus aléatoires. Elle est à l'origine de la formulation de la modélisation fondée sur la décomposition de Wold des processus 1-D et 2-D. En traitement du signal 1-D, l'ordonnement d'une séquence suivant un indice est immédiat ainsi que la définition du passé et du futur d'une observation. Dans les cas des signaux multidimensionnels, il est possible d'ordonner les sites d'un processus m-D par en considérant les ordres lexicographiques.

- **Ordres lexicographiques 3-D**

L'ordre lexicographique sur  $Z^3$  est défini de la manière suivante :  
Pour deux éléments  $m = (m_1, m_2, m_3)$  et  $n = (n_1, n_2, n_3)$  dans  $Z^3$ , on dit que  $m < n$  s'il existe  $k \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $m_j = n_j$  pour  $j < k$  et  $m_k < n_k$ . Cet ordre lexicographique peut être définie explicitement par l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} (m_1, m_2, m_3) < (n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow & (m_1, m_2, m_3) \in \{(a_1, a_2, a_3) / a_1 = n_1, a_2 = n_2, a_3 < n_3\} \\ & \cup \{(a, b, c) / a_1 = n_1, a_2 < n_2, a_3 \in Z\} \\ & \cup \{(a_1, a_2, a_3) / a_1 < m_1, a_2, a_3 \in Z\} \end{aligned}$$

Notons que l'ordre lexicographique considéré défini une relation d'ordre totale  $\leq$  sur  $Z^3$ .

#### D.1 Types de processus aléatoires

- **Processus d'innovations**

Nous rappelons que pour un processus aléatoire discret 3-D  $y$ , l'espace du processus noté  $H$  est par définition l'espace engendré par toutes ses variables aléatoires :

$$H = \overline{Sp} = \{y(m), (m) \in Z^3\}$$

Cet espace muni de la covariance comme produit scalaire est un espace d'hilbert. Cette propriété est importante car elle permet de définir la notion de l'orthogonalité et de la projection orthogonale sur un sous espace  $H$ . De plus, la donnée d'un ordre lexicographique permet de définir le sous espace d'Hilbert assimilé au passé strict du processus au point  $m$ . C'est le sous espace  $H_m$  engendré par toutes les observations  $y(n)$  qui « précèdent »  $y(m)$  :

$$H_m = \overline{Sp}\{y(n)/n < m\} \subset H$$

Ainsi, le prédicteur linéaire, causal à support infini du processus  $y$  au point  $m$  est le projecteur orthogonal de  $y(m)$  sur l'espace  $H_m$ . Le processus d'innovations  $\{u(n)\}$  par rapport à l'ordre total  $\leq$  est donné par les erreurs de la prédiction linéaire à tous les points  $m$  :

$$u(m) = \hat{y}(m) - y(m)$$

Pour définir les notions de purement aléatoire, déterministe et évanescent nous considérons les sous espace suivants [Loub89], [Hels59], [Hels59].

- $H_{ind}$  : le sous espace engendré par les innovations,  $H_{ind} = \overline{Sp}\{u(m, n, t), (m, n, t) \in Z^3\}$ .
- $H_{det}$  : le complémentaire orthogonal de  $H_{ind}$  dans l'espace  $H$ , c-à-d  $H_{det} = H \ominus H_{ind}$ .
- $H_{-\infty}$  : c'est l'espace engendré par l'intersection de tous les espace  $H_m$  et est appelé espace du « passé lointain » :  $H_{-\infty} = \bigcap_{m \in Z^3} H_m$ .
- $H_e$  : le complémentaire orthogonal de l'espace  $H_{-\infty}$  dans  $H_{det}$  :  $H_{det} = H_e \oplus H_{-\infty}$ .

### • Définitions

- Le processus stochastique  $\{y(m), (m) \in Z^3\}$  est dit régulier ou indéterministe si son processus d'innovation est non nul

$$E[u(m, n, t)^2] > 0.$$

- Le processus  $\{y(m), (m) \in Z^3\}$  est dit déterministe si son processus d'innovation est nul

$$E[u(m, n, t)^2] = 0$$

Dans ce cas le processus est totalement prédictible à partir de son passé.

- Le processus  $\{y(m), (m) \in Z^3\}$  est dit purement aléatoire ou purement indéterministe si il est régulier et si de plus son espace coïncide avec l'espace de ses innovations :  $H = H_{ind}$ . Autrement dit, le processus s'exprime entièrement en fonction de son innovation

- Le processus  $\{y(m), (m) \in Z^3\}$  est dit déterministe de type  $H_{-\infty}$  si il est déterministe et son espace d'Hilbert coïncide avec son espace du passé lointain :  $H = H_{-\infty}$ .

- Le processus  $\{y(m), (m) \in Z^3\}$  est dit évanescent si il est déterministe tel que  $H_{-\infty} = \{0\}$ .

## Annexe E:

# Estimation des paramètres du modèle AR 3-D

### E.1 Estimation des paramètres AR 3-D bruité

- Estimer les autocorrélations  $\hat{r}_y(h_1, h_2, h_3)$
- Former les matrices  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{G}$  données par (3.29)
- Résoudre le problème de valeurs propres généralisées (3.28)
- La variance  $\hat{\sigma}_b^2$  est la valeur propre réelle  $\lambda_r$  solution de (3.28)
- les paramètres  $\hat{\theta}$  sont les  $n$  premières composante de du vecteur propre associé à  $\lambda_r$
- Calculer  $\hat{\sigma}_e^2$  par l'expression (3.30)

### E.2 Sélection de l'ordre du modèle AR 3-D par les CI

- On fixe l'ordre  $k = (k_1, k_2, k_3)$  dans l'intervalle  $[p_{1\min}, p_{1\max}] \times [p_{2\min}, p_{2\max}] \times [p_{3\min}, p_{3\max}]$ .
- On estime les paramètres du modèle AR 3-D d'ordre  $(k_1, k_2, k_3)$
- Estimation de la variance empirique  $\hat{\sigma}_k^2$  de l'erreur de prédiction.
- Evaluations du critère (les expressions (4-37), (4-38) et (4-39)).
- L'ordre sélectionné et le triplet  $(k_1, k_2, k_3)$  qui minimise la valeur du critère utilisé.

### E.3 Sélection du modèle par la méthode algébrique

- Construire la matrice  $\mathbf{R}_0$ , et calculer son rang  $g_0$ .
- Construire la matrice  $\mathbf{R}_1$  et déterminer son rang  $g_1$ .
- Construire la matrice  $\mathbf{R}_2$  et déterminer son rang  $g_2$ .
- Construire la matrice  $\mathbf{R}_3$  et déterminer son rang  $g_3$ .
- Résoudre le système non linéaire (3.55) par la méthode de Newton-Raphson.



## Annexe F : Produit de Khatri-Rao

- **Produit de Kronecker :**

Le produit de Kronecker de deux matrices  $A = \{a_{ij}\}$  et  $B$  de dimensions respectives  $(m, n)$  et  $(p, q)$  est une matrice de dimensions  $(m.p, n.q)$ , notée  $A \otimes B$ , et définie comme suit :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (\text{F.1})$$

Le bloc  $(i,j)$  de la matrice  $A \otimes B$  est donné par la matrice  $a_{ij}B$ .

- **Produit de Khatri-Rao:**

Soient  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  et  $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  deux matrices de dimensions respectives  $(m, n)$  et  $(p, n)$  (même nombre de colonnes).

Le produit de de Khatri-Rao de  $A$  et  $B$  est une matrice, notée  $A \circ B$ , de dimension  $(m.p, n)$  définie par:

$$A \circ B = [a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n] \quad (\text{F.2})$$

La matrice  $A \circ B$  est le produit de Kronecker par colonnes de  $A$  et  $B$ .

$$A \circ B = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 & \cdots & a_{1n}b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_1 & \cdots & a_{mn}b_n \end{bmatrix} \quad (\text{F.3})$$

# Bibliographie

- [Akai69] H. Akaike, "Fitting autoregressive models for prediction," *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. 21 pp. 243-247, 1969.
- [Akai74] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-19, pp. 716-723, Dec. 1974.
- [Aksa99] B. Aksasse and L. Radouane, "Two-dimensional autoregressive (2-D AR) model order estimation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, pp. 2072-2077, Jul 1999.
- [Aksa02] B. Aksasse, M. Elansari, Y. Berthomieu, and M. Najim, "High resolution 3D spectral estimation", in *Proc EUSIPCO 2002*, vol. II, pp. 391-394, Sept 03-06, Toulouse, France.
- [Alat98] O. Alata, "Caractérisation de textures par coefficients de réflexion 2-D - application à la classification et à la segmentation", Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1998.
- [Alat03] O. Alata, C. Olivier, "Choice of a 2-D causal autoregressive texture model using information criteria", *Pattern recognition letters*, vol. 24, pp. 1191-1201, 2003.
- [Alat05] O. Alata, and C. Ramananjara, "Unsupervised textured image segmentation using 2-D quarter plane autoregressive model with four prediction supports", *Pattern Recognition*, vol. 26, pp. 1096-1081. 2005.
- [Andr98] P. Andry, and P. Tarroux, "Unsupervised segmentation of MRF modeled textured images using selectionist relaxation," *IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 20, no. 3, pp. 252-262, 1998.
- [Bert98] Y. Berthomieu, S. Rouquette, G. Poulalion, M. Najim, "Extension au cas bidimensionnel des méthodes à haute résolution fréquentielle," Chapitre 22 du livre: *Les méthodes à haute résolution, traitement d'antenne et analyse spectrale*, Hermes, Paris 1998.
- [Bout89] Y.S. Boutalis, S.D. Kollias, "A fast multichannel approach to adaptive image estimation", Longman Scientific & technical, UK, 1992.
- [Brod66] P. Brodatz, "Texture: A photographic album for artists and designers," Dover, New York, 1966.
- [Cadz82] J. A. Cadzow, "Spectral estimation: an overdetermined rational model equation approach," in *Proc. IEEE* vol. 70, pp. 907-939, 1982.
- [Chan93] T. Chang, and C. Kuo, "Texture analysis and classification with tree structured wavelet transform," *IEEE Trans. On Image Processing*, Vol. 2, no. 3, pp. 468-473. 1993.
- [Chel85] R. Chellappa, and R. Kashyap, "Texture synthesis using 2D non-causal AR models," *IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing*, Vol. 33, pp. 194-293, 1985.
- [Cheu06] H. Cheung, and F. K. W. Chan, "Approximate Maximum-Likelihood algorithm for two-dimensional frequency estimation of a complex sinusoid," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54. Aug 2006.
- [Choi99] B. S. Choi, "An order recursive algorithm to solve the 3-D Yule Walker equations of causal 3-D AR models," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, pp. 2491-2502, Sept. 1999.

- [Choi00] B. S. Choi, "On the asymptotic distributions of mean, autocovariance, autocorrelation, crosscovariance and impulse response estimators of a stationary multidimensional random field," *Commun. Statist.-Theory Meth.*, vol. 29, pp. 1703-1724, 2000.
- [Chu96] Y. Chu, W. H. Fang, and S. H. Chang, "A higher order statistics-based subspace method for the 2-D harmonic retrieval problem," In *Proc IEEE ICASSP96*.
- [Cohe91] F. S. Cohen, Z. Fan, and M. A. Patel, "Classification of rotated and scaled textured images using Gaussian Markov random field models," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-13, no. 2, pp. 192-202, Feb. 1991.
- [Cohe02] G. Cohen and J. M. Francos, "Least squares estimation of 2-D sinusoids in colored noise: Asymptotic analysis," *IEEE Trans. on information theory*, vol.48, no. 8, pp. 2243-2252. Aug. 2002.
- [Come99] M. L. Comer, E. J. Delp, "Segmentation of textured images using a multiresolution Gaussian autoregressive model," *IEEE Trans on Image processing*, Vol. 8, no. 3, pp. 408-420. 1999.
- [Davi01] C. E. Davila, "On the noise-compensated Yule-Walker equations," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 6, pp. 1119-1121, June 2001.
- [Degr98] S. R. Degraaf, "SAR via modern 2-D spectral estimation methods," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, n° 5, pp. 729-761, May 1998.
- [Fome02] S. Fomel, 2002, "Applications of plane-wave destruction filters", *Geophysics*, vol. 67, pp. 1946-1960, 2002.
- [Fome03] S. Fomel and J. F. Claerbout, "Multidimensional recursive filter preconditioning in geophysical estimation problems", *Geophysics*, Volume 68, Issue 2, pp. 577-588 (March-April 2003)
- [Fran93] J. M. Francos, A. Z. Meiri, and B. porat, "A unified texture model based on a 2-D Wold like decomposition," *IEEE Trans. Signal Processing.*, pp. 2665-2678, Aug 1993.
- [Fran95a] J. M. Francos, A. Z Meiri, and B. Porat, "A Wold Like decomposition of 2-D discrete homogeneous random fields," *The Annals of Applied Probability*, vol. 5, pp. 248-260, 1995.
- [Fran95b] J. M. Francos, A. Narasimhan, and J. W. Woods, "Maximum likelihood parameter estimation of textures using a Wold decomposition based model," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, pp. 1665-1666, Dec. 1995.
- [Fran96] J. M. Francos, A. Narasimhan, and J. W. Woods, "Maximum likelihood parameter estimation of discrete homogenous random fields with mixed spectral distributions," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 1242-1255, May. 1996.
- [Gaga83] A. Gagalowicz, *Vers un modèle de textures*, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques, Université Pierre et marie Curie, Paris VI, 1983.
- [Gema84] S. Geaman and B. Geman, "Stochastic relaxation, gibbs distribution, and the Bayesian restoration of image," *IEEE Trans. On PAMI*, Vol. 6, no. 6, pp.721-741, Nov. 1984.
- [Guit03] A. Guitton, "Multiple attenuation with multidimensional prediction-error filters," *Proc. Soc. Expl. Geophys.*, Expanded Abstracts, vol. 22, pp. 1945-1948, 2003.
- [Guit05] A. Guitton, "Multiple attenuation in complex geology with a pattern-based approach," *Geophysics*, 70, v97-v107. 2005.

- [Guyo93] X. Guyon, "Champs aléatoires sur un réseau, modélisation statistiques et applications," Masson. 1993.
- [Haar95] M. Haardt, M. D. Zoltowski, C. P. Mathews and J. A. Nossek, "2D unitary ESPRIT for efficient 2D parameter estimation," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing*, pp. 2096-2099, May 1995, Detroit, Michigan.
- [Hall96] T. E. Hall and G. B. Giannakis, "Image modeling using inverse filtering criteria with application to textures" *IEEE Trans. On Image Processing*, vol. 5, No. 6, pp. 938-949, June 1996.
- [Hara81] R. M. Haralick, "Image texture analysis", Plenum Press, New York, 1981.
- [Hann79] E. J. Hannan and B. G. Quinn, "The determination of the order of an autoregression," *Journal of the Royal Statistics Society*, B 41, pp.190-195, 1979.
- [Hels59] H. Helson, D. Lowdenslager, "Prediction theory and Fourier Series in Several variables. I", *Acta math.* Vol. 99, pp. 165-202, 1959.
- [Hels62] H. Helson, D. Lowdenslager, "Prediction Theory and Fourier series in several variables. II", *Acta math.* Vol. 106, pp. 175-213, 1962.
- [Hosn99] M. I. Hosny, R. R. Gharieb, "Estimating two-dimensional frequencies by a cumulant-based FBLP method," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.47, n°1, January 1999.
- [Hu,92] R. Hu, and M. Fahmy, "Texture segmentation based on hierarchical Markov random field," *Signal Processing*, vol. 26, pp. 285-305. 1992.
- [Hua92] Y. Hua, "Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix pencil," *IEEE Trans. Signal Processing.*, Vol. 40, n. 9, pp. 2267-2280, Sept. 1992.
- [Hwan03] T. M. Hwang, W. W. Lin, and V. Mehrmann, "Numerical solution of quadratic eigenvalue problems with structure preserving methods", *SIAM Sci. Comp.*, Vol. 24, No. 4, pp. 1283–1302. 2003.
- [Jule83] B. Julesz, J. R. Bergen, "Textons, the fundamentals elements in preattentive vision and perception of textures. The Bell System Technical Journal, vol. 62, no 6, July 1983, pp. 1619-1645.
- [Kada98] S. R. Kadaba, S. B. Gelfand, R. L. Kashyap, "Recursive estimation of images using non-Gaussian autoregressive models," *IEEE Trans. On Image Processing*, vol. 7, No. 10, Oct 1998.
- [Kash83] R. L. Kashyap and R. Chellappa, "Estimation and choice of neighbors in spatial-interaction models of images," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. IT-29, no. 1, pp. 60-72, Jan. 1983.
- [Kash84] R. L. Kashyap, "Characterization and estimation of txo-dimensional ARMA models," *IEEE Trans. On Information theory*, Vol.IT-30, no. 5, pp. 736-745, Sep 1984.
- [Kay03] S. M. Kay and C. P. Carbone, "Vector space solution to the multidimensional Yule-Walker equations," in *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 3, Hong Kong, pp. 289-292, April 2003.
- [Kayr04] A. H. Kayran, and I. Erer, "Optimum asymmetric half-plane autoregressive lattice parameter modeling of 2-D field," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 3, pp. 807-819. March 2004
- [Khot99] A. Khotanzad and J. Bennett, "A spatial correlation based method for neighbor set selection in random field image models," *IEEE Trans. Image Processing*, Vol. 8, no. 5, pp. 734-740, May 1999.
- [Kons88] K. Konstantinides, K. Yao, "Statistical analysis of effective singular values in matrix rank determination," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 36, n° 5, pp.757-763, May 1988

- [Kons91] K. Konstantinides, "Threshold bounds in SVD and a new iterative algorithm for order selection in AR models," *IEEE Trans Signal Processing.*, vol. 39, no. 5, pp. 1218-1221, May 1991.
- [Kore86] H. Korezlioglu, P. Loubaton, "Spectral factorization of wide sense stationary processes on  $Z^2$ ", *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 19, pp. 24-47, 1986.
- [Kris96] R. Krishnamuraty, J W. Woods, and J. Francos, "Adaptive Restoration of textured images with mixed spectra," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 5, pp. 648-652, Apr. 1996.
- [Laco97] J. -L. Lacoume, P. O. Amblard, P. Comon, *Statistiques d'ordre superieur pour le traitement de signal*, Masson., Paris, 1997
- [Li98] Y. Li, J. Razavilar, K. J. Ray Liu, "A high resolution technique for multidimensional NMR spectroscopy," *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, vol. 45, n°1, pp. 78-86, January 1998.
- [Lian93] G. Liang, D. M. Wilkes, and J. A. Cadzow, "ARMA model order estimation based on the eigenvalues of the covariance matrix," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 10, pp. 3003-3009, October 1993.
- [Liew05] J. Liew, and S. Lawrence Marple Jr, "Three-dimensional fast algorithm solution for octant based three-dimensional Yule Walker equations," in *Proc. IEEE ICASSP05*, Philadelphia, USA, 2005.
- [Liu96] X. Liu and M. Najim "A 2-D fast lattice recursive least squares algorithm", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, n° 10, pp. 2557-2567, 1996.
- [FLiu96] F. Liu, and R. W. Picard, "Periodicity, directionality, and randomness: Wold features for image modeling and retrieval," *IEEE. Trans. on PAMI*, vol. 18, no. 7, pp. 722-733. Jul 1996.
- [Mari97] J. -L. Mari, F. Glangeaud, F. Coppens, "Traitement du signal pour géologues et géophysiciens" Editions Technip, Paris, 1997.
- [Marp00] S. L. Marple, Jr., "Two-dimensional lattice linear prediction parameter estimation method and fast algorithm", *IEEE signal Processing letters*, vol. 7, no. 6, June 2000.
- [Mela02] D. E. Melas, S. P. Wilson, "Double Markov random fields and Bayesian image segmentation," *IEEE Trans on Signal Processing*, Vol. 50, no. 2, pp. 357-365. 2002.
- [Naji88] M. Najim, "Modélisation et Identification en Traitement du Signal", Masson 1988.
- [Oliv99] C. Olivier, F. Jouzel, and A. El Matouat, "Choice of the number of component clusters in mixture models by information criteria" in *Proc. Vision Interface'99*, Trois-Rivières, Canada, pp. 74-81, 1999.
- [Pesa05] M. Pesavento, S. Shahbazpanahi, J. F. Bohme, A. B. Gershman, "Exploiting multiple shift invariance in multidimensional harmonic retrieval of damped exponentials," *IEEE International conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol 4, pp. 1017-1020, March 18-23, Philadelphia, USA.
- [Piec94] W. Pieczynski, "hidden Markov fields and iterative conditional estimation," *Traitement du signal*, Vol. 11, no. 2, pp. 141-153., 1994.
- [Pisa73] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function," *Geophysical Journal of Royal Astronomical Society*, vol.33, pp.347-366, 1973.
- [Rama02] C. Ramananjara, O. Alata, M. Najim, "2-D Wold decomposition: New parameter estimation approach to evanescent field spectral supports", in *Proc. EUSIPCO 02*, Tampere, Finland.

- [Rama03] C. Ramanajarasoa, "Modélisation paramétrique des processus stochastiques: Analyse de la Stabilité des modèles Autorégressifs – Etude de la décomposition de type Wold», Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux1, 2003.
- [Rouq98] S. Rouquette, Analyse Spectrale haute résolution des signaux bidimensionnels : Application à l'imagerie radar, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux1, 1998.
- [Rouq99] S. Rouquette, O. Alata, M. Najim, "2-D High resolution spectral estimation based on multiple region of support," IEEE International conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Phoenix, Arizona 1999.
- [Rouq01] S. Rouquette and M. Najim, "Estimation of frequencies and damping factors by 2-D ESPRIT type methods," IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 49, pp. 237-245, Jan. 2001
- [Roy89] R. Roy, T. Kailath, "ESPRIT : Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., Vol. ASSP-37, pp. 984-995, July 1989.
- [Riss78] J. Rissanen, "Modeling by shortest data description," Automatica, vol. 14, pp. 465-471, 1978.
- [Sark97] A. Sarkar, K. M. S. Sharma, and R. V. Sonak, "A new approach for subset 2-D AR model identification for describing textures," IEEE Trans. Image Processing, vol. 6, pp. 407-413, March 1997.
- [Stew93] R. R. Stewart, and G. D. Schieck,, "3-D f-k filtering," Journal of Seismic Exploration, 2, pp. 30-46, 1999.
- [Stit04] Y. Stitou, F. Turcu, M. Najim, and L. Radouane "3-D texture model Based on the Wold decomposition" in Proc. EUSIPCO 2004, Vienna, Austria, September 6-10. 2004, pp. 429-432.
- [Stit05a] Y. Stitou, M. Donias and B. Aksasse, "Three-dimensional autoregressive parameter estimation from noisy data," In Proc EUSIPCO 05. Sept 4-8. Antalya , Turkey , 2005.
- [Stit05b] Y. Stitou, F. Turcu, M. Najim, and L. Radouane "3-D Texture characterization based on Wold decomposition and higher order Statistics" In Proc IEEE ICASSP05, Vol 2, pp. 165-168,2005 , March 18-23, Philadelphia, USA.
- [Stit05] B. Aksasse, Y. Stitou, and M. Najim "Minimum eigenvalue based 3-D AR model" IEEE, Statistical Signal Processing SSP'05 Workshop Bordeaux 2005.
- [Stit06a] Y. Stitou, F. Turcu, Y. Berthoumieu, and M. Najim, "Three-dimensional Textured Image Blocks Model Based on Wold decomposition," IEEE Trans. Signal Processing, Accepted for publication Oct. 2006. (à apparaître en juillet 2007)
- [Stit06b] B. Aksasse, Y. Stitou , Y. Berthoumieu, and M. Najim , "3-D AR Model order selection via rank test procedure", IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 54, pp. 2672-2677, Jul. 2006.
- [Stit06c] Y. Stitou, B. Aksasse, and M. Najim, "Cumulant matrix pencil method for three-dimensional frequency estimation in colored Gaussian noise," Proc IEEE/EURASIP ISCCSP, Marrakech, Morocco, March 2006.
- [Stit06d] B. Aksasse, Y. Stitou, Y. Berthoumieu and M. Najim "Eigen Filter for Attenuation Coherent Noise in 2-D Seismic Data," In Proc IEEE/EURASIP ISCCSP2006, Marrakech, Morocco, March 2006.
- [Stoi98] R. Stoica, J. Zerubia, and J. Francos, "The Two-dimensional Wold decomposition for segmentation and indexing in image libraries," in Proc. IEEE ICASSP, Seattle, USA, Mai 1998.

- [Swam91] A. Swami and J.M. Mendel, "Cumulant-based approach to the harmonic retrieval and related problem," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol.39, pp. 1099-1109, May 1991.
- [Thom00] H. Thomas, C. Collet, K. Yao, and G. Burel, "Classification des texture en imagerie sonar et invariance en rotation," *Traitement du Signal*, Vol. 17, no. 1, 2000.
- [Truc98] F. Truchetet, "Ondelettes pour le signal numérique," Editions Hermies, Paris 1998.
- [Turc06] F. Turcu, M. Najim "On the structure of Wold decomposition for stationary processes in non-archimedean groups," under revision, *Journal of Multivariate Analysis*, 2006.
- [Tric02] S. R. Trickett, "F-x eigen noise suppression," *CSEG Geophysics* 2002.
- [Tric03] S. R. Trickett, "f-xy eigenimage noise suppression," *Geophysics*, vol. 68, pp. 751-759, 2003.
- [Unse84] M. Unser, "Description statistique de la texture," Thèse de doctorat es Sciences, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1984.
- [Unse95] M. Unser, "Texture classification and segmentation using wavelet frame" *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 4, no. 11, pp. 1549-1560. 1995.
- [Vanp94] F. Vanpoucke, M. Moonen, Y. Berthoumieu, "An efficient subspace algorithm for 2-D harmonic retrieval," In *Proc. of IEEE International conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Adelaide, South Australia, pp. 461-464, April 1994.
- [Van98] M. C. Van der Veen, A.-J. Van der Veen, and A. Poulraj, "Estimation of multipath parameters in wireless communications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 3, pp. 682-690, March 1998.
- [Van02] A. -J. Van der Veen, M. C. Van der Veen, and A. Paulraj, "Joint angle and delay estimation using shift invariance techniques" *IEEE Trans Signal Process.*, vol. 46, pp. 405-418.
- [Wold54] H. Wold, "A study in the analysis of stationary time series," *Almqvist and Wiksell*, Stockholm, 1954.
- [Yang96] H. Yang, Y. Hua, "On the rank of block Hankel matrix for 2-D frequency detection and estimation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no 4, pp. 1046-1048, April 1996.
- [Youl92] H. Youlal, I. Janati, M. Najim, "Two dimensional joint process lattice for adaptive restoration of images," *IEEE Trans Image Processing*, Vol.1, no. 3, pp 366-378, July 1992.
- [Youl94] H. Youlal, M. Janati-Idrissi, M. Najim, *Modélisation paramétrique en traitement d'images*, Masson, Paris, 1994.
- [Zhao86] L.C. Zhao, P. R. Krishnainh, et Z. D. Bai, "On detection of the number of signals in presence of white noise," *Journal of Multivariate analysis*, Vol. 1, no. 1, pp. 26-49, 1986.

## Résumé

Ce mémoire porte sur la modélisation de blocs 3D d'images texturées. L'objectif principal est de développer de nouveaux modèles paramétriques 3D qui permettent de caractériser une grande classe de textures. L'outil mathématique mis à contribution pour construire ces modèles est la décomposition de Wold des processus aléatoires discrets multidimensionnels. L'étude réalisée montre que tout bloc d'images texturées, considéré comme une réalisation d'un processus aléatoire homogène 3D, est la somme de quatre composantes orthogonales : une composante purement aléatoire, une composante harmonique et deux composantes évanescents dites champ évanescent de type 1 et champ évanescent de type 2. Pour exploiter ce résultat théorique, nous proposons des modèles paramétriques adéquats pour approximer séparément les quatre composantes. A travers différentes études expérimentales, nous montrons que la modélisation fondée sur la décomposition de Wold 3D offre la possibilité de caractériser des blocs d'images présentant séparément ou à la fois les trois aspects fondamentaux des textures 3D: l'aspect aléatoire, l'aspect périodique et l'aspect directionnel. Les modèles proposés ont été utilisés pour le filtrage des blocs sismiques 3D fournis par le laboratoire commun "LASIS" CNRS-TOTAL. Dans ce contexte applicatif la décomposition de Wold 3D consiste, d'une part, à identifier et à séparer les différents signaux qui composent la donnée sismique, et d'autre part, à distinguer parmi les composantes extraites celles qui représentent le signal sismique, après quoi le filtrage devient aisé.

**Mots clés:** Signaux tridimensionnels, Décomposition de Wold, Modélisation paramétrique, Analyse spectrale, Méthode haute résolution, Critères d'information, Bloc sismique 3D.

## Abstract

This dissertation deals with the three-dimensional image blocks modelling. The main purpose is to develop new parametric models able to characterize a large class of homogenous volumes of textured images. The mathematical tool used to build these models is the multidimensional Wold decomposition of discrete stationary processes. Based on this decomposition, any textured image block, assumed to be a realization of 3D homogenous random process, can be represented as a sum of four mutually orthogonal components: the purely indeterministic component, the harmonic component and two evanescent components called respectively the evanescent type 1 and the evanescent type 2. To exploit this theoretical result in 3D texture analysis, we propose explicit parametric models to conveniently describe the four components separately. Through several examples, we show that the Wold decomposition based-model enables us to characterize the 3D textured with (separately or jointly) following fundamental features: the random aspect, the periodic aspect and the directional one. The proposed models were used in the filtering of 3D seismic image blocks provided by the joint laboratory "LASIS" CNRS-TOTAL. The filtering method can be summarized in two stages. First, we identify and extract the Wold components associated with the seismic data. Second, each extracted component is classified as a part of seismic signal or component noise to filter the bloc.

**Keywords:** Three-dimensional signal, Wold decomposition, Parametric modelling, Spectral analysis, High resolution methods, Information criterion, 3D seismic image blocks.