Résumé

Ce mémoire est constitué d'une étude topologique et cohomologique des anneaux d'entiers de corps de nombres. Dans une première partie, nous définissons une cohomologie étale équivariante satisfaisant un théorème de localisation. L'utilisation de cette cohomologie nous permet d'approfondir le dictionnaire de la topologie arithmétique.

La suite de ce travail est consacrée à l'étude de la cohomologie Weil-étale en caractéristique zéro, dont l'existence a été conjecturée par Lichtenbaum. Cette théorie cohomologique permettrait d'exprimer les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind en termes de caractéristiques d'Euler.

Après avoir donné une description explicite de la catégorie des faisceaux sur le site Weil-étale d'un corps de nombres, nous construisons un complexe de faisceaux sur le site étale d'Artin-Verdier dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale conjecturale. Cette construction suggère l'existence d'un topos Weil-étale au-dessus du topos étale d'Artin-Verdier d'un corps de nombres.

Nous démontrons ensuite que le topos Weil-étale en caractéristique positive est un produit fibré dans la 2-catégorie des topos. Nous étudions alors les propriétés topologiques partagées par le topos Weil-étale et le système dynamique de Deninger conjecturalement associés à un corps global. L'intuition topologique fournie par cette analogie nous permet finalement la construction d'un topos, fonctoriellement attaché à un corps de nombres, dont nous étudions certaines propriétés.

Mots-clés : Cohomologie équivariante, théorème de localisation, Cohomologie Weil-étale, conjectures de Lichtenbaum, fonctions zêta, topos, topos Weil-étale, topologie arithmétique, système dynamique de Deninger.

Abstract

This thesis consists in a topological and cohomological study of rings of algebraic integers. In the first part, we define an equivariant étale cohomology theory, which satisfies a localization theorem. We use this cohomology theory to investigate further the dictionary of arithmetic topology.

In the following chapters we study the Weil-étale cohomogy in characteristic zero, whose existence has been conjectured by Lichtenbaum. This cohomology theory would allow to express the special values of Dedekind zêta functions in terms of Euler characteristics.

After having obtain an explicit description of the category of sheaves on the Weil-étale site of a number field, we construct a complex of sheaves on the étale Artin-Verdier site whose hypercohomology is the conjectural Weil-étale cohomolgy. Our construction suggests the existence of a Weil-étale topos over the étale Artin-Verdier topos of a number field.

We next prove that the Weil-étale topos in positive characteristic is a fiber product in the 2-category of topoi. We then study the topological properties shared by the Weil-étale topos and Deninger's dynamical system which are conjecturally associated to a global field. The topological intuition gained by this analogy allows us eventually to construct a topos, functorially attached to a number field, whose properties we study in some detail.

Keywords : Equivariant cohomology, localization theorem, Weil-étale cohomology, Lichtenbaum's conjectures, zeta functions, topoi, Weil-étale topos, arithmetic topology, Deninger's dynamical system.

2008 - Sur le topos Weil-étale d'un corps de nombres - Baptiste MORIN

N° d'ordre : 3590

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Baptiste MORIN**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

****

SUR LE TOPOS WEIL-ETALE D'UN CORPS DE NOMBRES

****

Soutenue le 30 Mai 2008

Après avis de :

M. FLACH	Professeur, California Institute of Technology	**Rapporteur**
S. LICHTENBAUM	Professeur, Brown University	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen composée de :

P. CASSOU-NOGUES	Professeur, Université Bordeaux I	
T. CHINBURG	Professeur, University of Pennsylvania	
B. EREZ	Professeur, Université Bordeaux I	**Directeur**
L. ILLUSIE	Professeur, Université Paris-Sud	**Président**
S. LICHTENBAUM	Professeur, Brown University	**Rapporteur**

- 2008 -

Sur le topos Weil-étale d'un corps de nombres

Baptiste Morin

Remerciements

Je suis heureux d'exprimer ici ma reconnaissance à mon directeur de thèse Boas Erez. Il m'a transmis le goût des théories cohomologiques et de la topologie arithmétique. Puis il a su m'amener progressivement vers une autonomie complète. Je tiens aussi à remercier Philippe Cassou-Nogues et à lui témoigner toute mon amitié. Les nombreuses discussions mathématiques que nous avons partagées, ses conseils et son enthousiasme ont été d'une aide précieuse tout au long de ce travail.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude envers Matthias Flach pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux, pour son hospitalité, et pour tous les échanges et discussions mathématiques que nous avons eus. Son grand recul et sa clairvoyance ont profondément influencé cette thèse. Je me réjouis de notre collaboration future.

Je suis également très reconnaissant envers Lorenzo Ramero. Ses lectures, remarques, vérifications et corrections ont été extrêmement utiles pour l'aboutissement de la première partie de ce mémoire.

Matthias Flach et Stephen Lichtenbaum ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les en remercie vivement.

Je suis très reconnaissant envers Luc Illusie, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je tiens à lui témoigner le plus grand respect.

Je remercie Ted Chinburg et Stephen Lichtenbaum d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Je souhaite aussi remercier Ted Chinburg pour avoir attiré mon attention sur la cohomologie Weil-étale, lors d'une visite à Bordeaux il y a deux ans.

Je voudrais aussi profiter de cette occasion pour remercier mes professeurs, en particulier Jean Fresnel, Alain Hénaut, Qing Liu, Michel Matignon et Alain Yger.

Enfin, je remercie Ieke Moerdijk pour nos communications concernant la théorie des topos.

Table des matières

Introduction

1. Heuristique

Au cours de ce travail, j'ai eu le sentiment d'observer un seul et même objet géométrique, depuis des points de vues différents. L'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions ainsi que l'extrême souplesse et généralité de la théorie des topos, m'ont amené à penser que cet objet devait pouvoir se réaliser sous la forme d'un topos, le topos Weil-étale.

La définition première de cet objet conjectural peut s'énoncer comme suit. Le topos Weil-étale d'un corps de nombres, ou plus généralement d'une variété arithmétique, est un topos dont la cohomologie est la théorie cohomologique Weil-étale, dont l'existence a été conjecturée par Stephen Lichenbaum. Cette cohomologie Weil-étale est supposée être de type arithmétique, dans le sens où les valeurs spéciales des fonctions L motiviques doivent être données par les caractéristiques d'Euler de certains complexes de faisceaux. Pour un schéma Y lisse et de type fini sur un corps fini, ce topos peut se construire directement à partir du topos étale de Y. Cependant, une construction analogue fait toujours défaut en caractéristique zéro.

Dans un tout autre contexte, Barry Mazur et Yuri Manin ont imaginé, dès les années soixante, une analogie surprenante entre les corps de nombres et les variétés topologiques réelles de dimension trois. Le théorème de dualité d'Artin-Verdier en cohomologie étale des corps de nombres, interprétation topologique de la théorie du corps de classes, peut en effet être pensé comme un analogue arithmétique de la dualité de Poincaré pour les variétés compactes et orientables de dimension trois. Une place finie d'un corps de nombres est alors vue comme un noeud dans un espace topologique de dimension trois. Mikhail Kapranov et Alexander Reznikov ont ensuite poursuivi cette analogie en un *dictionnaire de la topologie arithmétique*, reliant les invariants d'un corps de nombres à ceux d'une variété de dimension trois. Suite à une idée de Niranjan Ramachandran, les places archimédiennes d'un corps de nombres sont vues comme les bouts d'une variété topologique non compacte, ou encore comme des points de la compactification de cette variété. Par ailleurs, ces correspondances abstraites et l'intuition topologique dont elles sont issues sont confirmées par les calculs de Stephen Lichenbaum en cohomologie Weil-étale, alors que la cohomologie étale semble être mal adaptée à cette étude. On peut ainsi penser que la variété topologique analogue d'un corps de nombres est une vision intuitive (et partielle) du topos Weil-étale.

En lien avec la topologie arithmétique, Christopher Deninger a observé une relation profonde que les corps de nombres, ou plus généralement les variétés arithmétiques, entretiennent avec une certaine classe de systèmes dynamiques de dimension trois munis d'un feuilletage de co-dimension un. Dans ce cadre, une place finie $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres K correspond à une orbite fermée du flot de longueur $log(N(\mathfrak{p}))$. Les places archimédiennes, quant à elles, sont vues comme les points fixes du flot, compactifiant le système dynamique correspondant au schéma affine $Spec\,\mathcal{O}_K$. En oubliant le flot ainsi que le feuilletage, une telle orbite fermée est de nouveau un noeud dans un espace de dimension trois, alors que les points fixes du flot sont les bouts d'une variété non compacte. Selon notre point de vue, cette version dynamique de la topologie arithmétique est nettement plus réaliste que la précédente. De nombreuses contradictions, qui peuvent être observées en topologie arithmétique, n'apparaissent plus. La formule du produit, les formules explicites en théorie analytique des nombres ou encore les conjectures de Lichtenbaum, s'expriment de manière très cohérente dans ce cadre dynamique. On peut d'ailleurs noter que le rôle de la cohomologie Weil-étale est joué, dans l'analogue dynamique des conjectures de Lichtenbaum, par la cohomologie de la variété topologique sous-jacente au système dynamique. A nouveau, aucune construction de tels systèmes dynamiques (commutatifs) fonctoriellement attachés aux variétés arithmétiques n'a été réalisée, pas même pour $Spec\,\mathbb{Z}$. On peut cependant espérer que le système dynamique analogue d'un corps de nombres permette une nouvelle vision intuitive, plus fine, du topos Weil-étale.

Avant d'étudier l'analogie entre systèmes dynamiques et variétés arithmétiques, Christopher Deninger a conjecturé l'existence d'un formalisme cohomologique de type géométrique pour de tels schémas. En d'autres termes, cette théorie permettra, de manière largement conjecturale, une interprétation cohomologique des fonctions zêta des schémas arithmétiques, ou plus généralement des fonctions L motiviques. Il a ensuite montré que cette théorie cohomologique pourrait s'obtenir à partir d'une certaine classe de systèmes dynamiques feuilletés, en supposant qu'un tel système dynamique puisse être construit. L'étude géométrique de cette classe de systèmes dynamiques donne lieu, en particulier, à l'analogie évoquée ci-dessus.

Considérons maintenant une courbe Y, ou plus généralement une variété, lisse et projective sur un corps fini k. La donnée de cette variété est équivalente à celle de la variété géométrique $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$, munie de l'action du Frobenius. La cohomologie l-adique, permettant l'interprétation cohomologique de la fonction zêta de Y, a été construite en pensant intuitivement $\overline{Y}$ comme une variété analytique complexe M_Y de dimension $dim(Y)$, munie d'un automorphisme. En effet, la cohomologie l-adique joue le rôle de la cohomologie singulière de l'espace topologique M_Y. L'idée de Stephen Lichtenbaum, consistant à remplacer le groupe de Galois du corps fini k par son groupe de Weil W_k, permet la construction du topos Weil-étale $\mathcal{S}_W(Y)$. Ce topos est muni de morphismes canoniques

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(Y) \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[dr, "f"'] & B^{sm}_{W_k} \arrow[d, "p"] \\ & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

où $B^{sm}_{W_k}$ est le petit topos classifiant du groupe discret W_k, c'est-à-dire la catégorie des ensembles sur lesquels W_k opère. Stephen Lichenbaum a ensuite démontré que la cohomologie Weil-étale, donnée par le foncteur Rf_* est de type arithmétique. En d'autres termes, les valeurs spéciales de la fonction zêta de Y sont données par des caractéristiques d'Euler pour la cohomologie Weil-étale (cf [**36**] Théorème 7.4). Le morphisme $\mathfrak{f}$ traduit l'action de W_k sur $\overline{Y}$, et le foncteur $R\mathfrak{f}_*$ permet de définir les groupes de cohomologie l-adiques munis de leur action du Frobenius. Ainsi, le topos Weil-étale donne lieu à une cohomologie de type arithmétique définie via f, ainsi qu'à une cohomologie de type géométrique définie par $\mathfrak{f}$. La suite spectrale de Leray

$$R^i(p_*) \circ R^j(\mathfrak{f}_*) \Longrightarrow R^{i+j}(f_*)$$

établit le lien existant entre ces deux théories cohomologiques.

La situation est nettement plus difficile en caractéristique zéro, même dans le cas le plus simple. Considérons la complétion d'Arakelov $\overline{X} = \overline{Spec\,\mathcal{O}_K}$ du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres K. Les travaux de Christopher Deninger suggèrent de voir $\overline{X}$ comme un espace de dimension trois $\mathrm{M}_{\overline{X}}$, muni d'une action du groupe de Lie $\mathbb{R}$, elle-même compatible à la donnée d'un feuilletage de co-dimension un. On peut alors espérer l'existence d'un topos Weil-étale $\mathcal{S}_W(\overline{X})$, muni de morphismes canoniques

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(\overline{X}) \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[dr, "f"'] & B_{\mathbb{R}} \arrow[d, "p"] \\ & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

Ci-dessus, $B_{\mathbb{R}}$ est le topos classifiant du groupe topologique $\mathbb{R}$, et le morphisme $\mathfrak{f}$ du topos Weil-étale dans ce topos classifiant traduit l'action du groupe $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{M}_{\overline{X}}$. Conjecturalement, le foncteur Rf_* doit permettre de définir une cohomologie de type arithmétique. Ce qui précède suggère aussi de considérer la théorie cohomologique définie par le foncteur $R\mathfrak{f}_*$, reliée à la cohomologie Weil-étale via la suite spectrale de Leray

$$R^i(p_*) \circ R^j(\mathfrak{f}_*) \Longrightarrow R^{i+j}(f_*).$$

Les raisons évoquées ci-dessus m'ont amené à penser que l'étude des systèmes dynamiques de Deninger pouvait être utile dans la bonne définition de la cohomologie Weil-étale, pour les anneaux d'entiers de corps de nombres. L'intuition géométrique fournie par cette étude s'avère en effet nécessaire, compte tenue de la complexité de la situation en caractéristique nulle. De manière imagée, la construction du topos Weil-étale en caractéristique positive consiste à libérer l'automorphisme de Frobenius de sa complétion profinie. Mais les points fermés d'un schéma plat et (de type) fini sur $Spec\,\mathbb{Z}$ définissent une infinité de Frobenius indépendants. De surcroît, les places archimédiennes sont d'une toute autre nature, que les méthodes purement algébriques de la cohomologie étale ne peuvent appréhender.

L'existence du topos Weil-étale en caractéristique nulle demeure mystérieuse, et les idées exposées ci-dessus s'avéreront peut-être inexactes. Elles ont cependant guidé ce mémoire.

2. Objectifs

A posteriori, les objectifs qui ont guidé ce travail sont les suivants.

(1) *Mieux comprendre le dictionnaire de la topologie arithmétique.*

(2) *Essayer de proposer une définition naturelle de la cohomologie Weil-étale conjecturée par S. Lichtenbaum, pour les anneaux d'entiers de corps de nombres.*

(3) *Proposer une vision intuitive du topos donnant lieu à cette théorie cohomologique.*

Pour atteindre le premier objectif ci-dessus, nous introduisons une cohomologie étale équivariante modifiée, et nous utilisons les calculs de Stephen Lichtenbaum en cohomologie Weil-étale.

Le deuxième objectif est clairement le plus important, mais il n'est pas atteint. L'existence et la maîtrise d'une telle théorie cohomologique serait extrêmement utile en théorie des nombres et en géométrie arithmétique. Mais aucune définition conjecturale n'avait été proposée, avant des travaux récents de Stephen Lichenbaum. Nous proposons une listes d'axiomes pour un topos Weil-étale dans le chapitre 7, de sorte que la cohomologie de ce topos conjectural soit la bonne cohomologie Weil-étale. Le dernier chapitre fournit un exemple de construction directe à partir du topos étale d'Artin-Verdier, sans prétendre qu'il s'agisse du bon topos

Weil-étale. Malheureusement, nous n'avons pas été en mesure de calculer la cohomologie de ce topos.

Enfin, une vision intuitive du topos Weil-étale peut être utile pour sa construction et son utilisation. Pour tenter d'atteindre ce troisième objectif, nous utilisons les travaux de Christopher Deninger concernant les relations existant entre une certaine classe de systèmes dynamiques et celle des variétés arithmétiques.

3. Énoncé des principaux résultats

Ce travail s'articule en trois parties. La première partie, dont le contenu est essentiellement celui de [**46**], est constituée des trois premiers chapitres. Les deux dernières parties de ce mémoire concernent la cohomologie Weil-étale.

3.1. Utilisation d'une cohomologie étale équivariante en topologie arithmétique. Le calcul de la cohomologie étale du spectre X de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres L laisse imaginer une analogie entre les corps de nombres et les variétés réelles de dimension trois. Le premier chapitre de ce mémoire est une introduction à l'étude de cette analogie, connue sous le nom de topologie arithmétique. Nous y présentons une série d'arguments permettant d'appréhender ces correspondances abstraites, reliant les invariants arithmétiques d'un corps de nombres aux invariants topologiques d'une variété de dimension trois.

Dans ce contexte, les points fermés de X sont vus comme des noeuds (ou lacets) dans une variété compacte de dimension trois. Une extension galoisienne L/K de groupe G correspond à un revêtement galoisien $M \to M/G$ de variétés. Dans cette situation, le groupe des classes $Cl(L)$ et le quotient libre U_L/μ_L du groupe des unités de L correspondent respectivement, en tant que modules galoisiens, à la partie de torsion $H_{tor}(M)$ et au quotient libre $H_{free}(M)$ du premier groupe d'homologie singulière de M à coefficients entiers. Lorsque le groupe de Galois est le groupe cyclique d'ordre premier C_p et qu'il opère par automorphismes préservant l'orientation, le lieu de ramification du revêtement $M \to M/C_p$ est constitué d'un nombre fini de noeuds ramifiés, analogues topologiques des places finies ramifiées dans l'extension L/K. Cette situation est envisagée dans [**56**]. A partir de la structure galoisienne des groupes $H_{tor}(M)$ et $H_{free}(M)$ (respectivement $Cl(L)$ et U_L/μ_L), Adam Sikora y donne un encadrement du nombre s de noeuds (respectivement de places finies) ramifiés. Il obtient des résultats en accord quasi-parfait avec le dictionnaire de la topologie arithmétique. Cependant, ses preuves sont basées sur des méthodes très différentes, puisqu'il utilise une cohomologie équivariante dans le contexte géométrique alors qu'il fait appel à à la théorie du corps de classes en arithmétique.

Il devient donc nécessaire de fournir des démonstrations analogues à ces résultats analogues, afin de comprendre la coïncidence à priori très surprenante de ces résultats. Alors, ces résultats, leurs hypothèses et leurs démonstrations mettent en interaction la quasi-totalité des éléments du dictionnaire de la topologie arithmétique, et permettent ainsi de tester la validité de ces correspondances. Afin d'approfondir ce dictionnaire, la pertinence de certains de ses éléments et les contradictions offertes par d'autres sont mises en évidence dans le troisième chapitre.

La cohomologie équivariante modifiée utilisée dans [**56**] pour traiter le cas des variétés topologiques satisfait essentiellement deux propriétés. Elle est d'une part l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme initial est de la forme $\widehat{H}^p(G; H^q(M;\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}_G^{p+q}(M;\mathbb{Z})$. D'autre part, cette cohomologie équivariante satisfait un théorème de localisation, et par conséquent, ne "voit" que le lieu de ramification. Dans le deuxième chapitre, nous définissons l'analogue en cohomologie étale de cette théorie et la suite spectrale

$$\widehat{H}^p(G; H^q(X_{et}; F)) \Longrightarrow \widehat{H}_G^{p+q}(X_{et}; F)$$

qui y aboutit. Les groupes $\widehat{H}_G^q(X_{et}; F)$ ne sont définis que lorsque le groupe d'automorphismes G est fini, et ne peuvent être intéressants que si les groupes de cohomologie de F sont nuls à partir d'une certaine dimension n. Dans ce cas, les groupes $\widehat{H}_G^q(X_{et}; F)$ s'identifient à partir de la dimension $n+1$ aux groupes de cohomologie mixte $H^q(X_{et}; G; F)$ (cf 2.27), définis comme les invariants cohomologiques du topos des G-faisceaux d'ensembles sur X_{et}. La motivation principale pour l'introduction de cette théorie est le *théorème de localisation* énoncé ci-dessous, qui permettra de fournir des preuves analogues aux résultats de Adam Sikora.

THÉORÈME. *Soit X un schéma noethérien sur lequel un groupe fini G opère fidèlement et de manière admissible. On note Z le lieu de ramification du revêtement $X \to X/G$ et $\phi : \widetilde{Z} \to X$ la limite projective des voisinages étales de Z. Soit de plus F un G-faisceau adapté (3.25) sur X. Alors le morphisme canonique $\widehat{H}_G^*(X_{et}; F) \longrightarrow \widehat{H}_G^*(\widetilde{Z}_{et}; \phi^*F)$ est un isomorphisme. Si de plus F est de torsion et si Z est contenu dans un ouvert affine, on a l'isomorphisme $\widehat{H}_G^*(X_{et}; F) \simeq \widehat{H}_G^*(Z_{et}; i^*F)$, où $i : Z \to X$ désigne l'immersion fermée canonique.*

Ainsi, cette cohomologie étale équivariante modifiée peut rendre les mêmes services en théorie des schémas que la théorie analogue dans le cadre topologique. La fin du chapitre 2 est consacrée à quelques exemples. Au cours du troisième chapitre, ce théorème nous permet de calculer les groupes $\widehat{H}_G^q(X_{et}; \mathbb{G}_m)$, lorsque X est le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres L. On trouve en particulier lorsque G est abélien, l'isomorphisme

$$\widehat{H}_G^0(X_{et}; \mathbb{G}_m) \simeq \prod I_{\mathfrak{q}},$$

où le produit est pris sur l'ensemble des places $\mathfrak{q}$ de L^G et pour lesquelles $I_{\mathfrak{q}}$ désigne le sous-groupe d'inertie dans G. La suite spectrale établit donc un lien entre la ramification dans l'extension L/L^G et la structure galoisienne des groupes $Cl(L)$ et U_L. Elle permet ainsi d'obtenir une nouvelle démonstration des résultats de Adam Sikora en théorie des nombres à l'aide de ces méthodes.

Nous exprimons aussi dans le chapitre 3 la relation de dualité donnant les isomorphismes $\widehat{H}_G^n(X_{et}; \mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}_G^{2-n}(X_{et}; \mathbb{Z})^D$, d'ailleurs compatibles à la dualité induite par celle d'Artin-Verdier sur les termes initiaux des suites spectrales respectives. L'utilisation du G-faisceau $\mathbb{Z}$ permet alors de donner des preuves satisfaisantes du point de vue de la topologie arithmétique. En effet, la preuve des résultats de **[56]** de nature topologique et arithmétique respectivement s'articule comme suit.

DÉMONSTRATION. *Il s'agit d'encadrer le nombre s de noeuds (respectivement de places finies) ramifiés dans un revêtement $X \to X/C_p$ de variétés de dimension trois (respectivement de spectres d'anneaux d'entiers de corps de nombres) galoisien de groupe cyclique d'ordre premier p. Le théorème de localisation fournit les isomorphismes*

$$\widehat{H}_{C_p}^n(X; \mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}_{C_p}^n(Z; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{F}_p^s,$$

où Z désigne le lieu de ramification qui est constitué de s noeuds (respectivement de s places finies). La suite spectrale

$$\widehat{H}^i(C_p; H^j(X; \mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}_{C_p}^{i+j}(X; \mathbb{Z})$$

donne ainsi des approximations successives du module $\mathbb{F}_p^s$ *à partir des groupes* $\widehat{H}^i(C_p; H^j(X;\mathbb{Z}))$. *La dualité de Poincaré (respectivement d'Artin-Verdier) permet alors d'obtenir un encadrement du nombre* s *en fonction de la dimension sur* $\mathbb{F}_p$ *des espaces* $\widehat{H}^0(C_p; H_{tor}(X))$ *et* $\widehat{H}^1(C_p; H_{free}(X))$ *(respectivement* $\widehat{H}^0(C_p; Cl(L))$ *et* $\widehat{H}^1(C_p; U_L/\mu)$*).* □

Cependant, l'utilisation de la topologie étale d'Artin-Verdier est nécessaire pour généraliser ces preuves aux cas des extensions de corps de nombres non totalement imaginaires. La situation est alors moins agréable, car les hypothèses du théorème de localisation doivent être allégées.

Nous tirons les conclusions de ce travail préliminaire dans la quatrième section du troisième chapitre. Nous prenons alors clairement parti pour la première des deux versions (sensiblement différentes) du dictionnaire de la topologie arithmétique proposées par Alexander Reznikov dans [**52**] et [**53**]. On est ainsi amené à montrer comment la cohomologie Weil-étale de Lichtenbaum (conjecturale à ce jour d'après [**16**]) fournit naturellement un analogue arithmétique au groupe $H_1(M;\mathbb{Z})$, dont le sous-groupe de torsion et le quotient libre maximal s'identifient, en tant que modules galoisiens, à $Cl(L)$ et U_L/μ_L respectivement. Les calculs de Stephen Lichenbaum confirment ainsi certaines correspondances de la topologie arithmétique, au contraire de la cohomologie étale. Cependant, ces défauts dans la cohomologie étale n'apparaissent pas dans la cohomologie équivariante modifiée. En d'autres termes, les groupes de cohomologie étale équivariante modifiée sont les stricts analogues des mêmes groupes définis dans le contexte topologique. Cette analogie n'est d'ailleurs pas respectée par les premiers groupes de cohomologie étale équivariante non modifiée.

Le travail exposé dans ces trois premiers chapitres suggèrent que les résultats de [**56**] sont deux manifestations d'un même phénomène, l'arithmétique apparaissant ici comme un "cas particulier" du cadre topologique. Le contexte arithmétique semble en effet beaucoup plus rigide. Ce manque de structure dans le cadre topologique sera comblé au cours du chapitre 9, grâce aux idées de Christopher Deninger.

3.2. Une conjecture de Lichtenbaum et le site Weil-étale. Au cours des trois premiers chapitres, nous remarquons l'absence d'une théorie cohomologique respectant les analogies de la topologie arithmétique. En effet, la cohomologie étale est mal adaptée à cette étude. Cependant, la cohomologie Weil-étale conjecturale semble rendre compte de la nature topologique des corps de nombres décrite par ces analogies. Cette observation nous a conduit à concentrer nos efforts sur la cohomologie Weil-étale, dès le quatrième chapitre de ce mémoire. Après avoir défini cette cohomologie en caractéristique positive, Stephen Lichtenbaum conjecture dans [**37**] l'existence d'une théorie cohomologique analogue pour les schémas de type fini sur $Spec\,\mathbb{Z}$. Cette cohomologie devrait être de type arithmétique, dans le sens où les valeurs spéciales des fonctions zêta de ces variétés arithmétiques seraient données par les caractéristiques d'Euler de certains complexes motiviques $\mathbb{Z}(n)$. Le premier de ces complexes sera donné par le faisceau constant $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(0)$, dont la cohomologie Weil-étale devrait être en relation avec la valeur spéciale de la fonction $\zeta(s)$, en $s = 0$. La conjecture ci-dessous, due à Stephen Lichtenbaum, précise cette philosophie.

Conjecture 1. *Soit* X *un schéma arithmétique. Il existe une théorie cohomologique Weil-étale satisfaisant les propriétés suivantes. Les groupes de cohomologie à support compact* $H_c^i(X;\mathbb{Z})$ *sont de type fini et nuls pour* $i > 2\,dim X + 1$. *On note* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *le faisceau associé au* *groupe topologique $\mathbb{R}$. Alors le morphisme canonique*

$$H^i_c(X;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\longrightarrow H^i_c(X;\widetilde{\mathbb{R}})$$

est un isomorphisme. De plus, il existe une classe canonique ψ dans $H^1_W(\overline{X};\widetilde{\mathbb{R}})$ de sorte que les assertions suivantes soient vraies.

– *Le complexe*

$$...\xrightarrow{D}H^i_c(X;\widetilde{\mathbb{R}})\xrightarrow{D}H^{i+1}_c(X;\widetilde{\mathbb{R}})\xrightarrow{D}...$$

est exact, où D est défini par cup produit avec la classe ψ.

– *L'ordre d'annulation de la fonction $\zeta_X(s)$ en $s=0$ est donné par la formule suivante.*

$$ord_{s=0}\zeta_X(s)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\, i\ \mathrm{rk}\, H^i_c(X;\mathbb{Z}).$$

– *La valeur spéciale $\zeta^*_X(0)$, apparaissant dans le développement de Taylor en $s=0$, est donnée par la formule suivante.*

$$\zeta^*_X(0)=\pm\prod_{i\geq 0}\mid H^i_c(X;\mathbb{Z})_{tor}\mid^{(-1)^i}\ det(H^*_c(X;\widetilde{\mathbb{R}});D;\mathfrak{b}^*)^{-1}.$$

Ci-dessus, $\mathfrak{b}^i$ est une base quelconque du $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $H^i_c(X;\mathbb{Z})/tor$. Le faisceau $\widetilde{\mathbb{R}}$, des germes de fonctions continues à valeurs réelles, peut être remplacé par $\widetilde{\mathbb{C}}$.

La première étape dans la résolution de cette conjecture consiste clairement à donner la bonne définition de cette cohomologie Weil-étale. Le cas le plus simple, et probablement le plus important, est celui de $Spec\,\mathbb{Z}$. Puisque la situation est déjà extrêmement complexe dans ce cas, nous restreindrons notre étude dans la suite de ce travail aux anneaux d'entiers de corps de nombres. Dans cette direction, Stephen Lichenbaum a défini une topologie Weil-étale, utilisant le groupe de Weil W_K d'un corps de nombres, dont il a calculé les premiers groupes de cohomologie. En supposant que cette cohomologie s'annulait en degrés supérieurs à trois, il a pu vérifier ses conjectures dans ce cas. Malheureusement, la cohomologie du groupe topologique W_K à coefficients entiers explose en tout degré pair $i\geq 4$, comme l'a démontré Matthias Flach dans [**16**]. En conséquence, la cohomologie définie par Stephen Lichtenbaum du faisceau constant $\mathbb{Z}$ ne s'annule pas en degré >3. Ainsi, la théorie cohomologique évoquée dans la conjecture précédente reste à définir. Cependant, les calculs de [**37**] permettent de prédire quels doivent être les groupes $H^i_c(X,\mathbb{Z})$ et $H^i_c(X,\widetilde{\mathbb{R}})$. Comme nous l'observons dans la section 3.2 du chapitre 3, les groupes de cohomologie en question respectent les correspondances de la topologie arithmétique, au contraire de la cohomologie étale.

Dans le chapitre 4, nous définissons un topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ à partir du groupe de Weil $W_{L/K,S}$, relatif à une extension galoisienne L/K et un ensemble fini S de places de K contenant les places archimédiennes et celles qui se ramifient dans L. On peut définir de manière analogue le topos $\mathfrak{F}_{W,\overline{X}}$ à partir du groupe de Weil global W_K. Ces topos, dits flasques, sont définis de manière simple, ce qui permet de décrire explicitement les morphismes qui leurs sont associés. De manière plus précise, on obtient un système projectif filtrant de topos $\mathfrak{F}_\bullet:=(\mathfrak{F}_{L/K,S})_{L/K,S}$. En suivant la méthode de [**37**], on peut définir les limites inductives

$$\varinjlim H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z}). \tag{1}$$

L'expression explicite du morphisme

$$B_{W_K}\longrightarrow\mathfrak{F}_{L/K,S}$$

et la suite spectrale de Leray qui lui est associée, permet ensuite de calculer les groupes (37) à partir de la cohomologie du groupe de Weil $H^*(W_K, \mathbb{Z})$. Ci-dessus, B_{W_K} est le topos classifiant du groupe topologique W_K. On a en fait suivi pas à pas, mais dans un langage différent, la méthode de Lichtenbaum. Nous calculons aussi la cohomologie du topos $\mathfrak{F}_{W,\overline{X}}$. On s'aperçoit alors avec surprise que le morphisme canonique

$$\varinjlim H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(\mathfrak{F}_{W,\overline{X}}, \mathbb{Z})$$

n'est pas un isomorphisme. Ceci permet de comprendre le procédé astucieux de [**37**], consistant à introduire les groupes $W_{L/K,S}$, puis à considérer la limite inductive des cohomologies ainsi définies, afin de remplacer un produit direct par une somme. En particulier, la cohomologie Weil-étale actuelle n'est pas définie comme celle d'un topos, mais comme la limite inductive des cohomologies d'un système projectif de topos. Dans la quatrième section, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème. *La catégorie des faisceaux d'ensembles sur le site $T_{L/K,S}$, défini dans* [**37**], *est canoniquement équivalente au topos flasque $\mathfrak{F}_{L/K,S}$.*

Ce théorème fournit une description simple et directe des catégories de faisceaux sur ces sites Weil-étales. Dans l'esprit de [**24**], il suggère de travailler directement avec les topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$, plutôt qu'avec des sites qui les engendrent. Nous précisons, à la fin du chapitre 4, le lien existant entre le système projectif $\mathfrak{F}_\bullet$ et le topos étale d'Artin-Verdier associé à l'ensemble des valuations $\overline{X}$ du corps de nombres K. Cette relation provient du fait que le site étale d'Artin-Verdier s'identifie explicitement à une sous-catégorie pleine de $T_{W,\overline{X}}$ (en fait de $\varinjlim T_{L/K,S}$), munie de la topologie induite par celle des sections locales. Ces techniques nous permettront, au cours du chapitre 7, de construire un complexe de faisceaux étales sur $\overline{X}$ dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale à coefficients entiers, toujours conjecturale.

3.3. Une stratégie pour la définition de la cohomologie Weil-étale. Le groupe de Weil d'un corps local archimédien ou ultramétrique, aussi bien que celui d'un corps de fonctions, se définit explicitement et directement. La définition de ce groupe topologique est très naturelle dans ces cas. Mais la seule définition existante du groupe de Weil d'un corps de nombres est tout à fait artificielle, comme l'ont signalé André Weil et John Tate. Ils ont aussi précisé l'importance de formuler une définition plus naturelle de ce groupe. De plus, Matthias Flach a montré récemment que la cohomologie du groupe de Weil d'un corps de nombres à coefficients entiers explose, en toute dimension paire $i \geq 4$. On est ainsi amené à chercher une réponse à la question ci-dessous. Les chapitres 5, 6 et 7 visent à l'élaboration d'une stratégie pour résoudre le problème qu'elle soulève.

Question 1. *Peut-on définir de manière naturelle la cohomologie Weil-étale de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres sans utiliser le groupe de Weil de ce corps de nombres ?*

Selon notre point de vue, la définition de la cohomologie Weil-étale en caractéristique zéro devra passer par celle du topos sous-jacent. Puisqu'un topos est la généralisation d'un espace topologique, la compréhension géométrique de ce que doit être ce pseudo-espace semble constituer une étape préliminaire indispensable pour la bonne définition de la cohomologie Weil-étale. Dans ce but, nous étudions, au cours du chapitre 5, le topos Weil-étale $\mathcal{S}_{W,Y}$ d'une courbe projective lisse Y sur un corps fini. Cette étude fournira partiellement l'intuition topologique dont nous avons besoin. Un morphisme connexe

$$\gamma : \mathcal{S}_{W,Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,Y},$$

du topos Weil-étale dans le topos étale de Y apparaît immédiatement. Nous observons ensuite le topos Weil-étale au voisinage des points fermés de Y. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_{W,Y} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et,Y} \end{tikzcd}$$

associé à chaque valuation v du corps de fonctions $K(Y)$. Ce diagramme est d'ailleurs un pull-back de topos, c'est-à-dire que $B^{sm}_{W_{k(v)}}$ est canoniquement équivalent à l'image inverse par γ du sous-topos fermé $B^{sm}_{G_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}_{Et,v} \to \mathcal{S}_{Et,Y}$. Nous montrons ensuite que ce pull-back donne lieu à un isomorphisme

$$u_v^* R^n(\gamma_*) \simeq R^n(\alpha_{v*}) i_v^*,$$

analogue au changement de base propre en cohomologie étale. En d'autres termes, le diagramme précédent satisfait *la condition de Beck-Chevalley.* Cette propriété fait l'objet d'une attention particulière car la condition analogue en caractéristique zéro permettrait de calculer la cohomologie Weil-étale conjecturale. Le morphisme structural $Y \to Spec\, k$ induit un morphisme de topos $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W,Y} \to B^{sm}_{W_k}$, de sorte que la composition

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \longrightarrow B^{sm}_{W_k}$$

soit la flèche canonique. Nous verrons dans le chapitre 8 comment ce qui précède permet de déterminer le foncteur dérivé total $R\gamma_*$, et donc la cohomologie Weil-étale de Y. La troisième section du chapitre 5 est consacrée à l'étude du topos flasque $\mathfrak{F}_{W,Y}$ d'un corps de fonction. On obtient alors un morphisme canonique

$$\mathfrak{F}_{W,Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,Y},$$

d'ailleurs loin d'être une équivalence. Dans la fin de ce cinquième chapitre, nous supposons qu'un site $\mathcal{C}$, pour le topos Weil-étale de l'ensemble des valuations $\overline{X}$ d'un corps de nombres, peut être défini par une sous-catégorie pleine du topos flasque $\mathfrak{F}_{W,\overline{X}}$, munie de la topologie induite. Nous montrons alors que la condition de Beck-Chevalley n'est satisfaite par aucun des topos $\widetilde{\mathcal{C}}$ ainsi obtenus. Cette observation nous amène, dans le sixième chapitre, à imaginer l'existence d'un topos en caractéristique zéro satisfaisant la condition de Beck-Chevalley.

3.3.1. L'étude précédente du topos Weil-étale d'un corps de fonctions suggère l'existence d'un topos, associé à l'ensemble des valuations $\overline{X}$ d'un corps de nombres K, satisfaisant certaines propriétés topologiques. Dans la section 2 du chapitre 6, nous précisons la liste des axiomes attendus $(C1)-(C6)$. Les résultats analogues en caractéristique p ont tous été prouvés lors du chapitre 5. Un *topos de Weil* pour un corps de nombres K, dont l'existence pas plus que l'unicité n'est prouvée, est un topos jouissant de l'ensemble de ces propriétés. Un tel topos est en particulier muni d'un morphisme canonique connexe

$$\gamma : \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{X}},$$

dans le topos étale d'Artin-Verdier. Le fait que ce morphisme satisfasse la condition de Beck-Chevalley nous permet de calculer la cohomologie du topos $\mathcal{S}_{W,\overline{X}}$. Il s'agit en fait de la cohomologie Weil-étale conjecturale. Plus précisément, les groupes de cohomologie de ce topos à coefficients entiers et réels seraient ceux calculés par Stephen Lichtenbaum en degrés $i \leq 3$, et s'annuleraient en degrés supérieurs à trois. De plus, la cohomologie des faisceaux de torsion s'identifierait à leur cohomologie étale. Tous ces calculs sont faits en se ramenant, grâce aux bonnes propriétés du morphisme γ, à la cohomologie étale d'Artin-Verdier.

Au cours de la cinquième section de ce sixième chapitre, nous montrons que l'existence de ce topos permettrait de prouver la conjecture 1 pour les anneaux d'entiers de corps de nombres. En effet, l'ordre d'annulation ainsi que la valeur spéciale de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_K(s)$ en $s = 0$ s'expriment en termes des caractéristiques d'Euler définies dans [**37**].

La cohérence des calculs et l'analogie entre corps de fonctions et corps de nombres laissent supposer l'existence d'un tel topos. De manière imagée, on aurait dans ce cas un changement de base universel $R\gamma_*$, associé au morphisme

$$\gamma : \mathcal{S}_W(\overline{Spec\,\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{Spec\,\mathbb{Z}}),$$

qui induirait par pull-back le changement de base Weil-étale/étale en toute caractéristique. Mais il semble que cette situation idéale soit impossible. En effet, nous donnons dans la fin du chapitre 6 certains arguments montrant, de manière non rigoureuse, que ce topos de Weil ne peut exister. En d'autres termes, la condition de Beck-Chevalley ne peut être satisfaite en caractéristique nulle, mais nous cherchons toujours une preuve indéniable de ce fait.

Ce retournement de situation amène à douter de l'existence d'un topos Weil-étale muni d'un morphisme dans le topos étale. Un tel objet se manifesterait par l'existence d'un complexe de faisceaux sur le site étale d'Artin-Verdier, dont l'hypercohomologie serait la cohomologie Weil-étale à coefficients entiers conjecturée par S. Lichtenbaum. Dans l'esprit d'une question de Matthias Flach, il est nécessaire de construire ce complexe étale avant d'espérer pouvoir définir le topos Weil-étale d'un corps de nombres.

3.3.2. En utilisant les calculs de [**37**] ainsi que les techniques développées dans le chapitre 4, nous construisons un tel complexe pour un corps de nombres totalement imaginaire dans la première section du chapitre 7. L'existence de ce complexe était à priori loin d'être claire. En effet, la cohomologie Weil-étale calculée par Stephen Lichenbaum n'est pas définie comme celle d'un topos, et encore moins comme celle d'un topos au-dessus du topos étale. Cependant, une décomposition du topos étale de $\overline{X} = \overline{Spec(\mathcal{O}_K)}$ en une limite projective permet la construction d'un complexe $R\mathbb{Z}$ de faisceaux étales, dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale de Lichtenbaum. Mais une deuxième difficulté apparaît immédiatement. La cohomologie des premiers faisceaux $H^q(R\mathbb{Z})$ doit permettre au complexe tronqué $R_W(\mathbb{Z}) := \tau_{\leq 2}R\mathbb{Z}$ d'avoir la bonne hypercohomologie. Plus précisément, le faisceau $H^2(R\mathbb{Z})$ doit être acyclique pour le foncteur des sections globales, comme nous le montrons à l'aide de certains résultats de [**16**]. On obtient de cette manière le résultat suivant.

THÉORÈME. *Il existe un complexe de faisceaux $R_W(\mathbb{Z})$ sur le site étale d'Artin-Verdier dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale conjecturale à coefficients entiers.*

La construction du complexe $R_W\mathbb{Z}$ permet ainsi d'espérer l'existence d'un topos Weil-étale muni d'un morphisme canonique de celui-ci dans le topos étale.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous décrivons de manière partielle ce que devrait être le topos Weil-étale. Cette description est donnée par la conjecture suivante, pour laquelle nous précisons quelques notations. Le groupe de Galois $G_{k(v)}$ et le groupe de Weil $W_{k(v)}$, du "corps résiduel" en une place archimédienne v, sont respectivement le groupe trivial et le groupe topologique $\mathbb{R}$. Quelle que soit la place v du corps de nombres K, on a un morphisme canonique

$$W_{k(v)} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lorsque la place v est ultramétrique, cette flèche envoie le Frobenius $1 \in W_{k(v)}$ sur $log(N(v))$. Pour une valuation archimédienne, le morphisme précédent est simplement l'identité de $\mathbb{R}$.

QUESTION 2. *Peut-on construire un topos de Grothendieck $\mathcal{S}_{W,\overline{X}}$, fonctoriellement attaché à l'ensemble des valuations d'un corps de nombres, satisfaisant les conditions suivantes ?*

(1) *On a des morphismes canoniques*

$$\gamma : \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{X}}\ ,\quad \mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}} \quad \textit{et} \quad i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}},$$

où i_v est défini pour tout point fermé v de $\overline{X}$.

(2) *La composition $\mathfrak{f} \circ i_v$ est le morphisme de topos classifiants*

$$B_{W_{k(v)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

induit par le morphisme canonique $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$, quelle que soit la valuation v.

(3) *Le morphisme γ est connexe.*

(4) *Quel que soit le point fermé v de $\overline{X}$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \end{tikzcd}$$

est commutatif, où α_v et u_v sont les morphismes canoniques.

(5) *Le diagramme précédent est un pull-back pour toute valuation archimédienne v.*

(6) *Les complexes $R(\gamma_*)\mathbb{Z}$ et $R_W\mathbb{Z}$ sont quasi-isomorphes.*

(7) *On note $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathfrak{f}^*y(\mathbb{R})$, où $y(\mathbb{R})$ est l'objet de $B_{\mathbb{R}}$ représenté par l'action triviale de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Alors on a*

$$R^n(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \textit{ pour } n = 0, 1 \textit{ et } R^n(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}} = 0 \textit{ pour } n \geq 2.$$

On obtient alors le résultat suivant.

THÉORÈME. *Une réponse affirmative à la question 2 ci-dessus entraînerait la conjecture 1 pour les anneaux d'entiers de corps de nombres.*

Ce qui précède fournit une alternative à la stratégie qui consistait à construire un topos satisfaisant la condition de Beck-Chevalley. Nous avons supposé tout au long de ce travail que la cohomologie Weil-étale devait se définir via l'existence d'un topos (connexe) au-dessus du topos étale d'Artin-Verdier. En supposant que la cohomologie Weil-étale existe (*sans support compact et avec support compact*) et qu'elle puisse être définie comme celle d'un topos, rien ne garantit l'existence d'un tel morphisme γ. Admettons cependant que cette hypothèse soit vraie. Alors la stratégie suggérée par la conjecture (i.e. la question 2) et le théorème ci-dessus me semble être la seule solution raisonnable pour la résolution de la conjecture 1, dans le cas des anneaux d'entiers. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer la suite spectrale de Leray

$$H^i_{Et}(\overline{X}, R^j(\gamma_*)\mathbb{Z}) \Longrightarrow H^{i+j}_W(\overline{X}, \mathbb{Z}).$$

En effet, la valeur des groupes $H^i_{Et}(\overline{X}, \mathbb{Z})$ est connue et la condition de Beck-Chevalley ne peut être vraie en caractéristique nulle. De plus, les groupes $H^i_{Wc}(\overline{X}, \mathbb{Z})$ sont conjecturés par Stephen Lichtenbaum, comme une "donnée d'Euler". Alors la suite spectrale précédente ne laisse guère le choix. Cette idée a été suggérée par une remarque de Matthias Flach. L'observation précédente justifie la présence du chapitre 6 dans ce mémoire, ainsi que la question 2.

Cependant, on peut penser que la cohomologie Weil-étale conjecturale *sans support compact* ne peut se réaliser comme la cohomologie d'un topos. La méthode développée dans le chapitre 7 permet la construction d'un complexe de faisceaux $R_W(\varphi_!\mathbb{Z})$ sur le site étale d'Artin-Verdier dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale conjecturale à support compact.

THÉORÈME. *Il existe un complexe de faisceaux $R_W(\varphi_!\mathbb{Z})$ sur le site étale d'Artin-Verdier dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale conjecturale à support compact.*

Ce résultat est une condition nécessaire à la conjecture 1, ou plus exactement à l'existence d'un topos Weil-étale au-dessus du topos étale. Ce complexe est construit en suivant pas à pas la méthode développée dans le chapitre 7. Nous laissons au lecteur les détails techniques de cette construction.

3.4. Etape Constructive. L'objectif consiste maintenant à construire un topos satisfaisant les conditions de la question 2. Considérons un schéma Y lisse, séparé et de type fini sur un corps fini k. On note $\mathcal{S}_W(Y)$ le topos Weil-étale de Y, $B^{sm}_{G_k} := G_k - \underline{Set}$ et $B^{sm}_{W_k} := W_k - \underline{Set}$ les petits topos classifiants du groupe de Galois et du groupe de Weil de k. Rappelons que la catégorie $\mathcal{S}_W(Y)$ est celle des faisceaux étales sur $\overline{Y} := Y \times_k \overline{k}$ munis d'une action continue du groupe de Galois G_k. Le théorème ci-dessous, dans lequel le membre de droite est un produit fibré dans la 2-catégorie des topos, constitue le résultat principal du huitième chapitre.

THÉORÈME. *Le morphisme canonique*

$$\mathcal{S}_W(Y) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{W_k},$$

est une équivalence.

L'idée de considérer ce topos produit fibré revient aussi à Matthias Flach. Ce théorème montre que le topos Weil-étale, en caractéristique positive, se construit directement à partir du topos étale arithmétique. Cette observation est importante car nous ne disposons pas de l'analogue, en caractéristique nulle, du topos étale géométrique $\mathcal{S}_{Et}(\overline{Y})$. Le morphisme γ du topos Weil-étale dans le topos étale devient alors un simple pull-back de la flèche $B^{sm}_{W_k} \to B^{sm}_{G_k}$, induite par le morphisme canonique $W_k \to G_k$. Ceci détermine le lien topologique entre le topos Weil-étale et le topos étale. En particulier, γ est tidy et hyperconnexe. On en déduit aussi le foncteur dérivé du changement de base $R\gamma_*$, au moins pour les coefficients provenant de $B^{sm}_{W_k}$. Ce théorème suggère d'autre part une définition du topos Weil-étale d'un schéma local hensélien dont le point fermé est le spectre d'un corps fini. Nous définissons aussi un "gros" topos Weil-étale, qui sera utile au cours du chapitre 9. Enfin, nous observons que le topos Weil-étale en caractéristique positive permet de définir une cohomologie de type géométrique, qui est la cohomologie l-adique munie de l'action du Frobenius, ainsi que la cohomologie Weil-étale, de type arithmétique.

Comme nous l'avons remarqué dans la première partie de cette introduction, l'observation ci-dessus laisse penser que l'étude par Christopher Deninger des systèmes dynamiques en lien avec la géométrie arithmétique, puisse apporter une meilleure compréhension des propriétés topologiques qui devront être satisfaites par le topos Weil-étale en caractéristique nulle. Le chapitre 9 exploite cette idée en précisant certaines relations existant entre le topos Weil-étale et le système dynamique imaginé par Deninger. Dans un premier temps, nous étudions le lien existant entre le (gros) topos Weil-étale $\mathcal{S}_W(Y)$ et le système dynamique analogue d'une variété Y sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. Il est pour cela nécessaire de traduire les propriétés de ce système dynamique dans le language des topos. On se rend alors compte que le topos Weil-étale est muni d'une projection sur le topos associé à l'espace homogène $\mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z}$. Cette projection est $\mathbb{R}$-équivariante, en ce sens qu'elle est définie au-dessus de $B_{\mathbb{R}}$. Un point fermé v de Y fournit une inclusion fermée, à nouveau au-dessus de $B_{\mathbb{R}}$, du topos associé à $\mathbb{R}/log(N(v))\mathbb{Z}$ dans le topos Weil-étale. Une feuille est ici représentée par une immersion fermée du topos étale, légèrement modifié, de la variété géométrique $\overline{Y} := Y \times_k \overline{k}$. En supposant que ce système dynamique puisse être effectivement attaché à Y, nous montrons que l'on peut lui associer un topos muni d'un morphisme canonique dans le topos Weil-étale. Ce morphisme est alors compatible à l'action de $\mathbb{R}$, aux orbites fermées ainsi qu'au feuilletage. Puisqu'un topos est la généralisation d'un espace topologique, le topos Weil-étale semble être un bon candidat pour le système dynamique associé à un schéma lisse de caractéristique p.

Nous revenons à la caractéristique zéro au cours de la troisième section du chapitre 9. Dans l'esprit de ce qui précède, on peut imaginer que le système dynamique, conjecturalement associé à un anneau d'entiers $\overline{X}$, soit une vision topologique intuitive du topos Weil-étale, lui aussi conjectural. En effet, la cohomologie totale du topos Weil-étale est censée être de type arithmétique alors que celle de l'espace feuilleté sous-jacent au système dynamique (leaf-wise reduced cohomology), munie de sa structure $\mathbb{R}$-équivariante, devrait fournir une cohomologie de type géométrique. On retrouve par exemple un morphisme canonique

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

traduisant le caractère dynamique de ce topos conjectural. Une place finie v, comme une orbite fermée du flot de longueur $log(N(v))$, correspond à un morphisme

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}},$$

de sorte que la composition $\mathfrak{f} \circ i_v$ soit donnée par la flèche $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$, qui envoie $1 = Frob_v$ sur $log(N(v))$. Respectivement, une place archimédienne, comme un point fixe du flot, donne lieu à un plongement fermé

$$i_v : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}},$$

de sorte que la composition $\mathfrak{f} \circ i_v$ soit l'identité du topos classifiant $B_{\mathbb{R}}$ (i.e. une section de $\mathfrak{f}$). L'équivalence

$$\mathcal{S}_W(Y) \simeq \mathcal{S}_{et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{W_k},$$

démontrée dans le chapitre précédent, suggère de définir le topos Weil-étale de $\overline{X}$ à l'aide d'un produit fibré. L'étude du groupe des périodes du système correspondant à $Spec(\mathbb{Z}_S)$, au cours de la section 4, donne une idée dans cette direction. On peut en effet définir le topos

$$\mathcal{S}_{Et}(Spec\,\mathbb{Z}_S) \times_{B^{sm}_{\hat{\mathbb{Z}}^*_S}} B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}},$$

en utilisant le caractère cyclotomique

$$\kappa : G_S \longrightarrow \mathbb{Z}^*_S := \prod_{p \in S} \mathbb{Z}^*_p.$$

Il semble donc que l'extension cyclotomique d'un corps de nombres puisse jouer, aussi dans notre contexte, le rôle de l'extension non ramifiée $K \otimes_k \overline{k}/K$ du corps de fonctions d'une courbe Y. Mais l'extension cyclotomique est ramifiée, et ce topos produit fibré ne peut être défini que localement pour la topologie étale. La méthode de la descente, sous la forme de limite inductive d'un topos simplicial tronqué, permet ensuite de recoller ces topos produits le long d'un recouvrement étale. Puisqu'il n'y a clairement pas lieu de privilégier un recouvrement parmi les autres, on est amené à considérer la limite projective, prise sur les classes d'équivalence de recouvrements étales (Nisnevich), de ces topos ainsi recollés. Ce procédé permet de modifier le topos étale de $\overline{X}$, en libérant les Frobenius de leur complétion profinie, afin d'obtenir naturellement un morphisme non trivial

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

dans le topos classifiant $B_{\mathbb{R}}$. Ce morphisme traduit le caractère dynamique du topos étale modifié $\mathcal{S}_m(\overline{X})$. L'existence de ce morphisme reste étonnante, lorsqu'elle est comparée à l'absence de revêtements étales non triviaux de $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$ d'une part, et à l'hyperconnexité du morphisme

$$\gamma : \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow \mathcal{S}_{et}(\overline{X})$$

dans le topos étale d'autre part. Ce topos modifié est aussi muni de flèches

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \text{ et } \theta_v : \mathcal{S}_W(\overline{X}_v^h) \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}),$$

pour toute valuation non triviale v, rendant commutatifs les diagrammes envisagés dans les chapitres précédents. Le deuxième morphisme ci-dessus pourrait être vu comme un analogue géométrique du morphisme de Weil $\theta_v : W_{K_v} \to W_K$. En composant i_v avec le morphisme flot, on obtient le morphisme de topos classifiants

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

induit par la flèche canonique $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$. Une place ultramétrique v peut ainsi être pensée comme une orbite fermée du flot de longueur $log\,(N(v))$, alors qu'une place archimédienne doit être vue comme un point fixe. Cependant, i_v n'est une inclusion fermée que lorsque v est une place archimédienne. Si la situation est à peu près claire en ce qui concerne des points fermés de $\overline{X}$, elle est beaucoup plus mystérieuse au voisinage du point générique. Le théorème suivant résume ces résultats.

Théorème. *Il existe une construction naturelle et non triviale d'un topos $\mathcal{S}_m(\overline{X})$, fonctoriellement associé à un corps de nombres, satisfaisant les conditions (1-5) de la question 2. De plus, le morphisme γ est hyperconnexe.*

Le fait que cette construction soit non triviale signifie essentiellement qu'il ne s'agit pas du topos produit

$$\mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \times B_{\mathbb{R}}.$$

Le topos $\mathcal{S}_m(\overline{X})$ construit dans ce chapitre semble ainsi jouir de quelques propriétés topologiques potentiellement intéressantes. Malheureusement, je suis actuellement incapable de calculer la cohomologie de ce topos, dont je ne prétends pas qu'il s'agisse du "bon" topos Weil-étale, mais d'un simple exemple de construction.

Pour la commodité de l'auteur, certains chapitres de ce mémoire ont été rédigés en anglais en vue de leur publication.

CHAPITRE 1

Le dictionnaire de la topologie arithmétique

Ce chapitre est une introduction à la topologie arithmétique, dont l'objet est l'étude d'une analogie entre la théorie algébrique des nombres et celle des variétés topologiques de dimension trois. Dans les années soixante, les travaux d'Artin et Verdier sur la cohomologie étale des corps de nombres ont permis une interprétation topologique de la théorie du corps de classes sous la forme d'une dualité de Poincaré. Un corps de nombres apparaît alors comme un objet de dimension trois. B. Mazur et Y. Manin ont ensuite suggéré de voir les places finies d'un corps de nombres comme des noeuds dans une variété de dimension trois. A la fin des années quatre-vingt dix, M. Kapranov et A. Reznikov ont précisé cette analogie en proposant un *dictionnaire de la topologie arithmétique*, composé d'une série de correspondances abstraites reliant les invariants d'un corps de nombres à ceux d'une variété topologique. A partir de l'analogie existant entre des groupes de Galois à ramification restreinte et certains groupes d'entrelacs, M. Morishita a depuis développé ces analogies du point de vue de la théorie des groupes.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons une série d'arguments permettant d'appréhender les analogies de la topologie arithmétique qui ont influencé ce mémoire. Notre point de vue est essentiellement inspiré par la topologie étale et sa cohomologie, qui ont d'ailleurs été construites sur le modèle topologique classique. Nous établissons ensuite un dictionnaire récapitulant ces correspondances. Les analogies observées par M. Morishita, pour lesquelles nous renvoyons à [**47**], sont davantage influencées par la théorie des groupes et ne sont mentionnées ici que très superficiellement. En particulier, le lien existant entre la théorie d'Iwasawa et celle d'Alexander-Fox n'est pas traité.

Dans une deuxième partie, nous exposons la deuxième version du dictionnaire de la topologie arithmétique proposée par A. Reznikov dans [**53**], ainsi que les résultats de A. Sikora de [**56**]. Ceci nous amène à préciser quel est le problème soulevé par les travaux de A. Sikora, ainsi que l'intérêt qu'il présente en topologie arithmétique. La résolution de ce problème fera l'objet des deux chapitres suivants.

1. Sur les correspondances de la topologie arithmétique

Dans ce qui suit, les groupes de cohomologie d'un schéma sont toujours des groupes de cohomologie étale.

1.1. Le théorème de dualité d'Artin-Verdier pour un corps de nombres totalement imaginaire. Soit $L/\mathbb{Q}$ un corps de nombres totalement imaginaire, $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, $X = Spec(\mathcal{O}_L)$ le spectre de $\mathcal{O}_L$ et X_{et} le site étale de X.

Pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X_{et} et pour tout X-schéma étale U, les groupes $H^q(U;\mathcal{F})$ sont nuls pour $q \geq 4$ (cf [**5**] 4.6). D'autre part, il y a un isomorphisme canonique

$$H^3(X;\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où $\mathbb{G}_m$ désigne le faisceau du groupe multiplicatif sur le site X_{et}. Ainsi, le site X_{et} est de dimension cohomologique stricte trois. De plus, le théorème de dualité d'Artin-Verdier montre que pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, le produit de Yoneda

$$H^q(X;\mathcal{F}) \times Ext_X^{3-q}(\mathcal{F};\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^3(X;\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

définit une dualité parfaite de groupes abéliens finis (cf **[39]** 2.4). En d'autres termes, le groupe $Ext_X^{3-q}(\mathcal{F};\mathbb{G}_m)$ est le dual de Pontryagin du groupe abélien fini $H^q(X;\mathcal{F})$, quel que soit l'entier q. Le théorème d'Artin-Verdier fait à nouveau apparaître le schéma X comme un objet de dimension 3. Il est vu comme l'analogue arithmétique de la dualité de Poincaré sur une variété topologique de dimension trois. Notons aussi que ce résultat donne au faisceau du groupe multiplicatif le rôle privilégié de faisceau dualisant. Les invariants qui se déduisent de ce faisceau sont essentiels en cohomologie étale des corps de nombres. En effet, si le corps de nombres L est totalement imaginaire, on a

$$\begin{aligned} H^q(X;\mathbb{G}_m) &= U_L \text{ pour } q=0,\\ &= Cl(L) \text{ pour } q=1,\\ &= 0 \text{ pour } q=2,\\ &= \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ pour } q=3,\\ &= 0 \text{ pour } q\geq 4,\end{aligned}$$

où U_L et $Cl(L)$ désignent respectivement le groupe des unités et le groupe des classes de L.

1.2. Le théorème de Bienenfeld-Artin-Verdier. Soient L un corps de nombres, X le spectre de son anneau d'entiers, et X_∞ l'ensemble des places archimédiennes de L. Les places archimédiennes réelles de L apparaissent dans la cohomologie étale de X. Par exemple, lorsque L possède r_1 places réelles, on a

$$H^q(X;\mathbb{G}_m) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_1},$$

pour tout entier pair $q \geq 4$ (cf **[41]** II.2.1). Le théorème de dualité ne peut donc être valide qu'en ignorant les sous-groupes de 2-torsion. Afin de résoudre ce problème en tenant compte des places archimédiennes, on peut munir le couple $\overline{X} := (X;X_\infty)$ de la topologie étale d'Artin-Verdier. Cette topologie évite la ramification en une place archimédienne au même titre qu'en une place ultramétrique. On note $\phi : X \to \overline{X}$ le plongement ouvert. Lorsque toutes les places archimédiennes de L sont complexes on a l'identifiaction

$$H^q(X;\mathcal{F}) \simeq H^q(\overline{X};\phi_*\mathcal{F}), \tag{2}$$

quels que soient le faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X et l'entier $q \geq 0$. Ainsi, le théorème suivant, dû à M. Bienenfeld (cf **[2]** 5.1), généralise le théorème de dualité d'Artin-Verdier à des corps de nombres quelconques.

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X tel que le groupe d'inertie I_x opère trivialement sur la fibre générique de $\mathcal{F}$, pour tout $x \in X_\infty$. Alors, les assertions suivantes sont vraies.*

– *Les groupes $H^q(\overline{X};\phi_*\mathcal{F})$ et $Ext^q_{\overline{X}}(\phi_*\mathcal{F};\phi_*\mathbb{G}_m)$ sont nuls pour $q \geq 4$.*
– *Le produit de Yoneda*

$$H^q(\overline{X};\phi_*\mathcal{F}) \times Ext_{\overline{X}}^{3-q}(\phi_*\mathcal{F};\phi_*\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^3(\overline{X};\phi_*\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

définit une dualité parfaite de groupes abéliens finis.

Le théorème précédent est un analogue arithmétique de la dualité de Poincaré en topologie de dimension trois. Ainsi, l'ensemble des valuations $\overline{X}$ d'un corps de nombres quelconque L est vu comme une variété topologique de dimension trois compacte, connexe et orientable.

1.3. Le couple $\overline{X} = (X; X_\infty)$ est une compactification de X. La généralisation précédente du théorème d'Artin-Verdier et l'identification (2) montrent que cette relation de dualité porte en fait sur la cohomologie étale de $\overline{X}$. Le fait de voir cette dualité comme l'analogue arithmétique de la dualité de Poincaré impose de voir $\overline{X}$ comme une variété compacte. Par contre, le schéma affine X doit être vu comme une variété non compacte. En effet, pour généraliser le théorème d'Artin-Verdier à des corps de nombres quelconques sans introduire le site étale d'Artin-Verdier, il est nécessaire d'utiliser la cohomologie étale de X à support compact (cf [**41**]). Le fait que $\overline{X}$ corresponde à une variété compacte est à nouveau illustré par la formule du produit : quel que soit $a \in L^\times$, on a l'identité

$$\prod_{\mathfrak{p}\in\overline{X}^0} |a|_{\mathfrak{p}} = 1,$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble $\overline{X}^0$ des points fermés de $\overline{X}$, c'est-à-dire l'ensemble des valuations non-triviales de L. Un analogue géométrique de cette formule est donné par l'identité

$$\sum_{x\in Y^0} ord_x(f) = 0$$

où f est un élément inversible du corps de fonctions d'une courbe Y *propre* sur $\mathbb{F}_q$, dont Y^0 désigne l'ensemble des points fermés. Nous verrons plus tard pour quelles raisons un élément x_i de X_∞ correspond à un point m_i de la variété compacte M analogue de $\overline{X}$. Ainsi, X doit être vu comme une variété non compacte $M' = M - \coprod_{X_\infty}\{m_i\}$, dont la variété M est une compactification.

1.4. Le spectre d'un corps fini est l'analogue d'un cercle. Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini et G_k son groupe de Galois. Le groupe G_k est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$, le complété profini de $\mathbb{Z}$. De plus, un générateur topologique privilégié de $G_k = Aut_k(\overline{k})$ est donné par le Frobenius $x \mapsto x^q$. Ainsi, le groupe fondamental $\pi_1(Spec(k)) \simeq G_k$ s'identifie canoniquement à $\widehat{\mathbb{Z}}$. La catégorie des faisceaux sur le site étale $Spec(k)_{et}$ est équivalente à celle des ensembles sur lesquels G_k opère continûment. On en déduit immédiatement que la cohomologie étale de $Spec(k)$ s'identifie à la cohomologie galoisienne de k. Comme le groupe $G_k \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ est de dimension cohomologique 1, le schéma $Spec(k)$ est lui aussi de dimension cohomologique 1. Ainsi, le schéma $Spec(k)$ est, du point de vue de la topologie étale, un objet de dimension 1 dont le groupe fondamental est le complété profini de $\mathbb{Z}$. C'est la raison pour laquelle le spectre d'un corps fini est vu intuitivement comme un cercle topologique $\mathbb{S}^1$.

D'ailleurs, ce qui précède montre que le groupe $H^i(Spec(k)_{et}; \mathbb{Z}_l)$ est nul pour $i \geq 2$, et qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}_l$ pour $i = 0, 1$ et $l \nmid q$. De manière analogue, le groupe $H^i(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$ est nul pour $i \geq 2$ et isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour $i = 0, 1$. Enfin le groupe $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) = Aut_{\mathbb{S}^1}(\mathbb{R})$ possède un générateur canonique $x \to x + 1$. Pour résumer, le topos étale de $Spec(k)$ est le topos classifiant $B_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ et le cercle $\mathbb{S}^1$ est un espace classifiant $B\mathbb{Z}$.

REMARQUE 1.2. *Le groupe $G_k \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ est de dimension cohomologique stricte* 2. *On a par exemple*

$$H^2(\widehat{\mathbb{Z}}; \mathbb{Z}) = H^1(\widehat{\mathbb{Z}}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \neq 0.$$

Ainsi, la cohomologie étale de Spec(k) confirme l'intuition topologique précédente uniquement pour des coefficients de torsion. C'est la raison pour laquelle le groupe de Weil $W_k \simeq \mathbb{Z}$ *de* k *prendra plus tard la place de son groupe de Galois.*

1.5. Une place finie d'un corps de nombres est vue comme un noeud dans une variété de dimension trois. Une place finie de L est un point fermé x de $X = Spec(\mathcal{O}_L)$. La donnée de ce point est encore équivalente à celle d'une immersion fermée

$$Spec(k(x)) \to X \to \overline{X}.$$

Puisque $Spec(k(x))$ et $\overline{X}$ sont vus respectivement comme un cercle $\mathbb{S}^1$ et une variété compacte de dimension trois M, il est naturel de voir le point fermé $x \in \overline{X}$ comme un noeud $\mathcal{K} : \mathbb{S}^1 \to M$, où $\mathcal{K}$ est un plongement lisse (défini à isotopie près).

1.6. Une deuxième généralisation du théorème d'Artin-Verdier.

1.6.1. *Un théorème de C. Deninger.* Soient L un corps de nombres totalement imaginaire et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur le site étale de $X = Spec(\mathcal{O}_L)$. On dit que $\mathcal{F}$ est $\mathbb{Z}$*-constructible* lorsqu'il existe un ouvert U de X et un revêtement étale $U' \to U$ tel que la restriction $\mathcal{F}|\,U'$ soit un faisceau abélien constant associé à un groupe de type fini, et tel que la fibre $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ soit de type fini, pour tout point géométrique $\overline{x} \to X$ dont l'image est un point de $X - U$. Un faisceau $\mathbb{Z}$-constructible est constructible si et seulement si il est de torsion. Un groupe abélien est de *type cofini* lorsqu'il est isomorphe à un sous-groupe d'une somme finie de copies de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Enfin, $A^D := Hom(A; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ désigne le dual d'un groupe abélien A. Le théorème suivant est dû à C. Deninger (cf **[5]** 3.1). Il généralise la dualité d'Artin-Verdier à des coefficients qui ne sont pas nécessairement de torsion.

THÉORÈME 1.3. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau* $\mathbb{Z}$*-constructible sur* X*. Pour* $q = 0, 1$*, les groupes* $H^q(X; \mathcal{F})$ *et* $Ext^q_X(\mathcal{F}; \mathbb{G}_m)$ *sont de type fini. Pour* $q \geq 4$*, on a*

$$H^q(X; \mathcal{F}) = 0 = Ext^q_X(\mathcal{F}; \mathbb{G}_m).$$

Le produit de Yoneda

$$H^q(X; \mathcal{F}) \times Ext^{3-q}_X(\mathcal{F}; \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^3(X; \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

induit des isomorphismes de groupes de type cofini

$$\begin{aligned} Ext^3_X(\mathcal{F}; \mathbb{G}_m) &\longrightarrow H^0(X; \mathcal{F})^D, \\ Ext^2_X(\mathcal{F}; \mathbb{G}_m) &\longrightarrow H^1(X; \mathcal{F})^D, \\ Ext^1_X(\mathcal{F}; \mathbb{G}_m)^D &\longleftarrow H^2(X; \mathcal{F}), \\ Ext^0_X(\mathcal{F}; \mathbb{G}_m)^D &\longleftarrow H^3(X; \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Enfin, lorsque $\mathcal{F}$ *est constructible, les groupes considérés sont finis.*

1.6.2. *Une application.* En appliquant ce théorème au faisceau constant $\mathbb{Z}$, on retrouve l'isomorphisme de réciprocité donné par la théorie du corps de classes entre le groupe des classes $Cl(L)$ et le groupe de Galois $G(L^{nr}/L)^{ab}$ de l'extension abélienne non ramifiée maximale de L. En effet, on a les identifications

$$H^2(X; \mathbb{Z}) = H^1(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom(\pi_1(X); \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (\pi_1(X)^{ab})^D.$$

La première est due au fait que la cohomologie étale de X à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est triviale, comme le montre la suite spectrale de Leray associée à l'inclusion du point générique η de X et le fait que la cohomologie étale de η est de torsion. La deuxième identification est un résultat général sur la cohomologie étale des schémas, qui est d'ailleurs une conséquence du fait que $\pi_1(X)$ est le groupe fondamental du topos des faisceaux d'ensembles sur le site X_{et}. D'autre part, on a

$$Ext^1_X(\mathbb{Z};\mathbb{G}_m) = H^1(X;\mathbb{G}_m) = Cl(L).$$

Ainsi, le théorème précédent donne l'isomorphisme

$$Cl(L)^D \longleftarrow (\pi_1(X)^{ab})^D$$

dont le morphisme transposé

$$Cl(L) \longrightarrow \pi_1(X)^{ab} \tag{3}$$

est l'isomorphisme de réciprocité.

1.7. L'isomorphisme de réciprocité et l'isomorphisme d'Hurewicz. En choisissant un point géométrique $\overline{x} \to X$, on peut définir le revêtement universel $\widetilde{X} \to X$ de X comme la limite projective des revêtements étales pointés de X. Le revêtement abélien maximal $\widetilde{X}^{ab} \to X$ est la limite projective des revêtements étales galoisiens abéliens de X.

L'isomorphisme (3) est induit par l'application, qui à un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_L$ (i.e. une place finie de L), associe son Frobenius $Fr_{\mathfrak{p}}$. Ce dernier définit à conjugaison près un automorphisme de l'extension maximale non ramifiée L^{nr}/L de L. Autrement dit, une place finie $\mathfrak{p}$ définit un automorphisme du revêtement abélien maximal $\widetilde{X}^{ab} \to X$ de X. D'après ce qui précède, $\mathfrak{p}$ est l'analogue d'un noeud $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$ (i.e d'un lacet libre) dans une variété de dimension trois M. Un tel lacet définit une classe de conjugaison dans le groupe fondamental $\pi_1(M) = Aut_M(\widetilde{M})$ de M. Ainsi, $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$ définit un automorphisme du revêtement abélien maximal $\widetilde{M}^{ab} \to M$ de M. Nous verrons donc l'isomorphisme de réciprocité

$$Cl(L) \longrightarrow Gal(L^{ab}/L)$$

commme un analogue de l'isomorphisme d'Hurewicz

$$H_1(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow Gal(\widetilde{M}^{ab}/M),$$

où L^{ab} est le corps de classes de Hilbert de L et $\widetilde{M}^{ab} \to M$ le revêtement abélien maximal de M. Un idéal principal

$$a\mathcal{O}_L \in I_L$$

s'envoie sur l'identité de L^{ab}/L et le bord de la surface $\partial\mathcal{S}_a$ s'envoie sur l'identité de $\widetilde{M}^{ab}/M$. Les deux résultats suivants illustrent cette analogie. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème de densité de Chebotarev et de son analogue topologique (cf **[47]** 6.1.2).

Proposition 1.4. *Soient L/K une extension galoisienne finie de groupe G, et C une classe de conjugaison dans G. Il existe une infinité de places finies $\mathfrak{q}$ de K, non ramifiées dans L, telles que $Fr_{\mathfrak{q}} = C$.*

Soit N une 3-sphere homologique, $M \to N$ un revêtement galoisien de groupe G et C une classe de conjugaison dans G. Il existe une infinité de noeuds $\mathcal{K}$, définis dans N à isotopie près, disjoints du lieu de ramification et tels que la condition suivante soit satisfaite. L'image de la classe de conjugaison dans $\pi_1(M)$ définie par $\mathcal{K}$, via le morphisme $\pi_1(M) \to G$, est égale à C.

1.8. Voisinage tubulaire d'un noeud et hensélisation. Soit $\mathfrak{p}$ une place finie d'un corps de nombres L et soit $x \in X \subset \overline{X}$ le point fermé correspondant. Un voisinage étale de x dans X est un morphisme étale $U \to X$ tel que la projection $U \times_X x \to x$ soit un isomorphisme. Autrement dit, U est un X-schéma étale possédant un unique point y au-dessus de x, et tel que l'extension résiduelle $k(y)/k(x)$ soit triviale. L'ensemble de ces voisinages étales est un système projectif. On note

$$X_x^h := \varprojlim U$$

la limite projective des voisinages étales de x dans X. Le schéma X_x^h est le spectre d'un anneau local hensélien de valuation discrète $\mathcal{O}_{L;\mathfrak{p}}^h$ dont le corps résiduel est $k(x)$. Plus précisément, $\mathcal{O}_{L;\mathfrak{p}}^h$ est l'ensemble des éléments de la complétion $\mathfrak{p}$-adique de $\mathcal{O}_L$ qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. En suivant l'intuition donnée par la topologie étale, le schéma X_x^h est vu comme un voisinage tubulaire $T_{\mathfrak{p}}$ du noeud ou lacet $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$.

On peut remarquer que l'immersion fermée $i : x \to X_x^h$ induit un isomorphisme

$$\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \pi_1(x) \simeq \pi_1(X_x^h).$$

En effet, l'anneau local $\mathcal{O}_{L;\mathfrak{p}}^h$ est hensélien, donc la catégorie des $\mathcal{O}_{L;\mathfrak{p}}^h$-algèbres étales finies (i.e. des revêtements étales de X_x^h) est équivalente, via le foncteur $A \to A \otimes_{\mathcal{O}_{L;\mathfrak{p}}^h} k(x)$, à celle des $k(x)$-algèbres étales finies. Le choix d'une clôture algébrique $\overline{k(x)}/k(x)$ définit ainsi un revêtement universel $u : X_x^{sh} \to X_x^h$ dont le groupe de Galois s'identifie à $G_{k(x)}$, où X_x^{sh} est le spectre d'un anneau local strictement hensélien. Alors, la suite spectrale d'Hochschild-Serre (cf [**40**] III.2.21 (b))

$$H^i(G_{k(x)}; H^j(X_x^{sh}; u^*(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{i+j}(X_x^h; \mathcal{F})$$

montre que le morphisme canonique

$$H^*(X_x^h; \mathcal{F}) \to H^*(x; i^*\mathcal{F})$$

est un isomorphisme, quel que soit le faisceau abélien $\mathcal{F}$ (non nécessairement de torsion).

De manière analogue, les espaces $T_{\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$ sont homotopiquement équivalents. En particulier, l'inclusion fermée $i : \mathcal{K}_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow T_{\mathfrak{p}}$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}) \simeq \pi_1(T_{\mathfrak{p}}).$$

De plus, la cohomologie de $T_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à celle de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$. Plus précisément, le morphisme canonique

$$H^*(T_{\mathfrak{p}}; \mathcal{F}) \to H^*(\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}; i^*\mathcal{F}),$$

est un isomorphisme, pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur $T_{\mathfrak{p}}$.

Le corps de fraction $L_{\mathfrak{p}}^h$ de l'anneau local hensélien $\mathcal{O}_{L;\mathfrak{p}}^h$ est un corps valué hensélien. Son groupe de Galois $G_{L_{\mathfrak{p}}^h}$ est canoniquement isomorphe à celui du corps complété de $L_{\mathfrak{p}}^h$, qui n'est autre que la completion $\mathfrak{p}$-adique $L_{\mathfrak{p}}$ de L. On note $G_{\mathfrak{p}}$ ce groupe de Galois, puisqu'il s'agit du groupe de décomposition en la place $\mathfrak{p}$.

Le complémentaire du point fermé x de X_x^h est

$$Spec(L_{\mathfrak{p}}^h) = X_x^h - \{x\}.$$

Dans le cadre topologique, $T_{\mathfrak{p}} - \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$ est homotopiquement équivalent au bord $\partial T_{\mathfrak{p}}$ de $T_{\mathfrak{p}}$. Ainsi, $Spec(L_{\mathfrak{p}}^h)$ est l'analogue arithmétique de $\partial T_{\mathfrak{p}}$. On peut d'ailleurs remarquer que $\partial T_{\mathfrak{p}}$ est une surface (homéomorphe à un tore) et que $Spec(L_{\mathfrak{p}}^h)$ est de dimension cohomologique stricte 2, puisque $G_{\mathfrak{p}}$ l'est.

L'analogie précédente se précise en considérant l'extension modérément ramifiée maximale de $L_{\mathfrak{p}}^{mr}/L_{\mathfrak{p}}^{h}$ et son groupe de Galois $G_{\mathfrak{p}}^{mr} := Gal(L_{\mathfrak{p}}^{mr}/L_{\mathfrak{p}}^{h})$. Le groupe $G_{\mathfrak{p}}^{mr}$ est l'analogue de la complétion profinie de $\pi_1(\partial T_{\mathfrak{p}})$. Soit $\sigma \in G_{\mathfrak{p}}^{mr}$ un prolongement de l'automorphisme de Frobenius de la sous-extension maximale non ramifiée de $L_{\mathfrak{p}}^{mr}/L_{\mathfrak{p}}^{h}$. Le sous-groupe d'inertie de $G_{\mathfrak{p}}^{mr}$ (i.e. le quotient modéré maximal du groupe d'inertie $I_{\mathfrak{p}}$) est engendré topologiquement par un élément τ, que l'on appelle l'automorphisme de monodromie en $\mathfrak{p}$. Alors on a la présentation

$$G_{\mathfrak{p}}^{mr} =< \tau, \sigma \mid \tau^{q-1}[\tau, \sigma] = 1 >,$$

où $[a, b]$ désigne le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$.

De manière analogue, le groupe $\pi_1(\partial T_{\mathfrak{p}})$ a la présentation

$$\pi_1(\partial T_{\mathfrak{p}}) =< \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1 > .$$

Les lacets α et β de la surface $\partial T_{\mathfrak{p}}$ sont donnés repectivement par le méridien autour de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$ et par la longitude le long de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$. Ainsi, τ correspond à α et σ correspond à β. On a vu comment le Frobenius $Fr_{\mathfrak{p}}$ était analogue à l'automorphisme défini par le lacet $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$. Il est donc naturel de faire correspondre le prolongement du Frobenius σ à la longitude β. De même, le méridien autour de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$ correspond intuitivement à "l'inertie dans $\pi_1(\partial T_{\mathfrak{p}})$".

1.9. Places archimédiennes et bouts d'une variété non compacte. Le topos ponctuel P est par définition le topos des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique réduit à un point $\{*\}$. Cette catégorie de faisceaux est équivalente à la celle des ensembles $\underline{Ens}$ (éléments d'un univers fixé). Bien sûr, la cohomologie ou l'homotopie du topos ponctuel P est celle du point $\{*\}$. Ces invariants sont donc triviaux. Ce topos s'appelle aussi le topos final car il existe un unique morphisme (à isomorphisme unique près) $\mathcal{E} \to \underline{Ens} = P$, quel que soit le topos (de Grothendieck) $\mathcal{E}$.

Un point d'un topos $\mathcal{E}$ est par définition un morphisme de topos

$$P \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Soit $\mathcal{S}_{et}(\overline{X})$ le topos des faisceaux d'ensembles sur le site étale d'Artin-Verdier de $\overline{X}$, l'ensemble des valuations d'un corps de nombres L. Une place archimédienne (réelle ou complexe) $v \in X_\infty$ est donnée par un point

$$v : P \to \mathcal{S}_{et}(\overline{X}),$$

qui est une immersion fermée du topos étale de $\overline{X}$. En conséquence, les calculs de cohomologie étale sur $\overline{X}$ font apparaître X_∞ comme un ensemble fini de points, et il est naturel de voir X_∞ comme un ensemble fini de points $\{z_1; ...; z_r\}$ de M compactifiant la variété non compacte $M' = M - \{z_1; ...; z_r\}$ correspondant à X. Autrement dit, X_∞ est vu comme l'ensemble des bouts de la variété non compacte M'.

1.10. Entrelacs. Un entrelacs de M est l'immersion lisse dans M d'une famille finie de cercles

$$\mathcal{L} : \mathbb{S}^1 \coprod ... \coprod \mathbb{S}^1 \longrightarrow M.$$

On confond souvent l'immersion $\mathcal{L}$ avec son image dans M. Alors, un entrelacs est une réunion disjointe finie de noeuds.

Soit Σ une famille finie de places finies de L. Il lui correspond un sous-schéma fermé de $\overline{X}$

$$Spec(\prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} k(\mathfrak{p})) = \coprod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} Spec(k(\mathfrak{p})) \longrightarrow X \subset \overline{X}.$$

L'inclusion du fermé Σ est l'immersion d'une réunion disjointe de spectres de corps finis. Ainsi, Σ est l'analogue d'un entrelacs dans M. La sous variété ouverte

$$M - \mathcal{L} \longrightarrow M$$

correspond à l'ouvert

$$\overline{X} - \Sigma = (Spec(\mathcal{O}_{L;\Sigma}); X_\infty) \longrightarrow \overline{X},$$

où $\mathcal{O}_{L;\Sigma}$ désigne l'anneau des Σ-entiers de L.

1.11. Extensions de corps de nombres et revêtements ramifiés de variétés. Une extension finie $L/K/\mathbb{Q}$ induit un morphisme fini

$$\pi : \overline{X} = \overline{Spec(\mathcal{O}_L)} \longrightarrow \overline{Spec(\mathcal{O}_K)} = \overline{Y}$$

qui est analogue à un revêtement ramifié de variétés

$$M \longrightarrow N.$$

Soit $\overline{Z} = Z \bigcup Z_\infty$ le lieu de ramification de π dans $\overline{X}$, et $\pi(\overline{Z})$ son image dans $\overline{Y}$. Alors Z est une famille finie de places ultramétriques de L et Z_∞ est une famille de places archimédiennes de L. Lorsque $Z_\infty = \emptyset$, le lieu de ramification dans M du revêtement correspondant $M \to N$ est un entrelacs $\mathcal{L} \in M$.

1.12. Le corps des rationnels et la sphère de dimension trois. Le corps de nombres $\mathbb{Q}$ ne possède pas d'extension non ramifiée en toutes les places $p \leq \infty$. Autrement dit, $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$ n'a pas de revêtement étale non trivial, et son groupe fondamental est donc nul. Ainsi, la conjecture de Poincaré suggère de voir $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$ (i.e. le corps $\mathbb{Q}$) comme la sphère $\mathbb{S}^3$, qui est simplement connexe.

Soit L un corps de nombres et $\overline{X}$ l'ensemble de ses valuations. Alors $\overline{X}$ est de manière unique un revêtement ramifié de $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$. Le lieu de ramification dans $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$ du morphisme

$$\overline{X} \longrightarrow \overline{Spec(\mathbb{Z})} \tag{4}$$

est constitué d'un ensemble fini de places finies et éventuellement du point $\infty \in \overline{Spec(\mathbb{Z})}$, lorsque L n'est pas totalement réel.

De manière analogue, toute variété compacte, connexe et orientable de dimension trois M s'obtient comme un revêtement ramifié de $\mathbb{S}^3$

$$M \longrightarrow \mathbb{S}^3 \tag{5}$$

dont le lieu de ramification dans $\mathbb{S}^3$ est un entrelacs.

Pour ces raisons, $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$ est vu comme l'analogue de $\mathbb{S}^3$. Le schéma affine $Spec(\mathbb{Z})$ est vu comme la variété (affine) non compacte $\mathbb{R}^3$. Notons que l'espace des bouts de $\mathbb{R}^3$ est réduit à un point $\{*\}$ et que la compactification de $\mathbb{R}^3$ ainsi obtenue est $\mathbb{S}^3$.

Remarque 1.5. *Il n'est pas clair que l'analogue du groupe $\pi_1(\overline{X})$ soit le groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M, ou même son complété profini. Par exemple, si l'on accepte cette analogie, l'énoncé analogue de la conjecture de Poincaré est faux (cf* **[50]***). De plus, le morphisme (4) est unique alors que (5) ne l'est pas. Enfin, le lieu de ramification de (4) contient la place archimédienne de $\mathbb{Q}$ dès que L n'est pas totalement réel alors que le lieu de ramification de (5) ne contient pas de point isolé (dans ce lieu de ramification).*

1.13. Entiers algébriques et surfaces à bords. Soit a un élément non nul de $\mathcal{O}_L$, l'anneau d'entiers du corps de nombre L. L'idéal $a\mathcal{O}_L$ possède une unique décomposition en produit d'idéaux premiers

$$a\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} ... \ \mathfrak{p}_r^{\alpha_r},$$

où les α_i sont des entiers positifs. En particulier, l'entier algébrique a détermine une famille finie de places finies de L

$$\Sigma_a := \{\mathfrak{p}_1; ...; \mathfrak{p}_r\},$$

de sorte que

$$\mathfrak{p} \in \Sigma_a \Leftrightarrow \mathfrak{p} | a\mathcal{O}_L \Leftrightarrow a \in \mathcal{O}_{L;\Sigma_a}^{\times}.$$

L'élément $a \in \mathcal{O}_L$ doit donc être vu comme un objet déterminant un entrelacs

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{K}_{\mathfrak{p}_1} \coprod ... \coprod \mathcal{K}_{\mathfrak{p}_r}$$

de la variété M. Un candidat naturel pour l'analogue topologique de a est une surface à bord $\mathcal{S}_a$ dont le bord $\partial\mathcal{S}_a$ est l'entrelacs $\mathcal{L}_a$. En poursuivant cette idée, une unité $u \in \mathcal{O}_L^{\times} = U_L$ correspond à une surface sans bord, puisqu'aucun premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_L$ ne divise l'idéal trivial $u\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L$. De même, si Σ est un fermé de X et $\mathcal{L}$ l'entrelacs de M correspondant, une Σ-unité $b \in \mathcal{O}_{L;\Sigma}^{\times}$ doit être vue comme une surface $\mathcal{S}_b$ de M dont le bord $\partial\mathcal{S}_b$ est contenu dans l'entrelacs $\mathcal{L}$ correspondant à Σ.

1.14. Le groupe des classes et le sous-groupe de torsion du premier groupe d'homologie singulière. Soient L un corps de nombres, M la variété correspondante et

$$... \to C_2(M;\mathbb{Z}) \to C_1(M;\mathbb{Z}) \to ...$$

le complexe d'homologie singulière de M à coefficients entiers. En notant $Z_1(M;\mathbb{Z})$ le groupe des 1-cycles, on obtient un morphisme

$$\partial : C_2(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow Z_1(M;\mathbb{Z}) \tag{6}$$

dont le conoyau est par définition le premier groupe d'homologie singulière $H_1(M;\mathbb{Z})$ de M. Une place finie de L correspond à un lacet $\mathcal{K}$ de M, qui est par définition un élément de $Z_1(M;\mathbb{Z})$ (puisqu'un lacet est une application continue $\gamma : [0;1] \to M$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ i.e. $\partial\gamma = 0$). Soit I_L le groupe des idéaux fractionnaires de L. Le groupe I_L est le groupe abélien libre dont une base est donnée par les places finies de L. Par linéarité, un élément de I_L correspond à nouveau à un élément de $Z_1(M;\mathbb{Z})$.

D'autre part, un entier non nul de L correspond à une surface à bords $\mathcal{S}$ de M. Comme tout élément x de $L^{\times}$ s'écrit $x = a/b$, avec $a, b \in \mathcal{O}_L$, on peut voir l'analogue topologique de x comme l'élément $\mathcal{S}_a - \mathcal{S}_b$ de $C_2(M;\mathbb{Z})$. Enfin, la flèche

$$a \in \mathcal{O}_L \longrightarrow a\mathcal{O}_L \in I_L$$

est l'analogue de

$$\mathcal{S} \to \partial\mathcal{S}.$$

Le morphisme naturel

$$p : L^{\times} \longrightarrow I_L \tag{7}$$

est donc analogue à la flèche (6). Ainsi, les conoyaux $H_1(M;\mathbb{Z})$ et $Cl(L)$ des morphismes (6) et (7) sont liés. Plus précisément, on imagine une flèche du groupe de classes de L dans le premier groupe d'homologie de M

$$Cl(L) \ \rightsquigarrow \ H_1(M;\mathbb{Z}) \tag{8}$$

issue d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L^\times \arrow[r, "p"] \arrow[d] & I_L \arrow[d] \\ C_2(M;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & Z_1(M;\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Mais l'isomophisme de réciprocité (3) montre qu'un élément non nul de $Cl(L)$ définit un automorphisme non trivial du revêtement étale abélien maximal $\overline{X}^{ab} \to \overline{X}$. En particulier, un élément non nul $\mathfrak{a}$ de $Cl(L)$ doit être envoyé sur un élément non trivial du groupe

$$H_1(M;\mathbb{Z}) \simeq Aut_M(\widetilde{M}^{ab}).$$

Ainsi, la "flèche" (8) doit être injective. Comme le groupe $Cl(L)$ est fini, il est vu comme l'analogue arithmétique du sous-groupe de torsion $H_1(M;\mathbb{Z})_{tors}$ de $H_1(M;\mathbb{Z})$.

1.15. Le groupe des unités et le quotient libre du premier groupe d'homologie singulière. Soit M une variété de dimension trois compacte, connexe et orientable. On a les identifications

$$H^1(M;\mathbb{Z}) = Hom(\pi_1(M),\mathbb{Z}) = Hom(H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\},\mathbb{Z}).$$

De plus, la dualité de Poincaré donne

$$H_2(M;\mathbb{Z}) \simeq H^1(M;\mathbb{Z}).$$

On a donc un isomorphisme

$$H_2(M;\mathbb{Z}) \simeq Hom(H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\};\mathbb{Z}),$$

puis

$$H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\} \simeq Hom(H_2(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}),$$

car les groupes abéliens envisagés sont libres de type fini. D'après ce qui précède, le groupe de surfaces $H_2(M;\mathbb{Z})$ est l'analogue du groupe des unités $U_L/\{tors\}$. Un analogue arithmétique de $H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\}$ est ainsi donné par le groupe $Hom(U_L/\{tors\};\mathbb{Z})$ ou son groupe dual $U_L/\{tors\}$, puisque ces deux groupes sont libres de type fini et de même rang.

1.15.1. Plus généralement, soit Σ une partie fermée de $X \subset \overline{X}$ et soit $\mathcal{L}_\Sigma$ l'entrelacs de M correspondant. L'analogue arithmétique du quotient libre maximal $H_1(M-\mathcal{L}_\Sigma;\mathbb{Z})/\{tors\}$ est donné par le groupe $Hom(\mathcal{O}_{L;\Sigma}^\times;\mathbb{Z})$.

1.15.2. *Un exemple.* Soit Σ un ensemble fini de nombres premiers de $\mathbb{Z}$ (une partie fermée de $Spec(\mathbb{Z}) \subset \overline{Spec(\mathbb{Z})}$), et $\mathcal{L}_\Sigma$ l'entrelacs dans $\mathbb{S}^3$ correspondant. Alors

$$H_1(\mathbb{S}^3 - \mathcal{L}_\Sigma;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\sharp\Sigma} \ \ et \ \ Hom(\mathbb{Z}_\Sigma^\times;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\sharp\Sigma}.$$

Plus généralement, soit L un corps de nombres et M la variété correspondante. Le nombre de Betti $b_1(M-\mathcal{L}_\Sigma)$ correspond à $r_1+r_2-1+\sharp\Sigma$, où r_1 et r_2 désignent respectivement le nombres de places réelles et complexes de L.

1.16. Sphères homologiques et analogue arithmétique de la conjecture de Poincaré. Les observations suivantes sont dues à N. Ramachandran (cf [**50**]). Une variété de dimension trois connexe, compacte et orientable M est une 3-sphère à homologie entière si $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$. Soit $\overline{X}$ l'ensemble des valuations d'un corps de nombres L tel que

$$U_L/\mu_L = Cl(L) = 0.$$

Le premier groupe d'homologie $H_1(M;\mathbb{Z})$ de la variété correspondante M est trivial, puisque

$$H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\} = H_1(M;\mathbb{Z})_{tors} = 0.$$

Ainsi, on dira que $\overline{X}$ est une *3-sphère à homologie entière* si $U_L/\mu_L = Cl(L) = 0$, ou de manière équivalente, si $H^p(\overline{X};\mathbb{G}_m) = 0$ pour $p \neq 0,3$ et si $H^0(\overline{X};\mathbb{G}_m)$ est de torsion.

De même, $\overline{X}$ est une *3-sphère à homologie rationnelle* si $U_L/\mu_L = 0$ ou encore si $H^0(Y;\mathbb{G}_m)$ est de torsion. Enfin, $\overline{X}$ est une *3-sphère homotopique* lorsque $\pi_1(\overline{X}) = Gal(L^{nr}/L) = \{1\}$, où L^{nr}/L est l'extension maximale non ramifiée (en toutes les valuations) de L.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème des unités :

$$rank_{\mathbb{Z}}(U_L) = r_1 + r_2 - 1.$$

Proposition 1.6. *L'ensemble des valuations $\overline{X}$ d'un corps de nombres L est une* 3-sphère à homologie entière *si et seulement si $L = \mathbb{Q}$ ou si L est un corps quadratique imaginaire dont le groupe de classes est trivial.*

D'autre part, on sait que le groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ est trivial si et seulement si $d \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$. La proposition suivante (cf [**50**]) contredit donc l'analogue de la conjecture de Poincaré.

Proposition 1.7. *En arithmétique, une 3-sphère à homologie entière est une 3-sphère homotopique.*

Il y a donc au moins dix sphères homotopiques en arithmétique.

Remarque 1.8. *En arithmétique, il existe exactement dix sphères à homologie entière et une infinité (deux à deux non homéomorphes) en topologie.*

Remarque 1.9. *L'énoncé précédent de l'analogue arithmétique de la conjecture de Poincaré est basé sur la correspondance entre les groupes $\pi_1(\overline{X})$ et $\pi_1(M)$. Cette analogie sera remise en cause plus tard.*

1.17. Situation équivariante. Soit L/K une extension galoisienne finie de corps de nombres de groupe G. On pose $\overline{X} = \overline{Spec(\mathcal{O}_L)}$ et $\overline{Y} = \overline{Spec(\mathcal{O}_K)}$. Alors

$$\overline{Y} = \overline{X}/G := (X/G; X_\infty/G)$$

et le morphisme

$$\pi : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$$

est analogue à un revêtement galoisien ramifié

$$p : M \longrightarrow N$$

de variétés de dimension trois, avec $N := M/G$. Supposons que l'extension L/K soit non ramifiée à l'infini, c'est-à-dire que G opère librement sur X_∞. Alors le lieu de ramification

$$Z = \{\mathfrak{p}_1; ...; \mathfrak{p}_s\} \subset \overline{X}$$

est une famille finie de places finies de L.

De manière analogue, soit G un groupe fini opérant fidèlement sur une variété compacte, connexe et orientable M. Si les éléments de G préservent l'orientation de M, alors le lieu de ramification $Z \subset M$ du revêtement galoisien

$$M \longrightarrow M/G = N$$

est un entrelacs

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{K}_{\mathfrak{p}_1}; ...; \mathcal{K}_{\mathfrak{p}_s}\} \subset M.$$

Les composantes connexes $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}_i}$ de ce lieu de ramification sont donc les analogues des places finies ramifiées de L dans l'extension L/K. On les appelle les noeuds ramifiés.

1.17.1. *Groupes d'inertie et de décomposition.* Soient $L/K = L^G$ une extension galoisienne et $\mathfrak{p}$ une place finie de L au-dessus de $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \bigcap \mathcal{O}_K$. Le groupe de décomposition $G_{\mathfrak{p}} \subseteq G$ est défini par

$$G_{\mathfrak{p}} := \{g \in G;\ g(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\}.$$

Soient $k(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_L/\mathfrak{p}$ et $k(\mathfrak{q}) = \mathcal{O}_K/\mathfrak{q}$ les corps résiduels en $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ respectivement. On a un morphisme surjectif

$$G_{\mathfrak{p}} \longrightarrow Gal(k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{q}))$$

et le sous-groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$ est défini par la suite exacte

$$0 \to I_{\mathfrak{p}} \to G_{\mathfrak{p}} \to Gal(k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{q})) \to 0.$$

On note $e_{\mathfrak{p}}$ et $f_{\mathfrak{p}}$ les ordres des groupes $I_{\mathfrak{p}}$ et $Gal(k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{q}))$. L'entier $e_{\mathfrak{p}}$ s'appelle l'indice de ramification en $\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 1.10. *Si $\mathfrak{q}\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_1^{e_{\mathfrak{p}1}}...\mathfrak{p}_s^{e_{\mathfrak{p}s}}$, alors $\{\mathfrak{p}_1; ...; \mathfrak{p}_s\} = \overline{X} \times_{\overline{Y}} Spec(k(\mathfrak{q}))$ est l'ensemble des premiers de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{q}$. Les affirmations suivantes sont vraies.*
- *G opère transitivement sur $\{\mathfrak{p}_1; ...; \mathfrak{p}_s\}$.*
- *On a les égalités $e = e_{\mathfrak{p}_1} = ... = e_{\mathfrak{p}_s}$ et $f = f_{\mathfrak{p}_1} = ... = f_{\mathfrak{p}_s}$.*
- *On a $|G| = efg$.*

De même, soient $M \to M/G$ un revêtement galoisien tel que G préserve l'orientation de M, et $\mathcal{K}$ un noeud de M. Le groupe de décomposition $G_{\mathcal{K}} \subseteq G$ est défini par

$$G_{\mathcal{K}} := \{g \in G;\ g(\mathcal{K}) = \mathcal{K}\}.$$

Alors le revêtement $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' := \mathcal{K}/G_{\mathcal{K}}$ est galoisien. On a un morphisme surjectif

$$G_{\mathcal{K}} \longrightarrow Gal(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$$

et le sous-groupe d'inertie en $\mathcal{K}$ est défini par la suite exacte

$$0 \to I_{\mathcal{K}} \to G_{\mathcal{K}} \to Gal(\mathcal{K}/\mathcal{K}') \to 0.$$

On note $e_{\mathcal{K}}$ et $f_{\mathcal{K}}$ les ordres des groupes $I_{\mathcal{K}}$ et $Gal(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$. L'entier $e_{\mathcal{K}}$ s'appelle l'indice d'inertie en $\mathcal{K}$.

PROPOSITION 1.11. *Soit $\{\mathcal{K}_1; ...; \mathcal{K}_s\} = M \times_N \mathcal{K}'$ l'ensemble des noeuds de M au-dessus de $\mathcal{K}'$. Les affirmations suivantes sont vraies.*
- *G opère transitivement sur $\{\mathcal{K}_1; ...; \mathcal{K}_s\}$.*
- *On a les égalités $e = e_{\mathcal{K}_1} = ... = e_{\mathcal{K}_s}$ et $f = f_{\mathcal{K}_1} = ... = f_{\mathcal{K}_s}$.*
- *On a $|G| = efg$.*

Soit $\mathfrak{p}$ (respectivement $\mathcal{K}$) une place finie de L (respectivement un noeud de M). On dit que l'idéal premier $\mathfrak{p}$ (respectivement le noeud $\mathcal{K}$) est ramifié si $e_{\mathfrak{p}} \geq 2$, décomposé si $e_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}} = 1$ et inerte si $e_{\mathfrak{p}} = 1$ et $f_{\mathfrak{p}} = |G|$.

PROPOSITION 1.12. *Sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont vraies.*
– *Il n'y a qu'un nombre fini de premiers et de noeuds ramifiés.*
– *Il y a une infinité de premiers et de noeuds décomposés.*
– *Si G est cyclique, il y a une infinité de premiers et de noeuds inertes.*
– *Si G n'est pas cyclique, il n'y a pas de premier ni de noeud qui soit inerte.*

1.17.2. *Action galoisienne sur les invariants.* Soient $L/K = L^G$ une extension galoisienne et $M \to N = M/G$ un revêtement galoisien. Le groupe de Galois G opère naturellement sur les modules libres $H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\}$ et U_L ainsi que sur les modules de torsion $H_1(M;\mathbb{Z})_{tors}$ et $Cl(L)$. Ces modules galoisiens se correspondent deux à deux.

1.17.3. *Les morphismes norme et transfert.* Le morphisme $\pi : M \to N$ induit un morphisme sur l'homologie $\pi_* : H_1(M;\mathbb{Z}) \to H_1(N;\mathbb{Z})$. Il existe aussi un morphisme transfert

$$\pi_\sharp : H_1(N;\mathbb{Z}) \to H_1(M;\mathbb{Z})$$

défini de la manière suivante. Si $x \in H_1(N;\mathbb{Z})$ est représenté par un lacet γ disjoint du lieu de ramification, on définit $\pi_\sharp(\gamma)$ comme l'élément de $H_1(M;\mathbb{Z})$ représenté par $\pi^{-1}(\gamma)$. On obtient des morphismes

$$\pi_* : H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\} \to H_1(N;\mathbb{Z})/\{tors\}, \quad \pi_* : H_1(M;\mathbb{Z})_{tors} \to H_1(N;\mathbb{Z})_{tors},$$

$$\pi_\sharp : H_1(N;\mathbb{Z})/\{tors\} \to H_1(M;\mathbb{Z})/\{tors\}, \quad \pi_\sharp : H_1(N;\mathbb{Z})_{tors} \to H_1(M;\mathbb{Z})_{tors}.$$

Alors on a

$$\pi_*\pi_\sharp(y) = |G|.y \text{ et } \pi_\sharp\pi_*(x) = \sum_{g\in G} g(x).$$

De manière analogue, on a des morphismes

$$\pi_* : U_L \to U_K, \quad \pi_* : Cl(L) \to Cl(K),$$

$$\pi_\sharp : U_K \to U_L, \quad \pi_\sharp : Cl(K) \to Cl(L),$$

où π_* est défini par la norme et π_* par l'inclusion $K \hookrightarrow L$. A nouveau, on a

$$\pi_*\pi_\sharp(y) = |G|.\,y \text{ et } \pi_\sharp\pi_*(x) = \sum_{g\in G} g(x).$$

1.18. Entrelacements sur $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$.

1.18.1. Soient p et q deux premiers impairs distincts de $\mathbb{Z}$. De manière analogue, soient $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_q$ deux lacets dans $\mathbb{S}^3$ sans point commun. On note

$$M_{\mathcal{K}_p} \longrightarrow N_{\mathcal{K}_p} := \mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p$$

l'unique revêtement non ramifié galoisien de groupe $Gal(M_{\mathcal{K}_p}/N_{\mathcal{K}_p}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le lacet $\mathcal{K}_q$ définit un élément $[\mathcal{K}_q]$ dans $\pi_1(N_{\mathcal{K}_p})^{ab}$. Considérons l'image de cet élément par l'application

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(N_{\mathcal{K}_p})^{ab} & \longrightarrow & Gal(M_{\mathcal{K}_p}/N_{\mathcal{K}_p}) \\ [\mathcal{K}_q] & \longmapsto & Entr(\mathcal{K}_p,\mathcal{K}_q) \text{ modulo } 2 \end{array}$$

L'élément $Entr(\mathcal{K}_p,\mathcal{K}_q)$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est la réduction modulo 2 du nombre d'entrelacement des lacets $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_q$.

Respectivement, le schéma $Y_p = Spec(\mathbb{Z}) - \{p\} = Spec(\mathbb{Z}[1/p])$ possède un unique revêtement étale galoisien $X_p \to Y_p$ de groupe $Gal(X_p/Y_p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors X_p est le spectre de la normalisation de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. L'automorphisme de Frobenius associé au premier q définit un élément du groupe $\pi_1(Y_p)^{ab}$. L'image de cet élément par la surjection canonique

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y_p)^{ab} & \longrightarrow & Gal(X_p/Y_p) \\ Fr_q & \longmapsto & Entr_2(p,q) \end{array}$$

est par défnition *le nombre d'entrelacement modulo 2 des premiers p et q*. Les équivalences

$$Fr_q|_{X_p} = Id_{X_p} \Leftrightarrow Fr_q(\sqrt{p}) = \sqrt{p} \;\Leftrightarrow\; p \text{ est un résidu quadratique modulo } q$$

montre l'égalité

$$(-1)^{Entr_2(p,q)} = (\frac{p}{q}),$$

où $(\frac{p}{q})$ est le symbole de Legendre. Ainsi, la loi de réciprocité quadratique

$$(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p}), \text{ pour } p, q \equiv 1 \bmod 4$$

peut être vue comme l'analogue de la symétrie du nombre d'entrelacement

$$Entr(\mathcal{K}_p, \mathcal{K}_q) \equiv Entr(\mathcal{K}_q, \mathcal{K}_p) \bmod 2.$$

1.18.2. Le nombre d'entrelacement s'interprète aussi comme un nombre d'intersection, calculé via la dualité de Poincaré (cf **[61]**). Soient à nouveau p et q deux idéaux premiers de $\mathbb{Z}$, et soient $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_q$ deux lacets de $\mathbb{S}^3$ sans points communs. Alors $\mathcal{K}_q$ est un lacet de $\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p$. Comme $\mathbb{S}^3$ est simplement connexe, on peut choisir un disque D de $\mathbb{S}^3$ qui borde $\mathcal{K}_p$. Le nombre d'entrelacement de $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_q$ est le nombre de points d'intersection de D et $\mathcal{K}_q$ (minimal suivant les classes d'homotopie de D et de $\mathcal{K}_q$). Le lacet $\mathcal{K}_q$ définit un élément

$$[\mathcal{K}_q] \in H_1(\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p; \mathbb{Z})$$

et le disque D définit un élément

$$[D] \in H_2(\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p; \mathbb{Z}).$$

Par la dualité de Poincaré, on obtient

$$[\mathcal{K}_q] \in H^2_c(\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p; \mathbb{Z}) \text{ et } [D] \in H^1(\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p; \mathbb{Z}).$$

Le nombre d'entrelacement de $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_q$ est l'entier calculé par cup-produit

$$\begin{array}{ccc} H^2_c(\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p; \mathbb{Z}) \times H^1(\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3_c(\mathbb{S}^3 - \mathcal{K}_p; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ ([\mathcal{K}_q]; [D]) & \longmapsto & Entr(\mathcal{K}_p; \mathcal{K}_q) \end{array}$$

Soient $\overline{X} = \overline{Spec(\mathbb{Z})}$ et $p, q \in X \subset \overline{X}$. La cohomologie étale respecte l'intuition topologique pour des faisceaux de torsion. On peut ainsi définir l'entrelacement de p et q dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. L'isomorphisme

$$H^1(\overline{X} - \{p\}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Hom(\pi_1(\overline{X} - \{p\}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$$

suggère de définir un disque $[D]$ dans $H^1(\overline{X} - \{p\}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. La suite spectrale

$$H^i(\overline{X} - \{p\}; \underline{Ext}^j(\overline{X} - \{p\}; \mu_n; \mathbb{G}_m)) \Rightarrow Ext^{i+j}(\overline{X} - \{p\}; \mu_n; \mathbb{G}_m)$$

fournit une injection

$$H^1(\overline{X} - \{p\}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \hookrightarrow Ext^1(\overline{X} - \{p\}; \mu_n; \mathbb{G}_m).$$

On obtient donc un disque $[D]$ dans

$$Ext^1(\overline{X} - \{p\}; \mu_n; \mathbb{G}_m) = Ext^1(\overline{X}; j_!(\mu_n); \mathbb{G}_m), \tag{9}$$

où $j : \overline{X} - \{p\} \to \overline{X}$ est l'inclusion ouverte. D'autre part, on peut définir un lacet $[q]$ dans $H^2_c(\overline{X}; \mu_n) := H^2(\overline{X}; j_!(\mu_n))$. Alors le nombre d'entrelacement des premiers p et q est calculé par cup-produit, grâce au théorème de dualité de Bienenfeld-Artin-Verdier :

$$\begin{array}{ccc} H^2(\overline{X}; j_!(\mu_n)) \times Ext^1(\overline{X}; j_!(\mu_n); \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^3(\overline{X}; \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ([q]; [D]) & \longmapsto & Entr_n(p; q) \end{array}$$

Le Théorème suivant est dû à J.L. Waldspurger (cf [**61**]).

THÉORÈME 1.13. *Soient $m = pgcd(n; p-1)$ et ζ une racine primitive m-ième de l'unité dans $\mathbb{Q}_p$. Alors on a*

$$Entr_n(p; q) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

et la relation

$$\zeta^{Entr_n(p;q)} = (p; q)_m$$

où $(p; q)_m$ est le symbole de Hilbert calculé dans $\mathbb{Q}_p$.

1.19. Groupes fondamentaux.

1.19.1. On note $\pi_1(\overline{X})$ le groupe fondamental profini du topos $\mathcal{S}_{et}(\overline{X})$ des faisceaux sur le site étale d'Artin-Verdier de $\overline{X}$. Ce groupe classe les objets localement constants de ce topos, ou de manière équivalente, les revêtements étales de $\overline{X}$ (i.e. les morphismes $\overline{Y} \to \overline{X}$ où $Y \to X$ est un revêtement étale de schémas tel que $Y_\infty \to X_\infty$ est un revêtement non ramifié de degré $[K(Y) : K(X)]$ d'ensembles finis). Ainsi, le groupe $\pi_1(\overline{X})$ s'identifie au groupe de Galois $G(L^{nr}/L)$ de l'extension maximale non ramifiée en toutes les places de L. Il semble naturel de voir ce groupe $\pi_1(\overline{X})$ comme l'analogue du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de la variété M correspondant à $\overline{X}$. Cette correspondance est d'ailleurs présente dans le dictionnaire de la topologie arithmétique. Cependant, cette anologie amène certaines contradictions. D'une part, on a vu que l'énoncé analogue de la conjecture de Poincaré est alors faux. D'autre part, en acceptant cette analogie, les groupes

$$\pi_1(\overline{X})^{ab} \quad \text{et} \quad \pi_1(M)^{ab} \simeq H_1(M; \mathbb{Z})$$

devraient se correspondre. Supposons pour simplifier que L soit totalement imaginaire. La théorie du corps de classes fournit un isomorphisme

$$\pi_1(\overline{X})^{ab} \simeq Cl(L),$$

alors que l'analogue arithmétique "$H_1(M; \mathbb{Z})$" de $H_1(M; \mathbb{Z})$ devrait être décrit par une suite exacte

$$0 \to Cl(L) \to \text{"}H_1(M; \mathbb{Z})\text{"} \to U_L/\mu_L \to 0.$$

Ces correspondances ne sont donc pas compatibles.

1.19.2. Soit M une variété de dimension trois compacte connexe et orientable et soit $\mathcal{L} = \mathcal{K}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{K}_n$ un entrelacs dans M. On choisit des voisinages tubulaires $T_{\mathcal{K}_i}$ des noeuds $\mathcal{K}_i$ suffisamment petits pour être disjoints. Soit $M_\mathcal{L}$ le complémentaire de $\bigcup T^\circ_{\mathcal{K}_i}$ dans M, où $T^\circ_{\mathcal{K}_i}$ désigne l'intérieur de $\mathcal{K}_i$. On définit le groupe

$$G_\mathcal{L} := \pi_1(M - \mathcal{L}) = \pi_1(M_\mathcal{L}).$$

Alors, le méridien α_i autour de $\mathcal{K}_i$ et la longitude β_i le long de $\mathcal{K}_i$ sont définis comme des lacets de

$$\partial T_{\mathcal{K}_i} \subseteq \partial M_\mathcal{L} \subseteq M_\mathcal{L}.$$

De manière analogue, soit L un corps de nombres et soit Σ une famille finie de places finies de L. On note G_Σ le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée de L en dehors de Σ. Malgré les contradictions soulevées dans la sous-section précédente, les groupes $G_{\mathcal{L}}$ et G_Σ possèdent des propriétés analogues. Comme le groupe G_Σ est énorme, il faut considérer son pro-l quotient maximal ci-dessous. Ce qui suit est tiré de [**48**].

1.19.3. Soient $\Sigma = \{p_1, ..., p_n\}$ un ensemble d'idéaux premiers distincts de $\mathbb{Z}$, et l un nombre premier tel que $p_i \equiv 1 \bmod l$ quel que soit $i \leq n$. Soient de plus $\mathbb{Q}_\Sigma(l)/\mathbb{Q}$ la l-extension maximale non ramifiée en dehors de $\Sigma \cup \{\infty\}$, et $G_S(l) = Gal(\mathbb{Q}_\Sigma(l)/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois. Alors

$$G_\Sigma(l) = \pi_1(Spec(\mathbb{Z}) - \Sigma)(l)$$

est le pro-l quotient maximal du groupe fondamental étale

$$\pi_1(Spec(\mathbb{Z}) - \Sigma) = \pi_1(\overline{\mathbb{Z}} - (\Sigma \cup \{\infty\})),$$

où ∞ est la place archimédienne de $\mathbb{Q}$. Soit $\mathfrak{p}_i$ un diviseur premier de p_i dans $\mathbb{Q}_\Sigma(l)$. Le groupe d'inertie I_i en $\mathfrak{p}_i$ est engendré topologiquement par un élément τ_i. On choisit aussi un prolongement du Frobenius $\sigma_i \in G_\Sigma(l)$.

On peut montrer que σ_i est un prolongement du symbole d'Artin $(\eta_i; \mathbb{Q}_\Sigma(l)^{ab}/\mathbb{Q})$, où η_i est l'idèle dont la composante en p_i est p_i, et dont les autres composantes sont 1. Respectivement, σ_i est un prolongement du symbole d'Artin $(\lambda_i; \mathbb{Q}_\Sigma(l)^{ab}/\mathbb{Q})$, où λ_i est l'idèle dont la composante en p_i est une racine primitive l-ième de l'unité g_i modulo p_i, et 1 en dehors de S.

On définit

$$l_{i,j} \in \mathbb{F}_l$$

par la formule

$$p_i^{-1} = g_j^{l_{i,j}} \in \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}, \ \forall\ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

On peut vérifier que $l_{i,j}$ est le nombre d'entrelacement

$$l_{i,j} = Entr_l(p_j; p_i) \in \mathbb{F}_l.$$

Alors, $G_\Sigma(l)$ est engendré topologiquement par $\tau_1, ..., \tau_n$ et on a la relation

$$\sigma_i = \prod_{j \neq i} \tau_j^{l_{i,j}} \quad \text{dans} \quad G_\Sigma(l)^{ab}.$$

De manière analogue, soit $\mathcal{L} = \mathcal{K}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{K}_n$ un entrelacs dans $\mathbb{R}^3$. Le groupe de $\mathcal{L}$ est

$$G_{\mathcal{L}} := \pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{L})$$

Soient α_i des représentants des méridiens autour de $\mathcal{K}_i$ et β_i des représentants des longitudes le long de $\mathcal{K}_i$. Alors $G_{\mathcal{L}}$ est engendré par $\alpha_1, ..., \alpha_n$ et on a la relation

$$\beta_i = \prod_{j \neq i} \alpha_j^{lk(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j)} \quad \text{dans} \quad G_{\mathcal{L}}^{ab},$$

où $lk(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) = Entr(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j)$ est le nombre d'entrelacement des lacets $\mathcal{K}_i$ et $\mathcal{K}_j$.

2. Le dictionnaire

Nous donnons dans cette section les correspondances de la topologie arithmétique qui ont été décrites dans la section précédente. Soient L un corps de nombres possédant r_1 places réelles et r_2 places complexes, et $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L.

ARITHMETIQUE	**TOPOLOGIE**
$X = Spec(\mathcal{O}_L)$	variété réelle M' de dimension 3 non compacte
$X_\infty := X \otimes \mathbb{R}$	$\{$bouts de $M'\} := \varprojlim \pi_0(M - K)$
$\overline{X} = (Spec(\mathcal{O}_L); X_\infty)$	compactification M de M', compacte, connexe et orientable.
dualité d'Artin-Verdier sur $\overline{X}$	dualité de Poincaré sur M
$Spec(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \overline{Spec(\mathbb{Z})}$	$\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$
$Spec(\mathbb{F}_q)$	$\mathbb{S}^1$
place finie $\mathfrak{p}$ de L	noeud $\mathcal{K}_\mathfrak{p} : \mathbb{S}^1 \to M$
Frobenius $Fr_\mathfrak{p} \in Gal(L^{ab}/L)$	$[\mathcal{K}_\mathfrak{p}] \in Aut_M(M^{ab})$
$X^h_\mathfrak{p} := Spec(\mathcal{O}^h_{L;\mathfrak{p}})$	voisinage tubulaire $T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{K}_\mathfrak{p}$
$H^*_{et}(X^h_\mathfrak{p}; \mathcal{F}) \simeq H^*_{et}(Spec(k(\mathfrak{p})); \mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ arbitraire ; $\pi_1(Spec(k(\mathfrak{p}))) \simeq \pi_1(X^h_\mathfrak{p})$	$H^*(T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}}; \mathcal{F}) \simeq H^*(\mathcal{K}_\mathfrak{p}; \mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ arbitraire ; $\pi_1(\mathcal{K}_\mathfrak{p}) \simeq \pi_1(T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}})$
$Spec(L^h_\mathfrak{p}) = X^h_\mathfrak{p} - Spec(k(\mathfrak{p}))$	$T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}} - \mathcal{K}_\mathfrak{p} \approx \partial T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}}$
groupe de Galois $G^{mr}_\mathfrak{p}$ de l'extension modérément ramifiée maximale de $L^h_\mathfrak{p}$	complétion profinie du groupe fondamental $\pi_1(\partial T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}})$

monodromie $\tau \in G_{\mathfrak{p}}^{mr}$ en $\mathfrak{p}$	méridien $\alpha \in \pi_1(\partial T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}})$ autour de $\mathcal{K}_\mathfrak{p}$
Frobenius $\sigma \in G_{\mathfrak{p}}^{mr}$ en $\mathfrak{p}$	longitude $\beta \in \pi_1(\partial T_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}})$ le long de $\mathcal{K}_\mathfrak{p}$
sous-schéma fermé $\Sigma \subset X \subset \overline{X}$	entrelacs $\mathcal{L}_\Sigma = \mathcal{K}_{\mathfrak{p}_1} \bigcup ... \bigcup \mathcal{K}_{\mathfrak{p}_s}$ de M
extension L/K avec pour lieu de ramification $\Sigma \subset Spec(\mathcal{O}_L)$	revêtement ramifié $M \to N$ avec pour lieu de ramification un entrelacs $\mathcal{L}_\Sigma$
entier algébrique $a \in \mathcal{O}_L$	surface à bord $\mathcal{S}_a \subset M$
unité $u \in \mathcal{O}_L^\times = U_L$	surface sans bord $\mathcal{S}_u \subset M$
flèche $a \in \mathcal{O}_L \to \Sigma = \{\mathfrak{p} \mid a\mathcal{O}_L\}$	flèche $\mathcal{S}_a \to \partial \mathcal{S}_a$
groupe des classes $Cl(L)$	$H_{tor}(M)$:=sous-groupe de torsion de $H_1(M;\mathbb{Z})$
isomorphisme de réciprocité $Cl(L) \simeq Gal(L^{ab}/L)$	restriction de l'isomorphisme d'Hurewicz $H_1(M;\mathbb{Z}) \simeq Aut_M(M^{ab})$
$Hom(\mathcal{O}_L^\times;\mathbb{Z}) \approx \mathcal{O}_L/\mu_L$	$H_{free}(M) := H_1(M;\mathbb{Z})/H_{tor}(M)$
$Hom(\mathcal{O}_{L;\Sigma}^\times;\mathbb{Z})$	$H_{free}(M - \mathcal{L}_\Sigma)$
$r_1 + r_2 - 1 + \sharp\Sigma$	nombre de Betti $b_1(M - \mathcal{L}_\Sigma)$
$L = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ où $d \in \{1,2,3,7,11,19,43,67,163\}$	sphère homologique i.e. $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$

nombre d'entrelacement de p, $q \in Spec(\mathbb{Z})$ $Entr_n(p;q) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	nombre d'entrelacement $Entr(\mathcal{K}_p;\mathcal{K}_q) \in \mathbb{Z}$
situation	*galoisienne*
extension galoisienne $L/K = L^G$ non ramifiée à l'infini	revêtement ramifié galoisien $M \to N = M/G$ où G préserve l'orientation de M
le lieu de ramification de L/L^G est un fermé $\Sigma \subset Spec(\mathcal{O}_L)$	le lieu de ramification de $M \to M/G$ est un entrelacs $\mathcal{L}_\Sigma$
premier ramifié $\mathfrak{p} \in \Sigma$ dans L/L^G	noeud ramifié $\mathcal{K}_\mathfrak{p} \subset \mathcal{L}_\Sigma$ dans M/N
groupes de décomposition et d'inertie $I_\mathfrak{p} \subseteq G_\mathfrak{p} \subseteq G$	groupes de décomposition et d'inertie $I_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}} \subseteq G_{\mathcal{K}_\mathfrak{p}} \subseteq G$
G-module $Cl(L)$	G-module $H_{tor}(M)$
G-module U_L	G-module $H_{free}(M)$
$Spec(\mathbb{Z}_\Sigma) \subset Spec(\mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^3 - \mathcal{L}_\Sigma \subset \mathbb{R}^3$
pro-l-quotient maximal $G_\Sigma(l)$ de $\pi_1(Spec(\mathbb{Z}_\Sigma))$	pro-l-quotient maximal $G_{\mathcal{L}_\Sigma}(l)$ de $G_{\mathcal{L}_\Sigma} := \pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{L}_\Sigma)$
monodromie $\tau_i \in G_\Sigma(l)$ au-dessus de $p_i \in \Sigma$	méridien $x_i \in G_{\mathcal{L}_\Sigma}(l)$ autour de $\mathcal{K}_{p_i}$
Frobenius $\sigma_i \in G_\Sigma(l)$ au-dessus de $p_i \in \Sigma$	longitude $y_i \in G_{\mathcal{L}_\Sigma}(l)$ le long de $\mathcal{K}_{p_i}$

3. La deuxième version du dictionnaire et l'introduction d'un problème

3.1. Le dictionnaire de la section précédente est un prolongement du "langage de la topologie arithmétique" donné par A. Reznikov dans [**52**]. Dans la version publiée de cet article, A. Reznikov fait correspondre un corps de nombres à une "*three and half manifold*", c'est-à-dire à une variété fermée de dimension trois M bordant une variété de dimension quatre N, de sorte que le morphisme

$$\pi_1(M) \to \pi_1(N)$$

soit surjectif. Les invariants cohomologiques de N (et son groupe fondamental) prennent alors la place de ceux de M dans l'analogie. Nous ignorons les raisons pour lesquelles A. Reznikov a pensé que ces modifications étaient nécessaires. Cette deuxième version du dictionnaire est reprise ci-dessous dans les termes de A. Reznikov.

a number field K	a three and half-manifold $\pi_1(M) \twoheadrightarrow \pi_1(N)$
$\mathbb{Q}$	a three-sphere $\mathbb{S}^3$
an extension $K_2 \subset K_1$	a ramified covering along an embedded collection of discs $N_1 \to N_2$
a normal extension $K_2 \subset K_1$, $G = Gal(K_2/K_1)$	a Galois ramified covering $N_1 \to N_2$ of group G
an element $w \in \mathcal{O}_K$	an incompressible embedded surface with boundary on a slice link $S \subset M$
a prime ideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$	a slice knot $K \subset M$
a map $w \to (w)$	a map $S \to \partial S$
a unit $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times$	a closed embedded incompressible surface

the Galois group of a maximal unramified extension	the fundamental group of N
an ideal class group $I(K)$ as Galois module	$H_1^{tors}(N;\mathbb{Z})$ (homology of a four-manifold) as Galois module
the group of units $U(K)$	$H_2(N;\mathbb{Z})$ (homology of a four-manifold)

3.2. En considérant la situation suivante, A. Sikora a proposé dans [**56**] des résultats de nature arithmétique et topologique confirmant la première version du dictionnaire.

Soit M une variété de dimension trois connexe, compacte et orientable sur laquelle le groupe cyclique d'ordre premier C_p opère fidèlement et par automorphismes préservant l'orientation. Respectivement, soit L un corps de nombres sur lequel le groupe C_p opère fidèlement. On considère le revêtement galoisien $M \to M/C_p$ de variétés topologiques ainsi que l'extension galoisienne de corps de nombres $L/K = L^{C_p}$. Le lieu de ramification M^{C_p} dans M est composé de s noeuds $\mathcal{K}_1, ..., \mathcal{K}_s$. Respectivement, le lieu de ramification dans $Spec(\mathcal{O}_L)$ est composé de s places finies $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_s$. Il s'agit de donner un encadrement du nombre s en fonction de l'action galoisienne sur les modules $H_{tor}(M) = H_1(M;\mathbb{Z})_{tor}$ et $H_{free}(M) = H_1(M;\mathbb{Z})_{/\{tor\}}$ d'une part, et de l'action galoisienne sur les modules $Cl(L)$ et U_L/μ_L d'autre part. A. Sikora obtient alors des résultats dans les deux contextes qui sont en accord avec la première version du dictionnaire de la topologie arithmétique. Plus précisément, voici les résultats exposés dans [**56**].

THÉORÈME 1.14. *En supposant $H_{free}(M/C_p) = 0$ dans le cadre topologique, on a les inégalités suivantes.*

$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p; H_{free}(M)) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p; H_{tor}(M)).$$

$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p; U_L/\mu) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p; Cl(L)).$$

THÉORÈME 1.15. *Si $H_1(M;\mathbb{Z})$ s'identifie à $H_{free}(M) \oplus H_{tor}(M)$ en tant que C_p-module et si $s \geq 1$, alors*

$$s \geq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p; H_{tor}(M)).$$

Si $Cl(K) = 0$, alors

$$s \geq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p; Cl(L)).$$

THÉORÈME 1.16. *Si $H_{free}(M) = 0$ et si $s \geq 1$, alors*

$$H_{tor}(M)^{C_p} \simeq \mathbb{F}_p^{s-1}.$$

Si $U_L/\mu = 0$, alors $p = 2$, $s_0 \geq 1$ et

$$Cl(L)^{C_2} \simeq \mathbb{F}_2^{s_0-1}.$$

L'intérêt que présentent ces résultats du point de vue de la topologie arithmétique provient du fait qu'ils mettent en inter-action les correspondances fondamentales de cette analogie. De plus, ces résultats sont non triviaux aussi bien en arithmétique qu'en topologie. Cependant, les démonstrations proposées par A. Sikora sont basées sur des méthodes très différentes dans les deux contextes, puisqu'il utilise une cohomologie équivariante dans le cadre géométrique alors qu'il fait appel à la théorie du corps de classes en arithmétique. Il semble donc souhaitable d'apporter des preuves "isomorphes" à ces résultats. D'une part, ces preuves permettraient de comprendre pour quelles raisons ces résultats coincident. D'autre part, il serait alors légitime de prendre parti pour la première version du dictionnaire, et d'écarter la deuxième.

CHAPITRE 2

Cohomologie étale équivariante modifiée

Nous définissons ici l'analogue en topologie étale de la cohomologie équivariante modifiée utilisée dans [**56**] pour traiter le cas des variétés topologiques. Ceci nous permettra par la suite de fournir des preuves analogues aux résultats de [**56**] dans les cadres topologiques et arithmétiques respectivement, et de comprendre ainsi pour quelles raisons ces résultats coïncident dans ces deux contextes à priori si différents.

En présence d'un espace topologique M sur lequel un groupe discret G opère, on peut définir des invariants $H^i_G(M;\mathbb{Z})$, associés à cette action, ici à coefficients entiers. Ils se définissent comme les groupes de G-hypercohomologie d'un complexe dont la cohomologie (simple) est la cohomologie singulière de l'espace M. On obtient alors une suite spectrale convergente

$$H^p(G;H^q(M;\mathbb{Z}))\Longrightarrow H^{p+q}_G(M;\mathbb{Z}).$$

Lorsque G est un groupe fini opérant sur un espace M séparé de dimension finie, on peut remplacer ces groupes de G-hypercohomologie par ceux de G-hypercohomologie à la Tate. Cette idée est due à R. Swan qui a développé cette théorie dans le cadre topologique (cf [**58**]). La même technique a ensuite été utilisée dans [**3**] pour le cas des CW-complexes. Les groupes obtenus sont notés $\widehat{H}^i_G(M;\mathbb{Z})$. Ils sont l'aboutissement d'une suite spectrale

$$\widehat{H}^p(G;H^q(M;\mathbb{Z}))\Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}_G(M;\mathbb{Z}).$$

Cette modification impose aux groupes $\widehat{H}^i_G(M;\mathbb{Z})$ d'ignorer les actions libres. Plus précisément, on a le théorème de localisation suivant. Soient G un groupe opèrant fidèlement sur un espace topologique M et Z le lieu de ramification dans M. Alors on a un isomorphisme canonique

$$\widehat{H}^*_G(M;\mathbb{Z})\simeq \widehat{H}^*_G(Z;\mathbb{Z}),$$

où $i:Z\to M$ désigne l'inclusion fermée. Ce résultat montre que la suite spectrale précédente fournit des informations sur le lieu de ramification à partir de la structure galoisienne des invariants globaux $H^q(M;F)$. De plus, lorsque M est de dimension n, on a les isomorphismes

$$\widehat{H}^i_G(M;\mathbb{Z})\simeq H^i_G(M;\mathbb{Z}), \tag{10}$$

pour $i\geq n+1$. On peut généraliser cette théorie à des coefficients non constants, en utilisant la notion de G-faisceau. En considérant un groupe fini G opérant trivialement sur le point $M=\{*\}$, on voit alors que l'identification (10) généralise l'isomorphisme $\widehat{H}^i(G;A)\simeq H^i(G;A)$ pour un G-module A et un entier $i\geq 1$.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous définissons l'analogue en cohomologie étale de cette théorie, à coefficients dans un G-faisceau F sur un schéma X, et la suite spectrale

$$\widehat{H}^p(G;H^q(X_{et};F))\Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}_G(X_{et};F)$$

qui y aboutit. Les groupes $\widehat{H}^q_G(X_{et};F)$ ne sont définis que lorsque le groupe G est fini, et n'ont d'intérêt que si les groupes de cohomologie de F sont nuls à partir d'une certaine dimension

n. Dans ce cas, les groupes $\widehat{H}^q_G(X_{et};F)$ s'identifient à partir de la dimension $n+1$ aux groupes de cohomologie mixte $H^q(X_{et};G;F)$ (cf 2.27), définis comme les invariants cohomologiques du topos des G-faisceaux d'ensembles sur X_{et} (cf **[22]** 2).

Enfin, nous démontrons dans la troisième section le théorème de localisation énoncé ci-dessous.

THÉORÈME. *Soit X un schéma noethérien sur lequel un groupe fini G opère fidèlement et de manière admissible. On note Z le lieu de ramification du revêtement $X \to X/G$ et $\phi : \widetilde{Z} \to X$ la limite projective des voisinages étales de Z. Soit de plus F un G-faisceau adapté (3.25) sur X. Alors le morphisme canonique*

$$\widehat{H}^*_G(X_{et};F) \longrightarrow \widehat{H}^*_G(\widetilde{Z}_{et};\phi^*F)$$

est un isomorphisme. Si de plus F est de torsion et si Z est contenu dans un ouvert affine, on a l'isomorphisme

$$\widehat{H}^*_G(X_{et};F) \simeq \widehat{H}^*_G(Z_{et};i^*F),$$

où $i : Z \to X$ désigne l'immersion fermée canonique.

Ainsi, cette cohomologie étale équivariante modifiée peut rendre les mêmes services en théorie des schémas que la théorie analogue dans le cadre topologique. On peut aussi noter qu'il est nécessaire d'utiliser la topologie étale si l'on veut obtenir des invariants décrivant correctement la ramification du revêtement $X \to X/G$. En effet, les points du topos étale de X sont donnés par les points géométriques du schéma X, et les groupes d'isotropie de ces derniers sont exactement les groupes d'inertie arithmétiques.

La dernière section de ce chapitre fournit quelques exemples. Après avoir donné des conditions raisonnables pour qu'un G-faisceau de torsion soit adapté, nous calculons les groupes de cohomologie équivariante définis ci-dessus dans certains cas simples. On s'aperçoit par exemple que les isomorphismes de la théorie du corps de classe local peuvent s'interpréter comme les différentielles d'une suite spectrale de cohomologie équivariante.

1. La catégorie des G-faisceaux

1.1. Espaces étalés équivariants. Soit X un espace topologique sur lequel un groupe discret G opère par homéomorphismes. Un G-faisceau (d'ensembles, de groupes...) sur X est un faisceau F muni d'une action de G "compatible à celle définie sur X". La manière la plus simple de donner un sens à cette définition est de voir F comme un espace étalé $p : \widetilde{F} \to X$. On dit alors que F est un G-faisceau sur X lorsque $\widetilde{F}$ est muni d'une action de G qui commute à la projection p. On veut donner une définition équivalente sans voir F comme un espace étalé au-dessus de X. Soit F le faisceau des sections d'un espace étalé $p : E \to X$ au-dessus de X. Le fait que E soit muni d'une action de G qui commute à la projection p entraîne les faits suivants :

(1) Si U est un ouvert de X et σ un élément de G, on a un morphisme

$$\begin{array}{rccc} \sigma_U : & F(U) = Hom_X(U;E) & \longrightarrow & F(\sigma(U)) = Hom_X(U;E) \\ & s & \longmapsto & \widetilde{\sigma} \circ s \circ \sigma^{-1}_{|\sigma(U)} \end{array}$$

où σ agit sur E par l'automorphisme $\widetilde{\sigma}$.

(2) Si $U \supset V$ sont deux ouverts de X et si $\sigma \in G$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(\sigma(U)) \arrow[d] \\ F(V) \arrow[r] & F(\sigma(V)) \end{tikzcd}$$

où les les flèches horizontales sont les morphismes σ_U et σ_V, et les flèches verticales les morphismes de restrictions relatifs au faisceau F.

(3) Pour tout ouvert U de X, on a $1_U = Id_{F(U)}$.

(4) Si U est un ouvert et σ, τ deux éléments de G, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[rr, "\sigma_U"] \arrow[dr, "(\tau\sigma)_U"'] & & F(\sigma(U)) \arrow[dl, "\tau_{\sigma(U)}"] \\ & F(\sigma\tau(U)) & \end{tikzcd}$$

Montrons que ces conditions entraînent la définition initiale. La deuxième montre que les morphismes $(\sigma_U)_{U \ni x}$ passent à la limite pour donner un morphisme $\sigma_x : F_x \to F_{\sigma(x)}$, ce qui détermine une application $\widetilde{\sigma} := (\sigma_x)_{x \in X}$ de l'espace étalé $\widetilde{F} := \coprod_{x \in X} F_x$ associé à F dans lui-même. On voit facilement que $\widetilde{\sigma}$ est un homéomorphisme de $\widetilde{F}$. Les conditions (3) et (4) montrent que l'on définit ainsi une action de G sur $\widetilde{F}$ qui commute à la projection de manière évidente. De plus, l'homéomorphisme $E \to \widetilde{F}$ au-dessus de X donné par l'équivalence de catégorie entre faisceaux d'ensembles sur X et espaces étalés sur X commute à l'action de G.

Définition 2.1. *Soient G un groupe opérant sur un espace X et F un faisceau sur X. Une G-linéarisation sur F est une famille $(\varphi_\sigma)_{\sigma \in G}$ de morphismes de faisceaux $\varphi_\sigma : \sigma_* F \to F$ (ou de manière équivalente $\varphi_\sigma : F \to \sigma^* F$), telle que les conditions suivantes soient satisfaites :*
- *$\varphi_1 = Id$.*
- *$\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \tau_*(\varphi_\sigma)$.*

Remarque 2.2. *Les quatre conditions précédentes sont satisfaites si et seulement si F est muni d'une G-linéarisation.*

Définition 2.3. *Un G-faisceau est un faisceau muni d'une G-linéarisation.*

Soient $p : E \to X$ et $p' : E' \to X$ deux espaces étalés au-dessus de X, munis d'une action de G qui commute aux projections. Un morphisme $E \to E'$ au-dessus de X est un G-morphisme lorsqu'il commute à l'action de G. Un *morphisme de G-faisceaux* $\alpha : F \to L$ est un morphisme de faisceaux $\alpha : F \to L$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \sigma_* F \arrow[r, "\varphi_{F;\sigma}"] \arrow[d, "\sigma_*(\alpha)"'] & F \arrow[d, "\alpha"] \\ \sigma_* L \arrow[r, "\varphi_{L;\sigma}"] & L \end{tikzcd}$$

soient commutatifs, les structures de G-faisceaux sur F et L étant définies par les G-linéarisations $(\varphi_{F;\sigma})_{\sigma \in G}$ et $(\varphi_{L;\sigma})_{\sigma \in G}$. On a alors un foncteur

$$e : \mathcal{S}(G; X) \longrightarrow Et_{(G;X)}$$

de la catégorie des G-faisceaux sur X dans celle des espaces étalés au-dessus de X munis d'une action de G compatible à celle définie sur X. La discussion précédant la définition 2.1 permet de montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4. *Le foncteur*

$$e : \mathcal{S}(G;X) \longrightarrow Et_{(G;X)}$$

définit une équivalence de la catégorie des G-faisceaux sur X dans celle des espaces étalés au-dessus de X munis d'une action de G compatible à celle définie sur X.

EXEMPLE 2.5. *Soit X un espace topologique muni d'une action du groupe G et soit I un G-ensemble. Notons I_X le faisceau sur X associé au préfaisceau constant défini par l'ensemble I. L'espace étalé associé à I_X est le produit cartésien $X \times I$ muni de la première projection $X \times I \to X$. L'action diagonale de G sur $X \times I$ fait de I_X un G-faisceau d'ensembles sur X. En particulier, tout faisceau contant est un G-faisceau (avec l'action triviale de G sur I.)*

EXEMPLE 2.6. *Soit $\widetilde{X} \to X$ un revêtement galoisien de groupe G. On peut prendre par exemple un espace topologique X non simplement connexe, $\widetilde{X} \to X$ son revêtement universel et $G = \pi_1(X)$ le groupe fondamental de X. En faisant opérer trivialement G sur X, le faisceau localement constant F correspondant à $\widetilde{X}$ est un G-faisceau d'ensembles sur X.*

EXEMPLE 2.7. *Soient $f : \widetilde{X} \to X$ un revêtement galoisien de groupe G et F un faisceau sur X représenté par l'espace étalé $\widetilde{F} \to X$. Le faisceau $f^*(F)$ sur $\widetilde{X}$ est représenté par l'espace étalé $\widetilde{F} \times_X \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ au-dessus de $\widetilde{X}$. L'action de G sur le second facteur de $\widetilde{F} \times_X \widetilde{X}$ fait de f^*F un G-faisceau sur $\widetilde{X}$. On peut d'ailleurs montrer que le foncteur f^* définit une équivalence de la catégorie des faisceaux sur X dans celle des G-faisceaux sur $\widetilde{X}$. Une preuve du résultat analogue en topologie étale est donné dans la proposition 2.20.*

EXEMPLE 2.8. *Soient X un schéma et $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. Si un groupe G opère sur X par automorphismes, alors $\mathcal{O}_X$ est naturellement muni d'une structure de G-faisceau pour la topologie de Zariski sur X.*

EXEMPLE 2.9. *Soient X une variété analytique complexe et $\mathcal{O}_X$ son faisceau des germes d'applications holomorphes. Si U est un ouvert de X et σ un élément de G, on a un morphisme d'anneaux :*

$$\begin{array}{cccc} \sigma_U : & \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(\sigma(U)) \\ & s & \longmapsto & s \circ \sigma^{-1} \end{array}$$

Ces morphismes font de $\mathcal{O}_X$ un G-faisceau abélien.

EXEMPLE 2.10. *Soit X une variété différentiable sur laquelle le groupe G opère par difféomorphismes et soit Ω^i le faisceau des germes de formes différentielles de degré i. Alors Ω^i est un G-faisceau. D'ailleurs la suite de faisceaux donnée par les différentielles*

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to ...$$

est une G-résolution acyclique du G-faisceau constant $\mathbb{R}$ (cf 2.26). En effet, les différentielles $d^i : \Omega^i \to \Omega^{i+1}$ sont des morphismes de G-faisceaux et les faisceaux Ω^i sont fins, donc acycliques pour le foncteur des sections globales. Cette suite est exacte par le lemme de Poincaré.

1.2. La catégorie des G-faisceaux sur le site étale d'un schéma. On fixe un schéma X sur lequel un groupe fini G opère (à gauche) par automorphismes. Dans la suite, on appelle faisceau sur X un faisceau abélien sur le site étale de X et on note $Ab(X)$ la catégorie abélienne des faisceaux sur X. La section précédente suggère les définitions suivantes.

DÉFINITION 2.11. *Soient X un schéma muni d'une action d'un groupe fini G et F un faisceau sur X. On appelle* G-linéarisation *de F la donnée d'une famille $(\varphi_\sigma)_{\sigma\in G}$ de morphismes de faisceaux $\varphi_\sigma : \sigma_* F \to F$, telle que les conditions suivantes soient satisfaites :*
– $\varphi_1 = Id$.
– $\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \tau_*(\varphi_\sigma)$ *(condition de cocycle).*

DÉFINITION 2.12. *Un* G-faisceau *est un faisceau muni d'une G-linéarisation.*

DÉFINITION 2.13. *Un* morphisme de G-faisceaux $\alpha : F \to L$ *est un morphisme de faisceaux $\alpha : F \to L$ tel que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \sigma_* F \arrow[r, "\varphi_{F;\sigma}"] \arrow[d, "\sigma_*(\alpha)"'] & F \arrow[d, "\alpha"] \\ \sigma_* L \arrow[r, "\varphi_{L;\sigma}"] & L \end{tikzcd}$$

soient commutatifs, les structures de G-faisceaux sur F et L étant définies par les G-linéarisations $(\varphi_{F;\sigma})_{\sigma\in G}$ et $(\varphi_{L;\sigma})_{\sigma\in G}$.

On note $Ab(G;X)$ la catégorie des G-faisceaux sur X et de leurs morphismes.

EXEMPLE 2.14. *Tous les faisceaux usuels en topologie étale sont naturellement munis de G-linéarisations (cf* **[21]** *5.1). Par exemple, le faisceau du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, celui des racines n^{ieme} de l'unité μ_n, le groupe additif $\mathbb{G}_a$ et tous les faisceaux constants sont des G-faisceaux.*

REMARQUE 2.15. *Si $\varphi : U \to X$ est un X-schéma étale, on note ${}_\sigma U$ le $X-$schéma étale $\sigma\circ\varphi : U \to X$. Soit F un G-faisceau sur X_{et}. Alors pour tout X-schéma étale U et pour tout $\sigma \in G$, on a un morphisme $F(U) \longrightarrow F({}_\sigma U)$. Soient $\alpha : Spec(\overline{k}) \to X$ un point géométrique de X et σ un élément de G. On note $\sigma(\alpha)$ le point géométrique $\sigma\circ\alpha$. La structure de G-faisceau sur F définit des morphismes $F_\alpha \to F_{\sigma(\alpha)}$ satisfaisant les conditions de transitivité évidentes.*

REMARQUE 2.16. *Etant donnés deux G-faisceaux F et L sur X, on fait opérer G sur le groupe $Hom_{Ab(X)}(F;L)$ de la manière suivante. Si $\alpha : F \to L$ est un morphisme de faisceaux et σ un élément de G, on pose $\sigma * \alpha := \varphi_{L;\sigma} \circ \sigma_*(\alpha) \circ \varphi^{-1}_{F;\sigma}$. Alors $Hom_{Ab(G;X)}(F;L)$ est le sous-groupe des invariants de $Hom_{Ab(X)}(F;L)$ sous l'action de G.*

On montre alors facilement que la catégorie $Ab(G;X)$ est additive, puisque $Ab(X)$ l'est. De plus, si $\alpha : F \to L$ est un morphisme de G-faisceaux, la G-linéarisation de F en induit une sur $Ker(\alpha)$, et celle définie sur L en induit une sur $Coker(\alpha)$. D'autre part, un isomorphisme de G-faisceaux est un morphisme de G-faisceaux qui est un isomorphisme en tant que morphisme de faisceaux. Donc si α est un morphisme dans $Ab(G;X)$, le morphisme $\overline{\alpha} : Coim(\alpha) \to Im(\alpha)$ est un isomorphisme de G-faisceaux. Autrement dit, $Ab(G;X)$ est une catégorie abélienne.

REMARQUE 2.17. *Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de schémas sur lesquels le groupe G opère. On dit que X est muni d'une action de G compatible à celle définie sur Y lorsque*

ϕ commute à l'action de G. Dans ces conditions, ϕ_* est un foncteur de la catégorie des G-faisceaux sur X dans celle des G-faisceaux sur Y. En effet, si F est un G-faisceau sur X, la G-linéarisation de F est transportée sur ϕ_*F par le foncteur ϕ_*. De même, ϕ^* est un foncteur exact de $Ab(G;Y)$ dans $Ab(G;X)$. De plus, si F et L sont des G-faisceaux sur X et Y respectivement, l'isomorphisme d'adjonction

$$Hom_{Ab(X)}(\phi^*F;L) \longrightarrow Hom_{Ab(X)}(F;\phi_*L) \tag{11}$$

commute à l'action de G définie ci-dessus, car le morphisme d'adjonction $F \to \phi_*\phi^*F$ est un morphisme de G-faisceaux. L'isomorphisme (11) identifie donc les sous-groupes des invariants $Hom_{Ab(G;X)}(\phi^*F;L)$ et $Hom_{Ab(G;X)}(F;\phi_*L)$. Ainsi, les foncteurs ϕ^* et ϕ_* entre les catégories de G-faisceaux sur Y et X, sont adjoints. Il suit que ϕ_* préserve les G-faisceaux injectifs.

Proposition 2.18. *La catégorie $Ab(G;X)$ possède suffisamment d'injectifs. De plus, un G-faisceau injectif est aussi injectif en tant que faisceau.*

Démonstration. On vérifie facilement que le foncteur

$$\begin{array}{rccc} Sym: & Ab(X) & \longrightarrow & Ab(G;X) \\ & L & \longmapsto & \sum g_*L = \prod g_*L \end{array}$$

est adjoint à gauche du foncteur d'oubli $Ou : Ab(G;X) \to Ab(X)$. De plus, les foncteurs g_* et $\sum$ sont exacts, donc Sym l'est aussi. On en déduit que le foncteur d'oubli préserve les injectifs.

D'autre part, Sym est aussi adjoint à droite du foncteur d'oubli. Si F est un G-faisceau, on peut choisir un faisceau injectif I dans lequel se plonge F. Ceci induit un morphisme injectif de G-faisceaux $F \to Sym(I)$. De plus, l'isomorphisme d'adjonction

$$Hom_{Ab(G;X)}(-;Sym(I)) \simeq Hom_{Ab(X)}(-;I)\circ Ou$$

montre que $Sym(I)$ est un G-faisceau injectif. En effet, le foncteur d'oubli est exact et I est injectif. Ainsi, tout G-faisceau se plonge dans un G-faisceau injectif. $\square$

Si $I^*(F)$ est une résolution injective de F dans la catégorie $Ab(G;X)$, alors $I^*(F)(X)$ est un complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules. Il suit que les groupes de cohomologie usuels sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules (à gauche).

Le fait que la catégorie $Ab(G;X)$ possède suffisamment d'injectifs peut se démontrer plus directement. La preuve suivante est inspirée par celle donnée par Grothendieck (cf **[21]**) dans le cas des espaces topologiques. Elle nécessite la notion de G-système de points géométriques (cf 2.28).

Proposition 2.19. *La catégorie $Ab(G;X)$ possède suffisamment d'injectifs.*

Démonstration. Soit F un G-faisceau sur X. On se donne un G-système de points géométriques M sur X en gardant les notations de la définition précédente. Pour chaque orbite T de X' sous l'action de G, on choisit un point $\overline{\beta}$. On a la suite de morphismes $\overline{\beta} \xrightarrow{i_\beta} T \xrightarrow{v_T} X$, où v_T est induit par $u : X' \to X$ et i_β est l'inclusion de $\overline{\beta}$ dans T. Soient G_β le stabilisateur du point géométrique β et F_β la fibre de F en β. Le $\mathbb{Z}[G_\beta]$-module F_β se plonge dans un $\mathbb{Z}[G_\beta]$-module injectif I_β. Par ailleurs, le stabilisateur de $g(\beta)$ est $G_{g(\beta)} :=$

$gG_\beta g^{-1}$. On définit alors $I_{g(\beta)}$ comme le groupe abélien I_β sur lequel $G_{g(\beta)}$ opère à travers l'isomorphisme $G_{g(\beta)} \to G_\beta$. C'est un $\mathbb{Z}[G_{g(\beta)}]$-module injectif dans lequel se plonge $F_{g(\beta)}$. On définit de cette manière un foncteur $Ab(G_\beta;\overline{\beta}) \xrightarrow{Ind_{G_\beta}^G} Ab(G;T)$, qui est une équivalence de catégories et dont le foncteur quasi-inverse est i_β^*. La suite $Ab(G_\beta;\overline{\beta}) \xrightarrow{Ind_{G_\beta}^G} Ab(G;T) \xrightarrow{v_{T*}} Ab(G;X)$ montre que chaque I_β définit un G-faisceau injectif sur X, puisque ces deux foncteurs préservent les injectifs. On définit I comme le produit $\prod_T v_{T*}(Ind_{G_\beta}^G(I_\beta))$, qui est un G-faisceau injectif dans lequel se plonge F.

□

Proposition 2.20. *Si $\pi : X \to Y$ est un revêtement étale galoisien de groupe G, la catégorie des G-faisceaux sur X est équivalente à celle des faisceaux sur Y.*

Démonstration. Si A est un faisceau sur Y, alors π^*A est un G-faisceau sur X. En effet, G opère trivialement sur Y et A, et π commute à l'action de G. D'autre part, si F est un G-faisceau sur X, on définit un faisceau $\pi_*^G F$ sur Y en posant, pour tout Y-schéma étale U,

$$\pi_*^G F(U) := F(X \times_Y U)^G.$$

Le morphisme $X \times_Y U \to U$ est un revêtement étale (non nécessairement connexe) galoisien de groupe G quel que soit U étale sur Y. Alors, si A est un faisceau sur Y et U un Y-schéma étale, le groupe $A(U)$ s'identifie à $A(X \times_Y U)^G$ (cf **[40]** II.1.4). On déduit facilement de ceci que les foncteurs π^* et π_*^G sont quasi-inverses l'un de l'autre. □

2. Cohomologie équivariante modifiée

2.1. Définition. On fixe une résolution complète W_* pour le groupe fini G (cf **[3]** VI.3 ou **[4]** XII.3). C'est un complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules (à gauche) libres de type fini et tel que la cohomologie du complexe $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(W_*;M)$ donne les groupes de cohomologie modifiés $\widehat{H}^*(G;M)$, pour tout $\mathbb{Z}[G]$-module M.

Définition 2.21. *Soient F un G-faisceau et $0 \to F \to I^0 \to I^1 \to \dots$ une résolution injective de F dans $Ab(G;X)$. Alors $0 \to I^0(X) \to I^1(X) \to \dots$ est un complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules. On note $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(W_*;I^*(X))$ le double complexe d'homomorphismes et*

$$Tot^n(W_*;I^*(X)) := \bigoplus_{i+j=n} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(W_i;I^j(X))$$

le complexe (de cochaînes) total associé. La différentielle totale y est définie comme dans **[62]** *2.7.4. On définit les* groupes de cohomologie étale équivariante modifiée de X à coefficients dans F *de la manière suivante :*

$$\widehat{H}_G^*(X;F) := H^*(Tot^*(W_*;I^*(X))).$$

Ces groupes sont en fait définis comme l'aboutissement de la suite spectrale 2.23. C'est ce qui justifie l'utilisation de la somme directe (et non du produit direct) dans la définition du complexe total. Cependant, il semble que cette définition ne donne des résultats intéressants que lorsqu'elle est appliquée à des G-faisceaux possédant une résolution flasque finie, c'est-à-dire quand la définition précédente du complexe total Hom prend du sens.

Proposition 2.22. *La cohomologie du complexe $Tot(W_*; I^*(X))$ ne dépend pas de la résolution injective de F choisie.*

Démonstration. Soient I^* et J^* deux résolutions injectives de F dans $Ab(G;X)$. Il existe des morphismes de complexes $f : I^* \to J^*$ et $h : J^* \to I^*$ qui relèvent le morphisme $Id : F \to F$. Alors $h \circ f$ et $Id_{(I^*)}$ relèvent l'identité et sont homotopes d'après [**62**] 2.7.4. De même, $f \circ h$ et $Id_{(J^*)}$ sont homotopes. En appliquant à ceci le foncteur des sections globales, on obtient les morphismes de complexes de $\mathbb{Z}[G]$-modules $f_X : I^*(X) \to J^*(X)$ et $h_X : J^*(X) \to I^*(X)$ de sorte que $f_X \circ h_X$ et $h_X \circ f_X$ soient homotopes à l'identité du complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules correspondant. D'autre part, deux morphismes homotopes entre deux doubles complexes induisent les mêmes morphismes sur les groupes de cohomologie des complexes totaux associés (cf [**4**] 15.6.1). Les flèches f_X et h_X induisent donc des isomorphismes réciproques entre les groupes $H^*(Tot(W_*; I^*(X)))$ et $H^*(Tot(W_*; J^*(X)))$.

□

Proposition 2.23. *Le groupe gradué $\widehat{H}^*_G(X;F)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme initial est $E_2^{p;q}(X;F) = \widehat{H}^p(G; H^q(X;F))$.*

Démonstration. La première filtration du double complexe $Hom(W_*; I^*(X))$ (que l'on note provisoirement D^{**}) est régulière (cf [**4**] 15.6). La première suite spectrale de ce double complexe converge donc vers $\widehat{H}^*_G(X;F) := H^*(Tot(W_*; I^*(X)))$. Le terme initial de cette suite spectrale est $E_2^{p;q} = H_h^p(H_v^q(D^{**}))$, où H_h et H_v désignent la cohomologie du double complexe D^{**} relativement aux différentielles horizontales et verticales. Le foncteur d'oubli $Ou : Ab(G;X) \to Ab(X)$ est exact et préserve les injectifs (cf 2.18). L'égalité $E_2^{p;q} = \widehat{H}^p(G; H^q(X;F))$ en découle. □

Les arguments ([**58**] 1.1) et ([**58**] 1.2) montrent respectivement les deux résultats suivants.

Proposition 2.24. *Si le groupe G opère trivialement sur X et F, la suite spectrale $E_*^{*;*}(X;F)$ est triviale, c'est-à-dire $E_2^{*;*}(X;F) = E_\infty^{*;*}(X;F)$.*

Proposition 2.25. *La multiplication par le cardinal de G annule toute la suite spectrale, y compris les groupes de cohomologie équivariante.*

Un faisceau sur X est dit *flasque* si $\check{H}^q(\{U_i \to U\}_i; F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et tout recouvrement $\{U_i \to U\}_i$ (pour la topologie étale) d'un X-schéma étale U. D'après [**40**] 3.2.12, F est flasque si et seulement si $H^q(U;F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et tout X-schéma étale U. De tels faisceaux sont acycliques pour le foncteur des sections globales (cf [**40**] 3.1.8). On appelle *G-résolution acyclique de F* toute G-résolution de F (i.e. toute résolution de F dans $Ab(G;X)$) par des G-faisceaux acycliques pour le foncteur des sections globales.

Proposition 2.26. *Toute G-résolution acyclique de F permet de calculer les groupes de cohomologie étale équivariante de X à coefficients dans F.*

Démonstration. Soit $0 \to F \to I^0 \to I^1 \to ...$ une résolution injective de F dans $Ab(G;X)$ et $0 \to F \to C^0 \to C^1 \to ...$ une G-résolution acyclique de F. On a un morphisme de complexes $f : C^* \to I^*$ qui relève l'identité d'ailleurs unique à homotopie près. En appliquant le foncteur des sections globales, on obtient le morphisme de complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules $f_X : C^*(X) \to I^*(X)$, qui donne des isomorphismes sur les groupes de cohomologie. Le morphisme de complexes f_X induit un morphisme de doubles complexes $Hom(W_*; C^*(X)) \to$

$Hom(W_*; I^*(X))$, donc un morphisme au niveau des suites spectrales (convergentes) associées, qui est un isomorphisme dès la deuxième page. Ce qui précède définit un et un seul (car f est défini à homotopie près) isomorphisme $H^*(Tot(W_*; C^*(X))) \simeq H^*(Tot(W_*; I^*(X)))$ (cf [**4**] 15.3.2). □

REMARQUE 2.27. *Soit F un G-faisceau sur X dont les groupes de cohomologie $H^q(X; F)$ sont nuls pour $q \geq n+1$. Sous cette hypothèse, on construit dans la section suivante une G-résolution acyclique de F de longueur n, qui d'après le théorème précédent, permet d'obtenir les groupes $\widehat{H}^q_G(X; F)$. Soit $0 \to F \to C^0 \to C^1 \to ... \to C^n \to 0$ cette résolution.*

La suite

$$... \to W_{i+1} \to W_i \to ... \to W_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

*est une résolution de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs. Les groupes de cohomologie du complexe total associé au double complexe $(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(W_i; C^j(X)))_{i,j\geq 0}$ (situé dans le premier quadrant) satisfont les conditions axiomatiques des foncteurs dérivés droits du foncteur (composé), qui à un G-faisceau F, associe le groupe $F(X)^G$ des sections globales invariantes sous l'action de G. Il s'agit donc des groupes de cohomologie mixte $H^*(X; G; F)$, définis comme les invariants cohomologiques du topos des G-faisceaux d'ensembles sur X (cf [**22**] 2).*

On observe que les deux complexes totaux définissant respectivement les groupes $\widehat{H}^*_G(X; F)$ et $H^*(X; G; F)$ coincident en dimension supérieure ou égale à n. Donc pour $q \geq n+1$, on a l'identification

$$\widehat{H}^q_G(X; F) \simeq H^q(X; G; F).$$

2.2. Fonctorialité. Cette suite spectrale ainsi que les groupes de cohomologie équivariante sont fonctoriels en F et X. Plus précisément, un morphisme de G-faisceaux $f : F \to S$ sur X induit un morphisme

$$f^*_G : \widehat{H}^*_G(X; F) \to \widehat{H}^*_G(X; S)$$

et un morphisme de suites spectrales

$$f^{**}_* : E^{**}_*(X; F) \to E^{**}_*(X; S).$$

Ces deux morphismes sont compatibles et $f^{p;q}_2$ s'identifie au morphisme canonique

$$\widehat{H}^p(G; H^q(X; F)) \to \widehat{H}^p(G; H^q(X; F)).$$

De plus, si

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

est une suite exacte de G-faisceaux, on a la suite exacte longue (dans les deux directions) de cohomologie équivariante

$$... \to \widehat{H}^n_G(X; F') \to \widehat{H}^n_G(X; F) \to \widehat{H}^n_G(X; F'') \to \widehat{H}^{n+1}_G(X; F') \to ...$$

En effet, soient $I^*_{F'}$, I^*_F et $I^*_{F''}$ des G-résolutions injectives respectivement de F', F et F'' telles que le mophisme de complexes

$$0 \to I^*_{F'} \to I^*_F \to I^*_{F''} \to 0$$

soit exact. En lui appliquant le foncteur des sections globales, on trouve la suite exacte de complexes de $\mathbb{Z}[G]$-modules

$$0 \to I^*_{F'}(X) \to I^*_F(X) \to I^*_{F''}(X) \to 0$$

et donc la suite exacte

$$0 \to Tot^n(W_*; I^*_{F'}(X)) \to Tot^n(W_*; I^*_F(X)) \to Tot^n(W_*; I^*_{F''}(X)) \to 0,$$

car les W_i sont projectifs. La suite exacte longue de cohomologie s'en déduit.

Soient X et Y deux schémas sur lesquels opère le groupe G et F un G-faisceau sur Y. Un morphisme $\pi : X \to Y$ compatible à l'action de G induit un morphisme

$$\pi_G^* : \widehat{H}_G^*(Y; F) \to \widehat{H}_G^*(X; f^*F)$$

et de manière compatible, un morphisme de suites spectrales

$$\pi_*^{**} : E_*^{**}(Y; F) \to E_*^{**}(X; f^*F)$$

tel que $\pi_2^{p;q}$ s'identifie à la flèche canonique

$$\widehat{H}^p(G; H^q(Y; F)) \to \widehat{H}^p(G; H^q(X; f^*F)).$$

En effet, si I^* et J^* sont des G-résolutions de F et f^*F respectivement, π_G^* et π_*^{**} sont induits par le morphisme de complexes

$$I^*(Y) \to f^*(I^*)(X) \to J^*(X).$$

2.3. La résolution flasque de Godement. Soit F un faisceau sur X. La résolution de Godement est une résolution de F par des faisceaux flasques. Lorsque X est muni d'une action d'un groupe fini G et que F est un G-faisceau sur X, cette résolution doit être définie à partir d'un système de points géométriques stable sous l'action de G, afin de conserver une strucure équivariante. Il s'agit alors d'une G-résolution flasque qui permet, grâce à la proposition 2.26, de calculer la cohomologie étale équivariante de X. Nous verrons dans la section 3 comment cette résolution peut être utilisée pour démontrer un théorème de localisation.

DÉFINITION 2.28. *On appelle* G-système de points géométriques sur X *un ensemble* M *de points géométriques* $\alpha : \overline{\alpha} \to X$ *satisfaisant les conditions suivantes.*

-Si $x \in X$*, il existe un point géométrique de* M *dont l'image est* x*.*

-Si $\alpha \in M$ *et* $g \in G$*, alors* $g(\alpha) := g \circ \alpha \in M$*.*

-M *est minimal pour ces propriétés.*

On pose $X' := \coprod_{\alpha \in M} \overline{\alpha}$*. Les morphismes* $(\alpha)_{\alpha \in M}$ *induisent un morphisme* $u : X' \to X$ *compatible à l'action de* G *sur* X *et* X'*.*

On construit un G-système de points géométriques de la manière suivante. Pour toute trajectoire T de G sur X, on choisit un point $x \in T$ et un point géométrique α_T dont l'image est x. On pose alors $X' := \coprod g(\alpha_T)$, où la somme est indexée sur l'ensemble des trajectoires T et sur l'ensemble des éléments g du groupe G.

On garde les notations de la définition précédente.

DÉFINITION 2.29. *On définit la résolution de Godement (équivariante)*

$$0 \to F \to C^0(F) \to C^1(F) \to ...$$

de manière récurrente comme suit.

(1) *On pose* $C^0(F) := u_*u^*(F)$*. On a un morphisme canonique injectif* $\varepsilon : F \to C^0(F)$*.*

(2) *On pose* $Z^1(F) := Coker(\varepsilon)$ *et* $C^1(F) := C^0(Z^1(F))$*. Il y a un morphisme canonique* $d^0 : C^0(F) \to C^1(F)$*.*

(3) *On définit par récurrence* $Z^n(F) := Coker(d^{n-2})$ *et* $C^n(F) := C^0(Z^n(F))$*. Il y a un morphisme canonique* $d^{n-1} : C^{n-1}(F) \to C^n(F)$*.*

Les faisceaux $C^n(F)$ sont flasques. De plus, u est compatible à l'action de G, la catégorie $Ab(G;X)$ est abélienne et les foncteurs u^* et u_* sont adjoints. Il s'agit donc d'une G-résolution flasque.

Si F est un G-faisceau sur X et si $\varphi : U \to X$ est un morphisme étale, on a $C^0(F)(U) = \prod_{\varphi\circ\beta\in M} F_\beta$, où le produit est pris sur l'ensemble des points géométriques β de U tels que $\varphi\circ\beta$ soit un élément de M.

Il sera utile dans la suite de disposer de G-résolutions flasques finies. Dans ce but, on définit pour tout entier n la résolution de Godement de F tronquée au cran n

$$C^*_{(n)}(F) : C^0(F) \to C^1(F) \to ... \to Im(d^{n-1} : C^{n-1}(F) \to C^n(F)) \to 0.$$

Si pour tout X-schéma étale U et pour tout $q \geq n+1$, on a $H^q(U;F) = 0$, alors $C^*_{(n)}(F)$ est une résolution flasque finie de F. En effet, les $C^i(F)$ sont flasques et on a

$$H^r(U; Im(d^{n-1})) = H^{n+r}(U;F) = 0$$

pour tout X-schéma étale U et pour tout $r \geq 1$. Le faisceau $Im(d^{n-1})$ est donc flasque.

3. Le théorème de localisation

Nous démontrons un théorème permettant, sous certaines hypothèses, de calculer la cohomologie étale équivariante modifiée d'un schéma X en se restreignant au sous-schéma fermé constitué des points de X dont le groupe d'inertie est non trivial. Il s'agit de l'analogue d'un théorème de localisation pour les espaces topologiques de dimension finie (cf [**19**] V.12) initialement démontré par Swan dans [**58**]. Cette hypothèse de finitude se traduit ici par le fait que ce nouveau théorème de localisation ne s'applique qu'à des G-faisceaux "adaptés" en un sens que nous allons définir.

La preuve de ce théorème comporte trois étapes. On commence par montrer que les groupes $\widehat{H}^*_G(X;F)$ sont nuls, dès que le groupe G opère sur X sans inertie et que F est adapté. Ceci permet ensuite de se concentrer aux G-voisinages étales des points ramifiés. On obtient alors le théorème en passant à la limite sur ces derniers.

3.1. Le cas non ramifié. Soit F un faisceau sur X possédant une résolution flasque finie, disons de longueur n. Alors les groupes $H^q(U;F)$ sont nuls pour tout X-schéma étale U et tout $q \geq n+1$. Réciproquement, on a remarqué dans la section précédente que cette condition permettait de construire une résolution flasque finie. Cette observation motive la définition suivante.

Définition 2.30. *Soit $X \to Y$ un revêtement étale galoisien de groupe G et F un G-faisceau sur X. On dit que F est* adapté *si il existe un entier n de sorte que pour tout Y-schéma étale V et pour tout $q \geq n+1$ on ait $H^q(V;\pi^G_* F) = 0$.*

Cette condition de finitude sera nécessaire pour utiliser le lemme ci-dessous.

Lemme 2.31. *Soit M^* un complexe de cochaines de $\mathbb{Z}[G]$-modules tel que $M^n = 0$ pour n assez grand et pour n négatif. On suppose de plus que $\widehat{H}^i(G;M^j) = 0$ pour tout i et j. Alors on a $H^*(Tot(W_*;M^*)) = 0$.*

Démonstration. Dans ces conditions, la seconde filtration du double complexe

$$Hom_{\mathbb{Z}G}(W_*;M^*)$$

est régulière ([**4**]II.15.6), donc la seconde suite spectrale converge vers $H^*(Tot(W_*; M^*))$. Le terme E_1 de cette suite spectrale est $\widehat{H}^i(G; M^j) = 0$, d'où $H^*(Tot(W_*; M^*)) = 0$. $\square$

Proposition 2.32. *Soit $\pi : X \to Y$ un revêtement étale galoisien de groupe G avec Y localement noethérien. Si F est un G-faisceau adapté sur X, alors $\widehat{H}^*_G(X; F) = 0$.*

Démonstration. On note abusivement $0 \to \pi^G_* F \to C^0 \to C^1 \to \dots \to C^n \to 0$ la résolution de Godement de $\pi^G_* F$ tronquée au cran n. C'est une résolution flasque de $\pi^G_* F$. Comme π^* est exact et qu'il préserve les faisceaux flasques, $0 \to \pi^*\pi^G_* F \to \pi^* C^0 \to \pi^* C^1 \to \dots \to \pi^* C^n \to 0$ est une G-résolution flasque de $\pi^*\pi^G_* F = F$. On veut montrer que les $C^j(X) = \pi^* C^j(X)$ sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules cohomologiquement triviaux.

Soit S un sous groupe de G. Le morphisme $X \to X/S$ est un revêtement étale galoisien de groupe S et $\phi : X/S \to Y$ est un morphisme étale (cf [**23**] V.3.3). Les faisceaux $\phi^* C^j$ sont flasques et on a pour tout q strictement positif (cf [**40**] III.2.6) :

$$H^q(S; C^j(X)) = \check{H}^q(\{X \to X/S\}; \phi^* C^j) = 0,$$

où l'on considère les groupes de cohomologie de *Čech* relatifs au recouvrement étale $\{X \to X/H\}$. Pour tout sous-groupe S de G, les $C^j(X)$ sont donc Γ^S-acycliques. On en déduit que les $C^j(X)$ sont cohomologiquement triviaux (cf [**54**] IX.thm 8). En appliquant le lemme 2.31, on obtient $\widehat{H}^*_G(X; F) = 0$. $\square$

Remarque 2.33. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, la suite spectrale*

$$H^p(G; H^q(X; F)) \Rightarrow H^{p+q}(G; X; F)$$

*est celle d'Hochschild-Serre (cf [**40**] III.2.20), et les groupes de cohomologie mixte $H^*(G; X; F)$ s'identifient aux $H^*(Y; \pi^G_* F)$. Ces groupes sont en général non nuls. Afin de ne décrire que la ramification, et de permettre ainsi l'existence d'un théorème de localisation, les groupes $\widehat{H}^*_G(X; F)$ doivent s'annuler dans cette situation.*

On dit qu'un groupe fini G opère sur un schéma X de façon *admissible* si X est réunion d'ouverts affines invariants par G ou encore si toute trajectoire de G dans X est contenue dans un ouvert affine. Le quotient X/G existe à cette condition (cf [**23**] V.1.7). Soit X un schéma sur lequel un groupe fini G opère de manière admissible et $\varphi : U \to X$ un morphisme étale. On suppose que U est muni d'une action de G compatible à celle définie sur X, c'est-à-dire que φ commute à l'action de G. Si de plus le morphisme φ est affine, l'action de G sur U est admissible. En effet, soit $(X_i)_i$ un recouvrement de X par des ouverts affines de X stables par G, alors $(\varphi^{-1}(X_i))_i$ est un recouvrement de U possédant les mêmes propriétés. De même, si $\varphi : U \to X$ est une immersion ouverte, l'action de G sur U est admissible. En effet, soit T une trajectoire de U et W un ouvert affine de X la contenant. On a $T \subset U \cap W \subset W$. Comme dans W, toute partie finie a un système fondamental de voisinages ouverts affines, il existe un voisinage ouvert affine de T contenu dans $U \cap W$ donc dans U.

Si un groupe fini G opère sur X de manière admissible et sans inertie (i.e. tous les groupes d'inertie sont triviaux), alors $X \to X/G$ est un revêtement étale galoisien de groupe G (cf [**51**] X corollaire 1 et [**23**] V.1.8). Si de plus X est supposé localement noethérien, X/G l'est aussi (cf [**51**] X corollaire 2).

Corollaire 2.34. *Soit X un schéma localement noethérien sur lequel un groupe G opère de manière admissible et sans inertie. Soient de plus F un G-faisceau adapté sur X et U un X-schéma étale muni d'une action de G compatible à celle définie sur X. Si le morphisme*

$\varphi : U \to X$ est une immersion ouverte ou encore s'il est affine, alors $F \mid U$ est adapté et $\widehat{H}^*_G(U; F \mid U) = 0$.

DÉMONSTRATION. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "s"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ U/G \arrow[r, "\phi"'] & X/G \end{tikzcd}$$

Soient $t \in U$ et $x = \varphi(t)$. On a $I_t \subseteq I_x = \{1\}$, où I_t et I_x sont les groupes d'inerties respectivement aux points t et x. Le groupe G opère sur U sans inertie, donc s est un revêtement étale galoisien. Les morphismes s et $\phi \circ s = \pi \circ \varphi$ sont étales et X/G est localement noethérien (car X l'est). Il suit que ϕ est étale (cf [**23**] V.3.3). Pour simplifier les notations, on pose $A := \pi^G_* F$. On a

$$F = \pi^* A \text{ et } \varphi^* F = (\pi \circ \varphi)^* A = (\phi \circ s)^* A = s^*(\phi^* A).$$

Comme ϕ est étale, on a bien $H^q(V; \phi^* A) = 0$ pour tout $q \geq n$ et pour tout (U/G)-schéma étale V. Autrement dit, $\varphi^* F$ est adapté, car $s^G_*(\varphi^* F) = \phi^* A$. D'autre part, φ est de type fini et X est localement noethérien donc U et U/G le sont aussi. On obtient $\widehat{H}^*_G(U; F \mid U) = 0$ grâce à la proposition 2.32. □

REMARQUE 2.35. *Lorsque $Y = X/G$ est localement noethérien et quasi-séparé, les résultats de cette section sont valables en remplaçant le site étale de Y par le site étale restreint de Y (cf* [**24**] *VII.3.2). En effet, la catégorie des faisceaux sur ce site est équivalente à celle des faisceaux sur le site étale de Y (qui est équivalente à celle des G-faisceaux sur X). De plus, tous les schémas envisagés dans cette section sont des objets du site étale restreint de Y, c'est-à-dire des Y-schémas étales de présentation finie (cf* [**23**] *VIII.3.6).*

En effet, dans la preuve de (2.32) le morphisme $X \to X/G = Y$ est fini (cf [**51**] *X corollaire 1). Il suit que $X/S \to Y$ est de type fini et séparé (cf* [**23**] *V.1.5). Ces deux morphismes sont donc de présentation finie (quasi-séparés et de type fini). Dans la preuve de (2.34), le morphisme étale $U \to X$ est soit affine soit une immersion ouverte (et X est localement noethérien), il est donc de présentation finie. De même, par (cf* [**23**] *VIII.3.6), le morphisme $U/G \to Y$ est de présentation finie.*

Soient $X \to Y$ un revêtement étale galoisien de groupe G et F un G-faisceau sur X. Lorsque Y est localement noethérien et quasi-séparé, on dira parfois que F est adapté sur X s'il est adapté en tant que faisceau sur le site étale restreint de Y. Alors $\widehat{H}^*_G(U; F \mid U) = 0$ pour tout morphisme équivariant $U \to X$ qui est soit étale et affine soit une immersion ouverte.

3.2. Localisation à un voisinage étale des points ramifiés. On suppose que X est connexe et localement noethérien. Soit de plus un groupe fini G opérant fidèlement sur X et de manière admissible. On considère le morphisme $\pi : X \to X/G$. Soit Z l'ensemble des points de X dont les groupes d'inertie sont non triviaux. D'après ([**51**] X corollaire 1), Z est aussi l'ensemble des points en lesquels π est ramifié. On en déduit que Z est fermé dans X (cf [**23**] I.3.3). On note X' le complémentaire ouvert de Z dans X. Le sous-schéma X' est localement noethérien, stable par G et l'action de G sur X' est admissible.

Un voisinage étale de Z dans X est un morphisme étale affine $\varphi : U \to X$ qui est un isomorphisme au-dessus de Z (i.e. $U \times_X Z \to Z$ est un isomorphisme).

Définition 2.36. *On appelle G-*voisinage étale de Z dans X *un voisinage étale $\varphi : U \to X$ muni d'une action de G compatible à celle définie sur X, de sorte que $\varphi^{-1}(Z)$ soit d'intersection non vide avec chaque composante connexe de U.*

Si U peut être muni d'une action de G qui fait de $\varphi : U \to X$ un G-voisinage étale de Z, alors cette action est définie de manière unique. En effet, soit $\sigma \in G$ et supposons qu'il existe $f, g : U \to U$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f;g"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\varphi"'] \\ X \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

commutatif. Soient $p \in Z$, q et q' les points de U au-dessus de p et $\sigma(p)$ respectivement et V la composante connexe de U contenant q. Alors $f(q) = g(q) = q'$ et $g^{-1} \circ f(q) = q$. Comme $k(q) \simeq k(p)$, $g^{-1} \circ f$ induit l'identité sur $k(q)$. On en déduit que $g^{-1} \circ f\ |_V = Id_V$ ([**40**] I.3.13). Ainsi, $g^{-1} \circ f$ induit l'identité sur chaque composante connexe de U.

Théorème 2.37. *Soit $\varphi : U \to X$ un G-voisinage étale de Z dans X et F un G-faisceau sur X. On suppose que $F \mid X'$ est adapté. Alors il y a un isomorphisme canonique*

$$\widehat{H}^*_G(X; F) \simeq \widehat{H}^*_G(U; \varphi^* F).$$

Démonstration. On remarque d'abord que $\varphi : U \to X$ se factorise à travers $j : V \to X$, où $V := Im(\varphi)$ est un ouvert de X (pour la topologie de Zariski) et j l'inclusion. On note $\psi : U \to V$ le morphisme satisfaisant $\varphi = j \circ \psi$. Alors G opère sur V, U et X de manière compatible. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times U \arrow[r] \arrow[d, "1_G \times \psi"'] & U \arrow[d, "\psi"'] \\ G \times V \arrow[r] \arrow[d, "1_G \times j"'] & V \arrow[d, "j"'] \\ G \times X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

En particulier j^*F et φ^*F sont des G-faisceaux sur V et U respectivement. D'autre part, le morphisme φ est affine donc ψ et j le sont aussi. On note $U' := X' \times_X U$, $V' := X' \times_X V$ et on commence par montrer le résultat suivant :

(a) Les groupes $\widehat{H}^*_G(X; F)$ et $\widehat{H}^*_G(V; j^*F)$ sont canoniquement isomorphes.

En posant $Z^n = Z^n(F)$, on a $C^n(F)(V) = C^0(Z^n)(V) = \prod_{j \circ \beta \in M} (Z^n)_\beta$. La résolution de Godement (non tronquée) donne la suite exacte de complexes de $\mathbb{Z}[G]$-modules

$$C^*(F)(X) \to C^*(F)(V) \to 0.$$

Soit K^* le complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules qui rend exacte la suite

$$0 \to K^* \to C^*(F)(X) \to C^*(F)(V) \to 0.$$

Supposons avoir montré que $H^*(Tot(W_*; K^*)) = 0$. Comme le foncteur j^* est exact et qu'il préserve les faisceaux flasques,

$$0 \to j^*F \to j^*C^0(F) \to ... \to j^*C^n(F) \to ...$$

est une résolution de j^*F par des faisceaux flasques. Le fait que $j : V \to X$ soit compatible à l'action de G fait des $j^*C^n(F)$ des G-faisceaux et des $j^*(d^n)$ des morphismes de G-faisceaux. On a donc une G-résolution flasque de $j^*(F)$. D'autre part, $j^*(C^n(F))(V) = C^n(F)(V)$, donc la cohomologie du complexe $C^*(F)(V)$ permet de calculer la cohomologie équivariante du faisceau j^*F. Les W_i sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs, donc la suite

$$0 \to Tot(W_*; K^*) \to Tot(W_*; C^*(F)(X)) \to Tot(W_*; C^*(F)(V)) \to 0$$

est encore exacte. La suite exacte longue de cohomologie qui lui est associée donne l'isomorphisme cherché.

Il suffit donc pour prouver *(a)* de montrer que $H^*(Tot(W_*; K^*)) = 0$. Soient $N := \{\alpha \in M;\ Im(\alpha) \in V\}$ et $\Delta := \{\alpha \in M;\ Im(\alpha) \in Z\}$. On a alors

$$C^n(F)(X') = \prod_{\alpha \in M-\Delta} (Z^n)_\alpha,\ C^n(F)(V') = \prod_{\alpha \in N-\Delta} (Z^n)_\alpha,$$

$$et\ \ K^n = \prod_{\alpha \in M-N} (Z^n)_\alpha = \prod_{\alpha \in (M-\Delta)-(N-\Delta)} (Z^n)_\alpha.$$

On en tire la suite exacte

$$0 \to K^* \to C^*(F)(X') \to C^*(F)(V') \to 0.$$

Les W_i sont projectifs et la suite

$$0 \to Tot(W_*; K^*) \to Tot(W_*; C^*(F)(X')) \to Tot(W_*; C^*(F)(V')) \to 0$$

est exacte. La suite exacte longue de cohomologie associée devient donc

$$... \to H^q(Tot(W_*; K^*)) \to \widehat{H}^q_G(X'; F) \to \widehat{H}^q_G(V'; F) \to ...$$

X' est localement nothérien et G opère sur X' de façon admissible et sans inertie. De plus le morphisme $V' \to X'$ est une immersion ouverte compatible à l'action de G. Le corollaire 2.34 s'applique, d'où

$$\widehat{H}^q_G(X'; F) = \widehat{H}^q_G(V'; F) = 0,$$

et $H^*(Tot(W_*; K^*)) = 0$.

(b) Les groupes $\widehat{H}^*_G(V; F)$ et $\widehat{H}^*_G(U; \psi^*F)$ sont canoniquement isomorphes. Pour simplifier les notations, on désigne par F le G-faisceau j^*F sur V. De plus, M est maintenant un G-système de points géométriques sur V, et Δ est toujours l'ensemble des points géométriques de M dont l'image est un point de Z.

Le morphisme $\psi : U \to V$ est surjectif, donc pour tout α élément de M, il existe au moins un point géométrique de U au-dessus de α. En effet, soient v l'image de α et $U_v = U \times_V Spec(k(v))$ la fibre de ψ au-dessus de v. Alors $U_v = Spec(A)$ où A est une $k(v)$-algèbre étale non nulle, car ψ est étale et surjectif. Si l'on note r le degré de A sur $k(v)$, il existe exactement r points géométriques de U au-dessus de α.

On a donc la suite exacte

$$0 \to C^*(F)(V) \to C^*(F)(U).$$

En posant $I^n := C^n(F)(U)/C^n(F)(V)$, on obtient la suite exacte

$$0 \to C^*(F)(V) \to C^*(F)(U) \to I^* \to 0.$$

On suppose là aussi avoir montré que $H^*(Tot(W_*; I^*)) = 0$. Comme ci-dessus,

$$0 \to \psi^*F \to \psi^*C^0(F) \to ... \to \psi^*C^n(F) \to ...$$

est une G-résolution flasque de ψ^*F, et le complexe $C^*(F)(U)$ permet de calculer la cohomologie équivariante du faisceau ψ^*F. On a de nouveau la suite exacte

$$0 \to Tot(W_*; C^*(F)(V)) \to Tot(W_*; C^*(F)(U)) \to Tot(W_*; I^*) \to 0,$$

et la suite exacte longue de cohomologie associée donne l'isomorphisme voulu.

Il reste à montrer que $H^*(Tot(W_*; I^*)) = 0$. Si $\alpha \in \Delta$, U possède un et un seul point géométrique au-dessus de α, car U est un voisinage étale de Z.

D'où $C^n(F)(V) = (\prod_{\alpha\in\Delta} Z^n_\alpha) \times (\prod_{\alpha\in M-\Delta} Z^n_\alpha)$, $C^n(F)(U) = (\prod_{\alpha\in\Delta} Z^n_\alpha) \times (\prod_{\psi\circ\beta\in M-\Delta} Z^n_\beta)$.

$$et\ I^n := C^n(F)(U)/C^n(F)(V) = \prod_{\alpha\in M-\Delta}((\prod_{\psi\circ\beta=\alpha} Z^n_\beta)/Z^n_\alpha) = C^n(F)(U')/C^n(F)(V'),$$

où Z^n_α se plonge diagonalement dans $\prod_{\psi\circ\beta=\alpha} Z^n_\beta$. On en déduit la suite exacte

$$0 \to C^*(F)(V') \to C^*(F)(U') \to I^* \to 0,$$

et enfin

$$0 \to Tot(W_*; C^*(F)(V')) \to Tot(W_*; C^*(F)(U')) \to Tot(W_*; I^*) \to 0.$$

La suite exacte longue associée à cette dernière devient

$$... \to \widehat{H}^q_G(V'; F) \to \widehat{H}^q_G(U'; F) \to H^q(Tot(W_*; I^*)) \to ...$$

Le schéma X' est localement nothérien et G opère sur X' de façon admissible et sans inertie. Le morphisme $V' \to X'$ est l'immersion d'un ouvert de X' stable sous l'action G et le morphisme $U' \to X'$ est affine (car φ l'est), étale et compatible à l'action de G. Le corollaire 2.34 s'applique et montre que $\widehat{H}^*_G(V'; F) = \widehat{H}^*_G(U'; F) = 0$. On obtient bien $H^*(Tot(W_*; I^*)) = 0$, ce qui achève la preuve du théorème.

□

3.3. Hensélisation. On suppose que X est un schéma connexe noethérien sur lequel le groupe fini G opère fidèlement. On conserve les hypothèses et les notations de la section 2.2. Soit X un espace topologique muni d'une action d'un groupe fini G et Z un sous-espace fermé stable par G. Si U est un ouvert de X contenant Z, alors $\bigcap g(U)$ est un ouvert stable sous l'action de G contenant Z et contenu dans U. On procède de la même manière pour montrer le lemme suivant.

LEMME 2.38. *L'ensemble des G-voisinages étales de Z dans X forme un système cofinal dans celui des voisinages étales de Z.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi : U \to X$ un voisinage étale de Z dans X. On note ${}_\sigma U$ le X-schéma étale $\sigma \circ \varphi : U \to X$ et on pose $W := \prod_{\sigma\in G}({}_\sigma U)$, le produit fibré étant pris sur X. Le groupe G opère sur lui-même par translations. Ceci définit une action de G sur W par permutation des coordonnées qui est compatible à l'action de G sur X. Chacun des ${}_\sigma U$ est un voisinage étale de Z dans X. Il suit que $W \times_X Z \to Z$ est un isomorphisme. D'autre part, $W \to X$ est affine puisque tous les ${}_\sigma U \to X$ le sont. On note GU le sous-schéma de W formé des composantes connexes de W contenant au moins un point s'envoyant dans Z. Alors GU est un G-voisinage étale de Z dans X de sorte qu' il y a un morphisme canonique de X-schémas $GU \to U$. De plus, si $f : V \to U$ est un morphisme de X-schémas, f induit canoniquement un morphisme $GV \to GU$ au-dessus de X et compatible à l'action de G. $\square$

On note $\widetilde{Z}$ la limite projective des voisinages étales de Z dans X. D'après ce qui précède, c'est aussi la limite projective des G-voisinages étales de Z dans X. L'action de G sur ces derniers passe à la limite pour donner une action de G sur $\widetilde{Z}$ compatible à celle définie sur X. D'autre part, lorsque X est noethérien, tout voisinage étale U de Z dans X est noethérien (en particulier quasi-compact) puisque le morphisme $U \to X$ est de type fini.

On note $i : Z \to X$, $s : Z \to \widetilde{Z}$ et $\phi : \widetilde{Z} \to X$ les morphismes canoniques. Ces morphismes commutent à l'action de G et satisfont $i = \phi \circ s$.

Théorème 2.39. *Soit F un G-faisceau sur X tel que $F \mid X'$ soit adapté. Alors le morphisme canonique $\widehat{H}^*_G(X; F) \to \widehat{H}^*_G(\widetilde{Z}; \phi^* F)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On note $0 \to F \to C^0 \to ...$ la résolution de Godement de F. On a les égalités suivantes (où toutes les limites inductives sont prises sur l'ensemble des G-voisinages étales de Z dans X) :

$$\begin{aligned}
(12)\qquad \widehat{H}^*_G(X; F) &= \varinjlim \widehat{H}^*_G(U; F) \\
(13)\qquad &= H^*(\varinjlim Tot^*(W_*; C^*(U))) \\
(14)\qquad &= H^*\Big(\bigoplus_{i+j=*} \varinjlim Hom_{\mathbb{Z}[G]}(W_i; C^j(U))\Big) \\
(15)\qquad &= H^*\Big(\bigoplus_{i+j=*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(W_i; \varinjlim C^j(U))\Big) \\
(16)\qquad &= H^*\Big(\bigoplus_{i+j=*} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(W_i; \phi^* C^j(F)(\widetilde{Z}))\Big) \\
(17)\qquad &= \widehat{H}^*_G(\widetilde{Z}; \phi^* F)
\end{aligned}$$

L'égalité (12) est vraie car tous les morphismes $\widehat{H}^*_G(U; F) \to \widehat{H}^*_G(V; F)$ sont des isomorphismes. Etant donné un système inductif de complexes de $\mathbb{Z}[G]$-modules, la limite inductive commute avec la cohomologie, ce qui donne (13). L'égalité (14) est vraie car les limites inductives commutent avec les sommes directes. L'égalité (15) est vraie car les W_i sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules libres de type fini. Le foncteur ϕ^* est exact, donc $0 \to \phi^* F \to \phi^* C^0 \to ...$ est une résolution de $\phi^* F$. Les voisinages étales sont quasi-compacts et les morphismes de transition sont affines, donc les morphismes $\varinjlim H^q(U; C^j) \to H^q(\widetilde{Z}; \phi^* C^j)$ sont bijectifs. Ainsi, les faisceaux $\phi^* C^j$ sont acycliques pour le foncteur des sections globales . Les égalités (16) et (17) s'en déduisent.

$\square$

Supposons que Z soit contenu dans un ouvert affine $Spec(A)$. Le sous-schéma fermé Z est alors défini par un idéal $I = \sqrt{I}$ de A de sorte que $Z = V(I)$ et $Z \simeq Spec(A/I)$. Si $(\widetilde{A}; \widetilde{I})$ désigne l'hensélisé du couple $(A; I)$ (cf **[51]** XI), alors $\widetilde{Z} := Spec(\widetilde{A})$.

Corollaire 2.40. *On conserve les hypothèses du théorème 2.39. Lorsque F est de torsion et que Z est contenu dans un ouvert affine, le morphisme canonique*

$$\widehat{H}^*_G(X; F) \to \widehat{H}^*_G(Z; i^* F)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $s : Z \to \widetilde{Z}$ l'immersion fermé canonique. Comme Z est contenu dans un ouvert affine, $\widetilde{Z}$ est affine. De plus, le G-faisceau ϕ^*F sur $\widetilde{Z}$ est de torsion lorsque F l'est. Soient I^* et J^* des G-résolutions injectives de ϕ^*F et $s^*\phi^*F = i^*F$ respectivement. Le morphisme canonique de complexes de $\mathbb{Z}[G]$-modules $I^*(\widetilde{Z}) \to J^*(Z)$ induit un morphisme de suites spectrales et des isomorphismes sur les groupes de cohomologie étale (cf **[25]** 0.1). Comme les suites spectrales en question convergent respectivement vers $\widehat{H}^*_G(\widetilde{Z}; F)$ et $\widehat{H}^*_G(Z; s^*F)$, ces deux groupes (gradués) sont isomorphes. En utilisant le théorème 2.39, on obtient le résultat annoncé. □

Remarque 2.41. *Soit F un G-faisceau quelconque sur X qui est adapté sur X'. Pour appliquer la preuve précédente à F, il suffit de montrer que les morphismes canoniques*

$$H^q(\widetilde{Z}; \phi^*F) \to H^q(Z; i^*F)$$

sont bijectifs. Cette condition est toujours vérifiée lorsque $\widetilde{Z}$ est une somme finie de spectres d'anneaux locaux henséliens (cf **[24]** *VIII 8.6.).*

4. Exemples

4.1. Exemples de G-faisceaux adaptés. Soit F un faisceau de torsion sur un schéma X. Pour tout nombre premier l, on note $F(l)$ le sous-faisceau de l-torsion maximal de F. Le morphisme canonique $\bigoplus_l F(l) \to F$ est un isomorphisme.

Proposition 2.42. *Soit G un groupe fini opérant fidèlement et de manière admissible sur X. Si X/G est un ouvert du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres totalement imaginaire, alors tout G-faisceau sur X est adapté sur X'.*

Soit X de type fini et séparé sur Spec($\mathbb{Z}$), et soit F un G-faisceau de torsion sur X. Si $F(2) = 0$ ou si aucun corps résiduel de X n'est ordonnable, alors F est adapté sur X'.

Soit X un schéma de type fini séparé sur un corps k, sur lequel G opère par k-automorphismes. Si k est de l-dimension cohomologique finie, tout G-faisceau de l-torsion sur X est adapté sur X'. Si k est de dimension cohomologique finie, tout G-faisceau de torsion sur X est adapté sur X'.

Démonstration. Si X/G est un ouvert du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres totalement imaginaire, tout X'/G-schéma étale (connexe) est aussi un ouvert du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres totalement imaginaire. Dans ce cas, le résultat est une conséquence de **[5]** 4.6.

On note S la base *Spec*($\mathbb{Z}$) ou *Spec*(k). Soient X de type fini et séparé sur S, et F comme dans l'énoncé. L'immersion ouverte $X' \to X$ est séparée et de type fini, car X est noethérien. Ainsi X' est séparé et de type fini sur S. D'après (**[23]** V.1.5), le schéma X'/G est aussi de type fini et séparé sur S.

On pose $\pi : X' \to X'/G$ et $A := \pi^G_* F$. Le faisceau A est de torsion (respectivement de l-torsion) si F l'est. D'après la remarque (2.35), il suffit de montrer qu'il existe un entier n de sorte que $H^q(U; A) = 0$ pour tout $q \geq n+1$ et pour tout U étale de présentation finie sur X'/G. Dans ce cas, le schéma U est quasi-compact et quasi-séparé, donc la cohomologie étale de U commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux (cf **[24]** VII.3.2).

On pose $n := 2\,dim(X) + 1$ pour $S = Spec(\mathbb{Z})$ et $n := 2\,dim(X) + cd_l(k)$ (respectivement $n := 2\,dim(X) + cd(k)$) pour $S = Spec(k)$. On obtient, pour tout $q \geq n+1$,

$$H^q(U; A) = \bigoplus_l H^q(U; A(l)) = 0.$$

En effet, le S-schéma U est de type fini, donc la deuxième égalité est vraie grâce à ([**24**] X.6.2) et ([**40**] VI.1.4). Ainsi, le G-faisceau F est adapté sur X'.

□

4.2. Quelques calculs. Afin de fournir quelques exemples, nous calculons ici des groupes de cohomologie équivariante dans certains cas simples choisis au hasard.

4.2.1. *Le spectre d'un corps.* On s'intéresse ici aux extensions de corps L/K galoisiennes finies de groupe G satisfaisant la condition suivante :

(*) Pour tout sous-groupe G' ouvert dans G, les groupes $H^q(Spec(L^{G'}); \mathbb{G}_m)$ sont nuls pour $q > 2$. On note $Br(L)$ le groupe de Brauer du corps L.

Proposition 2.43. *Si l'extension L/K satisfait la condition (*), alors on a un isomorphisme*

$$d_3^{n;2} : \widehat{H}^n(G; Br(L)) \simeq \widehat{H}^{n+3}(G; L^\times),$$

quel que soit l'entier $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. La cohomologie étale de $Spec(L)$ s'identifie à la cohomologie galoisienne de L. On a donc

$$\begin{aligned} H^q(Spec(L); \mathbb{G}_m) &= L^\times \ \ pour\ q = 0, \\ &= 0 \ \ pour\ q = 1, \\ &= Br(L) \ \ pour\ q = 2 \\ &= 0 \ \ pour\ q \geq 3. \end{aligned}$$

Le morphisme $Spec(L) \to Spec(K)$ est un revêtement étale galoisien. La condition (*) permet d'appliquer le théorème de localisation (cf 3.26) pour montrer que la suite spectrale de cohomologie équivariante converge vers $\widehat{H}^*_G(Spec(L); \mathbb{G}_m) = 0$. Les seules différentielles susceptibles d'être non nulles sont les suivantes :

$$d_3^{n;2} : \widehat{H}^n(G; Br(L)) \longrightarrow \widehat{H}^{n+3}(G; L^\times).$$

Toutes ces différentielles sont donc des isomorphismes. □

Si K est un corps parfait dont le groupe de Galois est de dimension ≤ 2 (par exemple un corps de nombres totalement imaginaire), alors toute extension galoisienne finie L/K satisfait la condition (*). Cette condition est aussi satisfaite lorsque K est un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel k est parfait et de sorte que son groupe de Galois G_k soit de dimension cohomologique ≤ 1 (cf [**40**] III.2.22(c)). Alors toute extension finie L de K possède les mêmes propriétés. De plus, le groupe de Brauer de L s'identifie au groupe des caractères $G_l^D := Hom(G_l; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, où G_l est le groupe de Galois du corps résiduel l de L. Si par exemple l est quasi-fini, on a $G_l = \widehat{\mathbb{Z}}$ et $G_l^D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On obtient dans ce cas le résultat suivant.

Corollaire 2.44. *Soit L/K une extension galoisienne (de groupe G) de corps complets pour une valuation discrète de sorte que le corps résiduel k de K soit quasi-fini. On a des isomorphismes*

$$\widehat{H}^n(G; \mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{n+2}(G; L^\times).$$

Démonstration. Si k est quasi-fini, alors l l'est aussi et on a les identifications $Br(L) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^D \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On utilise ensuite l'isomorphisme $\widehat{H}^n(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{n+1}(G;\mathbb{Z})$ ainsi que la proposition précédente. □

4.2.2. *Courbes algébriques lisses sur un corps algébriquement clos.* Soit X une courbe algébrique lisse sur un corps k algébriquement clos et soit G un groupe fini opérant fidèlement et de manière admissible sur X par k-automorphismes. Les groupes de cohomologie étale de X à coefficients dans le groupe multiplicatif sont les suivants (cf [**40**] III.2.22(d)) :

$$\begin{aligned} H^q(X;\mathbb{G}_m) &= \mathcal{O}_X(X)^\times \text{ pour } q=0,\\ &= Pic(X) \text{ pour } q=1,\\ &= 0 \text{ pour } q\geq 2. \end{aligned}$$

On note $Y := X/G$ la courbe quotient, Z le lieu de ramification (qui est un sous-schéma fermé de X) et $\widetilde{Z}$ l'hensélisation de Z dans X. Alors $\widetilde{Z} = \coprod_{x\in Z} Spec(\mathcal{O}^h_{X;x})$. On note aussi L et K les corps de fonctions de X et Y respectivement, U_x le groupe des unités de l'anneau local hensélien $\mathcal{O}^h_{X;x}$ et L^h_x son corps de fractions. De même, si y est un point fermé de Y, on note K^h_y le corps de fractions de $\mathcal{O}^h_{Y;y}$.

La courbe Y est lisse donc le G-faisceau $\mathbb{G}_m$ est adapté (cf [**40**] III.2.22(d)). Le théorème de localisation (cf 2.39) donne l'isomorphisme

$$H^*_G(X;\mathbb{G}_m) \simeq H^*_G(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m). \tag{18}$$

On considère maintenant la suite spectrale

$$\widehat{H}^p(G;H^q(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m)) \Rightarrow \widehat{H}^{p+q}_G(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m).$$

La cohomologie étale d'un anneau local hensélien s'identifie (en dimension supérieure à 1) à celle de son corps résiduel. On a donc les isomorphismes $H^q(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m) \simeq H^q(Z;\mathbb{G}_m) = 0$ pour $q \geq 1$, et par définition $H^0(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m) = \prod_{x\in Z} U_x$. La suite spectrale précédente dégénère et donne les isomorphismes

$$\widehat{H}^n_G(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^n(G;\prod_{x\in Z} U_x). \tag{19}$$

Pour tout y dans Z/G, on choisit un point x au-dessus de y dont on note G_x le groupe de décomposition. En appliquant le lemme de Shapiro, on obtient

$$\widehat{H}^n(G;\prod_{x\in Z} U_x) \simeq \prod_{y\in Z/G} \widehat{H}^n(G_x;U_x). \tag{20}$$

La suite exacte de G_x-modules

$$0 \to U_x \to L_x \to \mathbb{Z} \to 0 \tag{21}$$

est donnée par la valuation. Soit y l'image de x dans Y. L'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}^h_{Y;y}$ est excellent, hensélien et son corps résiduel est algébriquement clos. On en déduit que le corps K^h_y est C1 (cf [**55**] II.3.3.c). De plus, l'extension L^h_x/K^h_y est galoisienne de groupe G_x, donc le G_x-module $(L^h_x)^\times$ est cohomologiquement trivial (cf [**55**] II.3.1 et II.3.2). La suite exacte longue de cohomologie associée à (21) fournit les isomorphismes

$$\widehat{H}^n(G_x;U_x) \simeq \widehat{H}^{n-1}(G_x;\mathbb{Z}). \tag{22}$$

Les relations (18), (19), (20) et (22) montrent le résultat suivant.

PROPOSITION 2.45. *Pour tout entier n, on a l'isomorphisme*

$$\widehat{H}^n_G(X;\mathbb{G}_m) \simeq \prod_{y\in Z/G} \widehat{H}^{n-1}(G_x;\mathbb{Z}).$$

4.2.3. *Action d'un groupe cyclique d'ordre premier sur un schéma.* Soit X un schéma localement nothérien sur lequel opère de manière admissible un groupe C_l cyclique d'ordre premier l. On pose $Y = X/C_l$ et on suppose qu'il existe un entier N tel que X et tous les Y-schémas étales U soient de l-dimension cohomologique inférieure à N. C'est par exemple le cas si X et Y sont des schémas de type fini sur un corps de l-dimension cohomologique finie et dont la caractéristique est première à l (cf **[40]** VI.1.4). On note Z le lieu de ramification sur X, X' le complémentaire ouvert de Z dans X et $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ le faisceau constant. Dans ces conditions, ce faisceau est adapté sur X'. On suppose de plus que Z est contenu dans un ouvert affine.

On dit que X est *acyclique modulo l* si $H^q(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \mathbb{F}_l$ pour $q = 0$ et 0 sinon. On dit que X est une *n-sphère cohomologique modulo l* si $H^q(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \mathbb{F}_l$ pour $q = 0$, n et 0 sinon. Le corollaire 2.40 permet de recopier la preuve de (**[3]** X 10.5) pour montrer les résultats suivants.

THÉORÈME 2.46. *On se place sous les hypothèses précédentes.*
– *Si le groupe gradué $H^*(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ est de type fini, alors $H^*(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ l'est aussi.*
– *Si X est acyclique modulo l, alors Z l'est aussi.*
– *Si X est une sphère cohomologique modulo l et si Z est non vide, alors on a*

$$\sum_{q\geq 0} dim_{\mathbb{F}_l} H^q(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 2.$$

DÉMONSTRATION. On a $\widehat{H}^*_{C_l}(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^*_{C_l}(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ grâce au corollaire 2.40. Par ailleurs, C_l opère trivialement sur Z et on a l'isomorphisme

$$\widehat{H}^*_{C_l}(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^*(C_l;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_l} H^*(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}).$$

Puisque $\widehat{H}^*(C_l;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \mathbb{F}_l$ en tout degré, on obtient

$$dim_{\mathbb{F}_l} \widehat{H}^n_{C_l}(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \sum_{q\geq 0} dim_{\mathbb{F}_l} H^q(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}), \tag{23}$$

quel que soit l'entier n. La suite spectrale convergente $\widehat{H}^p(C_l;H^q(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}_{C_l}(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ montre que les groupes $\widehat{H}^n_{C_l}(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ sont de type fini lorsque $H^*(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ l'est. L'égalité (23) prouve alors que $H^*(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ est de type fini.

Si X est acyclique modulo l, la même suite spectrale dégénère et le membre de gauche dans (23) est égal à 1. Il suit que Z est acyclique modulo l.

On suppose maintenant que X est une n-sphère cohomologique modulo l et que Z est non vide. On considère les suites spectrales $E^{**}_*(X)$ et $E^{**}_*(Z)$ définies par le C_l-faisceau $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ sur X et Z respectivement. Leurs termes initiaux sont donnés ci-dessous

$$E^{p;q}_2(X) = \widehat{H}^p(C_l;H^q(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})) = H^q(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \text{ et } E^{p;q}_2(Z) = H^q(Z;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}).$$

On note les différentielles de ces suites spectrales d^{**}_* et δ^{**}_* respectivement. Le groupe C_l opère trivialement sur Z donc la suite spectrale $E^{**}_*(Z)$ est triviale (toutes ses différentielles sont nulles pour $r \geq 2$). La suite spectrale $E^{**}_*(X)$ ne possède que deux lignes non nulles (celles d'indice 0 et n), ce qui entraine l'égalité $E^{**}_{n+1}(X) = E^{**}_2(X)$. Les seules différentielles susceptibles d'être non nulles sont les $d^{p;n}_{n+1}$, où p est un entier arbitraire. L'immersion fermée

$i : Z \to X$ induit un morphisme de suites spectrales $i_*^{**} : E_*^{**}(X) \to E_*^{**}(Z)$. En particulier, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E_{n+1}^{p;n}(X) \arrow[r, "i_{n+1}^{p;n}"] \arrow[d, "d_{n+1}^{p;n}"'] & E_{n+1}^{p;n}(Z) \arrow[d, "\delta_{n+1}^{p;n}"] \\ E_{n+1}^{p+n+1;0}(X) \arrow[r, "i_{n+1}^{p+n+1;0}"] & E_{n+1}^{p+n+1;0}(Z) \end{tikzcd}$$

Le morphisme $i_{n+1}^{p+n+1;0}$ s'identifie au morphisme canonique

$$i^* : H^0(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^0(Z; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}),$$

qui est injectif. La relation $\delta_{n+1}^{p;n} \circ i_{n+1}^{p;n} = i_{n+1}^{p+n+1;0} \circ d_{n+1}^{p;n}$ et le fait que la différentielle $\delta_{n+1}^{p;n}$ soit nulle montrent alors que les différentielles $d_{n+1}^{p;n}$ sont nulles pour tout entier p. On en déduit que la suite spectrale $E_*^{**}(X)$ est elle aussi triviale. Il vient

$$dim_{\mathbb{F}_l} \widehat{H}^n_{C_l}(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \sum_{p+q=n} dim_{\mathbb{F}_l} E_\infty^{p;q}(X) = \sum_{p+q=n} dim_{\mathbb{F}_l} E_2^{p;q}(X) = \sum_{q \geq 0} dim_{\mathbb{F}_l} H^q(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 2.$$

La relation (23) permet de conclure.

$\square$

4.2.4. *G-faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine.* Soit A un anneau noethérien sur lequel opère un groupe fini G. Soient de plus

$$Z = Spec(A/I) \longrightarrow X = Spec(A)$$

le lieu de ramification (avec $\sqrt{I} = I$) et $Y = Spec(A^G)$ le quotient de X par G. On note aussi $(\widetilde{A}; \widetilde{I})$ l'hensélisé du couple $(A; I)$ et $\varphi : \widetilde{Z} = Spec(\widetilde{A}) \to X$ le morphisme canonique. Soit M un A-module sur lequel G opère de manière compatible. Plus précisément, on impose $g(a.m) = g(a).g(m)$, quels que soient $a \in A$, $m \in M$ et $g \in G$. Le faisceau M_{et} sur le site étale de X défini par M (cf **[59]** II.3.2.1) est alors un G-faisceau. D'autre part, M^G est un A^G-module et on obtient facilement

$$\pi_*^G(M_{et}) = (M^G)_{et}.$$

D'après **[59]** II.4.1.3, on a $H^q(Spec(A'); \pi_*^G M_{et}) = 0$ quels que soient la A^G-algèbre étale A' et l'entier $q \geq 1$. En particulier, le G-faisceau M_{et} est adapté. Le théorème de localisation (cf 2.39) donne l'isomorphisme

$$\widehat{H}_G^*(X; M_{et}) \simeq \widehat{H}_G^*(\widetilde{Z}; \varphi^* M_{et}).$$

De plus, les suites spectrales

$$\widehat{H}^p(G; H^q(X; M_{et})) \Rightarrow \widehat{H}_G^{p+q}(X; M_{et}) \quad \text{et} \quad \widehat{H}^p(G; H^q(\widetilde{Z}; \varphi^* M_{et})) \Rightarrow \widehat{H}_G^{p+q}(\widetilde{Z}; \varphi^* M_{et})$$

dégénèrent. On obtient le résultat suivant.

Proposition 2.47. *Quel que soit l'entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme canonique*

$$\widehat{H}^n(G; M) \longrightarrow \widehat{H}^n(G; M \otimes_A \widetilde{A})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après ce qui précède, on a des isomorphismes canoniques

$$\widehat{H}^n(G; H^0(X; M_{et})) \simeq \widehat{H}^n_G(X; M_{et}) \simeq \widehat{H}^n_G(\widetilde{Z}; \varphi^* M_{et}) \simeq \widehat{H}^n(G; H^0(\widetilde{Z}; \varphi^* M_{et})),$$

quel que soit l'entier $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

CHAPITRE 3

Application en topologie arithmétique

Comme nous l'avons observé au cours du premier chapitre, le calcul de la cohomologie étale du spectre X de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres L laisse imaginer une analogie entre les corps de nombres et les variétés réelles de dimension trois. En effet, lorsque L est totalement imaginaire, les groupes de cohomologie étale de X à coefficients dans un faisceau abélien arbitraire sont nuls après la dimension trois (cf [**5**] 4.6). De plus, le théorème de dualité d'Artin-Verdier, analogue arithmétique de la dualité de Poincaré, fait à nouveau apparaître la dimension trois comme dimension maximale. Par ailleurs, le spectre d'un corps fini est, du point de vue de la topologie étale, un objet de dimension un dont le groupe fondamental est le complété profini de $\mathbb{Z}$. Pour cette raison, les points fermés de X sont vus comme des noeuds dans une variété de dimension trois. Une extension galoisienne L/K de groupe G correspond à un revêtement galoisien $M \to M/G$ de variétés compactes de dimension trois. Dans cette situation, le groupe des classes $Cl(L)$ et le quotient libre U_L/μ_L du groupe des unités de L correspondent respectivement, en tant que modules galoisiens, à la partie de torsion $H_{tor}(M)$ et au quotient libre $H_{free}(M)$ du premier groupe d'homologie singulière de M à coefficients entiers.

Lorsque le groupe de Galois est le groupe cyclique d'ordre premier C_p et qu'il opère par automorphismes préservant l'orientation, le lieu de branchement du revêtement $M \to M/C_p$ est constitué d'un nombre fini de noeuds ramifiés, analogues topologiques des places finies ramifiées dans l'extension L/K. Cette situation est envisagée dans [**56**]. A partir de la structure galoisienne des groupes $H_{tor}(M)$ et $H_{free}(M)$ (respectivement $Cl(L)$ et U_L/μ_L), A. Sikora y donne un encadrement du nombre s de noeuds (respectivement de places finies) ramifiés. Il obtient des résultats en accord quasi-parfait avec le dictionnaire de la topologie arithmétique. Cependant, ses preuves sont basées sur des méthodes très différentes, puisqu'il utilise une cohomologie équivariante dans le contexte géométrique alors qu'il fait appel à la théorie du corps de classes en arithmétique.

Le but de ce troisième chapitre est de fournir des démonstrations analogues pour ces résultats analogues afin de comprendre la coïncidence à priori très surprenante de ces résultats. Alors, ces résultats, leurs hypothèses et leurs démonstrations mettent en interaction la quasi-totalité des éléments du dictionnaire de la topologie arithmétique, et permettent ainsi de tester la validité de ces correspondances. Afin d'approfondir ce dictionnaire, la pertinence de certains de ses éléments et les contradictions offertes par d'autres sont alors mises en évidence. Pour cela, nous utilisons la cohomologie étale équivariante développée dans le chapitre précédent.

Le théorème de localisation, démontré dans le chapitre précédent, permet par exemple de calculer les groupes $\widehat{H}^q_G(X_{et};\mathbb{G}_m)$, lorsque X est le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres L. On trouve en particulier lorsque G est abélien, l'isomorphisme

$$\widehat{H}^0_G(X_{et};\mathbb{G}_m) \simeq \prod I_{\mathfrak{q}},$$

où le produit est pris sur l'ensemble des places $\mathfrak{q}$ de L^G et pour lesquelles $I_{\mathfrak{q}}$ désigne le sous-groupe d'inertie dans G. La suite spectrale établit donc un lien entre la ramification dans l'extension L/L^G et la structure galoisienne des groupes $Cl(L)$ et U_L. La première section de ce chapitre est consacrée à l'étude de cette suite spectrale. On obtient alors une démonstration des résultats de A. Sikora en théorie des nombres à l'aide de ces méthodes.

Nous exprimons dans la section 2.1 une relation de dualité donnant les isomorphismes

$$\widehat{H}^n_G(X_{et};\mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^{2-n}_G(X_{et};\mathbb{Z})^D,$$

d'ailleurs compatibles à la dualité induite par celle d'Artin-Verdier sur les termes initiaux des suites spectrales respectives. L'utilisation du G-faisceau $\mathbb{Z}$ permet alors de donner des preuves satisfaisantes du point de vue de la topologie arithmétique. En effet, la preuve des résultats de [**56**] de nature topologique et arithmétique respectivement s'articule comme suit.

Il s'agit d'encadrer le nombre s de noeuds (respectivement de places finies) ramifiés dans un revêtement $X \to X/C_p$ de variétés de dimension trois (respectivement de spectres d'anneaux d'entiers de corps de nombres) galoisien de groupe cyclique d'ordre premier p. Le théorème de localisation fournit les isomorphismes

$$\widehat{H}^n_{C_p}(X;\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^n_{C_p}(Z;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{F}_p^s,$$

où Z désigne le lieu de ramification qui est constitué de s noeuds (respectivement de s places finies). La suite spectrale

$$\widehat{H}^i(C_p;H^j(X;\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}^{i+j}_{C_p}(X;\mathbb{Z})$$

donne ainsi des approximations successives du module $\mathbb{F}_p^s$ à partir des groupes $\widehat{H}^i(C_p;H^j(X;\mathbb{Z}))$. La dualité de Poincaré (respectivement d'Artin-Verdier) permet alors d'obtenir un encadrement du nombre s en fonction de la dimension sur $\mathbb{F}_p$ des espaces $\widehat{H}^0(C_p;H_{tor}(X))$ et $\widehat{H}^1(C_p;H_{free}(X))$ (respectivement $\widehat{H}^0(C_p;Cl(L))$ et $\widehat{H}^1(C_p;U_L/\mu)$).

L'intérêt de ces groupes de cohomologie étale équivariante modifiée en topologie arithmétique provient du fait qu'ils sont les stricts analogues des mêmes groupes définis dans le contexte topologique. Cette analogie n'est d'ailleurs pas respectée par les premiers groupes de cohomologie étale équivariante non modifiée. Ceci vient renforcer l'analogie des preuves esquissées ci-dessus. Cependant, l'utilisation de la topologie étale d'Artin-Verdier est nécessaire pour traiter le cas des extensions de corps de nombres non totalement imaginaires.

Nous tirons les conclusions de ce travail dans la troisième section. Nous prenons alors clairement parti pour la première des deux versions (sensiblement différentes) du dictionnaire de la topologie arithmétique proposées par A. Reznikov dans [**52**] et [**53**]. On est ainsi amené à montrer comment la cohomologie de S. Lichtenbaum (conjecturale à ce d'après [**16**]), associée à la topologie Weil-étale, fournit naturellement un analogue arithmétique au groupe $H_1(M;\mathbb{Z})$, dont le sous-groupe de torsion et le quotient libre maximal s'identifient, en tant que modules galoisiens, à $Cl(L)$ et U_L/μ_L respectivement. Les calculs de S. Lichtenbaum confirment donc clairement l'intuition des fondateurs de la topologie arithmétique. Cependant, il semble que l'analogue arithmétique du groupe fondamental $\pi_1(M)$ ne puisse être le groupe de Galois G_L^{nr} de l'extension maximale non ramifiée de L. Ce lien entre topologie arithmétique et cohomologie Weil-étale, observé dans la section 3.2, sera la motivation initiale de tous les chapitres suivants.

Enfin, nous généralisons les preuves décrites ci-dessus dans une quatrième section, afin de les appliquer à des extensions de corps de nombres non totalement imaginaires. La situation est alors moins agréable. Il est par exemple nécessaire d'alléger les hypothèses du théorème de localisation.

Ces considérations suggèrent de voir les résultats de [**56**] comme deux manifestations d'un même phénomène. L'arithmétique apparaît ici comme un "cas particulier" du cadre topologique. Ce manque de rigidité dans le contexte topologique sera comblé dans le chapitre 9.

1. Cohomologie équivariante des corps de nombres totalement imaginaires

Soit X le spectre de l'anneau d'entiers D d'un corps de nombres L sur lequel un groupe fini G opère. On pose $K := L^G$, $Y = X/G = Spec(D^G)$ et on considère l'extension galoisienne L/K. On suppose L et K totalement imaginaires. Les groupes de cohomologie étale du faisceau du groupe multiplicatif sur le site X_{et} sont donnés ci-dessous (cf [**39**]).

$$\begin{aligned} H^q(X;\mathbb{G}_m) &= U_L \;\; pour\ q=0, \\ &= Cl(L) \;\; pour\ q=1, \\ &= 0 \;\; pour\ q=2, \\ &= \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \;\; pour\ q=3, \\ &= 0 \;\; pour\ q\geq 4, \end{aligned}$$

où U_L désigne le groupe des unités de L, μ le groupe cyclique des racines de l'unité et $Cl(L)$ le groupe des classes. L'opération de G sur les groupes U_L et $Cl(L)$ (en tant que groupes de cohomologie du G-faisceau $\mathbb{G}_m$) est l'action naturelle. De plus, le groupe de Galois opère trivialement sur $H^3(X;\mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Le morphisme canonique $\pi : X \to Y$ est fini. On note Z le sous-schéma fermé de X constitué des points en lesquels π est ramifié, X' son complémentaire ouvert et s le cardinal de Z.

1.1. Calcul des groupes $\widehat{H}^*_G(X;\mathbb{G}_m)$. Le quotient X'/G est un ouvert de Y. Soit V un X'/G-schéma étale. Alors V est un ouvert du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres totalement imaginaire et on a $H^q(V;\mathbb{G}_m) = 0$ pour tout $q \geq 4$ (cf [**41**] 2.2.1). Le faisceau $\mathbb{G}_m \mid X'$ est adapté donc le théorème de localisation s'applique dans ce cas.

Soient $\mathfrak{a}$ le produit des idéaux $(\mathfrak{p}_i)_{1\leq i\leq s}$ de D ramifiés dans l'extension L/K et $Z = V(\mathfrak{a})$. Soient $(\widetilde{D};\widetilde{\mathfrak{a}})$ l'hensélisé du couple $(D;\mathfrak{a})$ et $\widetilde{Z} := Spec(\widetilde{D})$ (cf [**51**]). Alors $\widetilde{D} = \prod\limits_{1\leq i\leq s} \widetilde{D}_{\mathfrak{p}_i}$, où $\widetilde{D}_{\mathfrak{p}_i}$ est l'anneau local constitué des éléments de la complétion de D pour la valeur absolue $\mathfrak{p}_i$-adique qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. C'est un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel fini. On note $U_{\mathfrak{p}_i}$ le groupe des unités de $\widetilde{D}_{\mathfrak{p}_i}$ et $\widetilde{Z}_i$ le spectre de $\widetilde{D}_{\mathfrak{p}_i}$.

Le théorème de localisation donne l'isomorphisme $\widehat{H}^*_G(X;\mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^*_G(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m)$. D'autre part, on a $\widetilde{Z} = \coprod \widetilde{Z}_i$ et

$$H^q(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m) = \prod H^q(\widetilde{Z}_i;\mathbb{G}_m) = \prod U_{\mathfrak{p}_i}$$

pour $q = 0$ et 0 sinon. En effet,

$$H^q(\widetilde{Z}_i;\mathbb{G}_m) \simeq H^q(Spec(D/\mathfrak{p}_i);\mathbb{G}_m)$$

pour tout $q \geq 1$ (cf [**57**] 4.1), or ces groupes sont nuls car un corps fini est C1 et donc de dimension cohomologique ≤ 1 (cf [**55**]). La suite spectrale de cohomologie équivariante de $\mathbb{G}_m$

sur $\widetilde{Z}$ dégénère et on obtient

$$\widehat{H}^*_G(X;\mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^*_G(\widetilde{Z};\mathbb{G}_m) = \widehat{H}^*(G;\prod_{1\leq i\leq s} U_{\mathfrak{p}_i}). \tag{24}$$

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de K, on pose $U^{\mathfrak{q}} := \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} U_{\mathfrak{p}}$ et on a la décomposition en $\mathbb{Z}[G]$-modules homogènes $\prod_{1\leq i\leq s} U_{\mathfrak{p}_i} = \prod_{\mathfrak{q}\in\Omega} U^{\mathfrak{q}}$, où Ω désigne l'ensemble des idéaux premiers de K qui se ramifient dans L. Lorsque $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de L, on note $G_{\mathfrak{p}}$ le groupe de décomposition en l'idéal $\mathfrak{p}$. Alors $U^{\mathfrak{q}}$ est le $\mathbb{Z}[G]$-module induit $M_G^{G_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{p}})$, où l'on a choisi un idéal $\mathfrak{p}$ premier de L divisant $\mathfrak{q}$. Finalement, on a l'identification

$$\widehat{H}^p(G;\prod_{1\leq i\leq s} U_{\mathfrak{p}_i}) = \prod_{\mathfrak{q}\in\Omega} \widehat{H}^p(G_{\mathfrak{p}};U_{\mathfrak{p}}), \tag{25}$$

où l'on a choisi, pour tout $\mathfrak{q}$ dans Ω, un idéal $\mathfrak{p}$ premier de L divisant $\mathfrak{q}$. Les relations (24) et (25) montrent le théorème suivant.

Théorème 3.1. *On a l'isomorphisme*

$$\widehat{H}^n_G(X;\mathbb{G}_m) \simeq \prod \widehat{H}^n(G_{\mathfrak{p}};U_{\mathfrak{p}}),$$

où le produit est pris sur tous les idéaux premiers non nuls de K.

La théorie du corps de classe local (cf **[41]** I Appendix A) montre que le groupe $\widehat{H}^0(G_{\mathfrak{p}};U_{\mathfrak{p}})$ est isomorphe au sous-groupe d'inertie $I_{\mathfrak{q}}^{(ab)}$ de l'abélianisé du groupe de décomposition $G_{\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire le noyau du morphisme $G_{\mathfrak{p}}^{ab} \to Gal(k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{q}))$.

Soit B l'anneau d'entiers de K et $\widetilde{B}_{\mathfrak{q}}$ l'anneau de valuation discrète hensélien obtenu comme ci-dessus. On note $U_{\mathfrak{q}}$ le groupe des unités de $\widetilde{B}_{\mathfrak{q}}$, $L_{\mathfrak{p}}$ et $K_{\mathfrak{q}}$ les corps de fractions de $\widetilde{D}_{\mathfrak{p}}$ et $\widetilde{B}_{\mathfrak{q}}$. On considère la suite exacte de $\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{p}}]$-modules

$$0 \to U_{\mathfrak{p}} \to L_{\mathfrak{p}}^{\times} \to \mathbb{Z} \to 0$$

où la flèche $L_{\mathfrak{p}}^{\times} \to \mathbb{Z}$ est donnée par la valuation $\mathfrak{p}$-adique. En utilisant le fait que l'extension $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{q}}$ est galoisienne et le théorème de Hilbert 90, la suite exacte longue de cohomologie donne la suite exacte

$$0 \to U_{\mathfrak{q}} \to K_{\mathfrak{q}}^{\times} \to \mathbb{Z} \to \widehat{H}^1(G_{\mathfrak{p}};U_{\mathfrak{p}}) \to 0.$$

La restriction de la valuation $\mathfrak{p}$-adique à $K_{\mathfrak{q}}^{\times}$ a pour image $e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$, où $e_{\mathfrak{q}}$ désigne l'indice de ramification associé à $\mathfrak{q}$ (L/K est galoisienne, donc cet entier ne dépend que de $\mathfrak{q}$). La dernière suite exacte permet donc d'identifier les groupes $\widehat{H}^1(G_{\mathfrak{p}};U_{\mathfrak{p}})$ et $\mathbb{Z}/e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$. Le corollaire suivant résume ces résultats.

Corollaire 3.2. *On a les identifications suivantes, où les trois produits sont pris sur tous les idéaux premiers (non nuls) de K :*
- $\widehat{H}^0_G(X;\mathbb{G}_m) = \prod I_{\mathfrak{q}}^{(ab)}$.
- $\widehat{H}^1_G(X;\mathbb{G}_m) = \prod \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$.
- $\widehat{H}^n_G(X;\mathbb{G}_m) = \prod \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$ *pour tout n si G est cyclique.*

1.2. Etude de la suite spectrale de cohomologie équivariante. On conserve les mêmes notations. La deuxième page de la suite spectrale relative au G-faisceau $\mathbb{G}_m$ est la suivante :

$$\begin{array}{cccccc}
\widehat{H}^{-3}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \widehat{H}^{-2}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \widehat{H}^{-1}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \widehat{H}^{0}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \widehat{H}^{1}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \widehat{H}^{2}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\widehat{H}^{-3}(G;Cl(L)) & \widehat{H}^{-2}(G;Cl(L)) & \widehat{H}^{-1}(G;Cl(L)) & \widehat{H}^{0}(G;Cl(L)) & \widehat{H}^{1}(G;Cl(L)) & \widehat{H}^{2}(G;Cl(L)) \\
\widehat{H}^{-3}(G;U_L) & \widehat{H}^{-2}(G;U_L) & \widehat{H}^{-1}(G;U_L) & \widehat{H}^{0}(G;U_L) & \widehat{H}^{1}(G;U_L) & \widehat{H}^{2}(G;U_L)
\end{array}$$

En considérant la suite exacte longue

$$... \to \widehat{H}^i(G;\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^i(G;\mathbb{Q}) \to \widehat{H}^i(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to ...$$

associée à celle de G-modules

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

on obtient l'identification

$$\widehat{H}^n(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{n+1}(G;\mathbb{Z}).$$

En effet, $\widehat{H}^n(G;\mathbb{Q}) = 0$ puisque $\mathbb{Q}$ est uniquement divisible. Lorsque G est cyclique, la troisième ligne prend les valeurs

$$\widehat{H}^1(G;\mathbb{Z}) = Hom(G;\mathbb{Z}) = 0$$

pour les colonnes d'indice pair et

$$\widehat{H}^{-2}(G;\mathbb{Z}) \simeq G^{ab} = G$$

pour celles d'indice impair. On cherche des hypothèses sous lesquelles certaines différentielles sont nulles.

On suppose désormais que le groupe $Cl(K)$ est trivial. Lorsque G est cyclique, il existe une infinité d'idéaux premiers non nuls inertes de D (c'est une conséquence du théorème de densité de Chebotarev (cf [**56**] théorème 2.3(3))). Cette condition est d'ailleurs nécessaire. On peut alors choisir un point fermé x de X (correspondant à un tel idéal $\mathfrak{p}$) fixé par G et de sorte que $\pi : X \to Y$ soit étale en x. Dans ces conditions, $\mathfrak{p}$ est principal et on pose $U = X - \{x\} = Spec(D_f)$, avec $\mathfrak{p} = f.D$. Les groupes de cohomologie étale de U à coefficients dans $\mathbb{G}_m$ sont les suivants (cf [**41**] II.2.1) :

$$\begin{array}{rcl}
H^q(U;\mathbb{G}_m) & = & D_f^\times \ \ \textit{pour } q=0, \\
 & = & Pic(U) = Cl(D_f) \ \ \textit{pour } q=1, \\
 & = & 0 \ \ \textit{pour } q \geq 2.
\end{array}$$

On désigne toujours par $\widetilde{Z}$ la limite projective des voisinages étales de Z dans X. Les d_*^{**} sont les différentielles de la suite spectrale $E_*^{**}(X)$ de cohomologie équivariante de $\mathbb{G}_m$ sur X. On note aussi $E_*^{**}(\widetilde{Z})$ (respectivement $E_*^{**}(U)$) la suite spectrale associée à $\mathbb{G}_m$ sur $\widetilde{Z}$ (respectivement sur U).

Lemme 3.3. *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, la différentielle $d_2^{-1;1}$ est nulle. Si de plus le groupe G est cyclique, les différentielles $d_2^{n;1}$ sont nulles lorsque n est impair.*

Démonstration. On considère le morphisme de suites spectrales

$$h : E_*^{**}(X) \longrightarrow E_*^{**}(\widetilde{Z}).$$

On a en particulier le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_2^{-1;1}(X) \arrow[r, "h_2^{-1;1}"] \arrow[d, "d_2^{-1;1}"'] & E_2^{-1;1}(\widetilde{Z}) = 0 \arrow[d, "\delta_2^{-1;1}"'] \\ E_2^{1;0}(X) \arrow[r, "h_2^{1;0}"] & E_2^{1;0}(\widetilde{Z}) \end{tikzcd}$$

Il suit que $h_2^{1;0} \circ d_2^{-1;1} = 0$. D'autre part, la flèche $h_2^{1;0}$ est donnée par le morphisme canonique

$$\widehat{H}^1(G; U_L) \to \prod_{\mathfrak{p} \in Z} \widehat{H}^1(G; U_{\mathfrak{p}}),$$

qui est injectif car $Cl(K) = 0$ (cf lemme 3.32). La deuxième affirmation suit en utilisant la périodicité de la cohomolgie des groupes cycliques. □

Lemme 3.4. *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial et si G est cyclique, toutes les différentielles $d_3^{n;3}$ sont nulles.*

Démonstration. Sous ces conditions, on dispose du morphisme de suites spectrales

$$j : E_*^{**}(X) \longrightarrow E_*^{**}(U).$$

Comme $\mathfrak{q}$ est principal, le morphisme $Cl(D) \to Cl(D_f)$ est bijectif et induit un isomorphisme

$$j_2^{n+3;1} : \widehat{H}^{n+3}(C_p; Cl(D)) \to \widehat{H}^{n+3}(C_p; Cl(D_f)).$$

Ce dernier induit à son tour (par restriction aux noyaux des différentielles $d_2^{n+3;1}$ et $\delta_2^{n+3;1}$) le morphisme $j_3^{n+3;1}$, qui est donc injectif. Par ailleurs, le même argument que dans la preuve précédente montre que $j_3^{n+3;1} \circ d_3^{n;3}$ est nul, ce qui permet de conclure. □

Lemme 3.5. *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, la différentielle $d_4^{-3;3}$ est nulle. Si de plus G est cyclique, toutes les différentielles $d_4^{n;3}$ sont nulles.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le morphisme $h_4^{1;0}$ est injectif.

On vérifie grâce au lemme 3.3 que les groupes d'arrivée et de départ du morphisme

$$h_2^{1;0} : E_2^{1;0}(X) \to E_2^{1;0}(\widetilde{Z})$$

restent inchangés jusqu'à la quatrième page. Le morphisme $h_4^{1;0}$ s'identifie alors à $h_2^{1;0}$, qui est injectif (cf lemme 3.32), ce qui montre la première affirmation.

On montre la deuxième en utilisant à nouveau la périodicité de la cohomologie des groupes cycliques et l'égalité $\widehat{H}^n(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ lorsque n est pair. □

1.3. Applications. Dans tout ce qui suit, L/K est une extension galoisienne de corps de nombres totalement imaginaires de groupe G. On note X (respectivement Y) le spectre de l'anneau d'entiers de L (respectivement de K).

1.3.1. *Majoration et minoration du nombre s d'idéaux premiers ramifiés.* On suppose que l'extension L/K est cyclique d'ordre premier p. On note C_p son groupe de Galois et s le nombre d'idéaux premiers (non nuls) ramifiés dans cette extension.

THÉORÈME 3.6. *On la majoration*

$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; U_L/\mu) + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^0(C_p; Cl(L)).$$

DÉMONSTRATION. Le théorème de localisation fournit les isomorphismes (cf corollaire 3.2)

$$\widehat{H}^n_G(X; \mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^n_G(\widetilde{Z}; \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{F}_p^s.$$

La suite spectrale converge vers $\mathbb{F}_p^s$ en tout degré, donc les groupes $\prod_{i+j=1} E_\infty^{i;j}(X)$ et $\mathbb{F}_p^s$ ont le même cardinal. Ainsi, l'inégalité (immédiate)

$$\sharp(\prod_{i+j=1} E_\infty^{i;j}(X)) \leq \sharp(\prod_{i+j=1} E_2^{i;j}(X))$$

donne la majoration

$$s \leq dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; U_L) + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^0(C_p; Cl(L)). \tag{26}$$

Le groupe μ est cyclique, donc $dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; \mu) \leq 1$. La suite exacte de C_p-modules

$$0 \to \mu \to U_L \to U_L/\mu \to 0$$

donne la suite exacte $\widehat{H}^1(C_p; \mu) \to \widehat{H}^1(C_p; U_L) \to \widehat{H}^1(C_p; U_L/\mu)$ et l'inégalité

$$dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; U_L) \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; U_L/\mu). \tag{27}$$

Les relations (26) et (27) permettent de conclure. □

L'étude de la suite spectrale faite dans la section 4.2 est nécessaire pour minorer le nombre s.

THÉORÈME 3.7. *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, alors*

$$s \geq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^0(C_p; Cl(L)).$$

DÉMONSTRATION. Les lemmes 3.3, 3.4 et 3.5 montrent les égalités suivantes :

$$E_\infty^{-3;3}(X) = E_2^{-3;3}(X) = \mathbb{F}_p \ et \ E_\infty^{-1;1}(X) = E_2^{-1;1}(X) = \widehat{H}^{-1}(C_p; Cl(L)).$$

Cette suite spectrale converge vers $\widehat{H}^n_{C_p}(X; \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{F}_p^s$ donc les groupes $\prod_{i+j=0} E_\infty^{i;j}(X)$ et $\mathbb{F}_p^s$ ont le même cardinal. On obtient l'inégalité

$$s \geq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; Cl(L)).$$

De plus, $\widehat{H}^1(C_p; Cl(L))$ et $\widehat{H}^0(C_p; Cl(L))$ ont le même cardinal car $Cl(L)$ est fini ([**54**] VIII proposition 8). □

1.3.2. *Lorsque L possède une place finie stable par G.* Soit alors $U = Spec(D_f)$ le complémentaire ouvert dans X d'un point fermé x stable sous l'action de G. La suite spectrale $\widehat{H}^p(G; H^q(U; \mathbb{G}_m)) \Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}_G(U; \mathbb{G}_m)$ ne possède que deux lignes non nulles. En observant son terme initial, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 3.8. *Si le groupe de Galois (quelquonque) de l'extension L/K fixe une place finie de L, on a la suite exacte longue*

$$\dots \xrightarrow{d_2^{n-2;1}} \widehat{H}^n(G; D_f^\times) \to \widehat{H}^n_G(U; \mathbb{G}_m) \to \widehat{H}^{n-1}(G; Cl(D_f))$$

$$\xrightarrow{d_2^{n-1;1}} \widehat{H}^{n+1}(G; D_f^\times) \to \widehat{H}^{n+1}_G(U; \mathbb{G}_m) \to \widehat{H}^n(G; Cl(D_f)) \xrightarrow{d_2^{n;1}}$$

Si L/K n'est ramifiée en aucun point de U, toutes les différentielles $d_2^{n;1}$ sont des isomorphismes. Si maintenant G est cyclique, cette suite exacte s'exprime avec le produit des groupes d'inertie pris sur l'ensemble des points fermés de U/G. De plus, si $Cl(D_f^G) = 0$, le lemme 3.3 s'applique et les différentielles $d_2^{n;2}$ sont nulles pour n impair. La suite exacte longue se réduit à une suite exacte courte à six termes.

1.3.3. *Revêtements cycliques d'une sphère homologique.* Dans le contexte de la topologie arithmétique, N. Ramachandran (cf [**50**]) a proposé la définition suivante.

DÉFINITION 3.9. *Le spectre Y de l'anneau d'entiers d'un corps de nombre K est une* 3-sphère à homologie entière *si $H^p(Y; \mathbb{G}_m) = 0$ pour $p \neq 0, 3$ et si $H^0(Y; \mathbb{G}_m)$ est de torsion. Y est une 3-sphère à homologie rationnelle si $H^0(Y; \mathbb{G}_m)$ est de torsion.*

D'après ([**50**] Theorem 3), Y est une *3-sphère à homologie entière* si et seulement si K est un corps quadratique imaginaire dont le groupe de classes est trivial. Alors $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, où d parcourt l'ensemble $\{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$.

PROPOSITION 3.10. *Soient Y une 3-sphère à homologie entière et L/K une extension cyclique de degré n. On suppose que n est premier à 2 dans tous les cas et premier à 2 et 3 pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Alors on a les suites exactes*

$$0 \to \widehat{H}^1(G; Cl(L)) \to \prod I_\mathfrak{q} \to G \to 0,$$

$$0 \to \widehat{H}^1(G; U_L) \to \prod I_\mathfrak{q} \to Cl(L)^G \to 0,$$

où $\prod I_\mathfrak{q}$ désigne le produit des sous-groupes d'inertie dans G indexés sur l'ensemble des places finies de K. En particulier, si $n = p$ est premier, on a

$$Cl(L)^{C_p} \simeq \mathbb{F}_p^{s-1}.$$

DÉMONSTRATION. Sous ces hypothèses, le groupe $\widehat{H}^0(G; U_L)$ est trivial. En effet, U_K est d'ordre 4 pour $d = 1$, d'ordre 6 pour $d = 3$ et d'ordre 2 sinon. De plus, $\widehat{H}^0(G; U_L) = U_K/N(U_L)$ et les éléments de ce groupe sont tués par n qui a été choisi premier au cardinal de U_K.

Toutes les différentielles de la suite spectrale $E_r^{**}(X)$ sont nulles pour $r \geq 2$. Cette suite spectrale est triviale (i.e. $E_\infty^{**}(X) = E_2^{**}(X)$), convergente et il n'y a que deux termes non nuls sur chaque diagonale. On obtient ainsi les deux suites exactes. De plus, pour $n = p$, la première donne

$$s = 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; Cl(L)).$$

On vérifie la dernière affirmation grâce aux égalités

$$dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p; Cl(L)) = dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p; Cl(L)) = dim_{\mathbb{F}_p}Cl(L)^{C_p},$$

qui proviennent respectivement de la finitude du groupe de classes $Cl(L)$ et de l'hypothèse $Cl(K) = 0$.

□

2. Dualité pour la cohomologie équivariante et preuves analogues

Nous montrons dans cette section de quelle manière les cohomologies équivariantes ainsi que les suites spectrales relatives aux G-faisceaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{G}_m$ respectivement, sont liées par une relation de dualité. Cette dernière provient de la dualité d'Artin-Verdier et montre que l'utilisation de ces deux faisceaux revient exactement au même. L'utilisation du G-faisceau $\mathbb{Z}$ permet d'obtenir des preuves tout à fait satisfaisantes du point de vue de la topologie arithmétique mais l'utilisation du groupe multiplicatif apparait plus naturelle en cohomologie étale. On conserve les mêmes notations.

2.1. Dualité. Ici, le groupe de Galois de l'extension L/L^G est un groupe fini quelconque, et L^G est totalement imaginaire. On note $M^D := Hom(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le dual d'un groupe abélien de type fini M.

PROPOSITION 3.11. *On a l'identification* $\widehat{H}^*_G(X; \mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^*_G(Z; \mathbb{Z})$.

DÉMONSTRATION. Le faisceau $\mathbb{Z}$ est adapté (cf **[5]** 4.6). Le résultat est vrai d'après la remarque 2.41.

□

LEMME 3.12. *On a l'identification* $\widehat{H}^n_G(X; \mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^{n-1}_G(X; \mathbb{Z})$.

DÉMONSTRATION. On note toujours Ω l'ensemble des premiers de K se ramifiant dans L. Pour tout $\mathfrak{q}$ de Ω, on choisit un premier $\mathfrak{p}$ de L au-dessus de $\mathfrak{q}$. Soient $\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}$ la composante connexe de $\widetilde{Z}$ correspondant à $\mathfrak{p}$, $i : \mathfrak{p} \to \widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}$ l'immersion fermée, η l'inclusion du point générique de $\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}$ et $G_{\mathfrak{p}}$ le groupe de décomposition en $\mathfrak{p}$. On a

$$\widehat{H}^n_G(X; \mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^n_G(\widetilde{Z}; \mathbb{G}_m)) \simeq \prod_{\Omega} \widehat{H}^n_{G_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}; \mathbb{G}_m), \tag{28}$$

où la deuxième égalité s'obtient en appliquant le lemme de Shapiro sur le terme initial de la suite spectrale $\widehat{H}^p(G; H^q(\widetilde{Z}; \mathbb{G}_m)) \Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}_G(\widetilde{Z}; \mathbb{G}_m)$. On considère maintenant la suite exacte de $G_{\mathfrak{p}}$-faisceaux sur $\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}$

$$0 \to \mathbb{G}_{m;\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}} \to \eta_*\mathbb{G}_{m;\eta} \to i_*\mathbb{Z} \to 0. \tag{29}$$

Les faisceaux $R^q(\eta_*)(\mathbb{G}_m)$ sont nuls pour $q \geq 1$ (cf **[39]**) et η_* préserve les $G_{\mathfrak{p}}$-faisceaux injectifs. On obtient donc une $G_{\mathfrak{p}}$-résolution injective de $\eta_*\mathbb{G}_m$ en appliquant η_* à une $G_{\mathfrak{p}}$-résolution injective de $\mathbb{G}_m$. Ceci permet l'identification $\widehat{H}^*_{G_{\mathfrak{p}}}(\eta; \mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^*_{G_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}; \eta_*\mathbb{G}_m)$. Mais $G_{\mathfrak{p}}$ opère sans inertie sur η et $\mathbb{G}_m$ est adapté sur η. En effet, η est le spectre de $L_{\mathfrak{p}}$, l'hensélisé de L pour la valuation donné par $\mathfrak{p}$ (cf **[14]**). Or le groupe de Galois de ce corps est le même que celui de son complété, dont la dimension cohomologique stricte est 2. On en déduit

$$\widehat{H}^*_{G_{\mathfrak{p}}}(\eta; \mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^*_{G_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}; \eta_*\mathbb{G}_m) = 0. \tag{30}$$

D'autre part, le foncteur i_* est exact et préserve les $G_{\mathfrak{p}}$-faisceaux injectifs. On a donc l'identification

$$\widehat{H}^*_{G_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p};\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^*_{G_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}; i_*\mathbb{Z}). \tag{31}$$

La suite exacte longue de cohomologie équivariante associée à (29) ainsi que les relations (30) et (31) donnent les isomorphismes

$$\widehat{H}^n_{G_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}; \mathbb{G}_{m;\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}}) \simeq \widehat{H}^{n-1}_{G_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p};\mathbb{Z}). \tag{32}$$

De plus, on a

$$\prod_{\Omega} \widehat{H}^{n-1}_{G_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p};\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{n-1}_{G}(Z;\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{n-1}_{G}(X;\mathbb{Z}), \tag{33}$$

où la première égalité s'obtient à nouveau en appliquant le lemme de Shapiro sur le terme initial de la suite spectrale (ou directement sur les groupes de cohomologie équivariante (cf [**3**] VII 5). Finalement, les relations (28), (5.19) et (5.21) permettent de conclure. □

Remarque 3.13. *On a remarqué dans la preuve précédente que $\mathbb{G}_m$ était adapté sur η, où $\eta := Spec(L_{\mathfrak{p}})$ est le spectre d'un corps local sur lequel un groupe de Galois G opère. Un tel corps est de dimension cohomologique ≤ 2 et son groupe de Brauer s'identifie à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (cf [**41**]A.1). La suite spectrale associée ne possède que deux lignes non nulles. Comme elle converge vers 0, toutes ses différentielles*

$$d_3^{p;2} : \widehat{H}^p(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{p+3}(G;L_{\mathfrak{p}}^{\times}),$$

sont bijectives. On retrouve les isomorphismes de la théorie du corps de classe local.

Lemme 3.14. *On a l'identification $\widehat{H}^n_G(X;\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{n-1}_G(X;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

Démonstration. En considérant la suite spectrale de Leray donnée par l'inclusion du point générique de X, on voit que les groupes $H^q(X;\mathbb{Q})$ sont nuls pour $q \geq 1$ (cf [**41**] II.2.10). Le terme initial de la suite spectrale est donc nul puisque $\widehat{H}^*(G;\mathbb{Q}) = 0$. Ainsi, tous les groupes $\widehat{H}^q_G(X;\mathbb{Q})$ sont nuls. La suite exacte longue de cohomologie équivariante associée à la suite exacte de G-faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

donne le résultat.

□

Théorème 3.15. *On a l'isomorphisme*

$$\widehat{H}^n_G(X;\mathbb{G}_m) \simeq \widehat{H}^{2-n}_G(X;\mathbb{Z})^D.$$

Démonstration. D'après les deux lemmes précédents, il suffit de montrer l'isomorphisme

$$\widehat{H}^n_G(X;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{-n}_G(X;\mathbb{Z})^D. \tag{34}$$

De la même manière que dans la preuve du lemme 3.12, le théorème de localisation permet de se ramener au spectre d'un corps fini $x = \mathfrak{p}$, sur lequel un groupe de Galois G opère. Les groupes $H^q(x;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont nuls en dimension supérieure à deux et valent $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour $q = 0, 1$. La suite spectrale

$$\widehat{H}^p(G; H^q(x;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}^p_G(x;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

ne possède que deux lignes non nulles et se réduit (cf [**4**] XV 5.11) à la suite exacte longue

$$... \to \widehat{H}^{n-2}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{n}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{n}_{G}(x;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{n-1}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{n+1}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to ...$$

D'après [**3**] VI.7.3, on a l'identification $\widehat{H}^{n}(G;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{-1-n}(G;\mathbb{Z})^D$. En posant $r := -n$, on obtient

$$... \to \widehat{H}^{r+1}(G;\mathbb{Z})^D \to \widehat{H}^{r-1}(G;\mathbb{Z})^D \to \widehat{H}^{-r}_{G}(x;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{r}(G;\mathbb{Z})^D \to \widehat{H}^{r-2}(G;\mathbb{Z})^D \to ...$$

De la même manière, en observant la suite spectrale associée au G-faisceau $\mathbb{Z}$ sur x, on trouve

$$... \to \widehat{H}^{r-2}(G;\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{r}(G;\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{r}_{G}(x;\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{r-1}(G;\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{r+1}(G;\mathbb{Z}) \to ...$$

Les deux dernières suites exactes se trouvent être duales l'une de l'autre, ce qui permet d'identifier les groupes $\widehat{H}^{n}_{G}(x;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $\widehat{H}^{-n}_{G}(x;\mathbb{Z})^D$. On obtient (34) en appliquant le lemme de Shapiro et le théorème de localisation des deux cotés, ce qui achève la preuve du théorème.

$\square$

D'autre part, les groupes $H^q(X;\mathbb{Z})$ et $H^{3-q}(X;\mathbb{G}_m)$ sont liés par la dualité d'Artin-Verdier de la manière suivante (cf [**5**]) :

$$H^3(X;\mathbb{Z}) = H^0(X;\mathbb{G}_m)^D = U_L^D,\ \ H^2(X;\mathbb{Z}) = H^1(X;\mathbb{G}_m)^D = Cl(L)^D,$$
$$H^2(X;\mathbb{G}_m) = H^1(X;\mathbb{Z})^D = 0,\ \ H^3(X;\mathbb{G}_m) = H^0(X;\mathbb{Z})^D = \mathbb{Z}^D.$$

De plus, quel que soit le G-module M, on a $\widehat{H}^i(G;M^D) = \widehat{H}^{-1-i}(G;M)^D$ (cf [**3**] VI 7.3). On en déduit $E_2^{p;q}(X;\mathbb{G}_m) = E_2^{-1-p;3-q}(X;\mathbb{Z})^D$. Vraisemblablement, les différentielles de la première suite spectrale sont données par les applications duales (ou transposées) de la deuxième. On obtient alors la proposition suivante par exactitude du foncteur $Hom(-;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

PROPOSITION 3.16. *Quel que soit* $2 \leq r \leq \infty$ *et quels que soient les entiers* p *et* q*, on a l'identification*

$$E_r^{p;q}(X;\mathbb{G}_m) = E_r^{-1-p;3-q}(X;\mathbb{Z})^D$$

2.2. Analogues topologiques et preuves analogues. Soit M une variété topologique compacte de dimension trois, fermée, lisse, connexe, orientable et sur laquelle le groupe C_p opère fidèlement par automorphismes préservant l'orientation. On note $Z := M^{C_p}$ le lieu de ramification du revêtement $M \to M/C_p$. Il est constitué de s noeuds, dits noeuds ramifiés. Soient de plus $H_{tor}(M)$ le sous-groupe de torsion de $H_1(M;\mathbb{Z})$ et $H_{free}(M)$ le quotient $H_1(M;\mathbb{Z})/H_{tor}(M)$.

Respectivement, soit X le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombre L sur lequel C_p opère fidèlement et de sorte que L^{C_p} soit totalement imaginaire. On note encore Z le lieu de ramification qui est ici constitué de s places finies ramifiées. Les modules galoisiens $Cl(L)$ et U_L/μ sont les analogues arithmétiques de $H_{tor}(M)$ et $H_{free}(M)$ respectivement. On reprend ci-dessous le théorème 3.6 ainsi que son analogue topologique.

THÉORÈME 3.17. *En supposant* $H_{free}(M/C_p) = 0$ *dans le cadre topologique, on a les inégalités suivantes.*

$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p;H_{free}(M)) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;H_{tor}(M)).$$
$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p;U_L/\mu) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;Cl(L)).$$

On commence par montrer la première inégalité. On réfère à [**56**] pour les détails.

Démonstration. Le théorème de localisation (cf [**58**] 3.1) fournit l'isomorphisme

$$\widehat{H}^n_{C_p}(M;\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^n_{C_p}(Z;\mathbb{Z}).$$

Le groupe C_p opère trivialement sur Z donc la suite spectrale $\widehat{H}^i(C_p;H^j(Z;\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}^{i+j}_{C_p}(Z;\mathbb{Z})$ est triviale (cf [**58**] 1.1). Cette suite spectrale ne possède qu'un seul terme non nul sur chaque diagonale, d'ailleurs isomorphe à $\mathbb{F}_p^s$. On obtient

$$\widehat{H}^n_{C_p}(M;\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^n_{C_p}(Z;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{F}_p^s.$$

En observant le terme initial de la suite spectrale $\widehat{H}^i(C_p;H^j(M;\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}^{i+j}_{C_p}(M;\mathbb{Z})$, on obtient immédiatement

$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;H^2(M;\mathbb{Z})) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p;H^1(M;\mathbb{Z})).$$

La dualité de Poincaré entraine alors (cf [**56**] lemme 3.2)

$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;H_1(M;\mathbb{Z})) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p;H_{free}(M;\mathbb{Z})).$$

On utilise ensuite l'inégalité

$$dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;H_{tor}(M)) \leq dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;H_1(M;\mathbb{Z}))$$

qui découle de l'hypothèse $H_{free}(M/C_p) = 0$ (cf [**56**] preuve du théorème 1.1(1)). □

La preuve du théorème 3.6 prend la forme suivante lorsqu'elle est appliquée au faisceau constant $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Le théorème de localisation fournit l' isomorphisme

$$\widehat{H}^n_{C_p}(X;\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^n_{C_p}(Z;\mathbb{Z}).$$

Le groupe C_p opère trivialement sur Z donc la suite spectrale $\widehat{H}^i(C_p;H^j(Z;\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}^{i+j}_{C_p}(Z;\mathbb{Z})$ est triviale. Cette suite spectrale ne possède qu'un seul terme non nul sur chaque diagonale, d'ailleurs isomorphe à $\mathbb{F}_p^s$. On obtient

$$\widehat{H}^n_{C_p}(X;\mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^n_{C_p}(Z;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{F}_p^s.$$

En observant le terme initial de la suite spectrale $\widehat{H}^i(C_p;H^j(X;\mathbb{Z})) \Longrightarrow \widehat{H}^{i+j}_{C_p}(X;\mathbb{Z})$, on obtient immédiatement

$$s \leq dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p;H^2(X;\mathbb{Z})) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;H^3(X;\mathbb{Z})).$$

La dualité d'Artin-Verdier entraine alors

$$s \leq dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;Cl(L)) + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^1(C_p;U_L).$$

L'inégalité (27)

$$dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;U_L) \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p}\widehat{H}^0(C_p;U_L/\mu)$$

permet de conclure.

□

On reprend maintenant le théorème 3.7 ainsi que son analogue topologique.

THÉORÈME 3.18. *Si $H_1(M;\mathbb{Z})$ s'identifie à $H_{free}(M) \oplus H_{tor}(M)$ en tant que C_p-module et si $s \geq 1$, alors*

$$s \geq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^0(C_p; H_{tor}(M)).$$

Si $Cl(K) = 0$, alors

$$s \geq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^0(C_p; Cl(L)).$$

De la même manière, la démonstration du théorème 3.7 prend une forme plus agréable lorsqu'elle est appliquée au faisceau $\mathbb{Z}$. Les preuves de ces deux résultats reposent alors sur le théorème de localisation, la dualité de Poincaré (respectivement d'Artin-Verdier) et sur une étude un peu plus fine de la suite spectrale (section 3.2 de [**56**] et section 4.2 de ce papier) permettant de montrer que certains modules du terme initial survivent à l'infini.

2.3. Cas des corps de nombres admettant des plongements réels. Dans cette section, les corps de nombres L et $K = L^G$ ne sont plus nécessairement totalement imaginaires. Il est alors indispensable d'utiliser la topologie étale d'Artin-Verdier qui tient compte des places à l'infini. Afin d'alléger l'exposé, nous présentons ici quelques résultats qui seront démontrés plus loin.

Soient X le spectre de l'anneau d'entiers de L, X_∞ l'ensemble des places archimédiennes de L, $\overline{X}$ le couple $(X; X_\infty)$ et φ l'inclusion de X dans $\overline{X}$. On munit $\overline{X}$ de la topologie étale d'Artin-Verdier (cf [**2**]). Les groupes de cohomologie du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m;\overline{X}} := \varphi_* \mathbb{G}_m$ sont respectivement U_L, $Cl(L)$, 0, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et 0 en dimension supérieure à trois (cf [**2**] 2.7). Le groupe de Galois de l'extension L/K opère sur $\overline{X}$ et l'on définit la catégorie des G-faisceaux pour cette topologie ainsi que les groupes de cohomologie équivariante $\widehat{H}^*_G(\overline{X}; F)$. Les résultats des sections 2 et 3 peuvent être appliqués en prenant certaines précautions.

Si $\mathfrak{p}$ est une place finie de L, les notations intervenant dans la proposition suivante sont celles qui ont été introduites dans la section 4.1. Si $\mathfrak{p}$ est une place archimédienne complexe, le couple $(\overline{L}; \overline{\mathfrak{p}})$ est un hensélisé du corps valué $(L; \mathfrak{p})$ (cf [**14**]), où $\overline{\mathfrak{p}}$ désigne un prolongement de $\mathfrak{p}$ à $\overline{L}$. On pose alors $U_\mathfrak{p} := \overline{L}^\times$ et $I_\mathfrak{p}^{(ab)} := I_\mathfrak{p} = G_\mathfrak{p} \subseteq G_{\overline{\mathfrak{p}}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 3.19. *Soit G un groupe fini opérant fidèlement sur $\overline{X}$. On a les isomorphismes ci-dessous, où les deux premiers produits sont pris sur toutes les places de K et le troisième sur l'ensemble des places finies de K.*

– $\widehat{H}^*_G(\overline{X}; \mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \simeq \prod \widehat{H}^*(G_\mathfrak{p}; U_\mathfrak{p})$.
– $\widehat{H}^0_G(\overline{X}; \mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \simeq \prod I_\mathfrak{q}^{(ab)}$.
– $\widehat{H}^1_G(\overline{X}; \mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \simeq \prod \mathbb{Z}/e_\mathfrak{q}\mathbb{Z}$.

Tous les résultats de la section 4.3 se généralisent ainsi à toutes les extensions de corps de nombres avec de légères modifications. Par exemple, si L/K est une extension de corps de nombres de groupe C_p, on a la proposition suivante, où s (respectivement $\overline{s}$) désigne le nombre de places finies (respectivement finies et infinies) ramifiées.

PROPOSITION 3.20. *On a la majoration*

$$s \leq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^1(C_p; U_L/\mu) + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^0(C_p; Cl(L)).$$

Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, alors

$$\overline{s} \geq 1 + dim_{\mathbb{F}_p} \widehat{H}^0(C_p; Cl(L)).$$

On considère à nouveau l'action (fidèle) du groupe C_p sur une 3-variété M et sur un corps de nombres L respectivement, en gardant les notations (et les hypothèses) précédentes. On note aussi s_0 le nombre de places finies ramifiées dans cette extension.

PROPOSITION 3.21. *Si $H_{free}(M) = 0$ et si $s \geq 1$, alors*

$$H_{tor}(M)^{C_p} \simeq \mathbb{F}_p^{s-1}.$$

Si $U_L/\mu = 0$, alors $p = 2$, $s_0 \geq 1$ et

$$Cl(L)^{C_2} \simeq \mathbb{F}_2^{s_0-1}.$$

DÉMONSTRATION. Dans le cadre topologique, les hypothèses $H_{free}(M) = 0$ et $s \geq 1$ assurent que la suite spectrale $E_2^{**}(M;\mathbb{Z})$ est triviale (cf [**56**] 3.3 et 3.4). De la même manière, l'hypothèse $U_L/\mu = 0$ permet de montrer que la suite spectrale $E_2^{**}(\overline{X};\mathbb{G}_m)$ est triviale. Il faut ici utiliser les résultats de la section 4.2 généralisés aux corps de nombres quelconques et considérer de plus le morphisme de suites spectrales induit par l'inclusion du point générique de $\overline{X}$ (l'ensemble des valuations de L), pour montrer que toutes les différentielles sont nulles (cf [**46**]).

Le fait que les deux suites spectrales soient triviales donne immédiatement les deux résultats précédents. □

3. Interprétations des résultats et de leurs preuves

Nous donnons ici une interprétation des résultats et de leurs preuves exposés dans ce travail, afin d'essayer d'éclaircir et d'approfondir le dictionnaire de la topologie arithmétique.

3.1. Quelques éléments du dictionnaire.

3.1.1. Dans les versions précédentes du dictionnaire de la topologie arithmétique ([**50**] et [**52**]), le groupe de Galois G_L^{nr} de l'extension maximale non ramifiée en toutes les places (archimédiennes et ultramétriques) d'un corps de nombre L est vu comme l'analogue du groupe fondamental topologique de la variété "correspondante" M. En effet, il s'agit du groupe fondamental pour la topologie étale d'Artin-Verdier. En suivant cette idée, $H_1(M;\mathbb{Z}) = \pi_1(M)^{ab}$ devrait être l'analogue du groupe de Galois de l'extension abélienne maximale non ramifiée de L. Par la théorie du corps de classe, ce groupe s'identifie à $Cl(L)$. Il n'y aurait donc pas de place pour le groupe des unités. Cette même analogie conduit à montrer que la version arithmétique de la conjecture de Poincaré est fausse (cf [**50**]).

C'est peut-être pour éviter des contradictions de ce type que A. Reznikov a proposé dans la deuxième version du dictionnaire [**53**] 12, de voir un corps de nombre L comme une 3-variété M bordant une 4-variété N de sorte que le morphisme $\pi_1(M) \to \pi_1(N)$ soit surjectif, pour considérer les invariants cohomologiques de N (et non de M). Cependant, le non-sens évoqué ci-dessus est toujours présent dans ce deuxième dictionnaire.

Comme nous le précisons ci-dessous, le travail exposé dans ce papier confirme clairement la première version [**52**] du dictionnaire, et écarte la deuxième [**53**]. En effet, toutes les preuves sont basées sur la cohomologie de $\overline{X}$ et de M pour aboutir à des résultats respectant parfaitement le dictionnaire [**52**].

3.1.2. Nous soutenons les analogies suivantes.

Les corps de nombres, les extensions galoisiennes de corps de nombres L/L^G, les places finies, les places finies ramifiée et l'ensemble des places finies ramifiés doivent être vus respectivement comme des 3-variétés, des revêtements ramifiés galoisiens de 3-variétés $M \to M/G$, des noeuds dans M, des noeuds ramifiés et comme le lieu de ramification (plus précisément, les sous-groupes de décomposition et d'inertie se correspondent). Ici, le terme *3-variété* doit probablement prendre un sens plus large.

De plus, $Cl(L)$ et U_L/μ correspondent, de manière compatible à l'action d'un groupe de Galois, aux groupes $H_{tor}(M)$ et $H_{free}(M)$. D'ailleurs, le paragraphe suivant confirme à nouveau ces deux dernières correspondances.

3.2. Cohomologie de S. Lichtenbaum et topologie arithmétique.

3.2.1. Considérons la topologie Weil-étale. Les résultats de S. Lichtenbaum dans [**37**] montrent que les groupes de cohomologie à support compact de $\overline{X}$ à coefficients entiers devraient être les suivants (cf [**37**] 6.3).

$$\begin{aligned} H_c^q(\overline{X};\mathbb{Z}) &= 0 \text{ pour } q=0,\\ &= (\textstyle\prod_{X_\infty}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \text{ pour } q=1,\\ &= Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \text{ pour } q=2,\\ &= (\mu_L)^{\mathcal{D}} \text{ pour } q=3,\\ &= 0 \text{ pour } q\geq 4.\end{aligned}$$

Le groupe $Pic(\overline{X})$ est le quotient du groupe des idèles par les idèles principales et unités (i.e. $|u_v|_v = 1\ \forall v$). Ci-dessus, $Pic^1(\overline{X})$ est le noyau du morphisme

$$Pic(\overline{X}) \longrightarrow \mathbb{R}^\times$$

donné par la valeur absolue. On note aussi $A^{\mathcal{D}} := Hom(A;\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ le dual de Pontryagin d'un groupe topologique abélien séparé et localement compact A. D'autre part, le sous-groupe de torsion et le quotient libre de $H_c^2(\overline{X};\mathbb{Z})$ sont donnés par la suite exacte (cf [**37**] 6.4)

$$0 \to Cl(L)^{\mathcal{D}} \to Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \to Hom(U_L;\mathbb{Z}) \to 0.$$

D'après l'interprétation de C. Deninger dans ([**11**] 7), la cohomologie de Lichtenbaum correspond à la cohomologie des faisceaux sur M, qui s'identifie d'ailleurs à la cohomologie singulière, car une variété topologique est un espace localement contractile. Puisque M est une variété compacte, la cohomologie à support compact s'identifie à la cohomologie usuelle. Ainsi, $H^2(M;\mathbb{Z})$ doit être l'analogue du groupe $Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}}$. Lorsque M est orientable, la dualité de Poincaré identifie $H^2(M;\mathbb{Z})$ et $H_1(M;\mathbb{Z})$ en tant que groupes abéliens. Dans la situation équivariante, l'action du groupe de Galois sur ces deux groupes se trouve être inversée à travers cet isomorphisme. De plus, $H_c^1(\overline{X};\mathbb{Z})$ s'identifie à $Hom(U_L/\mu;\mathbb{Z})$, c'est-à-dire l'analogue de $Hom(H_{free}(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) = Hom(\pi_1(M);\mathbb{Z})$.

3.2.2. *D'autres éléments du dictionnaire.* D'après le paragraphe précédent, les analogues arithmétiques des groupes $H^1(M;\mathbb{Z})$ et $H^2(M;\mathbb{Z})$ devraient être $Hom(U_L/\mu;\mathbb{Z})$ et $Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}}$ respectivement. Si l'on voit $\overline{X}$ comme un espace orientable, le groupe $H_1(M;\mathbb{Z})$ devrait être l'analogue de $Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}}$. L'action d'un éventuel groupe de Galois G sur ce dernier devrait se faire à travers le groupe opposé à G, afin d'être compatible à l'action de G sur $H_1(M;\mathbb{Z})$. De plus, $Cl(L)$ et U_L correspondent respectivement aux groupes $H_{tor}(M)$ et $H_{free}(M)$ déduits de $H_1(M;\mathbb{Z})$. Une sphère à homologie entière (respectivement rationnelle) est un corps de nombres dont l'analogue de $H_1(M;\mathbb{Z})$ est nul (respectivement de torsion).

Enfin, le groupe G_L^{nr} ne serait pas l'analogue de $\pi_1(M)$ (puisque les abélianisés de ces groupes ne se correspondent pas), mais nous espérons pouvoir revenir plus tard sur cette question.

Remarque 3.22. *Soit* $\overline{X} \to \overline{Y}$ *un morphisme au-dessus de* $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$ *donné par une extension de corps de nombre* $L/K/\mathbb{Q}$*. L'inclusion* $I_K \hookrightarrow I_L$ *induit morphisme* $Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \to Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}}$*. Ainsi, ce groupe dépend fonctoriellement de* $\overline{X}$ *et de manière covariante.*

3.3. Comparaison des hypothèses. Les résultats de A. Sikora étudiés dans ce travail donnent une majoration (3.17), une minoration (3.18) et une égalité dans un cas particulier (3.21), du nombre s de places (respectivement de noeuds) ramifiées dans un revêtement cyclique d'ordre premier. Pour la majoration et l'égalité, les hypothèses faites en topologie sont strictement plus fortes qu'en arithmétique. De plus, d'après ([**56**] 5), elles sont toutes nécessaires en topologie. Malheureusement, nous n'avons pas été en mesure de démontrer (à l'aide des mêmes méthodes) la minoration de s en arithmétique à partir de l'analogue des hypothèses topologiques (qui peuvent être formulées grâce au paragraphe précédent).

Néanmoins, ce travail donne le sentiment que le cadre topologique est "plus général" que celui des corps de nombres. En effet, l'arithmétique apparaît ici beaucoup plus rigide que le cadre topologique. Cette idée vague est d'ailleurs nettement confirmée dans [**11**]. On peut aussi illustrer ce fait par les observations suivantes. Un corps de nombres est de manière unique un revêtement de $\mathbb{Q}$, alors qu'une 3-variété orientable peut s'obtenir d'un grand nombre de manières différentes comme revêtement de $\mathbb{S}^3$. Il existe exactement dix sphères à homologie entière en arithmétique (toutes de degré un ou deux) et une infinité en topologie (cf [**50**]). L'analogue de $H_1(M;\mathbb{Z})$ est plus gros que le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale non ramifiée de L.

Il est d'ailleurs amusant d'imaginer à quoi ressembleraient les preuves des mêmes résultats basées sur la topologie Weil-étale. En supposant que la ligne $E_2^{i;3}(\overline{X};\varphi_!\mathbb{Z}) = \widehat{H}^i(C_p;\mu_L)$ soit non nulle et qu'elle survive à l'infini, on obtiendrait exactement les mêmes démonstrations dans les deux contextes.

On se rend alors compte que les différences entre les preuves arithmétiques et topologiques que nous avons proposées proviennent des "défauts" de la cohomologie étale. Cependant, lorsqu'il n'y pas de ramification à l'infini, ces mêmes défauts n'apparaissent pas dans les groupes de cohomologie étale équivariante modifiée. En effet, ces derniers donnent les "bons" groupes liés à la ramification (c'est-à-dire les mêmes que dans le cadre topologique), ce qui renforce l'analogie des preuves que nous avons proposées. On vérifie cette affirmation en utilisant le théorème de localisation et en observant que les termes initiaux des suites spectrales (par exemple à coefficients dans $\mathbb{Z}$), définies sur le spectre d'un corps fini et sur un cercle munis d'une action d'un groupe fini G, sont en fait les mêmes. Cette analogie n'est d'ailleurs pas respectée par les (quatre premiers) groupes de cohomologie étale équivariante non modifiée. En effet, si G opère trivialement, on a $H^1(Spec(\mathbb{F}_q)_{et};G;\mathbb{Z}) = 0$ et $H^1(\mathbb{S}^1;G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, comme le montre la suite spectrale [**21**] 5.2.9.

Lorsqu'il y a de la ramification à l'infini, les places complexes apparaissent comme des points dans la cohomologie équivariante modifiée.

3.4. Places finies et places archimédiennes.

3.4.1. Dans le topos associé à la topologie Weil-étale sur $\overline{X}$, une place finie est donnée par l'inclusion fermée du topos classifiant $B_{\mathbb{Z}}$. Par ailleurs, l'espace classifiant du groupe discret $\mathbb{Z}$ est le cercle $\mathbb{S}^1$, dont le topos est homotopiquement équivalent à $B_{\mathbb{Z}}$ (cf [**43**] IV.1.1). Il est donc naturel de voir géométriquement une place finie comme l'immersion fermée d'un cercle.

3.4.2. D'après N. Ramachandran, on sait que $\overline{X}$ doit être vu comme la compactification d'une variété non compacte correspondant à X.

Dans le topos associé à la topologie étale (d'Artin-Verdier) sur $\overline{X}$, une place archimédienne est donnée par l'inclusion du topos ponctuel, c'est-à-dire un point du topos étale (cf **[24]** IV.6). C'est la raison pour laquelle les calculs de cohomologie étale font apparaître les places archimédiennes comme des points, les bouts d'une 3-variété non compacte.

Cette analogie offre quelques contradictions. D'une part, toute variété orientable de dimension trois se réalise comme revêtement ramifié de $\mathbb{S}^3$ dont le lieu de ramification est composé de noeuds. Or un corps de nombres non totalement réel est, de manière unique, un revêtement de $\mathbb{Q}$ ramifié à l'infini. Par exemple, une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ ramifiée en au moins un premier ne peut pas être vue comme une variété orientable M au-dessus de $M/C_2 = \mathbb{S}^3$. En effet, dans cette situation, le lieu de ramification ne peut pas être constitué de noeuds et d'un point (isolé dans le lieu de ramification). D'autre part, les places archimédiennes doivent être comptées comme composantes du lieu de ramification dans 3.20, et doivent être ignorées dans 3.21.

Il semble donc que le fait de voir un corps de nombres comme une simple variété orientable pose quelques problèmes dans l'interprétation des places archimédiennes. D'ailleurs, dans les travaux de C. Deninger (cf **[9]** et **[11]**), il n'est pas clair qu'un corps de nombres corresponde à une variété proprement dite.

De plus, dans le topos associé à la topologie Weil-étale, une place archimédienne devrait être donnée par l'inclusion du topos classifiant $B_{\mathbb{R}}$ du groupe topologique $\mathbb{R}$, qui est loin d'être équivalent au topos ponctuel.

3.4.3. Toujours dans les travaux de C. Deninger, une place archimédienne correspond à un point sur lequel $\mathbb{R}$ opère trivialement, ce qui donne lieu au topos $B_{\mathbb{R}}$ (cf **[24]** IV. 2.5). Respectivement, une place finie $\mathfrak{p}$ correspond à l'immersion fermée d'un cercle $\mathbb{R}/log(N\mathfrak{p})\mathbb{Z} = \mathbb{R}/l(\mathfrak{p})\mathbb{Z}$ sur lequel $\mathbb{R}$ opère naturellement. Le topos associé est le topos induit sur l'objet $\mathbb{R}/l(\mathfrak{p})\mathbb{Z}$ de $B_{\mathbb{R}}$ (cf **[24]** IV.5.1). Ce dernier topos est canoniquement équivalent à $B_{l(\mathfrak{p})\mathbb{Z}}$ (cf **[24]** IV.5.8). Par ailleurs, dans le topos associé à la topologie Weil-étale, une place finie $\mathfrak{p}$ est donnée plus exactement par l'immersion fermée de $B_{W_{k(\mathfrak{p})}}$. De plus, en normalisant convenablement, le logarithme de la valeur absolue donne $W_{k(\mathfrak{p})} = log(N\mathfrak{p})\mathbb{Z} = l(\mathfrak{p})\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Ces deux points de vue sont donc compatibles.

4. Preuves dans le cas des corps de nombres admettant des plongements réels

Le but de cette section est de démontrer les résultats sur la cohomologie équivariante des anneaux d'entiers de corps de nombres non totalement imaginaires qui ont été utilisés dans la section 2.3. La cohomologie étale du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres n'est satisfaisante que lorsque ce corps est totalement imaginaire. Les places à l'infini, lorsqu'elles sont réelles, jouent un rôle important dans la cohomologie que l'on ne peut ignorer. La topologie étale d'Artin-Verdier qui tient compte des places archimédiennes est alors nécessaire. Nous rappelons dans un premier temps la définition de cette topologie, qui est associée à $\overline{X}$, l'ensemble de toutes les valuations d'un corps de nombres L. Nous calculons ensuite dans la section 4.2 la cohomologie du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m;\overline{X}}$ au-dessus d'un ouvert quelconque $\overline{U}$ de $\overline{X}$. Ces calculs n'avaient été faits que pour un ouvert $\overline{U}$ de $\overline{X}$ contenant toutes les places archimédiennes de L. Ils sont ensuite nécessaires pour calculer, dans la section 4.4, la cohomologie équivariante de $\overline{X}$ en appliquant le théorème de localisation. En effet, les groupes $H^q(\overline{U}; \mathbb{G}_{m;\overline{X}})$ ne sont nuls à partir d'un certain rang que lorsque $\overline{U}$ contient toutes ces places réelles. Afin d'appliquer le théorème de localisation dans cette situation, il est nécessaire d'alléger ses hypothèses dans la section 4.3.

4.1. La topologie étale d'Artin-Verdier. Soit X le spectre de l'anneau d'entiers D d'un corps de nombres L. On note $j : \eta \to X$ le point générique de X, $\overline{\eta} \to X$ un point géométrique au-dessus de ce point générique, et $X_\infty = \{x_1, ..., x_t\}$ l'ensemble des places à l'infini de L.

La topologie sur X_∞ est définie par la catégorie des ensembles finis au-dessus de X_∞ dans laquelle un recouvrement est une famille finie surjective. La donnée d'un faisceau abélien sur X_∞ est donc équivalente à celle d'une collection de groupes abéliens $S = \{S_{x_i}; x_i \in X_\infty\}$. On définit de la même manière la topologie sur chaque singleton $\{x_i\}$ et on note $\overline{X}$ le couple $(X; X_\infty)$.

Un $\overline{X}$*-schéma connexe* est un couple $\overline{U} = (U, U_\infty)$, où U est un X-schéma connexe au sens classique. Lorsque le schéma U est vide, U_∞ est un singleton au-dessus de X_∞. Si U est un X-schéma non vide, U_∞ est un sous-ensemble de $U(\mathbb{C})/\sim$, l'ensemble des points complexes de U quotienté par la relation d'équivalence définie par la conjugaison complexe. Un $\overline{X}$*-schéma* $\overline{U}$ est une réunion disjointe de $\overline{X}$-schémas connexes. Un *morphisme de* $\overline{X}$*-schémas connexes* $\overline{\phi} : (U, U_\infty) \to (V, V_\infty)$ est défini, si U est non vide, par un morphisme de X-schémas $\phi : U \to V$ induisant une application $\phi_\infty : U_\infty \to V_\infty$. Lorsque U est vide, ce morphisme consiste en la donnée d'une application $U_\infty \to V_\infty$ d'ensembles au-dessus de X_∞. Un $\overline{X}$-schéma connexe est dit *étale* lorsqu'il est non ramifié au-dessus de X, de X_∞ (i.e. un point au-dessus d'une place réelle est réel) et que le schéma sous-jacent est non vide. Un $\overline{X}$*-schéma étale* $\overline{U}$ est une réunion disjointe finie de $\overline{X}$-schémas étales connexes, les composantes connexes de $\overline{U}$. Un morphisme de $\overline{X}$-schémas étales est défini de la même manière qu'un morphisme de $\overline{X}$-schémas. Les produits fibrés $\overline{U} \times_{\overline{X}} \overline{V} := (U \times_X V; U_\infty \times_{X_\infty} V_\infty)$ existent dans la catégorie des $\overline{X}$-schémas étales.

Une famille de morphismes de $\overline{X}$-schémas étales $\{\overline{\phi}_i : \overline{W}_i \to \overline{U}\}$ forme un *recouvrement de* $\overline{U}$ si la famille $\{\phi_i : W_i \to U\}$ est un recouvrement pour la topologie étale sur U et si les applications $\{(\phi_i)_\infty\}$ recouvrent U_∞. La catégorie des $\overline{X}$-schémas étales munie de cet ensemble de recouvrements constitue une topologie de Grothendieck $Et_{\overline{X}}$, la *topologie étale sur* $\overline{X}$. On notera $Ab(\overline{X})$ la catégorie des faisceaux abéliens sur cette topologie.

Les morphismes

$$\varphi : (X; \emptyset) \to \overline{X} \ , \kappa_i : (\emptyset; \{x_i\}) \to \overline{X} \ , \text{ et } \kappa : (\emptyset; X_\infty) = \coprod (\emptyset; \{x_i\}) \to \overline{X}$$

induisent des morphismes de topologies et des foncteurs sur les catégories de faisceaux correspondantes. Explicitement, $\varphi^* : Ab(\overline{X}) \to Ab(X)$ est donné par la restriction d'un faisceau au $\overline{X}$-schéma étale $(X; \emptyset)$. Par définition, le foncteur image directe $\varphi_* : Ab(X) \to Ab(\overline{X})$ est donné par la formule

$$(\varphi_* F)(U; U_\infty) = F((U; U_\infty) \times_{\overline{X}} X) = F(U).$$

La fibre d'un faisceau $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ en un point infini x_i est le groupe

$$\overline{F}_{x_i} := \kappa_i^* \overline{F} := \varinjlim \overline{F}(\overline{U}).$$

Ci-dessus, la limite est prise sur le système filtré formé des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \{x_i\} \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{U} \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \\ & \overline{X} \end{tikzcd}$$

où $\overline{U}$ est un $\overline{X}$-schéma étale connexe. A nouveau, le foncteur image directe

$$\kappa_{i*} : Ab(\{x_i\}) \to Ab(\overline{X})$$

est donné par la formule

$$\kappa_{i*}F(\overline{U}) := F(x_i \times_{\overline{X}} \overline{U}).$$

On a les relations usuelles d'adjonction entre pull-back et images directes. Une suite de faisceaux est exacte si et seulement si elle l'est en chaque fibre, pour tout point géométrique du schéma sous-jacent ainsi qu'en tout point à l'infini. On peut d'ailleurs se limiter aux points géométriques dont les images sont des points fermés de $\overline{X}$. Les foncteurs φ^*, κ^* et κ_* sont exacts. De plus, φ_*, φ^* et κ_* préservent les injectifs.

La catégorie des faisceaux abéliens sur $\overline{X}$ possède suffisamment d'injectifs, comme toute catégorie de faisceaux abéliens sur un site. Ainsi, Les groupes de cohomologie à coefficients dans un faisceau $\overline{F}$ ainsi que d'autres foncteurs dérivés sont bien définis. Les objets de la forme $\varphi_*J_1 \oplus \kappa_*J_2$, où J_1 et J_2 sont injectifs dans les catégories $Ab(X)$ et $Ab(X_\infty)$ respectivement, sont injectifs dans $Ab(\overline{X})$. En effet, les foncteurs φ_* et κ_* préservent les injectifs et la somme (puisqu'il s'agit en fait du produit) de deux injectifs est à nouveau un objet injectif.

Un faisceau $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ est dit *concentré à l'infini* s'il est de la forme $\kappa_*S = \prod \kappa_{i*}S_i$, ou de manière équivalente, s'il satisfait $\varphi^*\overline{F} = 0$ ([**64**] 1.3.3(ii)). De tels faisceaux sont acycliques pour le foncteur des sections globales. En effet, le fait que κ_* préserve les injectifs et qu'il soit exact montre que la suite spectrale de Leray

$$H^p(\overline{X}; R^q(\kappa_*)S) \Longrightarrow H^{p+q}(X_\infty; S)$$

existe et dégénère pour donner les isomorphimes

$$H^n(\overline{X}; \overline{F}) = H^n(\overline{X}; \kappa_*S) = H^n(X_\infty; S).$$

On voit alors que ces groupes sont nuls pour les entiers n supérieurs ou égaux à un.

On clôture cette section par la détermination des foncteurs dérivés droits de φ_*, qui est exact à gauche. Si F est un faisceau sur X et si $\alpha : \overline{\alpha} \to X$ est un point géométrique, les fibres $(\varphi_*F)_\alpha$ et F_α sont les mêmes. La fibre de φ_*F en un point infini x_i est par définition le groupe $\kappa_i^*\varphi_*F = \varinjlim F(U)$, où U est le schéma sous-jacent au $\overline{X}$-schéma $\overline{U}$ parcourant l'ensemble des voisinages étales de $\{x_i\}$ dans $\overline{X}$. Le choix d'un prolongement $\overline{x_i}$ de la place $x_i : L \to \mathbb{C}$ à une clôture algébrique $\overline{L}$ de L définit un isomorphisme

$$\varprojlim U \simeq Spec(\overline{L}^{I_{\overline{x_i}}}),$$

où $I_{\overline{x_i}} \subset Gal(\overline{L}/L)$ est le groupe de décomposition de $\overline{x_i}$. Ce groupe est trivial lorsque x_i est complexe et isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lorsque x_i est réel. Alors, en abusant des notations, on peut écrire

$$(\varphi_*F)_{x_i} = \varinjlim F(U) = F(\varprojlim U) = F(Spec(\overline{L}^{I_{\overline{x_i}}})) = F(Spec(\overline{L}))^{I_{\overline{x_i}}} = F_{\overline{\eta}}^{I_{\overline{x_i}}}.$$

La donnée des fibres du faisceau φ_*F en tout point de $\overline{X}$ permet de vérifier que la famille de foncteurs

$$\{\varphi_*, (R^q(\varphi_*) : F \to \prod_{1\leq i\leq t} \kappa_{i*}H^q(I_{\overline{x_i}}; F_{\overline{\eta}}); \, q \geq 1)\}$$

satisfait les conditions axiomatiques d'un foncteur dérivé. Plus précisément, cette famille de foncteurs transforme fonctoriellement suites exactes courtes en suites exactes longues et de plus, les $R^q(\varphi_*)$ s'annulent sur les injectifs pour $q \geq 1$. Ainsi, les faisceaux $R^q(\varphi_*)F$ sont concentrés à l'infini pour q supérieur ou égal à un.

On note aussi qu'un recouvrement dans la catégorie $Et_{\overline{X}}$ possède toujours un raffinement par un recouvrement fini. En d'autre termes, ce site est noethérien (cf [**1**]). On peut déduire de ceci que la cohomologie étale d'Artin-Verdier commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux, et en particulier aux sommes ([**1**] Corollary 5.4).

4.2. Cohomologie du groupe multiplicatif. Dans cette section, on détermine les groupes $H^*(\overline{U}; \mathbb{G}_{m;\overline{X}})$, lorsque $\overline{U}$ est un $\overline{X}$-schéma étale. Les calculs suivants montrent que ces groupes ne sont nuls à partir de la dimension trois que lorsque $\overline{U}$ contient toutes ses places réelles. En conservant les notations précédentes, on pose

$$\mathbb{G}_{m;\overline{X}} := \varphi_* \mathbb{G}_{m;X} \text{ et } \alpha := \varphi \circ j : \eta \longrightarrow \overline{X}.$$

Quel que soit le point x de $\overline{X}$, $Br(L_x)$ désigne le groupe de Brauer de la complétion de L suivant la place x. Lorsque x est une place ultramétrique, la théorie du corps de classes local fournit un isomorphisme canonique $inv : Br(L_x) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Lorsque x est une place réelle, le morphisme $Br(L_x) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'unique morphisme d'image $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Enfin, ce morphisme est trivial lorsque x est une place complexe. Pour simplifier les notations, on suppose que $\overline{U}$ est un ouvert de $\overline{X}$.

LEMME 3.23. *On a les résultats suivants.*
– $H^0(\overline{U}; \alpha_* \mathbb{G}_{m;\eta}) = L^\times$.
– $H^q(\overline{U}; \alpha_* \mathbb{G}_{m;\eta}) = 0$*, lorsque q est impair*
– $H^q(\overline{U}; \alpha_* \mathbb{G}_{m;\eta}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{U(\mathbb{R})-U_\infty}$*, pour les entiers $q \geq 4$ pairs.*
– *On a la suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^2(\overline{U}; \alpha_* \mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow \sum_{x \in \overline{X}^0 - U_\infty} Br(L_x) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

où la dernière flèche est induite par les morphismes canoniques $Br(L_x) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION. L'égalité $\alpha_* := \varphi_* \circ j_*$ et le fait que foncteur j_* préserve les injectifs assure l'existence, pour tout faisceau F sur η, d'une suite spectrale

$$R^p(\varphi_*) \circ R^q(j_*)F \Longrightarrow R^{p+q}(\alpha_*)(F).$$

D'autre part, le faisceau $R^q(j_*)\mathbb{G}_{m;\eta}$ est nul pour tout q strictement positif. En effet, $R^q(j_*)\mathbb{G}_{m;\eta}$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \to H^q(\eta \times_X V; \mathbb{G}_m)$. Sa fibre en un point géométrique $\overline{x} := Spec(\overline{k(x)}) \to X$ dont l'image est un point fermé x de X, est le groupe $H^q(Spec(L_x^{sh}); \mathbb{G}_m)$, où L_x^{sh} est le corps de fractions d'un anneau local strictement hensélien. Le corps L_x^{sh} est $C1$ (cf [**55**] II.3.3), donc de dimension cohomologique ≤ 1 ([**55**] II.3.2), et le groupe $H^q(Spec(L_x^{sh}); \mathbb{G}_m)$ est nul. De même, la fibre de ce faisceau en un point géométrique générique est nulle, car les groupes $H^q(Spec(\overline{L}); \mathbb{G}_m)$ sont nuls pour $q \geq 1$.

Lorsqu'elle est appliquée au faisceau $\mathbb{G}_{m;\eta}$, la suite spectrale précédente dégénère et se réduit à des isomorphismes. En utilisant l'expression des foncteurs dérivés de φ_* obtenue dans la section précédente, on trouve (pour $n > 0$)

$$R^n(\alpha_*)(\mathbb{G}_{m;\eta}) \simeq R^n(\varphi_*)(j_* \mathbb{G}_{m;\eta}) \simeq \prod_{1 \leq i \leq t} \kappa_{i*} H^n(I_{\overline{x_i}}; \overline{L}^\times).$$

Comme les faisceaux $R^n(\alpha_*)(\mathbb{G}_{m;\eta})$ sont concentrés à l'infini, ils sont $\Gamma_{\overline{U}}$-acycliques. La suite spectrale de Leray

$$H^p(\overline{U}; R^q(\alpha_*)(\mathbb{G}_{m;\eta})) \Longrightarrow H^{p+q}(\eta; \mathbb{G}_{m;\eta})$$

n'a de termes non nuls que sur la colonne d'indice 0 et la ligne d'indice 0. On en tire la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{U};\alpha_*\mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow H^1(\eta;\mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow \textstyle\sum_{x\in U_\infty} H^1(I_{\overline{x}};\overline{L}^\times))$$

$$\longrightarrow H^2(\overline{U};\alpha_*\mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow H^2(\eta;\mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow \textstyle\sum_{x\in U_\infty} H^2(I_{\overline{x}};\overline{L}^\times)) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^n(\overline{U};\alpha_*\mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow H^n(\eta;\mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow \textstyle\sum_{x\in U_\infty} H^n(I_{\overline{x}};\overline{L}^\times) \longrightarrow \cdots$$

Le théorème de Hilbert 90 montre que le groupe $H^1(\eta;\mathbb{G}_{m;\eta})$ est trivial, ce qui prouve l'égalité $H^1(\overline{U};\alpha_*\mathbb{G}_{m;\eta}) = 0$. La dernière flèche de la deuxième ligne s'identifie au morphisme surjectif

$$H^2(\eta;\mathbb{G}_{m;\eta}) \longrightarrow \sum_{x\in U_\infty} Br(L_x).$$

De plus, les groupes $H^q(I_{\overline{x}};\overline{L}^\times)$ sont nuls pour $q \geq 1$ impair, donc la deuxième ligne forme une suite exacte courte. D'autre part, la théorie du corps de classes donne la suite exacte

$$0 \to H^2(\eta;\mathbb{G}_{m;\eta}) \to \sum_{x\in\overline{X}^0} Br(L_x) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0. \tag{35}$$

Ces deux suites exactes courtes fournissent la suivante.

$$0 \to H^2(\overline{U};\alpha_*\mathbb{G}_{m;\eta}) \to \sum_{x\in\overline{X}^0-U_\infty} Br(L_x) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Le morphisme naturel $H^p(L;\mathbb{G}_m) \to \sum_{x\in X_\infty} H^p(L_x;\mathbb{G}_m)$ est un isomorphisme pour $p \geq 3$ (cf **[2]** 2.4). Ainsi, à partir de la dimension trois, la suite exacte longue précédente se réduit à l'identification

$$H^p(\overline{U};\alpha_*\mathbb{G}_{m;\eta}) \simeq \sum_{x\in X_\infty-U_\infty} H^p(I_{\overline{x}};\overline{L}^\times).$$

□

Afin de calculer la cohomologie du groupe multiplicatif, considérons maintenant la suite exacte de faiceaux sur $\overline{X}$

$$0 \to \varphi_*\mathbb{G}_m \to \alpha_*\mathbb{G}_m \to \sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z} \to 0, \tag{36}$$

où X^0 désigne l'ensemble des points fermés de X. La fibre du faisceau $\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z}$ en un point géométrique générique est nulle, car les foncteurs fibres commutent aux sommes. Il suit que les faisceaux $R^q(\psi_*)(\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z})$ sont nuls pour tout q strictement positif, où ψ est l'inclusion de $(U;\emptyset)$ dans $\overline{U}$. La suite spectrale

$$H^p(\overline{U};R^q(\psi_*)(\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z})) \Longrightarrow H^{p+q}(U;\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z}))$$

dégénère pour donner l'isomophisme

$$H^p(\overline{U};\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z}) \simeq H^p(U;\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z}).$$

On a d'autre part

$$H^p(\overline{U};\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z}) = H^q(U;\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z}) = \sum_{x\in X^0} H^q(x;\mathbb{Z}).$$

On en déduit les identifications suivantes.

$$\begin{array}{rcl} H^p(\overline{U};\sum_{x\in X^0} i_{x*}\mathbb{Z}) & = & \sum_{x\in X}\mathbb{Z} \ \text{ pour } \ q=0,\\ & = & \sum_{x\in X}\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ \text{ pour } \ q=2,\\ & = & 0 \ \text{ pour } \ q\neq 0,\,2. \end{array}$$

La suite exacte de cohomologie associée à (36) donne imédiatement la valeur des groupes $H^p(\overline{U};\varphi_*\mathbb{G}_m)$ pour les entiers $p\neq 2,3$. La même suite exacte longue, la suite (35) et une chasse au diagramme donne la suite exacte

$$0\to H^2(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})\to \sum_{x\in\overline{X}-\overline{U}} Br(L_x)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to H^3(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})\to 0.$$

Proposition 3.24. *Les groupes de cohomologie du groupe multiplicatif sont les suivants.*
– $H^0(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) = \mathcal{O}_X(U)^\times$.
– $H^1(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) = Pic(U)$
– $H^p(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{U(\mathbb{R})-U_\infty}$*, lorsque l'entier* $p\geq 4$ *est pair.*
– $H^p(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) = 0$*, lorsque l'entier* $p\geq 5$ *est impair.*
– *On a la suite exacte*

$$0\to H^2(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{X}})\to \sum_{x\in\overline{X}-\overline{U}} Br(L_x)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to H^3(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{X}})\to 0.$$

En particulier, si $\overline{U}$ est le complémentaire dans $\overline{X}$ d'un ensemble fini (non vide) de points finis (fermés), alors ces groupes sont nuls après la dimension deux. Si $\overline{U}$ est le complémentaire dans $\overline{X}$ d'un seul point fini, ils sont nuls après la dimension un.

4.3. Allègement des hypothèses du théorème de localisation. Les calculs précédents montrent que le faisceau du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m;\overline{X}}$ n'est pas adapté. Cependant, le théorème 2.39 est vrai sous une hypothèse plus faible et peut ainsi être appliqué à ce faisceau. Le point de vue adopté ici est celui de la topologie étale sur un schéma au sens classique, mais les preuves s'adaptent sans aucun changement au cas de la topologie étale d'Artin-Verdier.

Définition 3.25. *Soit* $X\to Y$ *un revêtement étale galoisien de groupe* G*. On dit qu'un* G*-faisceau* F *sur* X *est* faiblement adapté *lorsqu'il existe un entier* n *tel que*

$$H^q(X/G';\pi_*^G F)=0,$$

pour tout sous-groupe G' *de* G *et pour tout* $q\geq n+1$.

Proposition 3.26. *Soient* $\pi: X\to Y$ *un revêtement étale de groupe* G *et* F *un* G*-faisceau faiblement adapté sur* X*. Alors* $\widehat{H}^*_G(X;F)=0$.

Démonstration. On note

$$0\to\pi_*^G F\to C^0\to\ldots\to C^{n-1}\to Z^n\to 0$$

la résolution de Godement tronquée au cran n de $\pi_*^G F$. Alors

$$0\to F=\pi^*\pi_*^G F\to\pi^*C^0\to\ldots\to\pi^*C^{n-1}\to\pi^*Z^n\to 0$$

est une G-résolution acyclique de F. En effet, π^* est exact, les faisceaux π^*C^i sont flasques et l'égalité $H^q(X;Z^n) = H^{n+q}(X;\pi_*^G F)$ montre que π^*Z^n est acyclique pour le foncteur des sections globales. On commence par montrer que les $\pi^*C^i(X) = C^i(X)$ sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules cohomologiquement triviaux. Soit G' un sous-groupe de G. On considère la suite spectrale (cf [**40**] III.2.7)

$$\check{H}^p(X \to X/G'; \underline{H}^q(C^i)) \Longrightarrow H^{p+q}(X/G'; C^i).$$

Le faisceau C^i est flasque donc les préfaisceaux $\underline{H}^q(C^i)$ sont nuls pour tout q strictement positif. Cette suite spectrale dégénère et on obtient, pour tout n strictement positif (cf [**40**] III 2.6)

$$H^n(G'; C^i(X)) = \check{H}^n(X \to X/G'; C^i) = H^n(X/G'; C^i) = 0.$$

Pour tout sous-groupe G' de G, $C^i(X)$ est $\Gamma_{G'}$-acyclique. Le $\mathbb{Z}[G]$-module $C^i(X)$ est donc cohomologiquement trivial.

Montrons que $\pi^*Z^n(X) = Z^n(X)$ est cohomologiquement trivial. Soit G' un sous-groupe de G. On regarde à nouveau la suite spectrale

$$\check{H}^p(X \to X/G'; \underline{H}^q(Z^n)) \Longrightarrow H^{p+q}(X/G'; Z^n).$$

Lorsque l'on fixe un entier q strictement positif, les groupes $\check{H}^p(X \to X/G'; \underline{H}^q(Z^n))$ sont les groupes de cohomologie du complexe de Cech suivant.

$$0 \to \underline{H}^q(Z^n)(X) \to \underline{H}^q(Z^n)(X \times_{X/G'} X) \to \underline{H}^q(Z^n)(X \times_{X/G'} X \times_{X/G'} X) \to ...$$

Le morphisme $X \to X/G'$ est un revêtement étale galoisien. On obtient par définition

$$X \times_{X/G'} X = \coprod_{G'} X = G' \times X.$$

Comme le préfaisceau $\underline{H}^q(Z^n)$ transforme les unions disjointes en produits directs, le complexe de Cech précédent s'identifie au suivant (cf [**40**] III 2.6) :

$$0 \to H^q(X;Z^n) \to \prod_{G'} H^q(X;Z^n) \to ... \to \prod_{(G')^r} H^q(X;Z^n) \to ...$$

L'égalité $H^q(X;Z^n) = H^{n+q}(X;\pi_*^G F)$ montre alors que ce complexe est nul lorsque q est strictement positif. La suite spectrale dégénère pour donner les isomorphismes

$$\check{H}^r(X \to X/G'; Z^n) \simeq H^r(X/G'; Z^n).$$

On en conclut comme ci-dessus que le $\mathbb{Z}[G]$-module $Z^n(X)$ est cohomologiquement trivial.

Finalement, F se plonge dans une G-résolution acyclique finie dont les sections globales forment un complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules cohomologiquement triviaux. On obtient la conclusion annoncée en utilisant 2.31 et 2.26. □

Soit X un shéma connexe localement nothérien sur lequel un groupe fini G opère fidèlement et de manière admissible. On note Z le lieu de ramification et X' son complémentaire ouvert. Si U est un X-schéma étale, on pose $U' = U \times_X X'$. La démonstration du théorème 18 est valable sous les hypothèses suivantes grâce à la proposition 3.26.

Théorème 3.27. *Soient $\varphi : U \to X$ un un G-voisinage étale de Z dans X, V l'image de U dans X et F un G-faisceau sur X. Si $F \mid X'$, $F \mid U'$ et $F \mid V'$ sont faiblement adaptés, alors le morphisme canonique $\widehat{H}^*_G(X;F) \to \widehat{H}^*_G(U;\varphi^*F)$ est un isomorphisme.*

4.4. Cohomologie équivariante sur $\overline{X}$. On considère une extension galoisienne finie de corps de nombres L/K de groupe G. On note X le spectre de l'anneau d'entiers de L et $\overline{X}$ le couple $(X; X_\infty)$. Respectivement, Y désigne le spectre de l'anneau d'entiers de K et $\overline{Y}$ le couple $(Y; Y_\infty)$. Le groupe de Galois G opère sur $\overline{X}$ par $\overline{Y}$-automorphismes. Un faisceau $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ est un G-faisceau lorsqu'il est muni d'une G-linéarisation, cette dernière étant à nouveau définie par une famille de morphismes $\{\varphi_\sigma : \sigma_*\overline{F} \to \overline{F}; \sigma \in G\}$ satisfaisant les mêmes conditions de transitivité. On note $Ab(G; \overline{X})$ la catégorie abélienne des G-faisceaux pour la topologie étale sur $\overline{X}$. Les G-faisceaux de la forme $\varphi_* J_1 \oplus \kappa_* J_2$, où J_1 et J_2 sont des G-faisceaux injectifs respectivement sur X et X_∞, sont injectifs. De plus, tout objet de $Ab(G; \overline{X})$ se plonge dans un tel G-faisceau. Un G-faisceau injectif est aussi injectif en tant que faisceau. Tout G-faisceau $\overline{F}$ se plonge dans une G-résolution injective, ce qui permet de définir les groupes de cohomologie équivariante modifiée $\widehat{H}^*_G(\overline{X}; \overline{F})$ pouvant d'ailleurs se calculer à partir de G-résolutions acycliques. La suite spectrale

$$\widehat{H}^p(G; H^q(\overline{X}; \overline{F})) \Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}_G(\overline{X}; \overline{F})$$

converge. Soit M un G-système de points géométriques sur X. On forme un G-système $\overline{M}$ de points sur $\overline{X}$ en ajoutant à M les points de X_∞. Le morphisme canonique

$$u : \coprod_{\alpha \in M} \overline{\alpha} \coprod X_\infty \longrightarrow \overline{X}$$

est compatible à l'action de G. Lorsque $\overline{F}$ est un G-faisceau sur $\overline{X}$, on pose $C^0(\overline{F}) := u_* u^* \overline{F}$, afin de définir la résolution de Godement de $\overline{F}$, qui en est une G-résolution flasque. Elle se manipule exactement comme sur un schéma classique. Par exemple, si $\overline{\varphi} : \overline{U} \to \overline{X}$ est un morphisme étale, on a $C^0(\overline{F}) = \prod_{\overline{\varphi} \circ w \in \overline{M}} \overline{F}_w$.

4.5. Voisinages étales réels.

4.5.1. En présence du groupe fini G opérant sur $\overline{X}$, on note $\overline{Z} = Z \coprod Z_\infty$ le lieu de ramification du revêtement $\overline{\pi} : \overline{X} \to \overline{X}/G$. Le schéma Z est le lieu de ramification dans X du revêtement $\pi : X \to X/G$ et Z_∞ est l'ensemble des points x de X_∞ possèdant un stabilisateur $I_x \subset G$ non trivial.

Un *voisinage étale de* $\overline{Z}$ *dans* $\overline{X}$ est un $\overline{X}$-schéma étale $\overline{U}$ tel que la projection $\overline{U} \times_{\overline{X}} \overline{Z} \to \overline{Z}$ est un isomorphisme. Le calcul des groupes $H^q(\overline{U}; \mathbb{G}_{m;\overline{U}})$ montre que $\overline{U}$ peut être vu comme un objet de dimension finie si et seulement si U_∞ contient toutes les places réelles de U. En particulier, le faisceau $\mathbb{G}_{m;\overline{X}}$ n'est pas adapté sur X mais seulement faiblement adapté sur tous les $\overline{X}$-schémas étales contenant toutes leurs places réelles. Ainsi, le théorème de localisation ne s'applique qu'à des voisinages étales $\overline{U}$ contenant toutes leurs places réelles et de sorte que l'image de $\overline{U}$ dans $\overline{X}$ contienne aussi toutes ses places réelles.

Définition 3.28. *Un* voisinage étale réel de $\overline{Z}$ dans $\overline{X}$ *est un diagrame commutatif*

$$\begin{tikzcd} X(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{U} \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \\ & \overline{X} \end{tikzcd}$$

où $\overline{\varphi} : \overline{U} \to \overline{X}$ *est un voisinage étale de* $\overline{Z}$ *contenant toutes ses places réelles (i.e.* $U(\mathbb{R}) \subseteq U_\infty$*) et tel que chaque composante connexe de* $\overline{U}$ *contient au moins un point de* $\overline{\varphi}^{-1}(X(\mathbb{R}) \cup \overline{Z})$.

4.5.2. Soient $\overline{U} \to \overline{X}$ et $\overline{V} \to \overline{X}$ deux voisinages étales réels de $\overline{Z}$. Un *morphisme de voisinages étales réels* est une flèche $\overline{U} \to \overline{V}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \overline{V} \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{U} \arrow[d] \\ X(\mathbb{R}) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

On peut vérifier qu'il existe au plus un morphisme de $\overline{U}$ dans $\overline{V}$ en tant que voisinages étales réels de $\overline{Z}$. De plus, le produit fibré $\overline{U} \times_{\overline{X}} \overline{V}$ (éventuellement privé de certaines composantes connexes) est un voisinage étale réel de $\overline{Z}$ et les projections sur les composantes $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont bien des morphismes de voisinages étales réels. Autrement dit, l'ensemble des voisinages étales réels est filtré.

4.5.3. La limite projective de ces objets s'écrit de la manière suivante.

$$\overline{X}^{hens} = (X^{hens}; X^{hens}_\infty) := \varprojlim \overline{U} \simeq \coprod_{x \in Z} Spec(D^h_x) \coprod_{x \in Z_\infty} (Spec(\overline{L}); \overline{x}) \coprod_{x \in X(\mathbb{R})} (Spec(\overline{L}^{I_{\overline{x}}}); \overline{x}_{|\overline{L}^{I_{\overline{x}}}}).$$

Si x est un élément de Z, l'anneau D^h_x désigne un hensélisé de l'anneau d'entiers D de L en la place finie x. Si x est un élément de Z_∞, alors $(\overline{L}; \overline{x})$ est un *hensélisé du corps valué* $(L; x)$ (cf [**14**]). Enfin, pour un élément x de $X(\mathbb{R})$, le couple $(\overline{L}^{I_{\overline{x}}}; \overline{x}_{|\overline{L}^{I_{\overline{x}}}})$ est à nouveau hensélisé du corps valué $(L; x)$. Lorsque x est une place réelle de L, une extension de L de la forme $\overline{L}^{I_{\overline{x}}}$ est une *clôture réelle de* L dont l'ordre prolonge celui de L défini par x. Une telle extension est ordonnée de manière unique, car les carrés déterminent les positifs. Par conséquent, cette extension possède un unique plongement réel. De plus, cette extension est unique à isomorphisme unique près (cf [**35**] XI.2).

4.5.4. Un *G-voisinage étale réel de $\overline{Z}$ dans $\overline{X}$* est un voisinage étale réel muni d'une action de G compatible à celle définie sur $\overline{X}$. Cette action est alors définie de manière unique. Lorsque $\overline{\phi} : \overline{U} \to \overline{X}$ est un voisinage étale réel de $\overline{Z}$ et σ un élément de G, on note ${}_\sigma\overline{U}$ le $\overline{X}$-schéma $\sigma \circ \overline{\phi} : \overline{U} \to \overline{X}$. C'est à nouveau un voisinage étale réel de $\overline{Z}$, car $\overline{Z}$ et $X(\mathbb{R})$ sont stables par G. En considérant les objets de la forme $\prod_{\sigma \in G} {}_\sigma\overline{U}$ (où le produit fibré est pris sur $\overline{X}$), on voit que l'ensemble des G-voisinages étales réels de $\overline{Z}$ forme un système cofinal dans celui des voisinages étales réels.

4.5.5. *Revêtements étales galoisiens.* Dans [**64**] 2.6.1, T. Zink a proposé la définition suivante.

DÉFINITION 3.29. *Soit $\overline{\pi} : \overline{U} \to \overline{V}$ un morphisme de $Et_{\overline{Y}}$. On dit que $\overline{\pi}$ est un* revêtement étale galoisien *de groupe G lorsque les conditions suivantes sont satisfaites.*
- *Le morphisme de schémas $\pi : U \to V$ est un revêtement étale galoisien de groupe G.*
- *Le groupe G opère librement sur U_∞ et l'ensemble des trajectoires U_∞/G est en bijection avec V_∞.*

Soit $\overline{U}$ un $\overline{Y}$-schéma étale sur lequel G opère par $\overline{Y}$-automorphismes et sans inertie, où le groupe d'inertie d'un point infini est le stabilisateur dans G de la place archimédienne correspondante. Chaque composante connexe du schéma sous-jacent U est un ouvert du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres. On montre que le schéma U est affine en utilisant la finitude du groupe de classes d'un corps de nombres (cf [**38**] 2.3.4 Ex. 3.19). Le quotient de $\overline{U}$ par G est alors défini par $\overline{U}/G := (U/G; U_\infty/G)$, et le morphisme $\overline{U} \to \overline{U}/G$ est un revêtement étale galoisien.

4.6. Calcul des groupes $\widehat{H}^*_G(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}})$. L'objectif de cette section est de démontrer la proposition 3.19 qui est reprise ci-dessous. On fixe les notations comme suit. Pour chaque point y de $\overline{Y}$, on choisit un point x de $\overline{X}$ au-dessus de y dont on note G_x et I_x les groupes de décomposition et d'inertie. L'indice d'inertie e_y est le cardinal du groupe I_x. On note $I_y^{(ab)}$ le groupe d'inertie de l'abélianisé de G_x. Plus précisément, ce groupe est défini par la suite exacte

$$0 \to I_y^{(ab)} \to G_x^{ab} \to Gal(k(x)/k(y)) \to 0.$$

On désigne par D_x^h l'hensélisé de l'anneau d'entiers D de L en une place ultramétrique x. Lorsque x est une place complexe, on pose $D_x^h = \overline{L}$. On désigne par U_x le groupe des unités de D_x^h. En particulier, on a $U_x = \overline{L}^\times$ si x est complexe.

Proposition 3.30. *Soit G un groupe fini opérant fidèlement sur $\overline{X}$. On a les isomorphismes ci-dessous, où les deux premiers produits sont pris sur toutes les places de K et le troisième sur l'ensemble des places finies de K.*

– $\widehat{H}^*_G(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \simeq \prod_{y\in\overline{Y}} \widehat{H}^*(G_x;U_x)$.

– $\widehat{H}^0_G(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \simeq \prod_{y\in\overline{Y}} I_y^{(ab)}$.

– $\widehat{H}^1_G(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \simeq \prod_{y\in Y} \mathbb{Z}/e_y\mathbb{Z}$.

Démonstration. Le complémentaire $\overline{X}'$ de $\overline{Z}$ dans $\overline{X}$ contient toutes les places réelles de $\overline{X}$. Soit $\overline{U}$ un G-voisinage étale réel de $\overline{Z}$ dans $\overline{X}$. Le G-faisceau $\mathbb{G}_{m;\overline{X}}$ est alors faiblement adapté sur $\overline{X}'$, $\overline{U}\times_{\overline{X}}\overline{X'}$ et $\overline{V}\times_{\overline{X}}\overline{X'}$, où $\overline{V}$ est l'image de $\overline{U}$ dans $\overline{X}$. Le théorème de localisation 3.27 s'applique et montre que le morphisme canonique

$$\widehat{H}^*_G(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \longrightarrow \widehat{H}^*_G(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})$$

est un isomorphisme. Pour chacun de ces G-voisinages étales réels, on dispose d'une suite spectrale convergente

$$\widehat{H}^p(G;H^q(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})) \Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})) \simeq \widehat{H}^{p+q}(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}})).$$

Ces suites spectrales forment un système inductif dont la limite est la suite spectrale convergente

$$E_2^{p;q}(\overline{X}^{hens}) := \widehat{H}^p(G;\varinjlim H^q(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})) \Longrightarrow \widehat{H}^{p+q}(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}),$$

car la cohomologie d'un groupe fini commute aux limites inductives.

Pour éviter de passer à la limite dans la cohomologie étale, on préfère calculer directement les groupes $\varinjlim H^q(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})$. Chacun de ces voisinages étales réels $\overline{U}$ contient toutes ses places réelles, donc pour (presque) tout $\overline{U}$, on a $H^q(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}}) = 0$ dès que q est strictement supérieur à deux. Pour q valant 0 ou 1, on a l'égalité $H^q(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}}) = H^q(U;\mathbb{G}_{m;U})$. Dans ces cas, et comme la cohomologie étale commute aux limites projectives de schémas, on a

$$\varinjlim H^q(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}}) = \varinjlim H^q(U;\mathbb{G}_{m;U}) = H^q(\varprojlim U;\mathbb{G}_{m;U}) = H^q(X^{hens};\mathbb{G}_m).$$

Ce groupe est donc nul pour $q = 1$ et $q > 2$. En effet, la première assertion est vraie grâce au théorème de Hilbert 90 et grâce au fait que la cohomologie étale d'un anneau local hensélien s'identifie à celle de son corps résiduel (cf [**57**]). Montrons que le groupe $\varinjlim H^2(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})$ est nul. Soient $\overline{U} = \coprod \overline{U_i}$ le coproduit des composantes connexes de $\overline{U}$, X_i le spectre de l'anneau d'entiers dont U_i est un ouvert, K_i le corps de fonctions de U_i et $(K_i)_x^h$ l'hensélisé du corps K_i en une valuation x. On a le morphisme de suites exactes suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(\overline{U_i};\mathbb{G}_{m;\overline{U_i}}) & \longrightarrow & \sum_{x\in X_i-U_i} Br\,(K_i)_x^h & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^2(U_i;\mathbb{G}_{m;U_i}) & \longrightarrow & \sum_{x\in \overline{X_i}-U_i} Br\,(K_i)_x^h & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En observant la suite exacte "noyau-conoyau", on trouve la suite exacte

$$0 \to H^2(\overline{U_i};\mathbb{G}_{m;\overline{U_i}}) \to H^2(U_i;\mathbb{G}_{m;U_i}) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{U_i(\mathbb{R})} \to 0,$$

puis la suivante

$$0 \to H^2(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}}) \to H^2(U;\mathbb{G}_{m;U}) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{U(\mathbb{R})} \to 0.$$

Enfin, par exactitude des limites inductives filtrantes, on obtient la suite exacte

$$0 \to \varinjlim H^2(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}}) \to \varinjlim H^2(U;\mathbb{G}_{m;U}) \to \varinjlim (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{U(\mathbb{R})} \to 0.$$

D'autre part, on a les égalités

$$\varinjlim H^2(U;\mathbb{G}_{m;U}) = H^2(X^{hens};\mathbb{G}_m) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{X(\mathbb{R})},$$

et les identifications

$$\begin{aligned} \varinjlim (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{U(\mathbb{R})} &= \varinjlim Hom(U(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &&= Hom(\varprojlim (U(\mathbb{R}));\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= Hom((\varprojlim U)(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &&= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{X(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

En effet, les ensembles $Hom(-,-)$ ci-dessus sont constitués d'applications d'ensembles finis. La dernière suite exacte montre alors que le groupe $\varinjlim H^2(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})$ est nul.

Finalement, les groupes $\varinjlim H^q(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}})$ sont nuls pour tous les entiers q strictement positifs. La suite spectrale $E_*^{**}(\overline{X}^{hens})$ dégénère et se réduit aux isomorphismes

$$\widehat{H}_G^*(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \simeq \widehat{H}^*(G;\prod_{x\in Z}(D_x^h)^\times) \oplus \widehat{H}^*(G;\prod_{x\in Z_\infty}\overline{L}^\times) \oplus \widehat{H}^*(G;\prod_{x\in X(\mathbb{R})}(\overline{L}^{I_{\overline{x}}})^\times).$$

Le groupe de Galois G opère librement sur $X(\mathbb{R})$ donc $\prod_{x\in X(\mathbb{R})}(\overline{L}^{I_{\overline{x}}})^\times$ est un $\mathbb{Z}[G]$-module induit. En particulier, ce $\mathbb{Z}[G]$-module est cohomologiquement trivial. Les groupes

$$\widehat{H}^*(G;\prod_{x\in Z}(D_x^h)^\times)$$

ont été calculés dans la section 1.1. Enfin, on montre facilement que les $\widehat{H}^q(G;\prod_{x\in Z_\infty}\overline{L}^\times)$ sont nuls lorsque q est impair et isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Z_\infty/G}$ pour les valeurs paires de q.

□

4.7. Etude de la suite spectrale de cohomologie équivariante $E_*^{**}(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}})$. Le terme initial de cette suite spectrale s'écrit exactement de la même manière que dans la section 1.2. On note à nouveau U_L le groupe des unités de L, $Cl(L)$ le groupe des classes et U_x celui des unités de l'hensélisé D_x^h de D suivant la place ultramétrique ou complexe x. Le groupe de Galois G opère de manière naturelle sur les groupes

$$H^q(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) = U_L,\ Cl(L),\ 0,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ 0.$$

On peut par exemple vérifier que G opère trivialement sur $H^3(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en utilisant l'invariance sous l'action de G du morphisme

$$Norme : H^3(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \to H^3(\overline{Y};\mathbb{G}_{m;\overline{Y}}),$$

qui est bijectif d'après ([**2**] 3.2).

LEMME 3.31. *On note d_*^{**} les différentielles de la suite spectrale $E_*^{**}(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}})$. On a les résultats suivants.*

(1) *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, la différentielle $d_2^{-1;1}$ est nulle.*
(2) *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, G cyclique et n impair, les différentielles $d_2^{n;1}$ sont nulles.*
(3) *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial et si G est cyclique, toutes les différentielles $d_3^{n;3}$ sont nulles.*
(4) *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, la différentielle $d_4^{-3;3}$ est nulle.*
(5) *Si le groupe $Cl(K)$ est trivial, G cyclique, et n impair, les différentielles $d_4^{n;3}$ sont nulles.*

L'existence d'un morphisme de suites spectrales

$$h_*^{**} : E_*^{**}(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \to {}'E_*^{**}$$

tel que la flèche $h_r^{p+r;q-r+1}$ soit injective et que le groupe ${}'E_r^{p;q}$ soit nul assure que la différentielle $d_r^{p;q}$ est nulle. Les preuves ci-dessous reposent sur cette observation.

DÉMONSTRATION. On utilise le morphisme de suites spectrales

$$h : E_*^{**}(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \to E_*^{**}(\overline{X}^{hens})$$

pour montrer les trois premières assertions. En effet, le morphisme $h_2^{1;0}$ est donné par la flèche canonique $\widehat{H}^1(G;U_L) \to \widehat{H}^1(G;\prod_{x\in Z} U_x)$ qui est injective lorsque le groupe $Cl(K)$ est trivial d'après le lemme 3.32, ce qui prouve (1). On obtient l'assertion (2) en utilisant la périodicité de la cohomologie des groupes cycliques.

Si le groupe $Cl(K)$ est trivial et si G est cyclique, il existe un point fini x de $\overline{X}$ non ramifié dans l'extension L/K et stable par G. On pose $\overline{U} := \overline{X} - x$. Dans ces conditions, le point x est un idéal premier non nul principal et $Pic(U)$ s'identifie à $Pic(X)$. Le morphisme de suites spectrales

$$j : E_*^{**}(\overline{X};\mathbb{G}_{m;\overline{X}}) \longrightarrow E_*^{**}(\overline{U};\mathbb{G}_{m;\overline{U}}),$$

permet de montrer l'affirmation (3). De même, la preuve du lemme 3.5 permet de montrer (4) et (5). □

4.8. Conclusion. Toutes les preuves et résultats de la section 1.3 se généralisent ainsi aux extension de corps de nombres quelconques. On obtient en particulier une démonstration de la proposition 3.20.

4.9. Complément technique.

LEMME 3.32. *Soient L/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe G, D et R les anneaux d'entiers de L et K respectivement. On suppose que $Cl(K)$ est trivial. On note U_L (respectivement U_K) le groupe des unités de L (respectivement de K). Soient $(\mathfrak{q}_j)_{1\leq j\leq r}$ les idéaux premiers finis de K qui se ramifient dans l'extension L/K et $(\mathfrak{p}_i)_{1\leq i\leq s}$ les idéaux premiers de L au-dessus des $\mathfrak{q}_j$. Soit $U_{\mathfrak{p}_i}$ (respectivement $U_{\mathfrak{q}_j}$) le groupe des unités de l'hensélisé $D^h_{\mathfrak{p}_i}$ de l'anneau local $D_{(\mathfrak{p}_i)}$ (respectivement de l'hensélisé $R^h_{\mathfrak{q}_j}$ de l'anneau local $R_{(\mathfrak{q}_j)}$), L_i et K_j les corps de fractions de $D^h_{\mathfrak{p}_i}$ et $R^h_{\mathfrak{q}_j}$.*

Si $Cl(K)$ est trivial, alors le morphisme canonique

$$H^1(G; U_L) \to H^1(G; \prod_{1\leq i\leq s} U_{\mathfrak{p}_i})$$

est injectif.

DÉMONSTRATION. Soit X^0 l'ensemble des places finies de L. Le groupe de Galois opère sur X^0 et on a le morphisme de $\mathbb{Z}[G]$-modules $div : L^\times \to \sum_{\mathfrak{p}\in X^0} \mathbb{Z}$ donné par les valuations. On note W l'image du morphisme div. On a le morphisme de suites exactes de $\mathbb{Z}[G]$-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & U_L \arrow[r] \arrow[d] & L^\times \arrow[r, "div"] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod_{1\leq i\leq s} U_{\mathfrak{p}_i} \arrow[r] & \prod_{1\leq i\leq s} L_i^\times \arrow[r] & \prod_{1\leq i\leq s} \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En utilisant le théorème de Hilbert 90 et le fait que les $H^q(G; ...)$ forment un foncteur cohomologique, on obtient le morphisme de suites exactes suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & U_K \arrow[r] \arrow[d] & K^\times \arrow[r, "div|K^\times"] \arrow[d] & W^G \arrow[r] \arrow[d, "p|W^G"] & H^1(G; U_L) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod_{1\leq j\leq r} U_{\mathfrak{q}_j} \arrow[r] & \prod_{1\leq j\leq r} K_j^\times \arrow[r, "\overline{v}"] & \prod_{1\leq j\leq r} \mathbb{Z} \arrow[r] & H^1(G; \prod_{1\leq i\leq s} U_{\mathfrak{p}_i}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Alors j s'identifie au morphisme

$$W^G/Im(div \mid K^\times) \longrightarrow (\prod_{1\leq i\leq r} \mathbb{Z})/Im(\overline{v})$$

induit par p, dont on montre facilement qu'il est injectif lorsque $Cl(K)$ est trivial.

$\square$

CHAPITRE 4

La catégorie des faisceaux sur le site Weil-étale d'un corps de nombres

Au cours des trois chapitres précédents, nous avons pu remarquer l'absence d'une théorie cohomologique respectant les analogies de la topologie arithmétique. En effet, la cohomologie étale est mal adaptée à cette étude. Cependant, la cohomologie Weil-étale conjecturale semble rendre compte de cette nature topologique des corps de nombres. Cette observation nous a conduit à concentrer nos efforts sur la cohomologie Weil-étale. La définition de cette cohomologie s'insère dans un programme de recherche fascinant dû à S. Lichtenbaum, dont la conjecture 1 fait partie. Nous reprenons cette conjecture ci-dessous, car elle constitue la motivation principale de la suite de ce mémoire.

CONJECTURE 4.1. *Soit X un schéma arithmétique. Il existe une théorie cohomologique Weil-étale satisfaisant les propriétés suivantes. Les groupes de cohomologie à support compact $H^i_c(X;\mathbb{Z})$ sont de type fini et nuls pour $i > 2\,dimX + 1$. Soit $\widetilde{\mathbb{R}}$ le faisceau associé au groupe topologique $\mathbb{R}$. Alors le morphisme canonique*

$$H^i_c(X;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\longrightarrow H^i_c(X;\widetilde{\mathbb{R}})$$

est un isomorphisme. De plus, il existe une classe canonique ψ dans $H^1_W(\overline{X};\widetilde{\mathbb{R}})$ de sorte que les assertions suivantes soient vraies.

– *Le complexe*

$$...\xrightarrow{D} H^i_c(X;\widetilde{\mathbb{R}})\xrightarrow{D} H^{i+1}_c(X;\widetilde{\mathbb{R}})\xrightarrow{D}...$$

est exact, où D est défini par cup produit avec la classe ψ.

– *L'ordre d'annulation de la fonction $\zeta_X(s)$ en $s=0$ est donné par la formule suivante.*

$$ord_{s=0}\zeta_X(s)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\, i\ \mathrm{rk}\, H^i_c(X;\mathbb{Z}).$$

– *La valeur spéciale $\zeta^*_X(0)$, apparaissant dans le développement de Taylor en $s=0$, est donnée par la formule suivante.*

$$\zeta^*_X(0)=\pm\prod_{i\geq 0}\mid H^i_c(X;\mathbb{Z})_{tor}\mid^{(-1)^i}\ \ det(H^*_c(X;\widetilde{\mathbb{R}});D;\mathfrak{b}^*)^{-1}.$$

Ci-dessus, $\mathfrak{b}^i$ est une base quelconque du $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $H^i_c(X;\mathbb{Z})/tor$.

La première étape dans la résolution de cette conjecture consiste clairement à donner la bonne définition de cette cohomologie Weil-étale. Le cas le plus simple, et probablement le plus important, est celui de $Spec\,\mathbb{Z}$. Puisque la situation est déjà extrêmement complexe dans ce cas, nous concentrerons nos efforts dans la suite de ce travail sur les anneaux d'entiers de corps de nombres. Dans cette direction, S. Lichtenbaum a défini une topologie Weil-étale, utilisant le groupe de Weil W_K d'un corps de nombres, dont il a calculé les premiers groupes de cohomologie. En supposant que cette cohomologie s'annulait en degrés supérieurs à trois, il a pu vérifier ses conjectures dans ce cas. Malheureusement, la cohomologie du groupe topologique W_K à coefficients entiers explose en tout degré pair $i \geq 4$, comme l'a démontré M. Flach dans [**16**]. En conséquence, la cohomologie définie par S. Lichtenbaum du faisceau constant $\mathbb{Z}$ ne s'annule pas en degré > 3. Ainsi, la théorie cohomologique évoquée dans la conjecture précédente reste à définir. Cependant, les calculs de [**37**] permettent de prédire quels doivent être les groupes $H^i_c(X, \mathbb{Z})$ et $H^i_c(X, \widetilde{\mathbb{R}})$. Comme nous l'avons vu dans la section 3.2 du chapitre 3, ces groupes de cohomologie attendus respectent d'ailleurs les correspondances de la topologie arithmétique, au contraire de la cohomologie étale.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous définissons un topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ à partir du groupe de Weil $W_{L/K,S}$, relatif à une extension galoisienne L/K et un ensemble fini S de places de K contenant les places archimédiennes et celles qui se ramifient dans L. On peut définir de manière analogue le topos $\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}$ à partir du groupe de Weil global W_K. Ces topos, dits flasques, sont définis de manière simple, ce qui permet de décrire explicitement des morphismes

$$B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S},$$

associés à chacune des valuations de K. Nous définissons aussi des flèches de transition

$$\mathfrak{F}_{L'/K,S'} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S},$$

pour un couple (L', S') au-dessus de (L, S). De manière précise, on obtient un système projectif filtrant de topos. En suivant la méthode de [**37**], on peut donc définir les limites inductives

$$\varinjlim H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}). \tag{37}$$

L'expression du morphisme

$$B_{W_K} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S}$$

et la suite spectrale de Leray qui lui est associée, permettent ensuite de calculer les groupes (37) à partir de la cohomologie du groupe de Weil $H^*(W_K, \mathbb{Z})$. On a en fait suivi pas à pas, mais dans un langage différent, la méthode de S. Lichtenbaum. Nous calculons aussi la cohomologie du topos $\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}$. On s'aperçoit alors avec surprise que le morphisme canonique

$$\varinjlim H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}, \mathbb{Z})$$

n'est pas un isomorphisme. Ceci permet de comprendre le procédé astucieux de [**37**], consistant à introduire les groupes $W_{L/K,S}$, puis à considérer la limite inductive des cohomologies ainsi définies, afin de remplacer un produit direct par une somme. En particulier, la cohomologie Weil-étale actuelle (i.e. celle définie dans [**37**]) n'est pas définie comme étant celle d'un topos.

Dans la quatrième partie, nous montrons que la catégorie des faisceaux sur le site $T_{L/K,S}$, défini dans [**37**], est en fait canoniquement équivalente au topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$. Ce théorème constitue le résultat principal de ce chapitre. Il fournit une description simple des catégories de faisceaux sur ces sites Weil-étales. Dans l'esprit de [**24**], ce résultat suggère de travailler directement avec les topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$, plutôt qu'avec des sites qui les engendrent.

Dans le paragraphe 5, nous étudions rapidement le topos étale associé à l'ensemble des valuations $\overline{Y}$ du corps de nombres K, dont nous calculons la cohomologie à coefficients entiers. Dans la partie 6, nous définissons un morphisme de topos

$$\zeta : \mathfrak{F}_{W,\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{Y}},$$

d'ailleurs induit par un morphisme de sites. En effet, nous montrons que le site étale d'Artin-Verdier de $\overline{Y}$ s'identifie explicitement à une sous-catégorie pleine de $T_{W,\overline{Y}}$, munie de la topologie induite par celle des sections locales. De plus, nous définissons dans la section 6.5 une famille de flèches compatibles

$$\zeta_{L,S} : \mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow (\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}}).$$

Cette famille de morphismes $(\zeta_{L,S})_{L,S}$ nous permettra, au cours du chapitre 7, de construire un complexe de faisceaux sur $\mathcal{S}_{Et,\overline{Y}}$ dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale à coefficients entiers, toujours conjecturale. Pour clôturer ce chapitre, nous posons quelques questions soulevées par ce qui précède dans le paragraphe 6.6.

1. Notations

Let K be a number field and let $\overline{K}/K$ be an algebraic closure of K. We denote by Y the spectrum of the ring of integers $\mathcal{O}_K$ of K. Then $\overline{Y} = (Y; Y_\infty)$ is the set of all valuations of K, where Y_∞ is the set of archimedean valuations of K. The trivial valuation v_0 of K corresponds to the generic point of Y. We denote by $\overline{Y}^0$ the set of closed points of $\overline{Y}$ (e.g. the set of non-trivial valuations of K).

1.1. The global Weil group. Let $\overline{K}/L/K$ be a finite Galois extension of the number field K. Let S be a finite set of places of K containing the archimedean ones and the places which ramify in L. We denote by I_L and C_L the idèle group and the idèle class group of L respectively. Let $U_{L,S}$ be the subgroup of I_L consisting of those idèles which are 1 at valuations lying over S, and units at valuations not lying over S. It is well known that $U_{L,S}$ is a cohomologically trivial $G(L/K)$-module. The natural map $U_{L,S} \to C_L$ is injective and the S-idèle class group $C_{L,S}$ is defined by $C_{L,S} = C_L/U_{L,S}$. For any $i \in \mathbb{Z}$, the map

$$\widehat{H}^i(G(L/K), C_L) \longrightarrow \widehat{H}^i(G(L/K), C_{L,S})$$

is an isomorphism since $U_{L,S}$ is cohomologically trivial. By class field theory, there exists a canonical class in $\widehat{H}^2(G(L/K), C_{L,S})$ which yields a group extension

$$0 \to C_{L,S} \to W_{L/K,S} \to G(L/K) \to 0.$$

If we assume that S is the set of all non-trivial valuations of K, then this is the relative Weil group $W_{L/K}$. By **[37]** Lemma 3.1, the global Weil group is the projective limit

$$W_K = \varprojlim W_{L/K,S},$$

over finite Galois $\overline{K}/L/K$ and finite S as above.

1.2. Galois groups and Weil groups.

1.2.1. For any valuation v of K, we choose a valuation $\overline{v}$ of $\overline{K}$ lying over v and we denote by D_v the associated decomposition group and by I_v the inertia group. We set

$$K_v^h := \overline{K}^{D_v}, \ \ K_v^{sh} := \overline{K}^{I_v} \text{ and } G_{k(v)} := Gal(K_v^{sh}/K_v^h) = D_v/I_v.$$

If $v \in Y$, then $k(v)$ is the residue field of the scheme Y at v. For any archimedean valuation v, the Galois group $G_{k(v)} = \{1\}$ is trivial since $D_v = I_v$. Note that for the trivial valuation $v = v_0$, one has $D_{v_0} = G_K$ and $I_{v_0} = \{1\}$, hence $G_{k(v_0)} = G_K$.

Let K_v be the completion of K with respect to the valuation v. Thus for $v = v_0$ the trivial valuation, K_{v_0} is just K. The choice of the valuation $\overline{v}$ of $\overline{K}$ lying over v induces an embedding

$$\mathfrak{o}_v : D_v = G_{K_v} \longrightarrow G_K.$$

We choose a global Weil group $\alpha_{v_0} : W_K \to G_K$. For any non-trivial valuation v, we choose a local Weil group $\alpha_{K_v} : W_{K_v} \to G_{K_v}$ and a Weil map $\theta_v : W_{K_v} \to W_K$ so that the diagram

$$\begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r, "\theta_v"] \arrow[d, "\alpha_{K_v}"'] & W_K \arrow[d, "\alpha_{v_0}"'] \\ G_{K_v} \arrow[r, "\mathfrak{o}_v"] & G_K \end{tikzcd}$$

is commutative. For any valuation v, let $W_{k(v)} := W_{K_v}/I_v$ be the Weil group of the residue field at v. Note that $W_{k(v)}$ is isomorphic to $\mathbb{Z}$ (respectively $\mathbb{R}$) as a topological group whenever v is ultrametric (respectively archimedean). We denote by

$$q_v : W_{K_v} \longrightarrow W_{k(v)} \text{ and } \mathfrak{q}_v : G_{K_v} \longrightarrow G_{k(v)}$$

the canonical continuous projections. One has $K_{v_0} = K$, $D_{v_0} = G_K$, $I_{v_0} = \{1\}$, and $W_{k(v_0)} = W_{K_{v_0}}/I_{v_0} = W_K$. We set $\theta_{v_0} = q_{v_0} = Id_{W_K}$ and $\mathfrak{o}_{v_0} = \mathfrak{q}_{v_0} = Id_{G_K}$.

1.2.2. Let v be a non-trivial valuation of K and let $\theta_v : W_{K_v} \to W_K$ be a Weil map. Consider the morphism

$$W_{K_v} \longrightarrow W_K \longrightarrow W_{L/K} = W_K/W_L^c,$$

where L/K is a finite Galois extension. Here W_L^c is the closure of the commutator subgroup of W_L. The valuation $\overline{v}$ lying over v defines a valuation w of L and the morphism $W_{K_v} \to W_{L/K}$ factors through $W_{K_v}/W_{L_w}^c = W_{L_w/K_v}$. The following diagram is commutative

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_w^\times \arrow[r] \arrow[d] & W_{L_w/K_v} \arrow[r] \arrow[d] & G(L_w/K_v) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_L^\times \arrow[r] & W_{L/K} \arrow[r] & G(L/K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

where the rows are both exact. The map $W_{L_w/K_v} \to W_{L/K}$ is injective and the image of W_{K_v} in $W_{L/K}$ is isomorphic to W_{L_w/K_v}. Let S be a finite set of places of K containing the archimedean ones and the places which ramify in L. The group $U_{L,S}$ injects in $W_{L/K}$ and there is an isomorphism $W_{L/K,S} \simeq W_K/U_{L,S}$. Hence the image of W_{K_v} in $W_{L/K,S}$ is isomorphic to W_{L_w/K_v} for $v \in S$. For v not in S, the image of W_{K_v} in $W_{L/K,S}$ is isomorphic to the quotient of W_{L_w/K_v} by $\mathcal{O}_{L_w}^\times$. The canonical map $W_{K_v} \to W_{k(v)}$ factors through W_{L_w/K_v} hence through $W_{L_w/K_v}/\mathcal{O}_{L_w}^\times$. We denote by $\widetilde{W}_{K_v}$ the image of W_{K_v} in $W_{L/K,S}$. For any non-trivial valuation v of K, the canonical map $W_{K_v} \to W_{k(v)}$ factors through $\widetilde{W}_{K_v}$.

1.3. Left exact sites. Let $\mathcal{C}$ be a category and let $\mathcal{J}$ be a Grothendieck topology on $\mathcal{C}$. Recall that a category $\mathcal{C}$ has finite projective limits if and only if $\mathcal{C}$ has a final object and fiber products.

DÉFINITION 4.2. *The site $(\mathcal{C};\mathcal{J})$ is said to be* left exact *whenever $\mathcal{C}$ has finite projective limits and $\mathcal{J}$ is subcanonical.*

Note that any Grothendieck topos is the category of sheaves of sets on a left exact site (see **[24]** IV Théorème 1.2).

DÉFINITION 4.3. *A family of morphisms $\{X_i \to X;\, i \in I\}$ of the category $\mathcal{C}$ is said to be a* covering family *of X if the sieve of X generated by this family lies in $\mathcal{J}(X)$.*

The covering families define a pretopology on C which generates the topology $\mathcal{J}$, since C is left exact. A *morphism of left exact sites* is a functor $a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ preserving finite projective limits (e.g. a is left exact), which is continuous. This means that the functor

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{C}'} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}} \\ \mathcal{P} & \longmapsto & \mathcal{P} \circ a \end{array},$$

sends sheaves to sheaves, where $\widehat{\mathcal{C}}$ is the category of presheaves on $\mathcal{C}$ (contravariant functors from $\mathcal{C}$ to the category of sets). A morphism of left exact sites $a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ induces a morphism of topoi $\widetilde{a} : \widetilde{\mathcal{C}'} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ so that the square

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{C}} \arrow[r, "\widetilde{a}^*"] & \widetilde{\mathcal{C}'} \\ \mathcal{C} \arrow[u] \arrow[r, "a"] & \mathcal{C}' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

is commutative, where the vertical arrows are given by Yoneda embeddings (which are well defined since the topologies are sub-canonical). For example a morphism of schemes $u : X \to Y$ gives rise to a morphism of left exact sites

$$\begin{array}{cccc} u^* : & Et_Y & \longrightarrow & Et_X \\ & (U \to Y) & \longmapsto & (U \times_Y X \to X) \end{array},$$

hence to a morphism of topoi

$$(u^*; u_*) : \mathcal{S}_{Et}(X) \to \mathcal{S}_{Et}(Y).$$

A diagram of topoi

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \mathcal{S}_2 \arrow[d, "d"] \\ \mathcal{S}_3 \arrow[r, "c"] & \mathcal{S}_4 \end{tikzcd}$$

is said to be *commutative* if there is a canonical isomorphism of morphisms of topoi $c \circ b \simeq d \circ a$, or in other words, an isomorphism in the category $\underline{Homtop}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_4)$ between the objects $c \circ b$ and $d \circ a$. In what follows, a topos is always a Grothendiek topos and a morphism is a geometric morphism.

1.4. The classifying topos of a topological group. Let G be a topological group. The *small classifying topos* B_G^{sm} is the category of sets on which G acts continuously. If G is discrete or profinite (or more generally totally disconnected) then the cohomology of the topos B_G^{sm} is precisely the cohomology of the group G. We denote by T_G^f the category of finite G-sets endowed with its canonical topology $\mathcal{J}_{can}$. If G is finite or profinite then $(T_G^f; \mathcal{J}_{can})$ is a (left exact) site for the small classifying topos B_G^{sm}.

For G any topological group, T_G is the category of G-topological spaces (which are elements of a given universe) endowed with the local-section topology $\mathcal{J}_{ls}$ (see **[37]** section 1), and B_G is the topos of sheaves of sets on this site.

Alternatively, let Top be the category of topological spaces (which are elements of a given universe) endowed with the open cover topology $\mathcal{J}_{open}$. Recall that the open cover topology is generated by the pre-topology for which a family of continuous maps $\{U_i \to U\}$ is a cover when it is an open cover in the usual sense. By (**[16]** Lemma 1), one has $\mathcal{J}_{ls} = \mathcal{J}_{open}$ on the category Top.

DEFINITION 4.4. *We denote by $\mathcal{T}$ the topos of sheaves of sets on the site* $(Top, \mathcal{J}_{open})$.

By the Yoneda embedding, any topological group G defines a group-object $y(G)$ of $\mathcal{T}$. Then B_G is the topos of $y(G)$-objects of $\mathcal{T}$. Recall that the data of an object $\mathcal{F}$ of $\mathcal{T}$ is equivalent to the following. For any topological space X, a sheaf F_X on X (e.g. an étalé space over X), and for any continuous map $u : X' \to X$ a morphism $\varphi_u : u^*F_X \to F'_X$ satisfying the natural transitivity condition for a composition $v \circ u : X'' \to X' \to X$. Moreover, φ_u is an isomorphism whenever u is an open immersion or more generally an étalement. This gives a description of the topos $\mathcal{T}$ and hence of the classifying topos B_G.

By **[16]** Corollary 2, the two preceding definitions of B_G are equivalent.

PROPOSITION 4.5. *The topos of sheaves of sets on the site* $(T_G; \mathcal{J}_{ls})$ *is isomorphic to the classifying topos* B_G *of the topological group* G.

In other words, $(T_G; \mathcal{J}_{ls})$ is a site for the topos of of $y(G)$-objects of $\mathcal{T}$.

1.5. Cohomology of the Weil group. Let $\mathcal{E}$ be a topos. There is a unique morphism $u : \mathcal{E} \to \underline{Set}$. The functor $\Gamma_{\mathcal{E}} := u_* = Hom_{\mathcal{E}}(e_{\mathcal{E}}, -)$ is called the *global sections functor*. Here $e_{\mathcal{E}}$ denotes the final object of $\mathcal{E}$. For any abelian object $\mathcal{A}$ of $\mathcal{E}$, one has

$$H^i(\mathcal{E}, \mathcal{A}) := R^i(\Gamma_{\mathcal{E}})(\mathcal{A}).$$

For any topological group G and any abelian object of B_G (in particular a topological G-module), the cohomology of G is defined by (see **[16]**)

$$H^i(G, \mathcal{A}) := H^i(B_G, \mathcal{A}).$$

M. Flach has shown the following result (see **[16]** Lemma 10).

LEMMA 4.6. *Let A be either a discrete, continuous W_K-module or $A = \mathbb{R}$ with trivial W_K-action. Then*

$$H^i(W_K, A) = \varinjlim H^i(W_{L/K,S}, A^{N_{L,S}}),$$

where $N_{L,S}$ is the kernel of the map $W_K \to W_{L/K,S}$.

The following result is due to Stephen Lichtenbaum for $i \leq 3$ and to Matthias Flach for $i > 3$. Denote by $A^{\mathcal{D}} := Hom_{cont}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ the Pontryagin dual of a locally compact abelian group A. The kernel of the absolute value map $C_K \to \mathbb{R}_+^{\times}$ is denoted by C_K^1.

THEOREM 4.7. *Let K be a totally imaginary number field and let $\mathbb{Z}$ be the discrete W_K-module with trivial action. Then*

$$\begin{aligned} H^i(W_K; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \text{ for } i = 0, \\ &= 0 \text{ for } i = 1, \\ &= (C_K^1)^{\mathcal{D}} \text{ for } i = 2, \\ &= 0 \text{ for } i \text{ odd}, \end{aligned}$$

and $H^i(W_K; \mathbb{Z})$ is an abelian group of infinite rank, in particular nonzero, for even $i \geq 4$.

2. The flask topoi associated to a number field

2.1. Definition of the flask topoi. Let L/K be an algebraic extension and let S be a set of non-trivial valuations of the number field K containing all the valuations of F which ramify in K and the archimedean ones. In what follows, either L/K is a finite Galois extension and S is a finite set, or $L = \overline{K}/K$ is an algebraic closure of K and S is the set of all non-trivial valuations of K.

NOTATION 4.8. *Let $\widetilde{W}_{K_v}$ be the image of W_{K_v} in $W_{L/K,S}$. Let $\theta_v : \widetilde{W}_{K_v} \to W_{L/K,S}$ and $q_v : \widetilde{W}_{K_v} \to W_{k(v)}$ be the canonical maps, for any non-trivial valuation v of K. For the trivial valuation v_0, the maps θ_{v_0} and q_{v_0} are just $Id_{W_{L/K,S}}$.*

DÉFINITION 4.9. *The category $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ is defined as follows. The objects of this category are of the form $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v\in\overline{Y}}$, where F_v is an object of $B_{W_{k(v)}}$ for $v \neq v_0$ (respectively of $B_{W_{L/K,S}}$ for $v = v_0$) and*

$$f_v : q_v^*(F_v) \longrightarrow \theta_v^*(F_{v_0})$$

is a morphism of $B_{\widetilde{W}_{K_v}}$ so that $f_{v_0} = Id_{F_{v_0}}$. A morphism ϕ from $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v\in\overline{Y}}$ to $\mathcal{F}' = (F'_v; f'_v)_{v\in\overline{Y}}$ is family of morphisms $\phi_v : F_v \to F'_v \in Fl(B_{W_{k(v)}})$ (and $\phi_{v_0} \in Fl(B_{W_{L/K,S}})$) so that

$$\begin{array}{ccc} q_v^*(F_v) & \xrightarrow{q_v^*(\phi_v)} & q_v^*(F'_v) \\ {\scriptstyle f_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'_v} \\ \theta_v^*(F_{v_0}) & \xrightarrow{\theta_v^*(\phi_{v_0})} & \theta_v^*(F'_{v_0}) \end{array}$$

*is a commutative diagram of $B_{\widetilde{W}_{K_v}}$. In what follows, F_v (respectively ϕ_v) is called the v-*component *of the object $\mathcal{F}$ (respectively of the morphism ϕ).*

For $L = \overline{K}$ and S the set of all non-trivial valuations of K, one has $W_{L/K,S} = W_K$, $\widetilde{W}_{K_v} = W_{K_v}$ and we set

$$\mathfrak{F}_{L/K,S} = \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}.$$

The aim of this section is to prove that the category $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ is a Grothendieck topos.

PROPOSITION 4.10. *Arbitrary inductive and finite projective limits exist in $\mathfrak{F}_{L/K,S}$, and are calculated componentwise.*

PROOF. In order to simplify the notation we assume here that $\mathfrak{F}_{L/K,S} = \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Let I be a small category and let $G : I \to \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ be an arbitrary functor. For any valuation v of K, one has a canonical functor

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{i}_v^* : & \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} & \longrightarrow & B_{W_{k(v)}} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & F_v \end{array}.$$

For any valuation v, we set

$$G_v := \mathrm{i}_v^* \circ G : I \to B_{W_{k(v)}}.$$

The inductive limit

$$L_v := \varinjlim_I G_v$$

exists in the topos $B_{W_{k(v)}}$. A map $i \to j$ of the category I induces a map $G(i) \to G(j)$ of the category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Hence for any valuation v, one has a commutative diagram of $B_{W_{K_v}}$:

$$\begin{array}{ccc} q_v^* \circ G_v(i) & \longrightarrow & q_v^* \circ G_v(j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \theta_v^* \circ G_{v_0}(i) & \longrightarrow & \theta_v^* \circ G_{v_0}(j) \end{array}$$

By the universal property of inductive limits, one has an induced morphism

$$\varinjlim_I q_v^* \circ G_v \longrightarrow \varinjlim_I \theta_v^* \circ G_{v_0},$$

where the limits are calculated in the topos $B_{W_{K_v}}$. We get a map

$$l_v : q_v^*(L_v) = q_v^*(\varinjlim_I G_v) = \varinjlim_I q_v^* \circ G_v \longrightarrow \varinjlim_I \theta_v^* \circ G_{v_0} = \theta_v^*(\varinjlim_I G_{v_0}) = \theta_v^*(L_{v_0}),$$

since q_v^* and θ_v^* commute with arbitrary inductive limits. This yields an object

$$\varinjlim_I G = \mathcal{L} := (L_v;\ l_v)_{v \in \overline{Y}}$$

of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Now, one has to check that $\mathcal{L}$ is the inductive limit of the functor G. For any object $\mathcal{X}$ of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, denote by $k_{\mathcal{X}} : I \to \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ the constant functor associated to $\mathcal{X}$. By construction, there is a natural transformation

$$a : G \longrightarrow k_{\mathcal{L}}$$

such that any other natural transformation

$$b : G \longrightarrow k_{\mathcal{X}}$$

factors through a. Indeed, the v-component of $\mathcal{L}$ is defined as the inductive limit of G_v in $B_{W_{k(v)}}$ and the morphism l_v is defined as the limit of the corresponding system of compatible maps of $B_{W_{K_v}}$. The proof for finite projective limits is identical. □

Proposition 4.11. *The category $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ is a topos.*

Proof. Again, we assume that $\mathfrak{F}_{L/K,S} = \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. To see that it is a topos, we use Giraud's criterion (see **[24]** IV Théorème 1.2). Axioms *(G1)*, *(G2)* and *(G3)* follow from the corresponding facts for $B_{W_{k(v)}}$, using Proposition 4.10 and the fact that q_v^* and θ_v^* commute with finite projective limits and arbitrary inductive limits.

(G1) The category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ has finite projective limits.

More explicitly, $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ has a final object $(e_{W_{k(v)}}; f_v)_{v\in\overline{Y}}$. Here $e_{W_{k(v)}}$ is the final object of $B_{W_{k(v)}}$ and f_v is the unique map from the final object of $B_{W_{K_v}}$ to itself. Let $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ and $\phi' : \mathcal{F}' \to \mathcal{X}$ be two maps of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ with the same target $\mathcal{X} = (X_v; \xi_v)$. The fiber product $\mathcal{F} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{F}'$ is defined as the object $(F_v \times_{X_v} F'_v;\ f_v \times_{\xi_v} f'_v)_{v\in\overline{Y}}$, where the fiber products are calculated in the categories $B_{W_{k(v)}}$ and $B_{W_{K_v}}$ respectively.

(G2) All (set-indexed) sums exist in $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, and are disjoint and stable.

The initial object of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is $(\emptyset_{W_{k(v)}}; f'_v)_{v\in\overline{Y}}$, where $\emptyset_{W_{k(v)}}$ is the initial object of $B_{W_{k(v)}}$ and $f'_v : \emptyset_{W_{K_v}} \to \emptyset_{W_{K_v}}$ is the trivial map. Moreover, fiber products are computed componentwise in $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, and an isomorphism ϕ from $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v\in\overline{Y}}$ to $\mathcal{F}' = (F'_v; f'_v)_{v\in\overline{Y}}$ is a family of compatible isomorphisms $\phi_v : F_v \to F'_v \in Fl(B_{W_{k(v)}})$. Then one easily sees that *(G2)* is satisfied by $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ since it is satisfied by $B_{W_{k(v)}}$ for any valuation v.

(G3) The equivalence relations are effective and universal.

Again this follows from the fact that finite inductive limits and finite projective limits are computed componentwise in $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, since *(G3)* is satisfied by each $B_{W_{k(v)}}$.

(G4) The category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ has a small set of generators.
This axiom, however, requires some argument. Choose a small set $\{X_{v;i};\, i \in I_v\}$ of generators of $B_{W_{k(v)}}$, for any valuation v. Recall that the morphism of topological groups $\theta_v : W_{K_v} \to W_K$ induces the sequence of three adjoint functors

$$\theta_{v!} \;\; ; \quad \theta_v^* \;\; ; \quad \theta_{v*}$$

between $B_{W_{K_v}}$ and B_{W_K}, since θ_v^* commutes with arbitrary projective and inductive limits (see [**24**] IV.4.5.1). The functors θ_v^* and θ_{v*} are respectively the pull-back and the direct image of the (essential) morphism $B_{\theta_v} : B_{W_{K_v}} \to B_{W_K}$. Denote by $y : Top \to \mathcal{T}$ the Yoneda embedding. The functor $\theta_{v!}$ is defined by

$$\begin{array}{rccc} \theta_{v!} : & B_{W_{K_v}} & \longrightarrow & B_{W_K} \\ & F & \longmapsto & y(W_K) \times^{y(W_{K_v})} F := (y(W_K) \times F)/y(W_{K_v}) \end{array},$$

where $y(W_{K_v})$ acts on the left on F and by right-translations on $y(W_K)$.

Let $v \neq v_0$ be a non-trivial valuation and let $i \in I_v$. We define an object $\mathcal{X}_{v;i}$ of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ as follows :

$$\mathcal{X}_{v;i} = (\theta_{v!}(q_v^*(X_{v;i})) \;\; ; \;\; X_{v;i} \;\; ; \;\; (\emptyset_{B_{W_{k(w)}}})_{w \neq v_0;v} \;\; ; \;\; (\xi_w)_{w\in\overline{Y}}).$$

Here the map

$$\xi_v : q_v^*(X_{v;i}) \longrightarrow \theta_v^* \circ \theta_{v!}(q_v^*(X_{v;i}))$$

is given by adjunction, and ξ_w is the trivial map for any $w \neq v, v_0$. For the trivial valuation v_0 and for any $i \in I_{v_0}$, we set

$$\mathcal{X}_{v_0;i} := (X_{v_0;i} \;\; ; \;\; (\emptyset_{B_{W_{k(w)}}})_{w\neq v_0}).$$

The family $\{\mathcal{X}_{v;i};\;\; v \in Y;\;\; i \in I_v\}$ is set indexed. We claim that it is a generating family of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$.

Let $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_v$ be an object of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, let v be a valuation of K, and let $t_v : X_{v;i} \to F_v$ be a morphism in $B_{W_{k(v)}}$. One needs to show that there exists a canonical morphism

$$t : \mathcal{X}_{v;i} \longrightarrow \mathcal{F}$$

so that the v-component of t is t_v. It is obvious for the trivial valuation $v = v_0$. Let $v \neq v_0$ be a non-trivial valuation. Consider the morphism

$$f_v \circ q_v^*(t_v) : q_v^*(X_{v;i}) \longrightarrow q_v^*(F_v) \longrightarrow \theta_v^*(F_{v_0}).$$

By adjunction, there is an identification

$$Hom_{B_{W_K}}(\theta_{v!}(q_v^*(X_{v;i})); F_{v_0}) = Hom_{B_{W_{K_v}}}(q_v^*(X_{v;i}); \theta_v^*(F_{v_0})). \tag{38}$$

Hence, there exists a unique morphism

$$t_0 : \theta_{v!}(q_v^*(X_{v;i})) \longrightarrow F_{v_0}$$

of B_{W_K} corresponding to $f_v \circ q_v^*(t_v)$ via (38) so that the diagram

$$\begin{array}{ccc} q_v^*(X_{v;i}) & \xrightarrow{q_v^*(t_v)} & q_v^*(F_v) \\ {\scriptstyle \xi_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_v} \\ \theta_v^*\theta_{v!}(q_v^* X_{i;v}) & \xrightarrow{\theta_v^*(t_0)} & \theta_v^* F_{v_0} \end{array}$$

is commutative. We get a morphism $t : \mathcal{X}_{v;i} \to \mathcal{F}$ of the category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$.

Now, consider two parallel arrows $\phi,\ \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ so that, for any arrow $t : \mathcal{X}_{v;i} \to \mathcal{F}$, one has $\phi \circ t = \varphi \circ t$. The family $\{X_{v;i};\ i \in I_v\}$ is a family of generators of $B_{W_{k(v)}}$ and each morphism $t_v : X_{v;i} \to F_v$ induces a morphism $t : \mathcal{X}_{v;i} \to \mathcal{F}$. It follows that

$$\phi_v = \varphi_v \in Fl(B_{W_{k(v)}}),$$

for any $v \in \overline{Y}$. By definition of the morphisms in the category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, the functor

$$(\mathrm{i}_v^*)_{v\in\overline{Y}} : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \coprod_{v\in\overline{Y}} B_{W_{k(v)}}$$

is faithful. It follows that $\phi = \varphi$. This shows that the family $\{\mathcal{X}_{v;i};\ \ v \in \overline{Y};\ \ i \in I_v\}$ is a small collection of generators of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Therefore the category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is a topos. □

2.2. The morphisms associated to the valuations.

PROPOSITION 4.12. *For any non-trivial valuation v, there exists a canonical morphism*

$$\mathrm{i}_v := \mathrm{i}_{L,S,v} : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S},$$

which is a closed embedding.

PROOF. For any valuation $v \neq v_0$, the functor

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{i}_v^* : & \mathfrak{F}_{L/K,S} & \longrightarrow & B_{W_{k(v)}} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & F_v \end{array}.$$

commutes with arbitrary inductive limits and finite projective limits, since these limits are computed componentwise in the topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$. Hence i_v^* is the pull-back of a morphism of topoi $\mathrm{i}_v : B_{W_{k(v)}} \to \mathfrak{F}_{L/K,S}$. The same argument shows that there is a morphism $j_{L/K,S} : B_{W_{L/K,S}} \to \mathfrak{F}_{L/K,S}$. Moreover, one easily sees that the functor

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{i}_{v*} : & B_{W_{k(v)}} & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{L/K,S} \\ & F_v & \longmapsto & (e_{W_K};\ F_v;\ (e_{W_{k(w)}})_{w\neq v;v_0}\ ) \end{array}.$$

is right adjoint to i_v^*, where $e_{W_{k(w)}}$ is the final object of $B_{W_{k(w)}}$. Since the adjunction transformation $Id \to \mathrm{i}_v^* \circ \mathrm{i}_{v*}$ is obviously an isomorphism, the morphism i_v is an embedding (see **[24]** IV. Définition 9.1.1). Consider the sub-terminal object $U := ((e_{W_{k(w)}})_{w\neq v};\ \emptyset_{W_{k(v)}})$ of $\mathfrak{F}_{L/K,S}$. It defines an open sub-topos

$$j_v : \mathcal{U} := (\mathfrak{F}_{L/K,S})_{/U} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S}.$$

The image of i_{v*} is exactly the strictly full sub-category of $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ defined by the objects X such that $j_v^*(X)$ is the final object of $\mathcal{U}$. Hence the image of i_v is the closed complement of the open sub-topos $\mathcal{U}$ (see [**24**] IV Proposition 9.3.4). $\square$

REMARK 4.13. *It follows from the previous proposition that the functor between abelian categories induced by* i_{v*} *is exact (see* [**24**] *IV.14).*

PROPOSITION 4.14. *There is an essential morphism*

$$j := j_{L/K,S} : B_{W_{L/K,S}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S}.$$

In other words, there is a sequence of three adjoints functors

$$j_!,\ \ j^*,\ \ j_*.$$

PROOF. The functor

$$\begin{array}{cccc} j^*: & \mathfrak{F}_{L/K,S} & \longrightarrow & B_{W_{L/K,S}} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & F_{v_0} \end{array}$$

commutes with arbitrary inductive limits and finite projective limits. Therefore j^* has a right adjoint j_* and thus is the pull-back of a morphism of topoi. We define

$$\begin{array}{cccc} j_!: & B_{W_{L/K,S}} & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{L/K,S} \\ & \mathcal{L} & \longmapsto & (F_v, f_v)_{v\in\overline{Y}} \end{array}$$

where $F_{v_0} = \mathcal{L}$ and $F_v = \emptyset$ is the initial object of $B_{W_{k(v)}}$ for any $v \neq v_0$. The map f_v is the unique map from the initial object of $B_{\widetilde{W}_{K_v}}$ to $\theta_v^*\mathcal{L}$. Clearly, $j_!$ is left adjoint to j^*. $\square$

PROPOSITION 4.15. *The direct image functor* j_* *is given by*

$$\begin{array}{cccc} j_*: & B_{W_{L/K,S}} & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{L/K,S} \\ & \mathcal{L} & \longmapsto & (q_{v*}\theta_v^*\mathcal{L}, l_v)_{v\in\overline{Y}} \end{array}$$

where the map

$$l_v : q_v^* q_{v*}\theta_v^*\mathcal{L} \longrightarrow \theta_v^* q_{v_0*}\theta_{v_0}^*\mathcal{L} = \theta_v^*\mathcal{L}$$

is induced by the natural transformation $q_v^* q_{v*} \to Id$*, for any valuation* v.

PROOF. One has to show that j_* is right adjoint to j^*. Let $\mathcal{L}$ be an object of $B_{W_{L/K,S}}$ and let $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v\in\overline{Y}}$ be an object of $\mathfrak{F}_{L/K,S}$. For any map $\phi_0 : F_0 \to \mathcal{L}$ of $B_{W_{L/K,S}}$ and any non-trivial valuation v, consider the map

$$\theta_v^*(\phi_0) \circ f_v : q_v^* F_v \to \theta_v^* F_0 \to \theta_v^*\mathcal{L}.$$

Since q_v^* is left adjoint to q_{v*}, there exists a unique map $\phi_v : F_v \to q_{v*}\theta_v^*\mathcal{L}$ so that the diagram

$$\begin{array}{ccc} q_v^* F_v & \xrightarrow{q_v^*\phi_v} & q_v^* q_{v*}\theta_v^*\mathcal{L} \\ {\scriptstyle f_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_v} \\ \theta_v^* F_0 & \xrightarrow{\theta_v^*(\phi_0)} & \theta_v^*\mathcal{L} \end{array}$$

is commutative. It follows that there is a functorial isomorphism

$$Hom_{B_{W_{L/K,S}}}(j^*\mathcal{F}, \mathcal{L}) \simeq Hom_{\mathfrak{F}_{L/K,S}}(\mathcal{F}, j_*\mathcal{L}).$$

$\square$

COROLLARY 4.16. *The morphism* $j : B_{W_{L/K,S}} \to \mathfrak{F}_{L/K,S}$ *is an embedding.*

PROOF. Indeed for any object $\mathcal{L}$ of $B_{W_{L/K,S}}$, the natural map $j^*j_*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ is just the identity of $\mathcal{L}$. $\square$

PROPOSITION 4.17. *The family of functors*

$$\{\mathrm{i}_v^* : \mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow B_{W_{k(v)}};\ \ v \in \overline{Y}^0\}$$

is not conservative.

PROOF. In order to simplify the notations, we assume here that $\mathfrak{F}_{L/K,S} = \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ Let $\emptyset$ be the initial object of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ and let $\mathcal{G}$ be the object whose v_0-component is the final object of B_{W_K} while its v-component is the initial object of $B_{W_{k(v)}}$ for any $v \neq v_0$. Consider the unique morphism $\phi : \emptyset \to \mathcal{G}$. Then ϕ is not an isomorphism while $\mathrm{i}_v^*(\phi) : \emptyset_{W_{k(v)}} \to \emptyset_{W_{k(v)}}$ is an isomorphism for any closed point v. $\square$

If there is no risk of ambiguity, we denote $\widetilde{W}_{k(v)} = W_{k(v)}$ for $v \neq v_0$, $\widetilde{W}_{k(v_0)} = W_{L/K,S}$ and $j = \mathrm{i}_{v_0}^*$.

PROPOSITION 4.18. *The family of functors*

$$\{\mathrm{i}_v^* : \mathfrak{F}_{L/K,S} \to B_{\widetilde{W}_{k(v)}},\ v \in \overline{Y}\}$$

is conservative.

PROOF. This follows immediately from the definition. $\square$

REMARK 4.19. *The Weil maps $\theta_v : W_{K_v} \to W_{k(v_0)}$ and the projections $q_v : W_{K_v} \to W_{k(v)}$ define a pair of morphisms*

$$(\theta, q) : \coprod_{v \neq v_0} B_{W_{K_v}} \rightrightarrows \coprod_{v} B_{W_{k(v)}},$$

where v runs over $\overline{Y}$. The coequalizer of this pair of maps is the category with objects $(F; a)$ where $F = (F_v)_{v \in \overline{Y}}$ is an object of $\coprod B_{W_{k(v)}}$ while $a : q^*(F) \to \theta^*(F)$ is an isomorphism. Hence this topos is not isomorphic to $\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}$.

2.3. The transition maps. Let $(L/K, S)$ and $(L'/K, S')$ be as above. If $L \subset L'$ in $\overline{K}$ and $S \subset S'$, then there is a canonical morphism

$$p : W_{L'/K,S'} \longrightarrow W_{L/K,S}.$$

PROPOSITION 4.20. *There is an induced morphism of topoi*

$$t : \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S}.$$

For $L''/L'/L$ and $S \subset S' \subset S''$, the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{L''/K,S''} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \arrow[d] \\ & \mathfrak{F}_{L/K,S} \end{tikzcd}$$

is commutative.

In the following proof, for any non-trivial valuation v we denote by $W_{K_v,L,S}$ the image of W_{K_v} in $W_{L/K,S}$, and by $\theta_{v,L,S} : W_{K_v,L,S} \to W_{L/K,S}$ and $q_{v,L,S} : W_{K_v,L,S} \to W_{k(v)}$ the induced morphisms. One has a map $p_v : W_{K_v,L',S'} \to W_{K_v,L,S}$.

PROOF. Let $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v \in \overline{Y}}$ be an object of $\mathfrak{F}_{L/K,S}$. Then,

$$t^*\mathcal{F} = (p^*F_{v_0}, F_v, p_v^* f_v)$$

does define an object of $\mathfrak{F}_{L'/K,S'}$. Indeed, $p_v^* f_v$ gives a map

$$q^*_{v,L',S'} F_v = p_v^* q^*_{v,L,S} F_v \longrightarrow p_v^* \theta^*_{v,L,S} F_0 = \theta^*_{v,L',S'} p^* F_0,$$

since the diagram of topological groups

$$\begin{tikzcd} W_{L'/K,S'} \arrow[d, "p"'] & W_{K_v,L',S'} \arrow[l, "\theta_{v,L',S'}"'] \arrow[d, "p_v"] \arrow[dr, "q_{v,L',S'}"] & \\ W_{L/K,S} & W_{K_v,L,S} \arrow[l, "\theta_{v,L,S}"'] \arrow[r, "q_{v,L,S}"] & W_{k(v)} \end{tikzcd}$$

is commutative. This yields a functor

$$t^* : \mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L'/K,S'},$$

which commutes with finite projective limits and arbitrary inductive limits, by Proposition 4.10. Hence t^* is the pull-back of a morphism of topoi t. The diagram of the proposition is easily seen to be commutative, using the commutativity of

$$\begin{tikzcd} W_{L''/K,S''} \arrow[r] \arrow[dr] & W_{L'/K,S'} \arrow[d] \\ & W_{L/K,S} \end{tikzcd} \quad \text{and} \quad \begin{tikzcd} W_{K_v,L'',S''} \arrow[r] \arrow[dr] & W_{K_v,L',S'} \arrow[d] \\ & W_{K_v,L,S} \end{tikzcd}$$

□

REMARK 4.21. *The family $(\mathfrak{F}_{L/K,S})_{L/K,S}$ is a fibered topos (in fact a projective system of topos). Indeed, consider the category $I/_K$ whose objects are $(L/K, S)$, where L/K is a finite Galois sub-extension of $\overline{K}/K$ and S is a finite set of places of K containing the archimedian ones and the places ramified in L/K. The set $Hom_{I/_K}((L'/K, S'), (L/K, S))$ is non-empty if and only if $L \subseteq L' \subseteq \overline{K}$ and $S \subseteq S'$. The previous proposition shows that one has a pseudo-functor*

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{F}_\bullet : & I/_K & \longrightarrow & \underline{Topos} \\ & (L/K, S) & \longmapsto & \mathfrak{F}_{L/K,S} \end{array}$$

PROPOSITION 4.22. *The diagrams*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{L'/K,S'}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \arrow[d] \\ B_{W_{L/K,S}} \arrow[r] & \mathfrak{F}_{L/K,S} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \arrow[d] \\ & \mathfrak{F}_{L/K,S} \end{tikzcd}$$

are both commutative, for any non-trivial valuation v.

PROOF. This follows immediately from the definition of t. □

For any $v \in \overline{Y}$, there is a canonical morphism of topological groups

$$l_v : W_{k(v)} \to \mathbb{R}.$$

If the valuation v is archimedean, then the morphism l_v is just the identity of $\mathbb{R}$. If v is ultrametric, the map l_v sends the canonical generator of $W_{k(v)}$ to $log(N(v)) \in \mathbb{R}$, where $N(v) = |k(v)|$ is the norm of the closed point v of the scheme Y. For the trivial valuation $v = v_0$, the map l_{v_0} is defined as follows :

$$l_{v_0} : W_{k(v_0)} = W_K \longrightarrow W_K^{ab} = C_K \longrightarrow \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

The first map is the projection from W_K to its maximal abelian Hausdorff quotient. The second map is given by the absolute value map from the idèle class group C_K of K to $\mathbb{R}^{>0}$. The third map is the logarithm. In all cases, the morphism of topological groups l_v induces a morphism of topoi $B_{l_v} : B_{W_{k(v)}} \to B_{\mathbb{R}}$. The absolute value map $C_K \to \mathbb{R}^{>0}$ factors through $C_{K,S}$ and gives a map $C_K \to \mathbb{R}^{>0}$. Therefore, there is a continuous morphism $l_{L,S} : W_{L/K,S} \to \mathbb{R}$ and an induced morphism

$$B_{l_{L,S}} : B_{W_{L/K,S}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

PROPOSITION 4.23. *There is a morphism*

$$\mathrm{f}_{L/K,S} : \mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

so that $\mathrm{f}_{L/K,S} \circ \mathrm{i}_v$ *is isomorphic to* B_{l_v}*, for any closed point* v *of* $\overline{Y}$*.*

PROOF. In order to simplify notation, we assume that $\mathfrak{F}_{L/K,S} = \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. The functor $(B^*_{l_v})_v$: $B_{\mathbb{R}} \to \coprod_v B_{W_{k(v)}}$ factors through $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Indeed, for any object $\mathcal{F}$ of $B_{\mathbb{R}}$, define

$$\mathrm{f}^*(\mathcal{F}) := (B^*_{l_v}(\mathcal{F})\,;\, Id_{B^*_{L_v}(\mathcal{F})})_{v\in\overline{Y}}.$$

Here

$$Id_{B^*_{L_v}(\mathcal{F})} : q_v^* B^*_{l_v}(\mathcal{F}) = B^*_{L_v}(\mathcal{F}) \longrightarrow B^*_{L_v}(\mathcal{F}) = \theta_v^* B^*_{l_{v_0}}(\mathcal{F})$$

is the identity of the object $B^*_{L_v}(\mathcal{F})$ of the category $B_{W_{K_v}}$, where $L_v : W_{K_v} \to \mathbb{R}$ is the canonical morphism. This is well defined since the square

$$\begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r, "q_v"] \arrow[d, "\theta_v"'] & W_{k(v)} \arrow[d, "l_v"] \\ W_K \arrow[r, "l_{v_0}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

is commutative and $L_v := l_{v_0} \circ \theta_v = l_v \circ q_v$. This yields a functor

$$\mathrm{f}^* : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}},$$

which commutes with finite projective limits and arbitrary inductive limits, by Proposition 4.10. Hence f^* is the pull-back of a morphism of topoi f such that there is an isomorphism of functors $\mathrm{i}_v^* \circ \mathrm{f}^* \simeq B^*_{l_v}$. For finite L/K and finite S, the same construction valid by replacing W_K by $W_{L/K,S}$ and W_{K_v} by $\widetilde{W}_{K_v}$. If there is a risk of ambiguity, we denote this morphism by $\mathrm{f}_{L/K,S}$. □

PROPOSITION 4.24. *The following diagram is commutative*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{F}_{L/K,S} \arrow[d] \\ & B_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

for any $\overline{K}/L'/L/K$ *and* $S \subset S'$.

PROOF. This follows from the fact that the diagram

$$\begin{tikzcd} W_{L'/K,S'} \arrow[r] \arrow[dr] & W_{L/K,S} \arrow[d] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

is commutative. □

PROPOSITION 4.25. *Let* $\mathcal{L}$ *be an object of* $\mathcal{T}$ *with trivial* $y(W_{L/K,S})$*-action. We also denote by* $\mathcal{L}$ *the object of* $B_{\mathbb{R}}$ *defined by* $\mathcal{L}$ *with trivial* $y(\mathbb{R})$*-action. There is an isomorphism*

$$j_{L/K,S*}\mathcal{L} \simeq \mathrm{f}^*_{L/K,S}\mathcal{L}.$$

PROOF. On the one hand, one has $\mathrm{f}^*_{L/K,S}\mathcal{L} = (F_v, f_v)_{v\in\overline{Y}}$, where F_v is defined by the trivial action on $\mathcal{L}$, for any valuation v. The map f_v is given by the identity of $\mathcal{L}$.

On the other hand, one has $j_{L/K,S*}\mathcal{L} = (q_{v*}\theta_v^*\mathcal{L}, l_v)$. Let v be a non-trivial valuation of K. The object $\theta_v^*\mathcal{L}$ is $\mathcal{L}$ with trivial $y(\widetilde{W_{K_v}})$-action. One may see that $\mathcal{L} \to q_{v*}q_v^*\mathcal{L}$ is an isomorphism. It follows that $q_{v*}\mathcal{L}$ is $\mathcal{L}$ with trivial $y(W_{k(v)})$-action. □

REMARK 4.26. *In particular the following assertions hold. Let* $\mathbb{Z}$ *be the constant object of* $\mathcal{T}$. *Then* $j_{L/K,S*}\mathbb{Z}$ *is the constant object of* $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ *associated to* $\mathbb{Z}$. *Let* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *be the object of* $\mathcal{T}$ *represented by the topological group* $\mathbb{R}$. *One has*

$$j_{L/K,S*}\widetilde{\mathbb{R}} = (\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\mathbb{R}}, Id_{\widetilde{\mathbb{R}}}).$$

A topos is said to be *strongly compact* if its global sections functor commutes with filtered inductive limits.

PROPOSITION 4.27. *The topos* $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ *is not strongly compact.*

PROOF. For any non-trivial valuation v of K, let F_v be an object of $B_{W_{k(v)}}$ endowed with a section $s_v : e_{k(v)} \to F_v$, where $e_{k(v)}$ is the final object of $B_{W_{k(v)}}$. We define $\mathcal{F}_T = \prod_{v\in T} \mathrm{i}_{v*}F_v$, for any finite set T of places of K. The functor i_v^* commutes with finite products. Therefore the v-component $\mathrm{i}_v^*\mathcal{F}_T$ of $\mathcal{F}_T = \prod_{v\in T}\mathrm{i}_{v*}F_v$ is F_v for $v \in T$, and the final object of $B_{W_{k(v)}}$ (or $B_{W_{L/K,S}}$ for $v = v_0$) otherwise.

There is a map $\mathcal{F}_T \to \mathcal{F}_{T'}$ for $T \subset T'$. This map is induced by the sections s_v for $v \in T'-T$ and by Id_{F_v} for $v \in T$. The filtered inductive limit $\varinjlim \mathcal{F}_T$ exists in $\mathfrak{F}_{L/K,S}$. The functor i_v^* commutes with arbitrary inductive limits. Hence the v-component of $\varinjlim \mathcal{F}_T$ is F_v for $v \neq v_0$ and the final object of $B_{W_{L/K,S}}$ for $v = v_0$. Let $e_{L,S}$ (respectively $e_{k(v)}$) be the final object of $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ (respectively of $B_{W_{k(v)}}$). One has

$$Hom_{\mathfrak{F}_{L/K,S}}(e_{L,S}; \mathcal{F}_T) = \prod_{v\in T} F_v(e_{k(v)}) \text{ and } Hom_{\mathfrak{F}_{L/K,S}}(e_{L,S}; \varinjlim \mathcal{F}_T) = \prod_{v\neq v_0} F_v(e_{k(v)}).$$

If we denote by Γ the global sections functor of $\mathfrak{F}_{W;Y}$, then one has

$$\varinjlim \Gamma(\mathcal{F}_T) = \sum_{v\neq v_0} F_v(e_{k(v)}) \text{ and } \Gamma(\varinjlim \mathcal{F}_T) = \prod_{v\neq v_0} F_v(e_{k(v)}).$$

Therefore, the canonical map $\varinjlim \Gamma(\mathcal{F}_T) \to \Gamma(\varinjlim \mathcal{F}_T)$ is not an isomorphism in general. □

3. Cohomology

In this section, the number field K is totally imaginary. Recall that $\theta_{v_0} = q_{v_0} = Id_{W_{L/K,S}}$. In particular the direct image of the induced morphism of topoi $q_{v_0*} : B_{W_{L/K,S}} \to B_{W_{L/K,S}}$ is the identity functor. Hence $R^n(q_{v_0*}) = 0$ for $n \geq 1$.

PROPOSITION 4.28. *Let $\mathcal{A}$ be an abelian object of $B_{W_{L/K,S}}$. For any $n \geq 0$, one has*

$$R^n(j_*)(\mathcal{A}) = (R^n(q_{v*})\theta_v^*\mathcal{A}, t_v).$$

Here, the map t_v is the trivial map

$$t_v : q_v^* R^n(q_{v*})\theta_v^*\mathcal{A} \longrightarrow \theta_v^* R^n(q_{v_0*})\theta_{v_0}^*\mathcal{A} = 0,$$

for $n \geq 1$.

PROOF. For any $n \geq 1$, one has

$$j^* R^n(j_*)\mathcal{A} = R^n(j^* j_*)\mathcal{A} = R^n(Id)\mathcal{A} = 0. \tag{39}$$

The functor j^* is exact and j_* preserves injective objects. Hence the Leray spectral sequence

$$R^p(j^*)R^q(j_*)(\mathcal{A}) \Rightarrow R^{p+q}(j^* j_*)(\mathcal{A})$$

degenerates. The first identity of (39) follows. Let v be a non-trivial valuation. One has $i_v^* j_*\mathcal{A} = q_{v*}\theta_v^*\mathcal{A}$ hence

$$i_v^* R^n(j_*)\mathcal{A} = R^n(i_v^* j_*)\mathcal{A} = R^n(q_{v*}\theta_v^*)\mathcal{A},$$

since i_v^* is exact. Furthermore, $y(\widetilde{W}_{K_v})$ is a sub-group of $y(W_{L/K,S})$ in the topos $\mathcal{T}$. By ([**24**] IV.5.8), θ_v is a localization morphism. It follows that θ_v^* is exact and preserves injective objects. The associated spectral sequence yields

$$R^n(q_{v*}\theta_v^*)\mathcal{A} = R^n(q_{v*})\theta_v^*\mathcal{A}.$$

The proposition follows. □

NOTATION 4.29. *We denote by $W_{K_v}^1$ the maximal compact sub-group of W_{K_v}. Hence $W_{K_v}^1 = I_v$ is the inertia subgroup for ultrametric v and $W_{K_v}^1 \simeq \mathbb{S}^1$ for complex v. Let $\widetilde{W}_{K_v}^1$ be the image of $W_{K_v}^1$ in $W_{L/K,S}$.*

In what follows, v is a non-trivial valuation of K. Consider the commutative square

$$\begin{tikzcd}
B_{\widetilde{W}_{K_v}}/_{(\widetilde{W}_{K_v}/\widetilde{W}_{K_v}^1)} \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B_{W_{k(v)}}/_{EW_{k(v)}} \arrow[d, "b"] \\
B_{\widetilde{W}_{K_v}} \arrow[r, "q_v"] & B_{W_{k(v)}}
\end{tikzcd}$$

The first horizontal arrow is just (see [**24**] IV.5.8)

$$e_{\widetilde{W}_{K_v}^1} : B_{\widetilde{W}_{K_v}^1} = B_{\widetilde{W}_{K_v}}/_{(\widetilde{W}_{K_v}/\widetilde{W}_{K_v}^1)} \longrightarrow B_{W_{k(v)}}/_{EW_{k(v)}} = \mathcal{T}.$$

The morphism f and h are the localization morphisms and this square is a pull-back (see [**24**] IV.5.8). Moreover, one has a canonical isomorphism of functors

$$b^* \circ q_{v*} \simeq e_{\widetilde{W}_{K_v}^1}^* \circ a^*$$

The localization functors a^* and b^* are both exact and they preserve injective objets. We get

$$b^* \circ R^n(q_{v*}) \simeq R^n(e_{\widetilde{W}^1_{K_v}*}) \circ a^*.$$

In other words, $R^n(q_{v*})\mathcal{A}$ is the group object $R^n(e_{\widetilde{W}^1_{K_v}*})$ of $\mathcal{T}$ endowed with its natural action of $y(\widetilde{W}_{k(v)})$. Indeed, the functor $b^* : B_{W_{k(v)}} \to \mathcal{T}$ is just the forgetful functor which sends an object $\mathcal{F}$ endowed with an action of $y(W_{k(v)})$ to $\mathcal{F}$. Following the notations of [**16**], we denote by $\underline{H}^n(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathcal{A})$ the object $R^n(q_{v*})\mathcal{A}$ of $B_{W_{k(v)}}$.

The direct image functor

$$(i_{v*})_{v\neq v_0} : \coprod_{v\neq v_0} B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S}$$

is exact and preserves injective objects. Moreover, it follows from the previous discussion and Proposition 4.28 that the identity

$$R^q(j_*)\mathcal{A} = (i_{v*})_{v\neq v_0}(\underline{H}^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathcal{A})_{v\neq v_0}).$$

Therefore, one has

$$H^p(\mathfrak{F}_{L/K,S}, R^q(j_*)\mathcal{A}) = H^p(\coprod_{v\neq v_0} B_{W_{k(v)}}, \underline{H}^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathcal{A})_{v\neq v_0}) = \prod_{v\neq v_0} H^p(B_{W_{k(v)}}, \underline{H}^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathcal{A})),$$

If v is not in S then $\widetilde{W}^1_{K_v} = 0$ (see [**37**] Lemma 3.7). We get $\underline{H}^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathcal{A})) = 0$ for v not in S. The next theorem follows.

THEOREM 4.30. *There is an identification*

$$H^p(\mathfrak{F}_{L/K,S}, R^q(j_*)\mathcal{A}) = \prod_{v\in S} H^p(B_{W_{k(v)}}, \underline{H}^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathcal{A})),$$

for any abelian object $\mathcal{A}$ of $B_{W_{L/K,S}}$.

By [**16**] Proposition 9.2 the sheaves $\underline{H}^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathbb{Z})$ are represented by the discrete $W_{k(v)}$-modules $H^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathbb{Z})$. Using [**16**] Proposition 8.1, we get

$$\underrightarrow{lim}_{L,S} H^p(\mathfrak{F}_{L/K,S}, R^q(j_*)\mathbb{Z}) = \underrightarrow{lim}_{L,S} \sum_{v\in S} H^p(W_{k(v)}, H^q(\widetilde{W}^1_{K_v}, \mathbb{Z})) = \sum_{v\neq v_0} H^p(W_{k(v)}, H^q(W^1_{K_v}, \mathbb{Z})),$$

where the $(L/K, S)$ runs over the set of finite Galois extensions and finite S.

DEFINITION 4.31. *Recall that one has a fibered topos (see Remark 4.21)*

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{F}_\bullet : & I/_K & \longrightarrow & \underline{Topos} \\ & (L/K,S) & \longmapsto & \mathfrak{F}_{L/K,S} \end{array}$$

The total topos *$Top(\mathfrak{F}_\bullet)$ is defined as follows. An object of this category is given by a family of objects $\mathcal{F}_{L/K,S}$ of $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ for $(L/K,S) \in Ob(I/_K)$, endowed with a system of compatible maps $f_t : t^*\mathcal{F}_{L/K,S} \to \mathcal{F}_{L'/K,S'}$. Here $t : \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \to \mathfrak{F}_{L/K,S}$ is the morphism of topoi induced by the map $(L'/K,S') \to (L/K,S)$ in $I/_K$.*

REMARK 4.32. *Let $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{L/K,S}, f_t)_{L/K,S}$ be an object of $Top(\mathfrak{F}_\bullet)$. The maps f_t are compatible in the following sense. For any pair of transition maps*

$$t \circ t' : \mathfrak{F}_{L''/K,S''} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S},$$

one has

$$f_{t'}\circ t'^{*}(f_t)=f_{t\circ t'}:t'^{*}t^{*}\mathcal{F}_{L/K,S}\to t'^{*}\mathcal{F}_{L'/K,S'}\to\mathcal{F}_{L''/K,S''}.$$

DEFINITION 4.33. *Let $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{L/K,S},f_t)_{L/K,S}$ be an abelian object of the total topos $Top\,(\mathfrak{F}_\bullet)$.* Lichtenbaum's Weil-étale cohomology *with coefficients in $\mathcal{A}$ is defined as the inductive limit*

$$\underrightarrow{H}^i(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathcal{A}):=\underrightarrow{lim}_{L/K,S}H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathcal{A}_{L/K,S}).$$

where $(L/K,S)$ runs over the set of finite Galois extensions and finite S.

EXAMPLE 4.34. *Denote by*

$$t_{L,S}:\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}\longrightarrow\mathfrak{F}_{L/K,S}$$

the canonical morphism. Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}$. We set $\mathcal{F}_{L,S}:=t_{L,S,*}\mathcal{F}$. Then one has $\mathcal{F}_{L,S}=t_*\mathcal{F}_{L',S'}$ where $t:\mathfrak{F}_{L'/K,S'}\to\mathfrak{F}_{L/K,S}$ is the transition map. Hence we get a canonical morphism

$$f_t:t^*\mathcal{F}_{L,S}=t^*t_*\mathcal{F}_{L',S'}\longrightarrow\mathcal{F}_{L',S'}$$

which is given by adjunction. Then $(\mathcal{F}_{L,S},f_t)$ is an object of $Top\,(\mathfrak{F}_\bullet)$.

The previous discussion gives the next Proposition.

PROPOSITION 4.35. *There are identifications*

$$H^p(\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}},R^q(j_*)\mathbb{Z})=\prod_{v\neq v_0}H^p(W_{k(v)},H^q(W^1_{K_v},\mathbb{Z})),$$

$$\underrightarrow{H}^p(\mathfrak{F}_{L/K,S},R^q(j_*)\mathbb{Z})=\sum_{v\neq v_0}H^p(W_{k(v)},H^q(W^1_{K_v},\mathbb{Z})).$$

We denote by $p_{L,S}:W_K\to W_{L/K,S}$ the canonical map and also by $p_{L,S}:B_{W_K}\to B_{W_{L/K,S}}$ the induced morphism of classifying topoi.

LEMMA 4.36. *Let $\mathcal{A}$ be an abelian object of B_{W_K} and define $\mathcal{A}_{L,S}:=p_{L,S,*}\mathcal{A}$. The family $(R^q(j_{L,S*})\mathcal{A}_{L,S})$ defines an abelian object of $Top\,(\mathfrak{F}_\bullet)$.*

PROOF. The diagram of topoi

$$\begin{tikzcd} B_{W_{L'/K,S'}} \arrow[r, "j_{L',S'}"] \arrow[d, "p"'] & \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \arrow[d, "t"'] \\ B_{W_{L/K,S}} \arrow[r, "j_{L,S}"] & \mathfrak{F}_{L/K,S} \end{tikzcd}$$

is commutative. In other words, there is an isomorphism $j_{L,S,*}p_*\simeq t_*j_{L',S',*}$. We get a transformation

$$t^*j_{L,S,*}p_*\simeq t^*t_*j_{L',S',*}\longrightarrow j_{L',S',*}.$$

which is given by adjunction $t^*t_*\to Id$. There is an induced transformation

$$t^*R^n(j_{L,S,*}p_*)=R^n(t^*j_{L,S,*}p_*)\longrightarrow R^n(j_{L',S',*}),\tag{40}$$

where the identity comes from the exactness of t^*. Now, the Leray spectral sequence

$$R^i(j_{L,S,*})R^j(p_*)\Rightarrow R^{i+j}(j_{L,S,*}p_*)$$

yields a natural transformation

$$R^n(j_{L,S,*})p_*\longrightarrow R^n(j_{L,S,*}p_*).\tag{41}$$

Composing (40) and (41), we get a transformation

$$t^* R^n(j_{L,S,*}) p_* \longrightarrow R^n(j_{L',S',*}).$$

On the other hand one has $p_* \mathcal{A}_{L',S'} = \mathcal{A}_{L,S}$, since the diagram

$$\begin{tikzcd} B_{W_K} \arrow[r] \arrow[dr] & B_{W_{L'/K,S'}} \arrow[d] \\ & B_{W_{L/K,S}} \end{tikzcd}$$

is commutative. Hence there is a canonical map

$$f_t : t^* R^n(j_{L,S,*}) \mathcal{A}_{L,S} = t^* R^n(j_{L,S,*}) p_* \mathcal{A}_{L',S'} \longrightarrow R^n(j_{L',S',*}) \mathcal{A}_{L',S'}.$$

This yields a system of compatible maps hence an abelian object of $Top(\mathfrak{F}_\bullet)$. □

EXAMPLE 4.37. *Let A be a topological W_K-module. We denote also by A the object of B_{W_K} represented by A. Then $A_{L,S} = A^{N_{L,S}}$, where $N_{L,S}$ is the kernel of the map $p_{L,S} : W_K \to W_{L/K,S}$. The map f_t is induced by the inclusion $A^{N_{L,S}} \hookrightarrow A^{N_{L',S'}}$.*

PROPOSITION 4.38. *Let A be a continuous discrete W_K-module or $A = \mathbb{R}$. There is a spectral sequence*

$$\underrightarrow{H}^p(\mathfrak{F}_{L/K,S}, R^q(j_*)A^{N_{L,S}}) \Rightarrow H^p(B_{W_K}, A).$$

PROOF. The composition

$$B_{L/K,S} \longrightarrow \mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow \underline{Set}$$

yields a Leray spectral sequence

$$H^p(\mathfrak{F}_{L/K,S}, R^q(j_*)A^{N_{L,S}}) \Rightarrow H^p(B_{W_{L/K,S}}, A^{N_{L,S}}).$$

Passing to the limit, we get a spectral sequence

$$\underrightarrow{H}^p(\mathfrak{F}_{L/K,S}, R^q(j_*)A^{N_{L,S}}) \Rightarrow \underrightarrow{lim}_{L,S} H^p(B_{W_{L/K,S}}, A^{N_{L,S}}) = H^p(B_{W_K}, A).$$

where the identity on the right hand side is given by **[16]** Lemma 10. □

Let $Pic(\overline{Y})$ be the Arakelov class group of K. This is the group obtained by taking the idèle group of K and dividing by the principal idèles and the unit idèles. Recall that $Pic(Y)$ denotes the class group of K. Let $Pic^1(\overline{Y})$ be the kernel of the absolute value map from $Pic(\overline{Y})$ to $\mathbb{R}^{>0}$.

PROPOSITION 4.39. *There is an exact sequence*

$$0 \to Pic(Y)^{\mathcal{D}} \to Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \to Hom(U_K, \mathbb{Z}) \to 0.$$

PROOF. This is **[37]** Proposition 6.4. □

THEOREM 4.40. *One has*

$$\begin{aligned} \underrightarrow{H}^n(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \text{ for } n = 0, \\ &= 0 \text{ for } n = 1, \\ &= Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \text{ for } n = 2, \\ &= \mu_K^{\mathcal{D}} \text{ for } n = 3. \end{aligned}$$

Furthermore, the group $\underrightarrow{H}^n(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z})$ is of infinite rank for even $n \geq 4$ and vanishes for odd $n \geq 5$.

PROOF. Proposition 4.35 and [**16**] yield

$$\begin{aligned}\underrightarrow{H}^p(\mathfrak{F}_{L/K,S},R^q(j_*)\mathbb{Z}) &= \sum_{v\neq v_0,\,v\nmid\infty}(\mathcal{O}_{K_v}^\times)^{\mathcal{D}}\oplus\sum_{v\mid\infty}\mathbb{Z} \text{ for } p=0 \text{ and } q=2,\\ &= \sum_{v\mid\infty}\mathbb{Z} \text{ for } p=0 \text{ and } q\geq 4 \text{ even},\\ &= 0 \text{ otherwise.}\end{aligned}$$

Now the spectral sequence of Proposition 4.38 for $A=\mathbb{Z}$ gives

$$\underrightarrow{H}^1(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})=H^1(W_K,\mathbb{Z})=0.$$

Next, we obtain the exact sequence

$$0\to\underrightarrow{H}^2(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})\to H^2(W_K,\mathbb{Z})\to\sum_{v\nmid\infty}(\mathcal{O}_{K_v}^\times)^{\mathcal{D}}\oplus\sum_{v\mid\infty}\mathbb{Z}\to\underrightarrow{H}^3(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})\to 0.$$

This is the Pontryagin dual of

$$0\to\underrightarrow{H}^3(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})^{\mathcal{D}}\to\prod_{v\nmid\infty}\mathcal{O}_{K_v}^\times\times\prod_{v\mid\infty}\mathbb{S}^1\to C_K^1\to\underrightarrow{H}^2(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})^{\mathcal{D}}\to 0.$$

The result for $n\leq 3$ follows. Furthermore, the spectral sequence provides us with the exact sequence

$$0\to\underrightarrow{H}^n(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})^{\mathcal{D}}\to H^n(W_K,\mathbb{Z})\to\oplus_{v\mid\infty}\mathbb{Z}\to\underrightarrow{H}^{n+1}(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})\to 0,$$

for even $n\geq 4$. Therefore, the result for $n\geq 4$ follows from the fact that the map $H^n(W_K,\mathbb{Z})\to\oplus_{v\mid\infty}\mathbb{Z}$ is surjective (see [**16**]). $\square$

THEOREM 4.41. *For $n\leq 1$ and $n\geq 4$, the canonical map*

$$\underrightarrow{H}^n(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})\longrightarrow H^n(\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}},\mathbb{Z})$$

is an isomorphism. Futhermore, there is an exact sequence

$$0\to H^2(\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}},\mathbb{Z})\to C_K^1\to\prod_{v\nmid\infty}(\mathcal{O}_{K_v}^\times)^{\mathcal{D}}\times\prod_{v\mid\infty}\mathbb{Z}\to H^3(\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}},\mathbb{Z})\to 0.$$

PROOF. The morphism of topoi $\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}\to\mathfrak{F}_{L/K,S}$ yields a map $H^n(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})\to H^n(\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}},\mathbb{Z})$. By the universal property of the inductive limit we get a morphism

$$\underrightarrow{H}^n(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z})\longrightarrow H^n(\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}},\mathbb{Z}).$$

Using Proposition 4.22 (with $L'=\overline{K}$), and passing to the limit, we obtain a morphism of spectral sequences

$$[\underrightarrow{H}^p(\mathfrak{F}_{L/K,S},R^q(j_{L/K,S,*})\mathbb{Z})\Rightarrow H^p(B_{W_K},\mathbb{Z})]\longrightarrow[H^p(\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}},R^q(j_*)\mathbb{Z})\Rightarrow H^p(B_{W_K},\mathbb{Z})].$$

Comparing these spectral sequences and using the previous proof, we deduce the result. $\square$

NOTATION 4.42. *Let $\overline{U}=(U,U_\infty)$ be an open sub-scheme of $\overline{Y}$. Clearly, it defines a sub-object of the final object in topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$. The open sub-topos*

$$\mathfrak{F}_{L/K,S}/_{\overline{U}}\longrightarrow\mathfrak{F}_{L/K,S}$$

is the category whose objects are of the form $\mathcal{F}=(F_v;f_v)_{v\in\overline{U}}$. We denote by

$$H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},-):=H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S}/_{\overline{U}},-)$$

the cohomology of this topos. Then we set

$$\underrightarrow{H}^n(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) = \varinjlim H^n(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}).$$

THEOREM 4.43. *Assume that $U \neq Y$. Then one has*

$$\underrightarrow{H}^0(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ and } \underrightarrow{H}^i(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) = 0$$

for i odd. Moreover, one has the following exact sequences.

$$0 \longrightarrow \underrightarrow{H}^2(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) \longrightarrow (C_K^1)^{\mathcal{D}} \longrightarrow \coprod_{v\in U}(\mathcal{O}_{K_v}^{\times})^{\mathcal{D}} \oplus \coprod_{v\in U_\infty}\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \underrightarrow{H}^i(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(W_K,\mathbb{Z}) \longrightarrow \sum_{v\in U_\infty}\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \text{ for even } i \geq 4.$$

PROOF. Again, we use the Leray spectral sequence induced by the inclusion of the generic point. We get $\underrightarrow{H}^1(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) = H^1(W_K,\mathbb{Z}) = 0$ and the exact sequence

$$0 \to \underrightarrow{H}^2(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) \to (C_K^1)^{\mathcal{D}} \to \coprod_{v\in U}(\mathcal{O}_{K_v}^{\times})^{\mathcal{D}} \oplus \coprod_{v\in U_\infty}\mathbb{Z} \to \underrightarrow{H}^3(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) \to 0.$$

Moreover the map

$$\prod_{v\in U}(\mathcal{O}_{K_v}^{\times}) \times \prod_{v\in U_\infty}\mathbb{S}^1 \longrightarrow C_K^1$$

is injective, since $U \neq Y$. By Pontryagin duality, we obtain $\underrightarrow{H}^3(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) = 0$ and the exact sequence involving $\underrightarrow{H}^2(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z})$. Next we obtain

$$0 \to \underrightarrow{H}^i(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) \to H^i(W_K,\mathbb{Z}) \to \sum_{v\in U_\infty}\mathbb{Z} \to \underrightarrow{H}^{i+1}(\mathfrak{F}_{L/K,S},\overline{U},\mathbb{Z}) \to H^{i+1}(W_K,\mathbb{Z}) = 0$$

for even $i \geq 4$. This ends the proof since the map $H^i(W_K,\mathbb{Z}) \to \sum_{v\in U_\infty}\mathbb{Z}$ is surjective (see [**16**]).

□

4. Comparaison with the definition of Lichtenbaum

In this section we show that the category $\mathfrak{F}_{L/K,S}$ is equivalent to the category of sheaves for the Lichtenbaum Weil étale site $T_{L/K,S}$.

4.1. The local section site. In [**37**], the Weil-étale topology is defined using the groups $W_{L/K;S}$ (see [**37**]), where L/K is a finite Galois extension and S a finite set of primes of K containing the archimedean ones and the primes ramified in L/K. M. Flach has shown in [**16**] that the definition of $H^i(W_K;A)$ as the direct limit $\varinjlim H^i(W_{L/K;S};A)$ coincides with the topological group cohomology of W_K. Here, A is a discrete abelian group or the usual topological group $\mathbb{R}$ whith trivial W_K-action (see [**16**] Lemma 10). He has suggested the following definition.

DEFINITION 4.44. *The* local section site $(T_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{ls})$ *is defined as follows. An object of the category $T_{W;\overline{Y}}$ is of the form $\mathcal{X} = (X_v;f_v)_{v\in\overline{Y}}$. Here, X_v is a topological space on which $W_{k(v)}$ acts continuously and $f_v : X_v \to X_{v_0}$ is a morphism of W_{K_v}-spaces so that $f_{v_0} = Id_{X_{v_0}}$. Note that the topological group W_{K_v} acts continuously on X_v and X_{v_0} via the morphisms $\theta_v : W_{K_v} \to W_F$ and $q_v : W_{K_v} \to W_{k(v)}$ respectively. The morphisms of this category are* *defined in the obvious way. The topology* $\mathcal{J}_{ls}$ *on the category* $T_{W;\overline{Y}}$ *is generated by the pre-topology for which a cover is a family of morphisms* $\{\mathcal{X}_i \to \mathcal{X}\}$ *such that* $\{X_{i;v} \to X_v\}$ *is a local section cover, for any valuation* v*.*

Definition 4.45. *The site* $(T_{L/K,S}; \mathcal{J}_{ls})$ *is defined as above, by replacing* $W_{k(v_0)} = W_K$ *with* $W_{L/K,S}$ *and* W_{K_v} *with* $\widetilde{W}_{K_v}$*. In particular* $(T_{L/K,S}; \mathcal{J}_{ls}) = (T_{W;\overline{Y}}; \mathcal{J}_{ls})$ *for* $L = \overline{K}$ *and* S *the set of all places of* K*.*

Remark 4.46. *In order to simplify notation, we assume in Section 4 that* $L = \overline{K}/K$ *is an algebraic closure of* K *and* S *is the set of all places of* K*. However, everything here remains valid for any suitable pair* $(L/K, S)$*.*

Remark 4.47. *The functor* $B_{Top}\widetilde{W}_{K_v} \to B_{Top}W_{K_v}$ *induced by the surjective map* $W_{K_v} \to \widetilde{W}_{K_v}$ *is fully faithful (the category* $B_{Top}W_{K_v}$ *is defined below). Therefore, the site* $(T_{L/K,S}; \mathcal{J}_{ls})$ *can be defined via the topological group* W_{K_v} *as well.*

The category $T_{W;\overline{Y}}$ has finite projective limits. Indeed, the final object is given by the trivial action of $W_{k(v)}$ on the one point space $X_v := \{*\}$ for any v, and by the trivial map $f_v : X_v \to X_{v_0}$. Let

$$\phi : \mathcal{U} = (U_v; f_v) \longrightarrow \mathcal{X} = (X_v; \xi_v) \text{ and } \phi' : \mathcal{U}' = (U'_v; f'_v) \to \mathcal{X} = (X_v; \xi_v)$$

be two morphisms in $T_{W;\overline{Y}}$. The object $(U_v \times_{X_v} U'_v;\, f_v \times_{\xi_v} f'_v)_{v \in Y}$ does define a fiber product $\mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}'$ in the category $T_{W;\overline{Y}}$.

4.2. The local section site is a site for the flask topos. For any topological group G, we denote by $B_{Top}G$ the category of topological spaces (in a given universe) on which G acts continuously. Let v be a valuation of K. The Yoneda embedding induces fully faithful functors

$$\varepsilon_v : B_{Top}W_{k(v)} \to B_{W_{k(v)}} \text{ and } \varepsilon_{K_v} : B_{Top}W_{K_v} \to B_{W_{K_v}}.$$

Recall that $\theta_v^* : B_{W_K} \to B_{W_{K_v}}$ and $q_v^* : B_{W_{k(v)}} \to B_{W_{K_v}}$ denote the pull-backs of the morphisms of classifying topoi induced by the Weil map $\theta_v : W_{K_v} \to W_K$ and by the projection $q_v : W_{K_v} \to W_{k(v)}$. In the following proof, we denote also by

$${}^t\theta_v^* : B_{Top}W_K \to B_{Top}W_{K_v} \text{ and } {}^tq_v^* : B_{Top}W_{k(v)} \to B_{Top}W_{K_v}$$

the functors induced by θ_v and q_v. One easily sees that one has

$$q_v^* \circ \varepsilon_v = \varepsilon_{K_v} \circ {}^tq_v^* \text{ and } \theta_v^* \circ \varepsilon_{v_0} = \varepsilon_{K_v} \circ {}^t\theta_v^*. \tag{42}$$

Proposition 4.48. *There is a natural functor*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{y} : & T_{W;\overline{Y}} & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \\ & \mathcal{X} = (X_v; f_v) & \longmapsto & \mathrm{y}(\mathcal{X}) = (\varepsilon_v(X_v); \varepsilon_{K_v}(f_v)) \end{array}.$$

which is fully faithful.

Proof. Let $\mathcal{X} = (X_v; f_v)$ be an object of $T_{W;\overline{Y}}$. Hence $f_v : {}^tq_v^*(X_v) \to {}^t\theta_v^*(X_{v_0})$ is a map of $B_{Top}W_{K_v}$, for any valuation v. By (42), the map

$$\varepsilon_{K_v}(f_v) : q_v^* \circ \varepsilon_v(X_v) = \varepsilon_{K_v} \circ {}^tq_v^*(X_v) \longrightarrow \varepsilon_{K_v} \circ {}^t\theta_v^*(X_{v_0}) = \theta_v^* \circ \varepsilon_v(X_{v_0})$$

is a morphism of $B_{W_{K_v}}$. Hence $\mathrm{y}(\mathcal{X}) = (\varepsilon_v(X_v); \varepsilon_{K_v}(f_v))$ is an object of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ and y is a functor.

Let $\mathcal{X} = (X_v\,;\ f_v)_v$ and $\mathcal{X}' = (X'_v\,;\ f'_v)_v$ be two objects of $T_{W;\overline{Y}}$. Denote by

$$\mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')} : Hom_{T_{W;\overline{Y}}}((X_v\,;\ f_v);(X'_v\,;\ f'_v)) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}((\varepsilon_v X_v\,;\ \varepsilon_{K_v} f_v);(\varepsilon_v X_v\,;\ \varepsilon_{K_v} f_v))$$

the map defined by the functor y. One has to show that $\mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')}$ is a bijection, for any objects $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}'$. Let

$$\phi' = (\phi'_v)_v,\ \phi = (\phi_v)_v\ : (X_v\,;\ f_v) \rightrightarrows (X'_v\,;\ f'_v)$$

be two morphisms so that $\mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')}(\phi') = \mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')}(\phi)$. One has $\varepsilon_v(\phi'_v) = \varepsilon_v(\phi_v)$ for any $v \in \overline{Y}$. Since ε_v is fully faithful, we get $\phi'_v = \phi_v$ hence the map $\mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')}$ is injective. Let

$$\varphi = (\varphi_v)_v\ : (\varepsilon_v X_v\,;\ \varepsilon_{K_v} f_v) \to (\varepsilon_v X'_v\,;\ \varepsilon_{K_v} f'_v)$$

be a morphism in $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. For any $v \in \overline{Y}$, there exists a (unique) morphism $\phi_v : X_v \to X'_v$ such that $\varepsilon_v(\phi_v) = \varphi_v$, since ε_v is fully faithful. The square

$$\begin{tikzcd}
q_v^*(\varepsilon_v X_v) \arrow[r, "q_v^*(\varepsilon_v(\phi_v))"] \arrow[d, "\varepsilon_{K_v}(f_v)"'] & q_v^*(\varepsilon_v X'_v) \arrow[d, "\varepsilon_{K_v}(f'_v)"] \\
\theta_v^*(\varepsilon_{v_0} X_{v_0}) \arrow[r, "\theta_v^*(\varepsilon_{v_0}(\phi_{v_0}))"'] & \theta_v^*(\varepsilon_{v_0} X'_{v_0})
\end{tikzcd}$$

is commutative. By (42), the following commutes as well

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon_{K_v}({}^t q_v^*(X_v)) \arrow[r, "\varepsilon_{K_v}({}^t q_v^*(\phi_v))"] \arrow[d, "\varepsilon_{K_v}(f_v)"'] & \varepsilon_{K_v}({}^t q_v^*(X'_v)) \arrow[d, "\varepsilon_{K_v}(f'_v)"] \\
\varepsilon_{K_v}({}^t\theta_v^*(X_{v_0})) \arrow[r, "\varepsilon_{K_v}({}^t\theta_v^*(\phi_{v_0}))"'] & \varepsilon_{K_v}({}^t\theta_v^*(X'_{v_0}))
\end{tikzcd}$$

Finally, the square

$$\begin{tikzcd}
{}^t q_v^*(X_v) \arrow[r, "{}^t q_v^*(\phi_v)"] \arrow[d, "f_v"'] & {}^t q_v^*(X'_v) \arrow[d, "f'_v"] \\
{}^t\theta_v^*(X_{v_0}) \arrow[r, "{}^t\theta_v^*(\phi_{v_0})"'] & {}^t\theta_v^*(X'_{v_0})
\end{tikzcd}$$

is commutative, since ε_{K_v} is fully faithful. Hence $\phi = (\phi_v)_v : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ is a morphism of $T_{W;\overline{Y}}$ such that

$$\mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')}(\phi) = \mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')}((\phi_v)_v) = (\varepsilon_v \phi_v)_v = (\varphi_v)_v = \varphi.$$

The functor y is fully faithful, since the map $\mathrm{y}_{(\mathcal{X};\mathcal{X}')}$ is bijective for any objects $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}'$ of $T_{W;\overline{Y}}$. $\square$

For the notion of induced topology we refer to ([**24**] III.3.1).

PROPOSITION 4.49. *The local section topology $\mathcal{J}_{ls}$ on $T_{W;\overline{Y}}$ is the topology induced by the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ via the functor* y.

PROOF. Recall that the coproduct of a family of topoi is, as a category, the product of the underlying categories. Then consider the following commutative diagram of categories

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "(\mathrm{i}_v^*)_v"] & \coprod_{v\in\overline{Y}} B_{W_{k(v)}} \\
T_{W;\overline{Y}} \arrow[u, "\mathrm{y}"] \arrow[r] & \prod_{v\in\overline{Y}} T_{W_{k(v)}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

By definition, the local section topology on $T_{W;\overline{Y}}$ is the topology induced by the local section topology on $\prod_{v\in\overline{Y}} T_{W_{k(v)}}$ (see [**24**] III.3.4). By [**16**] Proposition 4.1, the local section topology on $T_{W_{k(v)}}$ is the topology induced by the canonical topology of $B_{W_{k(v)}}$. Hence the local section topology on $\prod T_{W_{k(v)}}$ is the topology induced by the canonical topology of $\coprod B_{W_{k(v)}}$. Since the previous diagram is commutative, the local section topology on $T_{W;\overline{Y}}$ is the topology induced by the canonical topology of $\coprod B_{W_{k(v)}}$ via the functor

$$(\mathrm{i}_v^*)_v \circ \mathrm{y} \ : T_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \coprod_{v\in\overline{Y}} B_{W_{k(v)}}.$$

Hence, it remains to show that the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is induced by the canonical topology of $\coprod B_{W_{k(v)}}$.

The functor $(\mathrm{i}_v^*)_v : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \to \coprod B_{W_{k(v)}}$ is the pull-back of the morphism of topoi $(\mathrm{i}_v)_v : \coprod B_{W_{k(v)}} \to \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Then, $(\mathrm{i}_v^*)_v$ is a continuous morphism of left exact sites, if $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ and $\coprod B_{W_{k(v)}}$ are considered as categories endowed with their canonical topologies. This shows that the topology $\mathcal{J}_{ind}$ on $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ induced by the canonical topology of $\coprod B_{W_{k(v)}}$ is finer than the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, by definition of the induced topology.

We need to show that any representable presheaf is a sheaf on the site $(\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{ind})$. Let $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_v$ be an object of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, and let

$$\{u_i : \ \mathcal{X}_i = (X_{i;v};\xi_{i;v}) \longrightarrow \mathcal{X} = (X_v;\xi_v)\}_{i\in I}$$

be a covering family of the site $(\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{ind})$. The functor

$$(\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{ind}) \longrightarrow (\coprod B_{W_{k(v)}};\mathcal{J}_{can}) \longrightarrow (B_{W_{k(v)}};\mathcal{J}_{can})$$

is continuous. Therefore, the family

$$\{u_{i;v} : X_{i;v} \longrightarrow X_v\}_{i\in I}$$

is a covering family of $(B_{W_{k(v)}};\mathcal{J}_{can})$, by ([**24**] III.1.6). Since the covering families for the canonical topology of a topos are precisely the epimorphic families, the family $\{X_{i;v} \longrightarrow X_v\}$ is epimorphic. Moreover, the pull-back q_v^* of the morphism $q_v : B_{W_{K_v}} \to B_{W_{k(v)}}$ preserves (as any pull-back) epimorphic families. Hence the family

$$\{q_v^*(u_{i;v}) : \ q_v^*(X_{i;v}) \longrightarrow q_v^*(X_v)\}_{i\in I}$$

is epimorphic in the category $B_{W_{K_v}}$. Consider the diagram $\mathbb{D}$:

$$\begin{tikzcd}
Hom((X_v)_v;(F_v)_v) \arrow[r, "b"] & \prod Hom((X_{i;v})_v;(F_v)_v) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod Hom((X_{i;v}\times_{X_v} X_{j;v})_v;(F_v)_v) \\
Hom(\mathcal{X};\mathcal{F}) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "c"] & \prod Hom(\mathcal{X}_i;\mathcal{F}) \arrow[u, "d"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod Hom(\mathcal{X}_i\times_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_j;\mathcal{F}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

The sets of homomorphisms in the first line correspond to the category $\coprod B_{W_{k(v)}}$, and the set of homomorphisms of the second line correspond to the category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. The vertical arrows are given by the faithful functor $(\mathrm{i}_v^*)_v$. Hence these maps are all injective. In particular, a and d are both injective.

The functor $(\mathrm{i}_v^*)_v$ sends covering families of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ to covering families of $\coprod B_{W_{k(v)}}$, since $(\mathrm{i}_v^*)_v$ is continuous. Moreover, any representable presheaf of $\coprod B_{W_{k(v)}}$ is a sheaf for the canonical topology. This shows that the first line of $\mathbb{D}$ is exact. Hence, the maps a and b are both injective, which shows that c is injective.

Now, let $(\varphi_i)_i$ be an element of the kernel of

$$\prod Hom(\mathcal{X}_i;\mathcal{F}) \rightrightarrows \prod Hom(\mathcal{X}_i\times_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_j;\mathcal{F}).$$

The square on the right hand side is commutative hence $d((\varphi_i)_i)$ is in the kernel of

$$\prod Hom((X_{i;v})_v;(F_v)_v) \rightrightarrows \prod Hom((X_{i;v}\times_{X_v}X_{j;v})_v;(F_v)_v).$$

Then, we get an element $\phi\in Hom((X_v)_v;(F_v)_v)$ which goes to $d((\varphi_i)_i)$, since the first line is exact. More precisely, one has $b(\phi)=d((\varphi_i)_i)$. Let v be a non-trivial valuation. For any $i\in I$, consider the diagram

$$\begin{tikzcd} q_v^*(X_{i;v}) \arrow[r, "q_v^*(u_{i;v})"] \arrow[d, "\xi_{i;v}"'] & q_v^*(X_v) \arrow[r, "q_v^*(\phi_v)"] \arrow[d, "\xi_v"] & q_v^*(F_v) \arrow[d, "f_v"] \\ \theta_v^*(X_{i;v_0}) \arrow[r, "u_{i;v}"] & \theta_v^*(X_{v_0}) \arrow[r, "\theta_v^*(\phi_{v_0})"'] & \theta_v^*(F_{v_0}) \end{tikzcd}$$

Here, the total square and the left hand side square are both commutative. Indeed,

$$u_i\in Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{X}_i;\mathcal{X}) \text{ and } \phi\circ u_i=\varphi_i\in Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{X}_i;\mathcal{F}).$$

It follows that the elements

$$\theta_v^*(\phi_{v_0})\circ\xi_v \text{ and } f_v\circ q_v^*(\phi_v)$$

of the set $Hom_{B_{W_{K_v}}}(q_v^*(X_v);\theta_v^*(F_{v_0}))$ have the same image under the morphism

$$Hom_{B_{W_{K_v}}}(q_v^*(X_v);\theta_v^*(F_{v_0}))\longrightarrow Hom_{B_{W_{K_v}}}(q_v^*(X_{i;v});\theta_v^*(F_{v_0})),$$

for any $i\in I$. Hence, $\theta_v^*(\phi_{v_0})\circ\xi_v$ and $f_v\circ q_v^*(\phi_v)$ have the same image under the morphism

$$Hom_{B_{W_{K_v}}}(q_v^*(X_v);\theta_v^*(F_{v_0}))\longrightarrow Hom_{B_{W_{K_v}}}(\coprod_{i\in I}q_v^*(X_{i;v});\theta_v^*(F_{v_0})). \tag{43}$$

Furthermore, the morphism (43) is injective, since the family $\{q_v^*(X_{i;v})\longrightarrow q_v^*(X_v)\}$ is epimorphic. The equality

$$\theta_v^*(\phi_{v_0})\circ\xi_v=f_v\circ q_v^*(\phi_v)$$

follows. Then, for any valuation $v\in\overline{Y}$, the square

$$\begin{tikzcd} q_v^*(X_v) \arrow[r, "q_v^*(\phi_v)"] \arrow[d, "\xi_v"'] & q_v^*(F_v) \arrow[d, "f_v"] \\ \theta_v^*(X_{v_0}) \arrow[r, "\theta_v^*(\phi_{v_0})"'] & \theta_v^*(F_{v_0}) \end{tikzcd}$$

is commutative. In other words, the element $\phi \in Hom_{\coprod B_{W_{k(v)}}}((X_v)_v;(F_v)_v)$ lies in

$$Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{X};\mathcal{F}) \ \subseteq \ Hom_{\coprod B_{W_{k(v)}}}((X_v)_v;(F_v)_v).$$

Hence, there exists a unique $\varphi \in Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{X};\mathcal{F})$ so that $a(\varphi)=\phi$. We get

$$b\circ a(\varphi) = b(\phi) = d((\varphi_i)_i) = d\circ c(\varphi)$$

and

$$c(\varphi) = (\varphi_i)_i,$$

since d is injective. This shows that the second line of $\mathbb{D}$ is exact.

We have shown that the sequence

$$Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{X};\mathcal{F}) \rightarrow \prod_i Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{X}_i;\mathcal{F}) \rightrightarrows \prod_{i;j} Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{X}_i\times_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_j;\mathcal{F})$$

is exact and that the first arrow is injective, for any object $\mathcal{F}$ of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ and any covering family $\{\mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{X}\}_{i\in I}$ of the site $(\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{ind})$. Hence, any representable presheaf of the category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is a sheaf for the topology $\mathcal{J}_{ind}$. In other words, the topology $\mathcal{J}_{ind}$ is sub-canonical, that is, coarser than the canonical topology. Since $\mathcal{J}_{ind}$ is also finer than the canonical topology, it is the canonical topology. □

Corollary 4.50. *The functor* y *is continuous.*

Proof. By definition of the induced topology, $\mathcal{J}_{ls}$ is the finest topology on $T_{W;\overline{Y}}$ so that y is continuous (see **[24]** III.3.1). □

Corollary 4.51. *The local section topology $\mathcal{J}_{ls}$ on $T_{W;\overline{Y}}$ is sub-canonical.*

Proof. Let $\mathcal{X}$ be an object of $T_{W;\overline{Y}}$. The presheaf $\widetilde{\mathrm{y}(\mathcal{X})}$ of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ represented by $\mathrm{y}(\mathcal{X})$ is a sheaf, since $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is endowed with the canonical topology. The restriction of $\widetilde{\mathrm{y}(\mathcal{X})}$ to the sub-category $T_{W;\overline{Y}}$ via the functor y is a sheaf for the local section topology $\mathcal{J}_{ls}$, since y is continuous. But this sheaf is canonically isomorphic to the presheaf $\widetilde{\mathcal{X}}$ of $T_{W;\overline{Y}}$ represented by $\mathcal{X}$, since y is fully faithful. Hence $\widetilde{\mathcal{X}}$ is a sheaf. □

We denote by $y: Top \rightarrow \mathcal{T}$ the Yoneda embedding. In the next proof, we also denote by $y: B_{Top}G \rightarrow B_G$ the induced functor, for any topological group G. By **[16]** Corollary 3, the full sub-category of $B_{W_{k(v)}}$ defined by the family of objects

$$\{y(W_{k(v)}\times Z); Z\in Ob(Top)\}$$

is a generating sub-category, for any valuation v. Here, $y(W_{k(v)})$ acts on $y(W_{k(v)}\times Z) = y(W_{k(v)})\times y(Z)$ on the first factor. Consider the sequence adjoint functors between $B_{W_{K_v}}$ and B_{W_K}

$$\theta_{v!}\ ;\quad \theta_v^*\ ;\quad \theta_{v*}$$

induced by the morphism of topological groups $\theta_v : W_{K_v}\rightarrow W_K$. Recall that the functor $\theta_{v!}$ is defined by

$$\theta_{v!}(\mathcal{F}) = y(W_K)\times^{y(W_{K_v})}\mathcal{F} := (y(W_K)\times\mathcal{F})/y(W_{K_v}),$$

where $y(W_{K_v})$ acts on the left on $\mathcal{F}$ and by right-translations on $y(W_K)$. Then, for any $v\in\overline{Y}^0$ and any $Z\in Ob(Top)$, we define

$$\mathcal{G}_{Z;v} = ((\theta_{v!}(q_v^*(y(W_{k(v)}\times Z)))\ ;\ y(W_{k(v)}\times Z)\ ;\ (\emptyset_{B_{W_{k(w)}}})_{w\neq v_0;v})\ ;\ (g_{Z;v})),$$

where the morphism

$$g_{Z;v} : q_v^*(y(W_{k(v)} \times Z)) \longrightarrow \theta_v^* \circ \theta_{v!}(q_v^*(y(W_{k(v)} \times Z))))$$

is given by adjunction. For the trivial valuation v_0 and for any $Z \in Ob(Top)$, we define

$$\mathcal{G}_{Z;v_0} := (y(W_K \times Z)\ ;\ (\emptyset_{B_{W_{k(v)}}})_{v \neq v_0}).$$

Note that $T_{W;\overline{Y}}$ is equivalent to a full subcategory of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, by Proposition 4.48.

PROPOSITION 4.52. *The category $T_{W;\overline{Y}}$ is a generating sub-category of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$.*

PROOF. It is shown in the proof of Proposition 4.11 that the family

$$\{\mathcal{G}_{Z;v};\ \ ; Z \in Ob(Top);\ \ v \in Y\}$$

is a generating family of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Hence, it remains to show that $\mathcal{G}_{Z;v}$ lies in $T_{W;\overline{Y}}$, for any $Z \in Ob(Top)$ and any $v \in \overline{Y}$. It is obvious for the trivial valuation $v = v_0$. Take a non-trivial valuation $v \neq v_0$. One has

$$\theta_{v!}(q_v^*(y(W_{k(v)} \times\ Z))) := y(W_K) \times^{y(W_{K_v})} y(W_{k(v)} \times\ Z) = y(W_K \times^{W_{K_v}} (W_{k(v)} \times\ Z)). \tag{44}$$

as it is shown in the proof of ([**16**] Lemma 13). Note that W_{K_v} acts on the right on W_K and by left translation on the first factor on $(W_{k(v)} \times\ Z)$. This defines the quotient space $(W_K \times^{W_{K_v}} (W_{k(v)} \times\ Z))$. Then, W_K acts on $(W_K \times^{W_{K_v}} (W_{k(v)} \times\ Z))$ by left translation on the first factor. We get

$$\mathcal{G}_{Z;v} = (\theta_{v!}(q_v^*(y(W_{k(v)} \times Z)));\ \ y(W_{k(v)} \times Z);\ \ (\emptyset_{B_{W_{k(w)}}})_{w \neq v_0;v};\ \ g_{Z;v}) \tag{45}$$

$$= \text{y}\ (W_K \times^{W_{K_v}} (W_{k(v)} \times Z);\ \ (W_{k(v)} \times Z);\ \ (\emptyset_{Top})_{w \neq v_0;v};\ \ \widetilde{g_{Z;v}}\ ), \tag{46}$$

where

$$\widetilde{g_{Z;v}} : (W_{k(v)} \times Z) \longrightarrow\ W_K \times^{W_{K_v}} (W_{k(v)} \times Z)$$

is the unique map of W_{K_v}-topological spaces such that $y(\widetilde{g_{Z;v}}) = g_{Z;v}$. Indeed, the Yoneda embedding

$$y : B_{Top}W_{K_v} \to B_{W_{K_v}}$$

is fully faithful. Hence $\mathcal{G}_{Z;v}$ is an object of $T_{W;\overline{Y}}$ for any $Z \in Ob(Top)$ and any $v \in \overline{Y}$.

□

THEOREM 4.53. *The canonical morphism*

$$\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow (\widetilde{T_{W;\overline{Y}}; \mathcal{J}_{ls}})$$

is an equivalence of topoi, where $(\widetilde{T_{W;\overline{Y}}; \mathcal{J}_{ls}})$ is the category of sheaves on the local section site. More generally, the canonical map

$$\mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow (\widetilde{T_{L/K,S}; \mathcal{J}_{ls}})$$

is an equivalence.

PROOF. The functor $\text{y} : T_{W;\overline{Y}} \to \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is fully faithful, the topology $\mathcal{J}_{ls}$ is induced by the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ and $T_{W;\overline{Y}}$ is a generating sub-category of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. More generally the proofs of (4.48), (4.49) and (4.52) remain valid for $\mathfrak{F}_{L/K,S}$, where L/K and S are both finite, by replacing W_K and W_{K_v} with $W_{L/K,S}$ and $\widetilde{W}_{K_v}$ respectively. The theorem follows from ([**24**] IV.1.2.1). □

5. The Artin-Verdier étale topos

The Artin-Verdier étale site associated to a number field takes the archimedean primes into account. This refinement of the étale site is necessary in order to obtain the vanishing of the cohomology in degrees greater than three. Recall that $\overline{Y}$ is the set of valuations of a number field K.

5.1. The Artin-Verdier étale site of $\overline{Y}$. Here, all schemes are separated and of finite type over $Spec(\mathbb{Z})$. A *connected $\overline{Y}$-scheme* is a pair $\overline{X} = (X; X_\infty)$, where X is a connected Y-scheme in the usual sense. When X is empty, X_∞ has to be (empty or) a single point over Y_∞. If X is not empty, X_∞ is an connected open subset of $X(\mathbb{C})/\sim$. Here, $X(\mathbb{C})/\sim$ is the quotient of the set of complex valued points of X under the equivalence relation defined by complex conjugation, endowed with the quotient topology. A *$\overline{Y}$-scheme* is a finite sum of connected $\overline{Y}$-schemes.

A *connected étale $\overline{Y}$-scheme* is a connected $\overline{Y}$-scheme $(X; X_\infty)$, where X/Y is étale of finite presentation and X_∞/Y_∞ is unramified in the sense that if $y \in Y_\infty$ is real, so is any point x of X_∞ lying over y. An *étale $\overline{Y}$-scheme* $\overline{X}$ is a finite sum of connected étale $\overline{Y}$-schemes, called the connected components of $\overline{X}$. A morphism $\overline{\phi} : (U; U_\infty) \to (V; V_\infty)$ of étale $\overline{Y}$-schemes is given by a morphism $\phi : U \to V$ of étale Y-schemes which induces a map $\phi_\infty : U_\infty \to V_\infty$ over Y_∞. Fiber products $\overline{U} \times_{\overline{X}} \overline{V} := (U \times_X V; U_\infty \times_{X_\infty} V_\infty)$ exist in the category $Et_{\overline{Y}}$ of étale $\overline{Y}$-schemes.

Definition 4.54. *The* Artin-Verdier étale site of $\overline{Y}$ *is defined by the category $Et_{\overline{Y}}$ of étale $\overline{Y}$-schemes endowed with the topology $\mathcal{J}_{et}$ generated by the pre-topology for which the coverings are the surjective families.*

5.2. The specialization maps. Let v be a valuation of K corresponding to a point of Y. We denote by $k(v)$ and $\overline{k(v)}$ the residue field at v and its algebraic closure. The henselization and the strict henselization of $\overline{Y}$ at v are defined as the projective limits

$$Spec(\mathcal{O}^h_{\overline{Y};v}) := \varprojlim \overline{U} \quad \text{and} \quad Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};v}) := \varprojlim \overline{U},$$

where $\overline{U}$ runs over the filtered system of étale neighborhoods of v in $\overline{Y}$ and the filtered system of étale neighborhoods of $\overline{v}$ in $\overline{Y}$ respectively. Here an étale neighborhood of v in $\overline{Y}$ (respectively of $\overline{v}$ in $\overline{Y}$) is given by an étale $\overline{Y}$-scheme $\overline{U}$ endowed with a morphism $(Spec(k(v)); \emptyset) \to \overline{U}$ over $\overline{Y}$ (respectively endowed with a morphism $(Spec(\overline{k(v)}); \emptyset) \to \overline{U}$ over $\overline{Y}$). Then for v ultrametric, the local ring $\mathcal{O}^h_{\overline{Y};v} := \mathcal{O}^{D_v}_{\overline{K}}$ is henselian with fraction field K^h_v and with residue field $k(v)$. Respectively, the local ring $\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};v} := \mathcal{O}^{I_v}_{\overline{K}}$ is strictly henselian with fraction field K^{sh}_v and with residue field $\overline{k(v)}$. For an archimedean valuation v, one has

$$(Spec(K^{sh}_v); v) = (Spec(K^h_v); v) = \varprojlim \overline{U},$$

where $\overline{U}$ runs over the filtered system of $\overline{Y}$-morphisms $(\emptyset; v) \to \overline{U}$. The choice of the valuation $\overline{v}$ of $\overline{K}$ lying over v induces an embedding

$$K^{sh}_v = \overline{K}^{I_v} \longrightarrow \overline{K}.$$

For any ultrametric valuation v, we get a *specialization map* over $\overline{Y}$

$$Spec(\overline{K}) = (Spec(\overline{K}); \emptyset) \longrightarrow (Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};v}); \emptyset) =: \overline{Y}^{sh}_v. \tag{47}$$

Furthermore, for any archimedean valuation v, one has a *specialization map* over $\overline{Y}$

$$Spec(\overline{K}) = (Spec(\overline{K}); \emptyset) \longrightarrow (Spec(K_v^{sh}); v) =: \overline{Y}_v^{sh}. \tag{48}$$

In what follows, $\overline{Y}_v^{sh}$ denotes the $\overline{Y}$-schemes $(Spec(\mathcal{O}_{\overline{Y};v}); \emptyset)$, $(Spec(K_v^{sh}); v)$ and $Spec(\overline{K}) = (Spec(\overline{K}); \emptyset)$ for v ultrametric, archimedean and the trivial valuation respectively.

5.3. The étale topos of $\overline{Y}$. The Artin-Verdier étale topos $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ of $\overline{Y} := Spec(\mathcal{O}_K)$ is the category of sheaves of sets on the site $(Et_{\overline{Y}}; \mathcal{J}_{et})$.

PROPOSITION 4.55. *There is an open embedding*

$$\varphi : \mathcal{S}_{Et;Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$$

corresponding to the open inclusion $Y := (Y; \emptyset) \to \overline{Y}$. For any closed point v of $\overline{Y}$, there is a closed embedding (see **[24]** *IV Proposition 9.3.4)*

$$u_v : B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}.$$

The closed complement of $\mathcal{S}_{Et;Y}$ in $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is the image of the closed embedding

$$u := (u_v)_{v \in Y_\infty} : \coprod_{v \in Y_\infty} B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}.$$

PROOF. The map $Y := (Y; \emptyset) \to \overline{Y}$ is a monomorphism in the category $Et_{\overline{Y}}$. Hence the Yoneda embedding defines a sub-object $\varepsilon(Y)$ of the final object of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. Then, the localization morphism

$$\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}/\varepsilon(Y)} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \tag{49}$$

is an open embedding. The category $(Et_{\overline{Y}})_{/Y}$ is canonically equivalent to the usual category Et_Y of étale Y-schemes. Then the usual étale topology $\mathcal{J}_{et}$ on Et_Y is the topology $\mathcal{J}_{ind}$ induced by the forgetful functor

$$(Et_{\overline{Y}})_{/Y} \to Et_{\overline{Y}},$$

where $Et_{\overline{Y}}$ is endowed with the Artin-Verdier étale topology. Moreover, one has an equivalence (see **[24]** III.5.4)

$$(\widetilde{Et_Y; \mathcal{J}_{et}}) \simeq (\widetilde{(Et_{\overline{Y}})_{/Y}; \mathcal{J}_{ind}}) \simeq \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}/\varepsilon(Y)}. \tag{50}$$

The first claim of the proposition follows from (49) and (50).

Suppose that v corresponds to an ultrametric valuation and denote by $v \to \overline{Y}$ the morphism $(Spec(k(v)); \emptyset) \to \overline{Y}$. The functor

$$\begin{array}{cccc} u_v^* : & Et_{\overline{Y}} & \longrightarrow & Et_{k(v)} \simeq T^f_{G_{k(v)}} \\ & (\overline{X} \to \overline{Y}) & \longmapsto & (\overline{X} \times_{\overline{Y}} v \to Spec(k(v))) \end{array}$$

is a morphism of left exact sites. Let

$$u_v : B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$$

be the induced morphism of topoi. Moreover, the adjunction transformation $u_v^* \circ u_{v*} \to Id$ is an isomorphism. In other words, u_v is an embedding.

Suppose now that v is an archimedean valuation and denote by $v \to \overline{Y}$ the morphism $(\emptyset; v) \to \overline{Y}$. Again, the functor

$$\begin{array}{rccc} u_v^* : & Et_{\overline{Y}} & \longrightarrow & \underline{Set}^f = T^f_{G_{k(v)}} \\ & \overline{X} \to \overline{Y} & \longmapsto & \overline{X} \times_{\overline{Y}} v \to (\emptyset; v) \end{array}$$

is a morphism of left exact sites, where $\underline{Set}^f$ is the category of finite sets, endowed with the canonical topology. Then, we get a morphism of topoi

$$u_v : \underline{Set} = B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}},$$

which is an embedding.

For any $v \in \overline{Y}^0$, let $\overline{Y}_v := (\overline{Y} - \{v\}) \to \overline{Y}$ be the open complement of the closed point v. Again, $\varepsilon(\overline{Y}_v)$ is a sub-object of the final object of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$, which yields an open embedding

$$j : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}/\varepsilon(\overline{Y}_v)} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}. \tag{51}$$

One easily sees that the strictly full subcategory of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ defined by the objects X such that $j^*(X)$ is the final object of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}/\varepsilon(\overline{Y}_v)}$ is exactly the essential image of u_{v*}. In other words, the image of u_v is the closed complement of (51). Hence, u_v is a closed embedding. The last claim of the proposition follows from ([**24**] IV.9.4.6). □

COROLLARY 4.56. *The family of functors*

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}};\ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative.

PROOF. By ([**24**] VIII.3.13), the family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;Y} \to B^{sm}_{G_{k(v)}};\ v \in Y^0\}$$

is conservative. By ([**24**] IV 9.4.1.c), the result follows from Proposition 4.55. □

Let v be a closed point of $\overline{Y}$. For v ultrametric we denote by $\overline{v} \to \overline{Y}$ the morphism

$$(Spec(\overline{k(v)}); \emptyset) \to \overline{Y}.$$

The strict henselization of $\overline{Y}$ at v is defined as the projective limit

$$\overline{Y}^{sh}_v := (Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};v}); \emptyset) := \varprojlim \overline{U},$$

where $\overline{U}$ runs over the filtered system of étale neighborhoods of the geometric point $\overline{v} \to \overline{Y}$. Such an étale neighborhood is an étale $\overline{Y}$-scheme $\overline{U}$ endowed with a morphism $\overline{v} \to \overline{U}$ over $\overline{Y}$. The local ring $\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};v}$ is strictly henselian of fraction field $K^{sh}_v := \overline{K}^{I_v}$. For v archimedean, the geometric point $\overline{v} \to \overline{Y}$ is the morphism $(\emptyset; v) \to \overline{Y}$. Then we get

$$\overline{Y}^{sh}_v := \varprojlim \overline{U} = (Spec(K^{sh}_v); v) \to \overline{Y},$$

where $K^{sh}_v = \overline{K}^{I_v}$.

Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}_{Et;Y}$ and let $\mathcal{F}_{v_0} \in Ob(B^{sm}_{G_K})$ be its generic stalk. Let v be an archimedean valuation of K. Then one has

$$u_v^* \circ \varphi_*(\mathcal{F}) = \varinjlim \mathcal{F}(\varphi^*(\overline{U})) = \varinjlim \mathcal{F}(U) = f^*\mathcal{F}(Spec(K^{sh}_v)) = h^*\mathcal{F}_{v_0}(Spec(K^{sh}_v)) = \mathcal{F}^{I_v}_{v_0}, \tag{52}$$

where $f : Spec(K_v^{sh}) \to Y$ and $h : Spec(K_v^{sh}) \to Spec(K)$ denote the canonical morphisms. Indeed, étale cohomology commutes with projective limits of affine schemes. Let $u : \coprod_{v\in Y_\infty} B^{sm}_{G_{k(v)}} \to \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ be the morphism given by the family $(u_v)_{v\in Y_\infty}$. Consider the functor

$$\begin{array}{rccc} \rho := u^*\varphi_* : & \mathcal{S}_{Et;Y} & \longrightarrow & \coprod_{v\in Y_\infty} B_{G_{k(v)}} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & (\mathcal{F}^{I_v}_{v0})_{v\in Y_\infty} \end{array}$$

Let us consider the category $(\coprod_{v\in Y_\infty} B_{G_{k(v)}}, \mathcal{S}_{Et;Y}, \rho)$ defined in ([**24**] IV.9.5.1).

COROLLARY 4.57. *The category $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is equivalent to $(\coprod_{v\in Y_\infty} B^{sm}_{G_{k(v)}}, \mathcal{S}_{Et;Y}, \rho)$.*

PROOF. There is a functor

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} & \longrightarrow & (\coprod_{v\in Y_\infty} B^{sm}_{G_{k(v)}}, \mathcal{S}_{Et;Y}, \rho) \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & (\varphi^*\mathcal{F}, u^*\mathcal{F}, f) \end{array}$$

where $f : u^*\mathcal{F} \to u^*\varphi_*\varphi^*\mathcal{F}$ is given by adjunction. By ([**24**] IV.9.5.4.a) and Proposition 4.55, the functor Φ is an equivalence of categories. $\square$

5.4. Artin-Verdier étale cohomology.

PROPOSITION 4.58. *Let Q be the constant object of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ associated to a uniquely divisible abelian group Q. Then $H^q_{Et}(\overline{Y}; Q) = 0$, for any $q \geq 1$.*

PROOF. Let $j : Spec(K) \to Y \to \overline{Y}$ be the inclusion of the generic point in $\overline{Y}$. One has $u_v^* j_*(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{I_v} \in Ob(B^{sm}_{G_{k(v)}})$ for any $\mathcal{L} \in Ob(B^{sm}_{G_K})$ and any $v \in \overline{Y}^0$ (see (52)). We get

$$u_v^*(R^q(j_*)\mathcal{L}) = R^q(u_v^* j_*)\mathcal{L} = H^q(I_v; \mathcal{L}).$$

The groups I_v are all profinite (or finite) and Q is uniquely divisible. We obtain

$$u_v^*(R^q(j_*)Q) = 0$$

for any $q \geq 1$. By Corollary 4.56, we get $R^q(j_*)(Q) = 0$ for any $q \geq 1$. Then the Leray spectral sequence

$$H^p(\overline{Y}; R^q(j_*)Q) \Longrightarrow H^{p+q}(G_F; Q)$$

yields

$$H^n(\overline{Y}; Q) \simeq H^n(G_K; Q) = 0$$

for any $n \geq 1$, since $Q = j_*(Q)$.

$\square$

Let $Pic(Y)$ and U_K be the class-group of and the unit group of K respectively. We denote by $A^D = Hom(A; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ the dual of a finitely generated abelian group A. We use the same notation for a profinite group. We denote by C_K the idèle class group of K, and by D_K the connected component of $1 \in C_K$.

PROPOSITION 4.59. *The cohomology of the global Galois group G_K with coefficients in $\mathbb{Z}$ is given by*

$$\begin{array}{rcl} H^q(G_K; \mathbb{Z}) & = & \mathbb{Z} \text{ for } q = 0, \\ & = & 0 \text{ for } q = 1, \\ & = & (C_K/D_K)^D \text{ for } q = 2, \\ & = & 0 \text{ for } q \text{ odd}, \\ & = & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \text{ for } q \geq 4 \text{ even}. \end{array}$$

PROOF. The result for $q = 0, 1$ is obvious. For $q = 2$, one has

$H^2(G_K;\mathbb{Z}) = H^1(G_K;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom_c(G_K;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom_c(G_K^{ab};\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom_c(C_K/D_K;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$,

where the last isomorphism is given by class field theory. For $q \geq 3$, this is ([**41**] I. Corollary 4.6) ☐

PROPOSITION 4.60. *The Artin-Verdier étale cohomology of* $\mathbb{Z}$ *is given by*

$$\begin{aligned} H^q_W(\overline{Y};\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \textit{ for } q = 0, \\ &= 0 \textit{ for } q = 1, \\ &= Pic(Y)^D \textit{ for } q = 2, \\ &= U_K^D \textit{ for } q = 3, \\ &= 0 \textit{ for } q \geq 4. \end{aligned}$$

PROOF. Using ([**2**] Theorem 5.1) and Corollary 4.58, the proof of ([**5**] Lemma 4.1) remains valid. ☐

PROOF. As in the proof of Proposition 4.58, we get

$$u_v^*(R^q(j_*)\mathcal{L}) = R^q(u_v^*j_*)\mathcal{L} = H^q(I_v;\mathcal{L}) \ \in Ob(B^{sm}_{G_{k(v)}})$$

for any $\mathcal{L} \in Ob(B^{sm}_{G_K})$ and any $v \in \overline{Y}$ (recall that I_{v_0} is trivial). In particular, one has $j_*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ and

$$j^*R^q(j_*) = R^q(j^*j_*) = R^q(Id) = 0$$

for any $q \geq 1$, since j is an embedding. We obtain

$$R^q(j_*)\mathbb{Z} = \sum_{v\in\overline{Y}^0} u_{v*}H^q(I_v;\mathbb{Z})$$

for any $q \geq 1$. This implies $R^q(j_*)\mathbb{Z} = 0$ for q odd. Therefore the Leray spectral sequence

$$H^p_{Et}(\overline{Y}, R^q(j_*)\mathbb{Z}) \Longrightarrow H^{p+q}(G_K,\mathbb{Z})$$

yields the exact sequence

$$0 \to H^2_{Et}(\overline{Y},\mathbb{Z}) \to (C_K/D_K)^D \to \sum_{v\nmid\infty}(\mathcal{O}^{\times}_{K_v})^D \sum_{v\in K(\mathbb{R})}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^D \to H^3_{Et}(\overline{Y},\mathbb{Z}) \to H^3(G_K,\mathbb{Z}) = 0.$$

Applying the exact functor $Hom(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, we get

$$0 \to H^3_{Et}(\overline{Y},\mathbb{Z})^D \to \prod_{v\nmid\infty}(\mathcal{O}^{\times}_{K_v}) \prod_{v\in K(\mathbb{R})}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (C_K/D_K) \to H^2_{Et}(\overline{Y},\mathbb{Z})^D \to 0.$$

The result follows for $q \leq 3$. Next the Leray spectral sequence yields

$$0 \to H^q(\overline{Y},\mathbb{Z}) \to H^q(G_K,\mathbb{Z}) \to \sum_{v\in K(\mathbb{R})}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H^{q+1}(\overline{Y},\mathbb{Z}) \to H^{q+1}(G_K,\mathbb{Z}) = 0$$

for any even $q \geq 4$. This ends the proof since the second map is an isomorphism. ☐

6. The canonical morphism ζ from the flask topos to the étale topos

This section 6 is exclusively concerned by the site $T_{W,\overline{Y}}$ and the topos $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. The following results are not valid for the site $T_{L/K,S}$ and the topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$, where L/K and S are both finite.

6.1. The morphism from the étale site to the local section site. By Corollary 4.51, the local section topology $\mathcal{J}_{ls}$ on the category $T_{W;\overline{Y}}$ is sub-canonical. Moreover, $T_{W;\overline{Y}}$ has finite projective limits. Hence $(T_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{ls})$ is a left exact site.

PROPOSITION 4.61. *There exists a morphism of left exact sites*

$$\begin{array}{cccc}\zeta^*: & (Et_{\overline{Y}};\mathcal{J}_{et}) & \longrightarrow & (T_{W;\overline{Y}};;\mathcal{J}_{ls}) \\ & \overline{X} & \longmapsto & \mathcal{X}\end{array}.$$

PROOF. Let $\overline{X}$ be an étale $\overline{Y}$-scheme. For any valuation v, we define

$$X_v := Hom_{\overline{Y}}(\overline{Y}_v^{sh};\overline{X}).$$

Note that, for any ultrametric valuation v, the set

$$X_v = Hom_{\overline{Y}}(\overline{Y}_v^{sh};\overline{X}) = Hom_{\overline{Y}}(Spec(\overline{k(v)});\overline{X})$$

carries an action of $G_{k(v)}$. For any archimedean valuation v,

$$X_v = Hom_{\overline{Y}}(\overline{Y}_v^{sh};\overline{X}) = Hom_{\overline{Y}}((\emptyset;\overline{v});\overline{X}),$$

is just a set. For the trivial valuation $v = v_0$,

$$X_{v_0} = Hom_{\overline{Y}}(\overline{Y}_{v_0}^{sh};\overline{X}) = Hom_{\overline{Y}}(Spec(\overline{K});\overline{X})$$

is a G_K-set. For any valuation v, X_v is viewed as a $W_{k(v)}$-topological space. The morphisms (47) and (48) yield maps of W_{K_v}-spaces $f_v : X_v \to X_{v_0}$, for any v. So we get an object $\zeta^*(\overline{X}) = \mathcal{X}$ of $T_{W;\overline{Y}}$. Clearly, ζ^* is a functor. It preserves final objects and fiber products, by the universal property of fiber products in the category $Et_{\overline{Y}}$. Hence ζ^* is left exact. Furthermore, an étale cover $\{\overline{X_i} \to \overline{X};\, i \in I\}$ yields a surjective family of finite $G_{k(v)}$-sets $\{X_{i,v} \to X_v;\, i \in I\}$ for any valuation v, hence a local section cover. It follows that ζ^* is continuous and left exact. $\Box$

Let $\overline{U}$ be an étale $\overline{Y}$-scheme. Then $\overline{U} \to \overline{Y}$ is the finite co-product of its connected components $\overline{U} = \coprod \overline{U}_i \to \overline{Y}$. Denote by $K(\overline{U}_i) = L_i$ the function field of $\overline{U}_i$. More precisely, U_i is a connected étale Y-scheme hence the spectrum of an étale $\mathcal{O}_K$-algebra $\mathcal{O}_{L_i;S_i}$, where L_i/K is a finite extension unramified outside S_i. Here S_i is a finite set of non-trivial valuations of L_i. Then, $U_{i;v_0}$ is a finite set on which G_K (hence W_K) acts transitively. Let v be a non-trivial valuation. One may consider $U_{i;v_0}$ as a G_{K_v}-set since one has an embedding $G_{K_v} \to G_K$. There is a bijection from the set of orbits of the G_{K_v}-set $U_{i;v_0}$ to the set of valuations of L_i lying over v. Such a valuation is unramified precisely when the inertia group $I_v \subseteq G_{K_v}$ acts trivially on the corresponding orbit of $U_{i;v_0}$. By Galois theory, the G_K-set $U_{i;v_0}$ determines the extension L_i/K up to isomorphism. Then the $G_{k(v)}$-set $U_{i;v}$ is given by a family of orbits of the G_{K_v}-set $U_{i;v_0}$ on which I_v acts trivially. This yields a family of unramified valuations of L_i lying over v. This shows that $\zeta^*(\overline{U}_i)$ determines L_i and S_i hence $\overline{U}_i$. Moreover, one has $\zeta^*(\overline{U}) = \coprod \zeta^*(\overline{U}_i)$, where the sum is in $T_{W;\overline{Y}}$. This idea leads to the next proposition.

PROPOSITION 4.62. *The functor ζ^* is fully faithful. Hence the category $Et_{\overline{Y}}$ is equivalent to a full subcategory of $T_{W;\overline{Y}}$. The essential image of ζ^* is defined by the objects $\mathcal{X}$ of $T_{W;\overline{Y}}$ such that X_{v_0} is a finite set, f_v is injective for any v and bijective for almost all v (e.g except for a finite set of non-trivial valuations).*

PROOF. Let $\overline{U}$ and $\overline{V}$ be two étale $\overline{Y}$-schemes. One has the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\zeta^*(\overline{V})) \arrow[r] & Hom_{W_K}(U_{v_0};V_{v_0}) \\ Hom_{Et_{\overline{Y}}}(\overline{U};\overline{V}) \arrow[u, "\zeta^*_{(\overline{U};\overline{V})}"] \arrow[r] & Hom_{Spec(K)}(Spec(K(\overline{U}));Spec(K(\overline{V}))) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Here, $K(\overline{U})$ and $K(\overline{V})$ denote the étale K-algebras corresponding to $\overline{U}$ and $\overline{V}$ respectively.

There is an open subgroup of finite index of W_K which acts trivially on U_{v_0} and V_{v_0}, since U_{v_0} and V_{v_0} are both finite. An open subgroup of finite index of W_K is of the form W_L, for a finite extension L/K. Hence the action of W_K on U_{v_0} and V_{v_0} factors through $W_K/W_L \simeq G_K/G_L$. We get

$$Hom_{W_K}(U_{v_0};V_{v_0}) = Hom_{W_K/W_L}(U_{v_0};V_{v_0}) = Hom_{G_K/G_L}(U_{v_0};V_{v_0}) = Hom_{G_K}(U_{v_0};V_{v_0}).$$

By Galois theory, the category of finite étale $Spec(K)$-schemes is equivalent to the category of finite G_K-sets. Hence, the map g is a bijection. Moreover, one easily sees that the two horizontal arrows are both injective and that $\zeta^*_{(\overline{U};\overline{V})}$ is the bijection induced by g from the subset

$$Hom_{Et_{\overline{Y}}}(\overline{U};\overline{V}) \subseteq Hom_{Spec(K)}(Spec(K(\overline{U}));Spec(K(\overline{V}))$$

to its image $Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\zeta^*(\overline{V}))$ in $Hom_{W_K}(U_{v_0};V_{v_0})$. Hence the map $\zeta^*_{(\overline{U};\overline{V})}$ is bijective and ζ^* is fully-faithful.

Let $\mathcal{X}$ be an object of $T_{W;\overline{Y}}$ such that X_{v_0} is a finite W_K-set, f_v is injective for any v and bijective for almost all v. Again, X_{v_0} is just a finite set on which G_K acts continuously. Let $X_{v_0} = \coprod X_{i;v_0}$ be the decomposition of X_{v_0} into orbits under the action of G_K. For any non-trivial valuation v, we define $X_{i;v} := f_v^{-1}(X_{i;v_0})$. The map f_v induces a W_{K_v}-map $f_{i;v} : X_{i;v} \to X_{i;v_0}$. Then, $\mathcal{X}_i := (X_{i;v}; f_{i;v})$ is an object of $T_{W;\overline{Y}}$ so that $X_{i;v_0}$ is a finite W_K-set, $f_{i;v}$ is injective for any v and bijective for almost all v. One has

$$\mathcal{X} = \coprod \mathcal{X}_i,$$

in the category $T_{W;\overline{Y}}$.

By Galois theory, there exists a unique étale K-algebra A so that

$$X_{v_0} = Hom_K(A;\overline{K}).$$

Then $A = \prod L_i$ is a finite product of separable finite extensions L_i of K. The extensions L_i/K correspond bijectively to be the G_K-orbits $X_{i;v_0}$ of X_{v_0}. Consider the $\overline{Y}$-scheme $\overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})}$. The specialization maps (47) and (48) induce a map

$$\widetilde{f_{i;v}} : Hom_{\overline{Y}}(\overline{Y}_v^{sh};\overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})}) \longrightarrow Hom_{\overline{Y}}(Spec(\overline{K});\overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})}) = X_{i;v_0}$$

which is an isomorphism of G_{K_v}-sets. Moreover, one has a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Hom_{\overline{Y}}(\overline{Y}_v^{sh};\overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})}) \arrow[r, "\widetilde{f_{i;v}}"] \arrow[d, "q"'] & X_{i;v_0} \arrow[d, "p"] \\ \overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})} \times_{\overline{Y}} v \arrow[r, "b"] & X_{i;v_0}/G_{K_v} \end{tikzcd}$$

Here, q sends $u : \overline{Y}_v^{sh} \to \overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})}$ to $u(\overline{v}) \in \overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})} \times_{\overline{Y}} v$, where $\overline{v}$ is the closed point of $\overline{Y}_v^{sh}$. The map p is the canonical projection, and b is a bijection induced by $\widetilde{f_{i;v}}$, since the set $Hom_{\overline{Y}}(\overline{Y}_v^{sh}; \overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})})/G_{K_v}$ is precisely $\overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})} \times_{\overline{Y}} v$. The set

$$T_{i;v} := b^{-1} \circ p \circ f_{i;v}(X_{i;v})$$

is a set of valuations of L_i lying over v. These valuations are all unramified, since I_v acts trivially on $X_{i;v}$. We denote by $S_{i;v}$ the complement of $T_{i;v}$ in $\overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})} \times_{\overline{Y}} v$, and by S_i the union in $\overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})}$ of the sets $S_{i;v}$. Any valuation of L_i which is ramified in L_i/K lies in S_i. Hence $\overline{U}_i := \overline{Spec(\mathcal{O}_{L_i})} - S_i$ is a connected étale $\overline{Y}$-scheme such that there is a canonical identification $\zeta^*(\overline{U}_i) \simeq \mathcal{X}_i$. Let $\overline{U}$ be the coproduct $\coprod \overline{U}_i$. There is a canonical isomorphism

$$\zeta^*(\overline{U}) = \coprod \zeta^*(\overline{U}_i) \simeq \coprod \mathcal{X}_i = \mathcal{X}$$

in the category $T_{W;\overline{Y}}$.

Let $\overline{U}$ be an étale $\overline{Y}$-scheme and $\zeta^*(\overline{U}) = (X_v; f_v)$. It is now clear that X_{v_0} is finite and that f_v is injective for all v and bijective for almost all v. $\square$

PROPOSITION 4.63. *The étale topology $\mathcal{J}_{et}$ on $Et_{\overline{Y}}$ is induced via ζ^* by the local section topology $\mathcal{J}_{ls}$ on $T_{W;\overline{Y}}$.*

PROOF. Let $\{\varphi_i : \overline{U}_i \to \overline{U}\}$ be a family of morphisms of $Et_{\overline{Y}}$. On the one hand, this family is a cover for the étale topology if and only if $\bigcup Im(\varphi_i) = \overline{Y}$. On the other hand, $\{\zeta^*(\varphi_i) : \zeta^*(\overline{U}_i) \to \zeta^*(\overline{U})\}$ is a local section cover if and only if $\{U_{i;v} \to U_v\}$ is surjective for all v which is in turn equivalent to the fact that the family $\{\overline{U}_i \times_{\overline{Y}} v \to \overline{U}_i \times_{\overline{Y}} v\}$ is surjective for all v. Hence $\{\varphi_i : \overline{U}_i \to \overline{U}\}$ is a cover for the étale topology if and only if $\{\zeta^*(\varphi_i) : \zeta^*(\overline{U}_i) \to \zeta^*(\overline{U})\}$ is a local section cover. $\square$

6.2. Direct definition of the morphism ζ. For any valuation v of K, the specialization map $\overline{Y}_v^{sh} \longrightarrow \overline{Y}$ induces the co-specialization map

$$f_v : \mathcal{F}_{\overline{v}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{v_0}}, \tag{53}$$

for any étale sheaf $\mathcal{F}$ on $\overline{Y}$. Here, $\mathcal{F}_{\overline{v}}$ and $\mathcal{F}_{\overline{v_0}}$ denote the stalks of the sheaf $\mathcal{F}$ at the geometric points $\overline{v} \to \overline{Y}$ and $\overline{v_0} \to \overline{Y}$. The map (53) is G_{K_v}-equivariant. More precisely, denote by $\mathfrak{q}_v : G_{K_v} \to G_{k(v)}$ the canonical projection and by $\mathfrak{o}_v : G_{K_v} \to G_K$ the morphism induced by the choice of the valuation $\overline{v}$ of $\overline{K}$ lying over v. One has $u_v^*(\mathcal{F}) \in Ob(B^{sm}_{G_{k(v)}})$ and $u_{v_0}^*(\mathcal{F}) \in Ob(B^{sm}_{G_K})$. Then

$$f_v : \mathfrak{q}_v^*(u_v^*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathfrak{o}_v^*(u_{v_0}^*\mathcal{F})$$

is a map of $B^{sm}_{G_{K_v}}$, where we denote a morphism of topological groups and the induced morphism of classifying topoi by the same symbol. Since the squares

$$\begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r, "q_v"] \arrow[d, "\alpha_{K_v}"'] & W_{k(v)} \arrow[d, "\alpha_v"] \\ G_{K_v} \arrow[r, "\mathfrak{q}_v"] & G_{k(v)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r, "\theta_v"] \arrow[d, "\alpha_{K_v}"'] & W_K \arrow[d, "\alpha_{v_0}"] \\ G_{K_v} \arrow[r, "\mathfrak{o}_v"] & G_K \end{tikzcd}$$

are both commutative, we get a morphism of $B_{W_{K_v}}$:

$$\alpha_{K_v}^* f_v : q_v^*(\alpha_v^* \circ u_v^*\mathcal{F}) = \alpha_{K_v}^* \circ \mathfrak{q}_v^*(u_v^*\mathcal{F}) \longrightarrow \alpha_{K_v}^* \circ \mathfrak{o}_v^*(u_{v_0}^*\mathcal{F}) = \theta_v^*(\alpha_{v_0}^* \circ u_{v_0}^*\mathcal{F}).$$

Hence we get an object

$$\zeta^*(\mathcal{F}) := (\alpha_v^* \circ u_v^* \mathcal{F}\,;\, \alpha_{K_v}^* f_v)_{v \in \overline{Y}}$$

of the category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. This yields a functor

$$\begin{array}{rccc} \zeta^* : & \mathcal{S}_{Et}(\overline{Y}) & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & (\alpha_v^* \circ u_v^* \mathcal{F}\,;\, \alpha_{K_v}^* f_v)_{v \in \overline{Y}} \end{array}$$

Here the map

$$f_v : \mathfrak{q}_v^*(u_v^* \mathcal{F}) \longrightarrow \mathfrak{o}_v^*(u_{v_0}^* \mathcal{F}) \ \in Fl(B_{G_{K_v}}^{sm})$$

is induced by the usual co-specialization map between the stalks of the étale sheaf $\mathcal{F}$.

Proposition 4.64. *The functor $\zeta^* : \mathcal{S}_{Et}(\overline{Y}) \longrightarrow \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is the pull-back of a morphism of topoi*

$$\zeta : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}.$$

Proof. Since the functors $\alpha_v^* \circ u_v^*$ and $\alpha_{K_v}^*$ commute with finite projective limits and arbitrary inductive limits, so does the functor ζ^*, by Proposition 4.10. Since the functor ζ^* is left exact and has a right adjoint, it is the pull-back of a morphism of topoi $\zeta : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. □

6.3. Equivalence of the two definitions. Here we denote by

$$z : (Et_{\overline{Y}}; \mathcal{J}_{et}) \longrightarrow (T_{W;\overline{Y}};\, ; \mathcal{J}_{ls})$$

the morphism of left exact sites defined in Proposition 4.61. One easily sees that the square

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \arrow[l, "\zeta^*"'] \\ T_{W;\overline{Y}} \arrow[u, "\mathrm{y}"] & Et_{\overline{Y}} \arrow[l, "z"] \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

is commutative. Here ζ^* is defined in Proposition 4.64, y is defined in Proposition 4.48 and $\varepsilon : Et_{\overline{Y}} \to \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is the Yoneda embedding. By ([**24**] IV Proposition 4.9.4), the morphism of topoi induced by the morphism of left exact sites z is isomorphic to the morphism of topoi

$$\zeta : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$$

of Proposition 4.64.

6.4. The morphism ζ is not connected. To study this morphism, one has to introduce another topos. Consider the category $\mathfrak{F}_{G;\overline{Y}}^{sm}$ whose objects are of the form $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v \in \overline{Y}}$, where F_v is an object of $B_{G_{k(v)}}^{sm}$ and $f_v : \mathfrak{q}_v^*(F_v) \to \mathfrak{o}_v^*(F_{v_0})$ is a morphism of $B_{G_{K_v}}^{sm}$ so that $f_{v_0} = Id_{F_{v_0}}$. A morphism ϕ from $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v \in \overline{Y}}$ to $\mathcal{F}' = (F'_v; f'_v)_{v \in \overline{Y}}$ is a family of maps $\phi_v : F_v \to F'_v \in Fl(B_{G_{k(v)}}^{sm})$ such that

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{q}_v^*(F_v) \arrow[r, "\mathfrak{q}_v^*(\phi_v)"] \arrow[d, "f_v"'] & \mathfrak{q}_v^*(F'_v) \arrow[d, "f'_v"] \\ \mathfrak{o}_v^*(F_{v_0}) \arrow[r, "\mathfrak{o}_v^*(\phi_{v_0})"] & \mathfrak{o}_v^*(F'_{v_0}) \end{tikzcd}$$

is a commutative diagram of $B^{sm}_{G_{K_v}}$. The same arguments as above show that $B^{sm}_{G_{K_v}}$ is a topos in which finite projective limits and arbitrary inductive limits are computed componentwise. There are two morphisms of topoi

$$\zeta_1 : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}} \text{ and } \zeta_2 : \mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$$

so that $\zeta = \zeta_2 \circ \zeta_1$. Indeed, this follows from the definition of ζ. The pull-back of ζ_2 is given by

$$\begin{array}{rccc} \zeta_2^* : & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} & \longrightarrow & \mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & (u_v^*\mathcal{F}\,;\, f_v)_{v\in\overline{Y}} \end{array},$$

while the pull-back of ζ_1 is given by

$$\begin{array}{rccc} \zeta_1^* : & \mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}} & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \\ & (F_v\,;\, f_v)_{v\in\overline{Y}} & \longmapsto & (\alpha_v^*(F_v)\,;\, \alpha_{K_v}^* f_v)_{v\in\overline{Y}} \end{array}.$$

PROPOSITION 4.65. *The morphism ζ_1 is connected.*

PROOF. Let $\mathcal{F} = (F_v\,;\ f_v)$ and $\mathcal{F}' = (F'_v\,;\ f'_v)$ be two objects of $\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}$. Denote by

$$\zeta^*_{1\,(\mathcal{F};\mathcal{F}')} : Hom_{\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}}((F_v\,;\ f_v);(F'_v\,;\ f'_v)) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}((\alpha_v^*F_v\,;\ \alpha^*_{K_v}f_v);(\alpha_v^*F'_v\,;\ \alpha^*_{K_v}f'_v))$$

the map defined by ζ_1^*. One needs to show that $\zeta^*_{1\,(\mathcal{F};\mathcal{F}')}$ is a bijection, for any objects $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}'$. Let

$$\phi' = ({\phi'}_v)_v,\ \phi = (\phi_v)_v\ : (F_v\,;\ f_v) \rightrightarrows (F'_v\,;\ f'_v)$$

be two morphisms so that $\zeta^*_{1\,(\mathcal{F};\mathcal{F}')}(\phi') = \zeta^*_{1\,(\mathcal{F};\mathcal{F}')}(\phi)$. This means that $\alpha_v^*(\phi'_v) = \alpha_v^*(\phi_v)$ for any $v \in \overline{Y}$. Since α_v^* is fully faithful, we get

$$\phi'_v = \alpha_{v*}\alpha_v^*(\phi'_v) = \alpha_{v*}\alpha_v^*(\phi_v) = \phi_v.$$

Hence $\phi' = \phi$, and the map $\zeta^*_{1\,(\mathcal{F};\mathcal{F}')}$ is injective. Let

$$\varphi = (\varphi_v)_v\ : (\alpha_v^*F_v\,;\ \alpha^*_{K_v}f_v) \longrightarrow (\alpha_v^*F'_v\,;\ \alpha^*_{K_v}f'_v)$$

be a morphism in $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. For any $v \in \overline{Y}$, there exists a unique morphism $\phi_v : F_v \to F'_v$ so that $\alpha_v^*(\phi_v) = \varphi_v$, since α_v^* is fully faithful. The square

$$\begin{tikzcd} q_v^*(\alpha_v^*F_v) \arrow[r, "q_v^*(\alpha_v^*(\phi_v))"] \arrow[d, "\alpha^*_{K_v}(f_v)"'] & q_v^*(\alpha_v^*F'_v) \arrow[d, "\alpha^*_{K_v}(f'_v)"] \\ \theta_v^*(\alpha_{v_0}^*F_{v_0}) \arrow[r, "\theta_v^*(\alpha_{v_0}^*(\phi_{v_0}))"'] & \theta_v^*(\alpha_{v_0}^*F'_{v_0}) \end{tikzcd}$$

is commutative. Moreover, one has the identifications

$$q_v^* \circ \alpha_v^* = \alpha^*_{K_v} \circ \mathfrak{q}_v^* \text{ and } \theta_v^* \circ \alpha_{v_0}^* = \alpha^*_{K_v} \circ \mathfrak{o}_v^*.$$

Hence, we get the commutative square

$$\begin{tikzcd} \alpha^*_{K_v}\mathfrak{q}_v^*(F_v) \arrow[r, "\alpha^*_{K_v}\mathfrak{q}_v^*(\phi_v)"] \arrow[d, "\alpha^*_{K_v}(f_v)"'] & \alpha^*_{K_v}\mathfrak{q}_v^*(F'_v) \arrow[d, "\alpha^*_{K_v}(f'_v)"] \\ \alpha^*_{K_v}\mathfrak{o}_v^*(F_{v_0}) \arrow[r, "\alpha^*_{K_v}\mathfrak{o}_v^*(\phi_{v_0})"'] & \alpha^*_{K_v}\mathfrak{o}_v^*(F'_{v_0}) \end{tikzcd}$$

The adjunction transformation $Id \to \alpha_{K_v*} \circ \alpha^*_{K_v}$ is an isomorphism, since $\alpha^*_{K_v}$ is fully faithful. Applying the functor α_{K_v*}, we get the commutative square

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{q}_v^*(F_v) \arrow[r, "\mathfrak{q}_v^*(\phi_v)"] \arrow[d, "f_v"'] & \mathfrak{q}_v^*(F'_v) \arrow[d, "f'_v"] \\ \mathfrak{o}_v^*(F_{v_0}) \arrow[r, "\mathfrak{o}_v^*(\phi_{v_0})"'] & \mathfrak{o}_v^*(F'_{v_0}) \end{tikzcd}$$

Hence $\phi = (\phi_v)_v : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ is a morphism of $\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}$ so that

$$\zeta^*_{1\,(\mathcal{F};\mathcal{F}')}(\phi) = \zeta^*_{1\,(\mathcal{F};\mathcal{F}')}((\phi_v)_v) = (\alpha^*_v\phi_v)_v = (\varphi_v)_v = \varphi.$$

Hence ζ_1^* is fully faithful and the morphism ζ_1 is connected. □

PROPOSITION 4.66. *The morphism ζ_2 is not connected.*

PROOF. Let $e_{G;\overline{Y}}$ be the final object of $\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}$. The final object of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is represented by $\overline{Y}$ and one has $\zeta_2^*(\overline{Y}) = e_{G;\overline{Y}}$, since ζ_2^* preserves finite projective limits. For any object $\mathcal{F}$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$, one has

$$\zeta_{2*} \circ \zeta_2^*(\mathcal{F})(\overline{Y}) = \zeta_2^*(\mathcal{F})(\zeta_2^*(\overline{Y})) = Hom_{\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}}(e_{G;\overline{Y}}; \zeta_2^*(\mathcal{F})).$$

Consider the abelian object $\mathcal{F} := \bigoplus_{v\in\overline{Y}^0} u_{v*}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. The stalk of $\mathcal{F}$ at the generic point is trivial, since $u^*_{v_0}$ commutes with direct sums. Hence $\zeta_2^*(\mathcal{F})$ is the object $(\{0\}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; ...)$ of $\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}$. We get

$$Hom_{\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}}(e_{G;\overline{Y}}; \zeta_2^*(\mathcal{F})) = \prod_{v\in\overline{Y}^0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

However, the étale topos $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is coherent hence the global sections functor commutes with direct sums. One has

$$\mathcal{F}(\overline{Y}) = \Gamma_{Et;\overline{Y}}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{v\in\overline{Y}^0} \Gamma_{Et;\overline{Y}}(u_{v*}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \bigoplus_{v\in\overline{Y}^0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

The map

$$Hom_{\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}}(\overline{Y}; \mathcal{F}) = \bigoplus_{v\in\overline{Y}^0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{v\in\overline{Y}^0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = Hom_{\mathfrak{F}^{sm}_{G;\overline{Y}}}(\zeta_2^*(\overline{Y}); \zeta_2^*(\mathcal{F}))$$

is not a bijection hence ζ_2^* is not fully-faithful.

□

COROLLARY 4.67. *The morphism ζ is not connected.*

PROOF. The functor ζ_{2*} is fully faithful while ζ_{1*} is not. Since $\zeta_* = \zeta_{1*} \circ \zeta_{2*}$, the functor ζ_* is not fully faithful. □

REMARK 4.68. *However, the flask topos is connected over <u>Set</u>. Indeed, let $e_{W;\overline{Y}}$ be the final object of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Assume that $e_{W;\overline{Y}} = U_1 \coprod U_2$. Then*

$$\mathrm{i}^*_{v_0}(e_{W;\overline{Y}}) = \mathrm{i}^*_{v_0}(U_1) \coprod \mathrm{i}^*_{v_0}(U_2)$$

is the final object B_{W_K}. Since B_{W_K} is connected, one may assume that $\mathrm{i}^*_{v_0}(U_2)$ is the initial object of $B_{W_{K_v}}$. Then $\theta_v^*(\mathrm{i}^*_{v_0}(U_2))$ is the initial object of B_{W_K}. Let $U_{2,v}$ be the v-component of

U_2. The existence of the morphism $q_v^*(U_{2;v}) \to \theta_v^*(\mathrm{i}_{v_0}^*(U_2))$ shows that $q_v^*(U_{2;v})$ is the initial object of $B_{W_{K_v}}$. For any $v \in \overline{Y}$, $U_{2;v}$ is the initial object of $B_{W_{k(v)}}$, since q_v^* is fully faithful. Hence, U_2 is empty.

PROPOSITION 4.69. *For any closed point v of $\overline{Y}$, the diagram*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "\mathrm{i}_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\zeta"] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \end{tikzcd}$$

is commutative and 2-cartesian. In other words, it is a pull-back of topoi.

PROOF. Let v be a closed point of $\overline{Y}$. For any étale sheaf $\mathcal{F}$ on $\overline{Y}$, one has

$$\mathrm{i_v}^* \circ \zeta^*(\mathcal{F}) = \alpha_v^* \circ u_v^*(\mathcal{F})$$

as it follows from the definitions of ζ and i_v . Hence the diagram of the Proposition is commutative. We denote by ε the Yoneda embedding. The closed sub-topos $B^{sm}_{G_{k(v)}}$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is the closed complement of the open sub-topos defined by the sub-terminal object $\varepsilon(\overline{Y} - v) \hookrightarrow \varepsilon(\overline{Y})$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. By the proof of Proposition 4.12, the sub-topos $B_{W_{k(v)}}$ of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ is the closed complement of the open sub-topos defined by the sub-terminal object

$$\zeta^*(\varepsilon(\overline{Y} - v)) = ((e_{W_{k(w)}})_{w \neq v};\ \emptyset_{W_{k(v)}}) \longrightarrow \zeta^*(\varepsilon(\overline{Y})) = (e_{W_{k(w)}})_{w \in \overline{Y}}.$$

The proposition follows from ([**24**] IV Corollaire 9.4.3). $\square$

REMARK 4.70. *For any closed point v of $\overline{Y}$, the natural transformation*

$$u_v^* \circ \zeta_* \longrightarrow \alpha_{v*} \circ \mathrm{i}_v^*$$

is not an isomorphism (see Corollary 5.39).

6.5. The morphisms $\zeta_{L,S}$. The results of this sub-section will be necessary to define a complex of étale sheaves whose hyper-cohomology is the Weil-étale cohomology with $\mathbb{Z}$-coefficients. This construction is given in the last chapter.

We identify the category $Et_{\overline{Y}}$ with its essential image in $T_{W,\overline{Y}}$ via ζ^*.

DEFINITION 4.71. *Let L/K be a finite Galois extension. We denote by $Et_{L/K}$ the full sub-category of $Et_{\overline{Y}}$ consisting of object $\mathcal{X}$ such that the action of W_K on the finite set X_{v_0} factors through $G_{L/K} = Gal(L/K)$. This category is endowed with the induced topology $\mathcal{J}_{et}$. Clearly, the site $(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})$ is left exact.*

PROPOSITION 4.72. *The canonical map*

$$\mathcal{S}_{Et,\overline{Y}} \longrightarrow \varprojlim \widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}.$$

PROOF. The morphism of let exact sites

$$(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}) \longrightarrow (Et_{L'/K}, \mathcal{J}_{et})$$

is given by the inclusion functor, for $\overline{K}/L'/L/K$. By ([**24**] VI 8.2.3), the direct limit site

$$\varinjlim(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}) := (\varinjlim(Et_{L/K}), \mathcal{J})$$

is a site for the topos $\varprojlim \widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}$. The direct limit category $\varinjlim(Et_{L/K})$ (see [**1**] III.3) is canonically equivalent to $Et_{\overline{Y}}$. The topology $\mathcal{J}$ is the coarsest topology which makes the functors

$$(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}) \longrightarrow (Et_{\overline{Y}}, \mathcal{J})$$

continuous. In other words, $\mathcal{J}$ is the coarsest topology on $Et_{\overline{Y}}$ so that any covering family of $(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})$ is a covering family of $Et_{\overline{Y}}$, for all L/K. One easily sees that $\mathcal{J}$ is just the étale topology. Hence $(Et_{\overline{Y}}, \mathcal{J}_{et})$ is a site for the inverse limit topos. □

PROPOSITION 4.73. *There is a canonical morphism of topoi*

$$\zeta_{L,S} : \mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow \widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}.$$

Moreover, the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_{L'/K,S'} & \xrightarrow{\zeta_{L',S'}} & \widetilde{(Et_{L'/K}, \mathcal{J}_{et})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{F}_{L/K,S} & \xrightarrow{\zeta_{L,S}} & \widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})} \end{array}$$

is commutative, for $L'/L/K$ and $S \subset S'$.

PROOF. The functor

$$\zeta^*_{L,S} : Et_{L/K} \longrightarrow T_{L/K,S}$$

induced by $\zeta^* : Et_{\overline{Y}} \longrightarrow T_{W,\overline{Y}}$ yields a morphism of left exact sites. The first claim of the proposition follows. The diagram of the proposition is commutative since the corresponding diagram of sites is commutative. □

PROPOSITION 4.74. *Let $\overline{U}$ be a connected étale $\overline{Y}$-scheme in the category $Et_{L/K}$ (e.g. $G_{L/K}$ acts transitively on U_{v_0}). There exists an equivalence*

$$\mathfrak{F}_{L/K,S}/_{\overline{U}} \simeq \mathfrak{F}_{L/K(U),\widetilde{S}}/_{\overline{U}},$$

where $K(U)$ is the function field of $\overline{U}$ and $\widetilde{S}$ is the set of places of $K(U)$ lying over S.

PROOF. The choice of a point of U_{v_0} defines an isomorphism of $W_{L/K,S}$-sets

$$W_{L/K,S}/W_{L/K(U),\widetilde{S}} = G_L/G_{K(U)} \simeq U_{v_0}$$

We get an isomorphism

$$B_{W_{L/K,S}}/y(W_{L/K,S}, U_{v_0}) \simeq B_{W_{L/K(U),\widetilde{S}}}.$$

The same result is valid for any closed point of $\overline{U}$ and the proposition follows. □

DEFINITION 4.75. *A* compatible system of abelian sheaves on $\widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}_L$ *is given by a family (A_L, α_u), where A_L is an abelian object of $\widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}$ and the maps $\alpha_u : u^*A_L \to A_{L'}$ are compatible. Here $u : \widetilde{(Et_{L'/K}, \mathcal{J}_{et})} \to \widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}$ is the canonical morphism, for L'/L. In other words, a compatible system of abelian sheaves on $\widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}_L$ is an abelian object of the total topos $Top\,(\widetilde{(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})}_L)$.*

PROPOSITION 4.76. *Let $\mathcal{A}$ be an abelian object of $\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}$ and let $(\mathcal{A}_{L,S}, f_t)$ be the abelian object of $Top\,(\mathfrak{F}_\bullet)$ defined in Example 4.34. The family $(R^n(\zeta_{L,S,*})\mathcal{A}_{L,S})_{L,S}$ yields a compatible system of abelian sheaves (A^n_L, α_u) on $(\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}})_{L,S}$.*

PROOF. The diagram

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \arrow[r, "\zeta_{L',S'}"] \arrow[d, "t"'] & (\widetilde{Et_{L'/K}, \mathcal{J}_{et}}) \arrow[d, "u"'] \\ \mathfrak{F}_{L/K,S} \arrow[r, "\zeta_{L,S}"] & (\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}}) \end{tikzcd}$$

is commutative. In other words, there is an isomorphism $\zeta_{L,S,*}t_* \simeq u_*\zeta_{L',S',*}$. We get a transformation

$$u^*\zeta_{L,S,*}t_* \simeq u^*u_*\zeta_{L',S',*} \longrightarrow \zeta_{L',S',*}.$$

which is given by adjunction $u^*u_* \to Id$. There is an induced transformation

$$u^*R^n(\zeta_{L,S,*}t_*) = R^n(u^*\zeta_{L,S,*}t_*) \longrightarrow R^n(\zeta_{L',S',*}), \tag{54}$$

where the identity comes from the exactness of u^*. Now, the Leray spectral sequence

$$R^i(\zeta_{L,S,*})R^j(t_*) \Rightarrow R^{i+j}(\zeta_{L,S,*}t_*)$$

yields a natural transformation

$$R^n(\zeta_{L,S,*})t_* \longrightarrow R^n(\zeta_{L,S,*}t_*). \tag{55}$$

Therefore we get a transformation

$$u^*R^n(\zeta_{L,S,*})t_* \longrightarrow R^n(\zeta_{L',S',*}).$$

On the other hand one has $t_*\mathcal{A}_{L',S'} = \mathcal{A}_{L,S}$. Hence there exists a canonical map

$$\alpha_t : u^*R^n(\zeta_{L,S,*})\mathcal{A}_{L,S} = u^*R^n(\zeta_{L,S,*})t_*\mathcal{A}_{L',S'} \longrightarrow R^n(\zeta_{L',S',*})\mathcal{A}_{L',S'}.$$

We define

$$A^n_L := \varinjlim R^n(\zeta_{L,S,*})\mathcal{A}_{L,S},$$

where L/K is fixed and S runs over the (suitable) finite sets of valuations of K. We obtain a canonical map

$$\alpha_u := \varinjlim \alpha_t : u^*A^n_L = \varinjlim u^*R^n(\zeta_{L,S,*})\mathcal{A}_{L,S} \longrightarrow \varinjlim R^n(\zeta_{L',S',*})\mathcal{A}_{L',S'} = A^n_{L'},$$

since u^* commutes with direct limits. This yields a system of compatible maps. □

6.6. Questions and comments.

6.6.1. The desired Weil-étale cohomology with $\mathbb{Z}$-coefficients is given by

$$\begin{aligned} H^n_W(\overline{Y}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \text{ for } n = 0, \\ &= 0 \text{ for } n = 1, \\ &= Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \text{ for } n = 2, \\ &= \mu_K^{\mathcal{D}} \text{ for } n = 3. \\ &= 0 \text{ for } n \geq 4. \end{aligned}$$

We observe that there exists a canonical morphism

$$H^n_{Et}(\overline{Y}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n_W(\overline{Y}, \mathbb{Z})$$

for any $n \geq 0$. Indeed, the map

$$H^2_{Et}(\overline{Y}, \mathbb{Z}) = Pic(Y)^{\mathcal{D}} \longrightarrow H^2_W(\overline{Y}, \mathbb{Z}) = Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}}$$

is given by Proposition 4.39. The map

$$H^3_{Et}(\overline{Y}, \mathbb{Z}) = U_K^D \longrightarrow H^2_W(\overline{Y}, \mathbb{Z}) = Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} = \mu_K^{\mathcal{D}}$$

is induced by the inclusion $\mu_K \to U_K$. Recall that $A^D = Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ and $A^{\mathcal{D}} = Hom(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, for any discrete abelian group A.

QUESTION 4.77. *Can one expect that the Weil-étale cohomology is the cohomology of a topos*

$$\mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$$

over the étale topos ?

As a first step one may look for a topos which would give rise to the Weil-étale cohomology computed by S. Lichtenbaum (see Theorem 4.40).

QUESTION 4.78. *Can one construct a topos whose cohomology is the Lichtenbaum Weil-étale cohomology ?*

6.6.2. The description of the essential image of the functor $\zeta^* : Et_{\overline{Y}} \to T_{W;\overline{Y}}$ in Proposition 4.62 suggests the following definition. Let $T^{fl}_{W;\overline{Y}}$ be the full subcategory of $T_{W;\overline{Y}}$ defined by the objects $\mathcal{X} = (X_v; f_v)$ of $T_{W;\overline{Y}}$ such that f_v is an homeomorphism for almost all valuations and a monomorphism for all valuations. Let $\mathcal{J}_{fl}$ be the topology on $T^{fl}_{W;\overline{Y}}$ induced by the local section topology on $T_{W;\overline{Y}}$.

QUESTION 4.79. *What is the cohomology of the topos of sheaves on the site $(T^{fl}_{W;\overline{Y}}, \mathcal{J}_{fl})$? Does it coincide with Lichtenbaum's Weil-étale cohomology ?*

One may define the projective limit

$$\varprojlim \mathfrak{F}_{L/K,S}$$

in the 2-category of topoi. There is a canonical morphism

$$H^i_{\rightarrow}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, -) \longrightarrow H^i(\varprojlim \mathfrak{F}_{L/K,S}, -). \tag{56}$$

Assume that the canonical morphism

$$\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}} \longrightarrow \varprojlim \mathfrak{F}_{L/K,S}$$

induces isomorphisms on cohomology. It would follow that (56) is not an isomorphism. Note that the assumption of ([**24**] VI. Corollaire 8.7.7) is not satisfied, since $H^i(\mathfrak{F}_{L/K,S}, -)$ does not commute with filtered inductive limits (by Proposition 4.27).

CHAPITRE 5

Etude du topos Weil-étale d'un corps de fonctions

Poursuivant notre point de vue, la définition de la cohomologie Weil-étale en caractéristique zéro devrait passer par celle du topos sous-jacent. Puisqu'un topos est la généralisation d'un espace topologique, la compréhension géométrique de ce que devrait être ce pseudo-espace semble constituer une étape préliminaire indispensable à la bonne définition de cette théorie cohomologique. Dans ce but, nous étudions ici le topos Weil-étale $\mathcal{S}_{W,Y}$ d'une courbe projective lisse Y sur un corps fini k. Cette étude fournit partiellement l'intuition topologique dont nous avons besoin.

Un morphisme connexe

$$\gamma : \mathcal{S}_{W,Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,Y},$$

du topos Weil-étale dans le topos étale de Y apparaît immédiatement. Ce morphisme avait déjà été étudié dans [**17**]. Nous observons ensuite le topos Weil-étale au voisinage des points fermés de Y. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"'] \\ \mathcal{S}_{W,Y} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et,Y} \end{tikzcd}$$

associé à chaque valuation v du corps de fonctions $K(Y)$. Ce diagramme est d'ailleurs un pull-back de topos. Dans la section 2.2, nous montrons que ce pull-back donne lieu à un isomorphisme

$$u_v^* R^n(\gamma_*) \simeq R^n(\alpha_{v*}) i_v^*,$$

analogue au changement de base propre en cohomologie étale. En d'autres termes, le diagramme précédent satisfait la condition de Beck-Chevalley. Cette propriété fait ici l'objet d'une attention particulière car la condition analogue en caractéristique zéro permettrait de calculer la cohomologie Weil-étale conjecturale. Le morphisme structural $Y \to Spec\, k$ induit un morphisme de topos $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W,Y} \to B^{sm}_{W_k}$, tel que la composition

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \longrightarrow B^{sm}_{W_k}$$

soit le morphisme de topos classifiants induit par le morphisme canonique $W_{k(v)} \to W_k$, lui-même donné par l'extension $k(v)/k$. Nous verrons plus tard que ce qui précède permet de déterminer le foncteur dérivé total $R\gamma_*$, et donc la cohomologie Weil-étale de Y.

La troisième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude du topos flasque $\mathfrak{F}_{W,Y}$ d'un corps de fonctions. On obtient alors un morphisme canonique

$$\mathfrak{F}_{W,Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,Y},$$

d'ailleurs loin d'être une équivalence. A partir du paragraphe 3.4, nous supposons qu'un site $\mathcal{C}$, pour le topos Weil-étale de l'ensemble des valuations $\overline{Y}$ d'un corps de nombres, peut être défini par une sous-catégorie pleine du topos flasque $\mathfrak{F}_{W,\overline{Y}}$ munie de la topologie induite. Le morphisme précédent en caractéristique positive permet d'éclairer la situation en caractéristique zéro. En effet, nous montrons dans la partie 4 que la condition de Beck-Chevalley n'est satisfaite par aucun des topos $\widetilde{\mathcal{C}}$ ainsi obtenus. Cette observation nous amène, dans le chapitre suivant, à imaginer l'existence d'un topos en caractéristique zéro satisfaisant la condition de Beck-Chevalley.

1. Equivariant étale sheaves

1.1. Group actions on étale sheaves. An étale sheaf on a scheme Y is a sheaf of sets on the small étale site of Y. We denote by $\mathcal{S}_{Et;Y}$ or $\mathcal{S}(Y)$ the étale topos of Y. Let G be a discrete group acting on the scheme Y. Then $\mathcal{S}(G;Y)$ denotes the topos of G-equivariant étale sheaves of sets on Y. Recall that a sheaf $\mathcal{F}$ on Y is G-equivariant whenever $\mathcal{F}$ is endowed with a family of morphisms $\{\varphi_g : g_*\mathcal{F} \to \mathcal{F};\, g \in G\}$ satisfying $\varphi_{1_G} = Id_{\mathcal{F}}$ and $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ g_*(\varphi_h)$, for any $g, h \in G$. Such a family of morphisms is said to be a *G-linearisation*. Suppose that $u : X \to Y$ is an equivariant map of G-schemes. The functor $u_* : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$ sends G-linearisations to G-linearisations. Hence, it induces a functor $u_*^{eq} : \mathcal{S}(G;X) \to \mathcal{S}(G;Y)$. In the same way, there is an induced exact functor $u_{eq}^* : \mathcal{S}(G;Y) \to \mathcal{S}(G;X)$. Moreover, u_{eq}^* is left adjoint to u_*^{eq}. Hence one has a (geometric) morphism of (Grothendieck) topoi

$$(u_{eq}^*; u_*^{eq}) : \mathcal{S}(G;X) \to \mathcal{S}(G;Y),$$

associated to any equivariant map $u : X \to Y$ of G-schemes. Let $Ou_X : \mathcal{S}(G;X) \to \mathcal{S}(X)$ and $Ou_Y : \mathcal{S}(G;Y) \to \mathcal{S}(Y)$ be the forgetful functors. One has

$$Ou_Y \circ u_*^{eq}(\mathcal{F}) \simeq u_* \circ Ou_X(\mathcal{F}) \text{ and } Ou_X \circ u_{eq}^*(\mathcal{L}) \simeq u^* \circ Ou_Y(\mathcal{L}), \tag{57}$$

for any equivariant sheaves $\mathcal{F}$ and $\mathcal{L}$ on X and Y respectively. If there is no risk of ambiguity, we also denote these functors by u^* and u_*. Finally, $Ab(G;X)$ denotes the abelian category of abelian objects of $\mathcal{S}(G;X)$.

1.2. Continuous actions on étale sheaves. Let Y be a scheme of finite type over a field k and let $\overline{k}/k$ be a separable closure of k. We denote by $G_k := Gal(\overline{k}/k)$ the Galois group of k and we set $\overline{Y} := Y \times_k \overline{k}$. Let $u : W \to G_k$ be a continuous morphism of topological groups. The profinite group G_k acts on $\overline{Y}$ and W acts on $\overline{Y}$ via u. Let $\mathcal{F}$ be a W^d-equivariant sheaf on the étale site of $\overline{Y}$, where W^d is the group W endowed with the discrete topology. The action of W on $\mathcal{F}$ is said to be *continuous* when W acts continuously on the discrete set $\mathcal{F}(U \times_k \overline{k})$, for any U étale and quasi-compact over Y. We denote by $\mathcal{S}(W;\overline{Y})$ the category of étale sheaves on $\overline{Y}_{et}$ on which W acts continuously. The category $\mathcal{S}(W;\overline{Y})$ is a topos, as it follows from Giraud's criterion. For any continuous morphism $r : W' \to W$ over G_k, the forgetful functor

$$r^* : \mathcal{S}(W;\overline{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}(W';\overline{Y})$$

sends a W-equivariant sheaf $\mathcal{F}$ to the same sheaf $\mathcal{F}$ on which W' acts continuously under $r : W' \to W$. This functor commutes with arbitrary projective and inductive limits. This gives rise to a sequence of three adjoint functors

$$r_! \;;\quad r^* \;;\quad r_*.$$

PROPOSITION 5.1. *There is an essential morphism of topoi*

$$(r^*; r_*) : \mathcal{S}(W';\overline{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}(W;\overline{Y}).$$

Let $f : X \to Y$ be a morphism of schemes over k, and let $u : W \to G_k$ be a continuous homomorphism. The canonical continuous morphism $\mathfrak{d} : W^d \to W$ induces two morphisms $\mathfrak{d}_{\overline{X}} : \mathcal{S}(W^d; \overline{X}) \to \mathcal{S}(W; \overline{X})$ and $\mathfrak{d}_{\overline{Y}} : \mathcal{S}(W^d; \overline{Y}) \to \mathcal{S}(W; \overline{Y})$. The morphism of schemes $\overline{X} \to \overline{Y}$ is W^d-equivariant hence one has a morphism of topoi $f : \mathcal{S}(W^d; \overline{X}) \to \mathcal{S}(W^d; \overline{Y})$. There is a commutative diagram of categories

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(W^d;\overline{X}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathfrak{d}_{\overline{X}*}"'] & \mathcal{S}(W^d;\overline{Y}) \arrow[d, "\mathfrak{d}_{\overline{Y}*}"'] \\ \mathcal{S}(W;\overline{X}) \arrow[r, "f_*^c"] & \mathcal{S}(W;\overline{Y}) \end{tikzcd}$$

where f_*^c is induced by f_*. Indeed, let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}(W; \overline{X})$ and let $U \to Y$ be a quasi-compact étale Y-scheme. Then, the topological group W acts continuously on the set

$$f_*(\mathcal{F})(U \times_k \overline{k}) = f_*(\mathcal{F})(U \times_Y \overline{Y}) = \mathcal{F}(U \times_Y \overline{Y} \times_{\overline{Y}} \overline{X}) = \mathcal{F}((U \times_Y X) \times_k \overline{k}),$$

since $U \times_Y X \to X$ is étale and quasi-compact. Hence, W acts continuously on $f_*(\mathcal{F})$ and the functor f_*^c is well defined. The functor $\mathfrak{d}_{\overline{X}*}$ is given by

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{d}_{\overline{X}*}: & \mathcal{S}(W^d;\overline{X}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(W;\overline{X}) \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & [U \to \varinjlim \mathcal{F}(U)^{W'}] \end{array},$$

where W' runs over the open subgroups of $u^{-1}(G_{k'}) \subseteq W$. Here k'/k is a finite extension so that $U \to \overline{X}$ has a model over k'. Note that the set $\varinjlim \mathcal{F}(U)^{W'}$ is well defined since it does not depend of the choice of k'. Then, one easily sees that the previous diagram is commutative.

The functor f_*^c commutes with arbitrary projective limits since it commutes with arbitrary products (in particular the final object) and fiber products. This implies that f_*^c has a left adjoint a. Then the functor $\mathfrak{d}_{\overline{X}}^* \circ a$ is left adjoint to $f_*^c \circ \mathfrak{d}_{\overline{X}*}$. Therefore, the isomorphism $f_*^c \circ \mathfrak{d}_{\overline{X}*} \simeq \mathfrak{d}_{\overline{Y}*} \circ f_*$ and the fact that $f^* \circ \mathfrak{d}_{\overline{Y}}^*$ is left adjoint to $\mathfrak{d}_{\overline{Y}*} \circ f_*$ show that one has an identification

$$\mathfrak{d}_{\overline{X}}^* \circ a \simeq f^* \circ \mathfrak{d}_{\overline{Y}}^*.$$

In other words, the pull-back $f^* : \mathcal{S}(W^d; \overline{X}) \to \mathcal{S}(W^d; \overline{Y})$ induces a functor

$$f_c^* := a : \mathcal{S}(W; \overline{X}) \to \mathcal{S}(W; \overline{Y})$$

which is left adjoint to f_*^c. Moreover, $\mathfrak{d}_{\overline{X}}^*$ is fully faithful. Then, the isomorphism

$$f_c^* \simeq \mathfrak{d}_{\overline{X}*} \circ \mathfrak{d}_{\overline{X}}^* \circ f_c^* \simeq \mathfrak{d}_{\overline{X}*} \circ f^* \circ \mathfrak{d}_{\overline{Y}}^*$$

shows that f_c^* is left exact, since all the functors $\mathfrak{d}_{\overline{X}*}$, f^* and $\mathfrak{d}_{\overline{Y}}^*$ commute with finite projective limits. One has the following result.

Proposition 5.2. *A map $f : X \to Y$ of k-schemes induces morphism of topoi*

$$f_c : \mathcal{S}(W; \overline{X}) \longrightarrow \mathcal{S}(W; \overline{Y}).$$

Moreover, for any morphism of topological groups $r : W' \to W$ over G_k, the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(W';\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(W';\overline{Y}) \arrow[d] \\ \mathcal{S}(W;\overline{X}) \arrow[r] & \mathcal{S}(W;\overline{Y}) \end{tikzcd}$$

is commutative.

2. The Weil-étale topos of a function field

Let $k = \mathbb{F}_q$ be a finite field, $\overline{k}/k$ an algebraic closure of k, $\Gamma = Gal(\overline{k}/k)$ the absolute Galois group of k and $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ the Weil group of k. Let Y be a smooth projective algebraic curve over k, and let $\overline{Y}$ be the base change $Y \times_k \overline{k}$. The étale topos $\mathcal{S}_{Et;Y}$ of Y is equivalent to the category $\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})$ of étale sheaves of sets on $\overline{Y}$ endowed with a continuous action of Γ.

DÉFINITION 5.3. *The* Weil-étale topos $\mathcal{S}_{W;Y}$ *of* Y *is defined as the category* $\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})$ *of étale sheaves of sets on* $\overline{Y}$ *endowed with an action of the discrete group* Γ_0.

Recall that a morphism of topos $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ is a pair of adjoint functors $f = (f^*; f_*)$ with the additional fact that f^* commutes with finite limits. Being a left adjoint, f^* commutes with arbitrary inductive limits and so, is an exact functor. Analogously, f_* commutes with arbitrary projective limits.

PROPOSITION 5.4. *There is a morphism of topoi*

$$\gamma : \mathcal{S}_{W;Y} := \mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}) \simeq \mathcal{S}_{et;Y}.$$

The direct image and the pull-back of γ are defined as follows. If $\mathcal{F}$ is an étale sheaf on $\overline{Y}$ endowed with a continuous Γ-action, then $\gamma^*\mathcal{F}$ is just the sheaf $\mathcal{F}$ on which Γ_0 acts via the inclusion $\Gamma_0 \hookrightarrow \Gamma$. The direct image of γ is given by

$$\begin{array}{cccc} \gamma_* : & \mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}) \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & (U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}(U)^H) \end{array},$$

where H runs through the subgroups of the Weil group of k', the smallest (finite) sub-extension of $\overline{k}/k$ over which U has a model.

PROPOSITION 5.5. *The morphism* γ *is connected.*

PROOF. Recall that γ is said to be connected when γ^* is fully faithful. Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})$. Then, for any étale $\overline{Y}$-scheme U, one has

$$\gamma_* \circ \gamma^*(\mathcal{F})(U) = \varinjlim \mathcal{F}(U)^H = \mathcal{F}(U),$$

since Γ acts continuously on $\mathcal{F}$. Hence, the adjunction transformation

$$Id \longrightarrow \gamma_* \circ \gamma^*$$

is an isomorphism. □

2.1. The Weil-étale topos at the closed points. Let v be a closed point of Y for which $k(v)$ denotes the residue field. Let $G_{k(v)}$ and $W_{k(v)}$ be the Galois group and the Weil group of $k(v)$ respectively. The projection

$$p_v : \overline{Y}_v := v \times_Y \overline{Y} \longrightarrow \overline{Y}$$

respects the action of Γ, and a fortiori of Γ_0. Hence it induces two morphisms of topoi

$$\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}_v) \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}) \text{ and } \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}_v) \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}) \tag{58}$$

Moreover, one has

$$\overline{Y}_v = \coprod_{i \leq n} \overline{v}_i = \coprod_{i \leq n} \sigma^i(\overline{v}),$$

where σ is the canonical generator of Γ_0, $n = [k(v) : k]$, and $\overline{v}$ is an arbitrary point lying over v . Then, an object $\mathcal{F}$ of $\mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v)$ (respectively of $\mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}_v)$) is given by a family of $W_{k(v)}$-sets (respectively of $G_{k(v)}$-sets) $(\mathcal{F}_{\overline{v}_i})_{i \leq n}$ so that σ^i induces an equivariant isomorphism from $\mathcal{F}_{\overline{v}_1}$ to $\mathcal{F}_{\overline{v}_i}$.

More intuitively, the étale topos associated to $\overline{v} = Spec(\overline{k})$ is the final topos $\underline{Set}$. Hence, the topos $\mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v)$ is equivalent to the topos $\mathcal{S}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ of equivariant sheaves of sets on the discrete topological space $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on which $\mathbb{Z} \simeq \Gamma_0$ acts naturally. Such an equivariant sheaf is a discrete set E endowed with an action of $\mathbb{Z}$, together with an equivariant projection $p : E \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indeed, E is discrete since an étalé space over a discrete space is discrete. Then, one has

$$\mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq B^{sm}_{\mathbb{Z}}/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}. \tag{59}$$

The first equivalence is given by a choice of $\overline{v}$. Two different choices yield canonically isomorphic equivalences. More precisely, the first equivalence of (59) is an object of the category $\underline{Homtop}\,(\mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v); \mathcal{S}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ which is well defined up to canonical isomorphism. The second equivalence is canonical.

Hence there are isomorphisms of topoi

$$B^{sm}_{\Gamma_0}/_{\Gamma_0/W_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v) \text{ and } B^{sm}_{\Gamma}/_{\Gamma/G_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}_v). \tag{60}$$

Furthermore, one has the canonical equivalences (see [**24**] IV.5.8)

$$B^{sm}_{W_{k(v)}} \simeq B^{sm}_{\Gamma_0}/_{\Gamma_0/W_{k(v)}} \text{ and } B^{sm}_{G_{k(v)}} \simeq B^{sm}_{\Gamma}/_{\Gamma/G_{k(v)}}. \tag{61}$$

Composing (60) and (61), we get

$$B^{sm}_{W_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v) \text{ and } B^{sm}_{G_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}_v). \tag{62}$$

For any $W_{k(v)}$-set E (respectively any $G_{k(v)}$-set E), we denote by $Ind^{\Gamma_0}_{W_{k(v)}}(E)$ (respectively by $Ind^{\Gamma}_{G_{k(v)}}(E)$) the corresponding object of $\mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v)$ (respectively of $\mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}_v)$). Then, composing (58) and (62), we obtain the following result.

PROPOSITION 5.6. *There are canonical morphisms of topoi*

$$i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}) \text{ and } u_v : B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}).$$

Moreover $i_v^*(\mathcal{F})$ is the stalk $\mathcal{F}_{\overline{v}}$ of $\mathcal{F}$ at any geometric point $\overline{v}$ lying over v, endowed with its natural action of $W_{k(v)}$. Respectively $u_v^*(\mathcal{F})$ is the set $\mathcal{F}_{\overline{v}}$ endowed with its action of $G_{k(v)}$.

REMARK 5.7. *There are équivalences*

$$\mathcal{S}_{Et}(Spec(k(v))) \simeq B^{sm}_{G_{k(v)}} \text{ and } \mathcal{S}_{Et}(Y) \simeq \mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}).$$

Then the morphism u_v of Proposition 5.6 is just the morphism of étale topoi induced by the morphism of schemes $Spec(k(v)) \to Y$.

DEFINITION 5.8. *For any closed point v of Y, we denote by*

$$\alpha_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

the morphism of classifying topoi induced by the continuous homomorphism $W_{k(v)} \to G_{k(v)}$.

This is the morphism from the Weil-étale topos to the étale topos of $Spec(k(v))$, since the category of étale sheaves on $Spec(k(\overline{v}))$ is equivalent to the final topos $\underline{Set}$. It can be defined by the morphism of left exact sites

$$a : (G_{k(v)} - \underline{Ensf}) \longrightarrow (W_{k(v)} - \underline{Ens})$$

where $(G_{k(v)} - \underline{Ensf})$ and $(W_{k(v)} - \underline{Ens})$ are the categories of finite $G_{k(v)}$-sets and (discrete) $W_{k(v)}$-sets respectively, endowed with their canonical topologies. Explicitly, one has

$$\alpha_{v*}(E) := \varinjlim E^H$$

where the direct limit is taken over all the subgroups H of $W_{k(v)}$, for any $W_{k(v)}$-set E. Moreover, $\alpha_v^*(F)$ is the set F on which $W_{k(v)}$ acts under the morphism $W_{k(v)} \to G_{k(v)}$ for any $G_{k(v)}$-set F.

Proposition 5.9. *There is a canonical commutative diagram of topoi :*

$$\begin{array}{ccc} B^{sm}_{W_{k(v)}} & \xrightarrow{\alpha_v} & B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ {\scriptstyle i_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_v} \\ \mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}) \end{array}$$

Proof. Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})$. By definition of γ and by Proposition 5.6, $i_v^* \circ \gamma^*(\mathcal{F})$ is the stalk $\mathcal{F}_{\overline{v}}$ with its $W_{k(v)}$-action. Moreover, $\alpha_v^* \circ u_v^*(\mathcal{F})$ is also canonically isomorphic to $\mathcal{F}_{\overline{v}}$, as a $W_{k(v)}$-set. This yields a transformation

$$i_v^* \circ \gamma^* \longrightarrow \alpha_v^* \circ u_v^*$$

which is an isomorphism. We get a canonical isomorphism

$$\gamma \circ i_v \simeq u_v \circ \alpha_v$$

in the category $\underline{Homtop}\,(B_{W_{k(v)}};\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}))$. Therefore, the diagram of the proposition is commutative. □

Proposition 5.10. *The adjunction transformations*

$$i_v^* \circ i_{v*} \to Id \quad and \quad u_v^* \circ u_{v*} \to Id$$

are both isomorphisms. In other words, i_v and u_v are both embeddings of topoi.

Proof. Let E be a $W_{k(v)}$-set, and let $Ind_{\Gamma_0}^{W_{k(v)}}(E)$ be the corresponding object of $\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}_v)$. Then, $i_{v*}(E)$ is defined as $p_{v*}(Ind_{\Gamma_0}^{W_{k(v)}}(E))$, where $p_v : \overline{Y}_v = \coprod \overline{v}_i \to \overline{Y}$ is the projection. Let $\overline{v} = \overline{v}_0$ be a point of $\overline{Y}$ lying over v. Clearly, the stalk of $p_{v*}(Ind_{\Gamma_0}^{W_{k(v)}}(E))$ at $\overline{v}$ is canonically isomorphic to E, as a $W_{k(v)}$-set. The proof for u_v is identical. □

Proposition 5.11. *The morphism i_v and u_v are both closed embeddings of topoi. Moreover, the image of i_v is the inverse image of the image of u_v under γ.*

Proof. Consider the morphism $\pi : \overline{Y} \to Y$ and the equivalence of topoi

$$(\pi^*;\pi_*^{\Gamma}) : \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}(Y).$$

The open sub-scheme $U := Y - v$ of Y represents a sub-object $\varepsilon(U)$ of the final object $\varepsilon(Y)$ of $\mathcal{S}(Y)$. Hence $\pi^*(\varepsilon(U))$ is a sub-object of the final object of $\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})$. It yields an open sub-topos

$$j : \mathcal{U} := \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})_{/\pi^*(\varepsilon(U))} \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}).$$

The essential image of u_{v*} is exactly the strictly full subcategory of $\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})$ defined by the objects X such that $j^*(X)$ is the final object of $\mathcal{U}$. Hence the essential image of u_{v*} (which is equivalent to $B^{sm}_{G_{k(v)}}$) is the closed complement of $\mathcal{U}$ in $\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})$. In particular, u_v is a closed embedding.

Now, consider the (connected) morphism

$$\gamma=(\gamma^*;\gamma_*):\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})\longrightarrow\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}).$$

The inverse image of $\mathcal{U}$ under γ is given by

$$j_0:\gamma^{-1}(\mathcal{U})=\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})/_{\gamma^*\circ\pi^*(\varepsilon(U))}\longrightarrow\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}).$$

Again, the essential image of i_{v*} is equivalent to $B_{W_{k(v)}}$ and is the closed complement of $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ in $\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})$. Hence i_v is a closed embedding. More precisely, this shows that the image $i_v(B^{sm}_{W_{k(v)}})$ of i_v is the inverse image of $u_v(B^{sm}_{G_{k(v)}})$ under γ. □

REMARK 5.12. *We denote by $I_{W_{k(v)}}$ and $I_{G_{k(v)}}$ the images of the morphisms i_v and u_v in $\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})$ and $\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})$ respectively. By the previous proposition and by ([**24**] IV.9.4.3), there exists a unique morphism (up to isomorphism) $\beta_v: I_{W_{k(v)}}\to I_{G_{k(v)}}$ so that the diagram*

$$\begin{tikzcd} I_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\beta_v"] \arrow[d] & I_{G_{k(v)}} \arrow[d] \\ \mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}) \end{tikzcd}$$

*is commutative, where the vertical arrows are the inclusions. Then this square is 2-cartesian. Furthermore, the morphisms $B^{sm}_{W_{k(v)}}\to I_{W_{k(v)}}$ and $B^{sm}_{G_{k(v)}}\to I_{G_{k(v)}}$ induced by i_v and u_v are both equivalences, since i_v and u_v are both embeddings ([**24**] IV 9.1.7.2). Hence the diagram*

$$\begin{tikzcd} B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"'] \\ \mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y}) \end{tikzcd}$$

is 2-cartesian, since it is commutative. In other words, it is a pull-back in the 2-category of topoi. In what follows, we say that $B^{sm}_{W_{k(v)}}$ is the inverse image of $B^{sm}_{G_{k(v)}}$ under γ.

PROPOSITION 5.13. *The family of functors $\{i_v^*:\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})\to B^{sm}_{W_{k(v)}},\ v\in Y^0\}$ is conservative. In other words, the morphism*

$$(i_v)_{v\in Y^0}:\coprod B^{sm}_{W_{k(v)}}\longrightarrow\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})$$

is surjective.

PROOF. Let $f,f':\mathcal{F}\rightrightarrows\mathcal{L}$ be two morphisms of Γ_0-sheaves on $\overline{Y}$ such that

$$i_v^*(f)=i_v^*(f'):i_v^*\mathcal{F}\to i_v^*\mathcal{L},$$

for every closed point v of Y. By definition of i_v, it means that for any v and for any $\overline{v}$ lying over v, one has the equality

$$i_{\overline{v}}^*(f)=i_{\overline{v}}^*(f')\ \text{ in }\ Hom_{B^{sm}_{W_{k(v)}}}(i_{\overline{v}}^*(\mathcal{F});i_{\overline{v}}^*(\mathcal{L})), \tag{63}$$

where $i_{\overline{v}}:\overline{v}\to\overline{Y}$ denote the $W_{k(v)}$-equivariant inclusion. We denote by

$$Ou:\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})\longrightarrow\mathcal{S}(\overline{Y})$$

the forgetful functor. The relations (57) and (63) yield

$$i_{\overline{v}}^*(Ou(f))=i_{\overline{v}}^*(Ou(f'))\ \text{ in }\ Hom_{\underline{Set}}(i_{\overline{v}}^*(\mathcal{F});i_{\overline{v}}^*(\mathcal{L})),\tag{64}$$

for any closed point $\overline{v}$ of $\overline{Y}$. Indeed, the functors $i_{\overline{v}}^*\circ Ou$ and $\widetilde{Ou}\circ i_{\overline{v}}^*$ are canonically isomorphic, where $\widetilde{Ou}:B^{sm}_{W_{k(v)}}\to\underline{Set}$ is the forgetful functor and $i_{\overline{v}}^*$ denotes either the usual fiber functor $i_{\overline{v}}^*:\mathcal{S}(\overline{Y})\to\underline{Set}$ at $\overline{v}$, or the induced functor between equivariant sheaves $i_{\overline{v}}^*:\mathcal{S}(\Gamma;\overline{Y})\to B_{W_{k(v)}}$. Then, (64) implies the equality $Ou(f)=Ou(f')$ in $Hom_{\mathcal{S}(\overline{Y})}(Ou(\mathcal{F});Ou(\mathcal{L}))$, since the set of fiber functors given by the closed points of $\overline{Y}$ is a conservative system of points of the étale topos $\mathcal{S}(\overline{Y})$. Finally, one has $f=f'$ in $Hom_{\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})}(\mathcal{F};\mathcal{L})$, because the map

$$Hom_{\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})}(\mathcal{F};\mathcal{L})\longrightarrow Hom_{\mathcal{S}(\overline{Y})}(Ou(\mathcal{F});Ou(\mathcal{L}))$$

is injective, since the forgetful functor Ou is faithful.

□

2.2. The Beck-Chevalley condition.

DÉFINITION 5.14. *A commutative diagram of topoi*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "b"] \\ \mathcal{S}' \arrow[r, "g"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

is said to satisfy the Beck-Chevalley condition *if the canonical transformation*

$$b^*g_*\longrightarrow f_*a^*$$

is an isomorphism.

2.2.1. *Equivariant étale neighborhoods.*

DEFINITION 5.15. *Let $\overline{v}$ be a closed point of $\overline{Y}$ and v its image in Y. Let U be an étale neighborhood of the geometric point $\overline{v}$ in $\overline{Y}$ and let k'' the smallest sub-extension of $\overline{k}/k$ such that U has a model over k''. Then $U\to\overline{Y}$ is said to be a $W_{k(v)}$-*étale neighborhood *of $\overline{v}$ if there exists a finite extension k'/k'' (which contains $k(v)$) such that the natural action of $W_{k'}$ extends to an action of $W_{k(v)}$. Moreover, the maps $\overline{v}\to U\to\overline{Y}$ have to respect the action of $W_{k(v)}$.*

LEMMA 5.16. *The system of $W_{k(v)}$-étale neighborhoods of $\overline{v}$ in $\overline{Y}$ is cofinal in the system of étale neighborhoods of $\overline{v}$.*

PROOF. Let

$$\begin{tikzcd} \overline{v} \arrow[r, "u_{\overline{v}}"] \arrow[dr, "i_{\overline{v}}"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

be an étale neighborhood of the geometric point $i_{\overline{v}}:\overline{v}\to\overline{Y}$. Let $k'/k(v)/k$ be a finite extension such that U has a model U' over k'. Furthermore, let $G:=Gal(k'/k(v))=G_{k(v)}/G_{k'}\simeq$

$W_{k(v)}/W_{k'}$ and let $s : G \to W_{k(v)}$ be any section. For any $g \in W_{k(v)}$, we denote by ${}_gU$ the $\overline{Y}$-scheme $g \circ \varphi : U \to \overline{Y}$. One has ${}_gU = U \times_{\overline{Y}} \overline{Y}$ as $\overline{Y}$-schemes, where the fiber product is defined with respect to the map $g^{-1} : \overline{Y} \to \overline{Y}$. Then, we define

$$G_sU := \prod_{\overline{g} \in G} {}_{s(\overline{g})}U.$$

Here, the product is a fiber product over $\overline{Y}$. Note that for any $h \in W_{k'}$, the $\overline{Y}$-schemes U and ${}_hU$ are canonically isomorphic. Indeed, the square

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\varphi"'] \\ \overline{Y} \arrow[r, "h"] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

commutes, since U has a model U' over k'. It follows that two different sections $s; s' : G \rightrightarrows W_{k(v)}$ define two canonically isomorphic $\overline{Y}$-schemes G_sU and $G_{s'}U$. Then, we choose a section s and we set $GU := G_sU$. Let g be an element of $W_{k(v)}$ and define $h \in W_{k'}$ by $g = h.s(\overline{g})$. One has the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s(\overline{g}).\varphi"] & U \arrow[d, "s(\overline{g}).\varphi"] \\ \overline{Y} \arrow[r, "s(\overline{g})"'] & \overline{Y} \arrow[r, "h"'] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

Also, the diagram

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d] & ({}_{s(\overline{g})}U) \arrow[d] \\ \overline{Y} \arrow[r, "g"] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

commutes, so that the following commutes as well

$$\begin{tikzcd} GU \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d] & GU \arrow[d] \\ \overline{Y} \arrow[r, "g"] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

This gives an action of $W_{k(v)}$ on GU such that the structure map $GU \to \overline{Y}$ is $W_{k(v)}$-equivariant.

Moreover, every ${}_{s(\overline{g})}U$ is an étale neighborhood of the geometric point $\overline{v}$, since $G_{k(v)}$ fixes $\overline{v}$ and $s(\overline{g}) \in W_{k(v)} \subset G_{k(v)}$. More precisely, the diagram

$$\begin{tikzcd} \overline{v} \arrow[r, "s(\overline{g})^{-1}"] & \overline{v} \arrow[r, "u_{\overline{v}}"] \arrow[dr, "i_{\overline{v}}"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "s(\overline{g})\circ\varphi"] & \\ & & \overline{Y} \arrow[r, "s(\overline{g})"'] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

and the fact that $s(\overline{g}) \circ i_{\overline{v}} \circ s(\overline{g})^{-1} = s(\overline{g}) \circ s(\overline{g})^{-1} \circ i_{\overline{v}} = i_{\overline{v}}$ show that ${}_{s(\overline{g})}U$ is an étale neighborhood of the geometric point $i_{\overline{v}} : \overline{v} \to \overline{Y}$. Hence, by the universal property of the fiber product, GU is an étale neighborhood of $\overline{v}$.

Denote by Y' the scheme $Y \times_k k'$ and by $p : \overline{Y} \to Y'$ the projection. Then, $\varphi : U' \to Y'$ is an Y'-scheme. Note that G acts on Y'. For any $\overline{g} \in G$, let ${}_{\overline{g}}U'$ be $\overline{g} \circ \varphi : U' \to Y'$ and

$$GU' := \prod_{\overline{g} \in G} {}_{\overline{g}}U,$$

where the product is a fiber product over Y'. One has ${}_{\overline{g}}U' = U' \times_{Y'} Y'$ as Y'-schemes, where the product is taken according to $\overline{g}^{-1} : \overline{Y} \to \overline{Y}$. Moreover the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g.\varphi"] \arrow[d, "Id"'] & \overline{Y} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g^{-1}"] & Y' \arrow[d, "\overline{g}^{-1}"] \\
U \arrow[r, "\varphi"'] & \overline{Y} \arrow[r, "p"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

shows

$${}_gU = U \times_{Y'} Y' = \overline{k} \times_{k'} U' \times_{Y'} Y' = \overline{k} \times_{k'} ({}_gU) = \overline{Y} \times_{Y'} ({}_gU).$$

Then we get

$$GU' \times_{k'} \overline{k} = GU' \times_{Y'} \overline{Y} = GU.$$

Hence GU' is model of GU over k'. Furthermore the action of $W_{k(v)}$ on GU extends the action of $W_{k'}$ on the second factor of $GU = GU' \times_{k'} \overline{k}$.

Then GU is a $W_{k(v)}$-étale neighborhoods of $\overline{v}$ which is finer than U (in the filtered system of étale neighborhoods), since one has

$$\overline{v} \to GU \to U \to \overline{Y}.$$

For any morphism $U \to V$ of étale neighborhoods of $\overline{v}$, one has a canonical equivariant map $GU \to GV$. Finally, it is easily seen that the map $\overline{v} \to GU$ is $W_{k(v)}$-equivariant.

□

2.2.2. Choose a closed point v of Y, and a point $\overline{v}$ of $\overline{Y}$ lying over v. Recall that the morphism $i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \to \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y})$ is defined up to canonical isomorphism in the category $\underline{Homtop}\,(B^{sm}_{W_{k(v)}}; \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}))$. In what follows, we fix the functor $i_v^* := i_{\overline{v}}^*$ as the functor given by pullback on the categories of equivariant sheaves, along the equivariant morphism of $W_{k(v)}$-schemes $i_{\overline{v}} : \overline{v} \to \overline{Y}$.

Consider the next diagram $\mathcal{D}_v$:

$$\begin{tikzcd}
B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_{v*}"] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \\
\mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}) \arrow[r, "\gamma_*"] \arrow[u, "i_v^*"'] & \mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}) \arrow[u, "u_v^*"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 5.17. *The diagram $\mathcal{D}_v$ is commutative. In other words, the diagram of Proposition 5.9 satisfies the Beck-Chevalley condition.*

PROOF. Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})$. One has

$$u_v^*\circ\gamma_*(\mathcal{F})=\varinjlim_U\ \gamma_*(\mathcal{F})(U)=\varinjlim_U\ \varinjlim_H\ (\mathcal{F}(U)^H),$$

where U runs through the étale neighborhoods of the geometric point $\overline{v}\to\overline{Y}$ and where H describes the subgroups of $S(U):=W_{k'}$. Here, k' is the smallest extension of k over which U has a model. By Lemma 5.16, one may assume that the action of $S(U)$ on U extends to an action of $W_{k(v)}$, for any U.

One has

$$\begin{aligned}
&(65) && \alpha_{v*}\circ i_v^*(\mathcal{F}) &&= \alpha_{v*}(\varinjlim_U\ \mathcal{F}(U))\\
&(66) && &&= \varinjlim_H\ (\varinjlim_U\ \mathcal{F}(U))^H\\
&(67) && &&= \varinjlim_H\ \varinjlim_U\ (\mathcal{F}(U)^H)\\
&(68) && &&= \varinjlim_U\ \varinjlim_H\ \mathcal{F}(U)^H.
\end{aligned}$$

The equality (67) is valid because H is finitely generated, and (68) is valid because colimits commute with each other. Hence, there is a transformation

$$u_v^*\circ\gamma_*\to\alpha_{v*}\circ i_v^*$$

which is an isomorphism.

□

REMARK 5.18. *We will see later that the morphism from the Weil-étale topos to the étale topos $\gamma:\mathcal{S}(\Gamma_0;\overline{Y})\to\mathcal{S}_{Et;Y}$ is given by the first projection*

$$\gamma:\mathcal{S}_{Et;Y}\times_{B_\Gamma^{sm}}B_{\Gamma_0}^{sm}\longrightarrow\mathcal{S}_{Et;Y}.$$

The morphism $B_{\Gamma_0}^{sm}\to B_\Gamma^{sm}$ is tidy. By ([**45**]* Theorem 4.8), a pull-back of a tidy morphism is tidy. Hence γ is tidy. Again by (*[**45**]* Theorem 4.8), Proposition 5.17 follows from Remark 5.12.*

In order to prove the next proposition, we need the following lemmas.

LEMMA 5.19. *Let U and X be two schemes on which a discrete group G acts. Suppose that U is an étale X-scheme such that the structural morphism $j:U\to X$ commutes with the G-action. Then the restriction functor $j^*:Ab(G;X)\longrightarrow Ab(G;U)$ preserves injective objects.*

PROOF. The usual restriction functor

$$j^*:Ab(X)\longrightarrow Ab(U)$$

preserves injective objects since it has an exact left adjoint $j_!$. In fact, these functors induce adjoint functors between the categories of equivariant abelian sheaves such that the left adjoint is exact.

More formally, U is a G-equivariant étale X-scheme. It yields an object $\varepsilon(U)$ of $\mathcal{S}(G;X)$. We get a localization morphism of topoi $\mathcal{S}(G;X)_{/\varepsilon(U)}\to\mathcal{S}(G;X)$. Moreover, there is a canonical isomorphism

$$\mathcal{S}(G;U)\simeq\mathcal{S}(G;X)_{/\varepsilon(U)}$$

such that the morphism

$$\mathcal{S}(G;U)\simeq\mathcal{S}(G;X)_{/\varepsilon(U)}\longrightarrow\mathcal{S}(G;X)$$

is the morphism of topoi induced by the G-equivariant map of schemes $j : U \to X$. Then j^* is a localization functor. By ([**24**] V.4.11), the induced functor $j^* : Ab(G;X) \to Ab(G;U)$ preserves injective objects.

□

REMARK 5.20. *For any G-equivariant scheme X, there is a morphism*

$$\mathcal{S}(G;X) \to B_G^{sm}.$$

Indeed, any G-set defines a G-equivariant sheaf on X. Moreover, the set of global sections $\mathcal{F}(X)$ of any G-sheaf $\mathcal{F}$ carries an action of G. Finally, these functors are adjoints and the first one is left exact.

LEMMA 5.21. *Let G be a discrete group acting on a scheme X and let H be a subgroup of G. Then the functor*

$$Res_G^H : Ab(G;X) \longrightarrow Ab(H;X)$$

given by restriction of the group action from G to H preserves injective objects.

PROOF. One has the equivalence (see [**24**] IV.5.8)

$$\mathcal{S}(H;X) \simeq \mathcal{S}(G;X)/_{(G/H)^\sharp}$$

where $(G/H)^\sharp$ is the constant G-sheaf associated to the homogeneous space G/H (following the previous remark). Then, Res_G^H is the functor induced (between abelian categories) by the pull-back of the morphism

$$\mathcal{S}(G;X)/_{(G/H)^\sharp} \longrightarrow \mathcal{S}(G;X).$$

Since Res_G^H is induced by a localization functor in the topos $\mathcal{S}(G;X)$, it preserves injective objects. □

LEMMA 5.22. *Let G be an infinite cyclic group. The functor $H^q(G;-)$ commutes with filtered inductive limits for any q.*

PROOF. The discrete group G has strict cohomological dimension 1. So it suffices to prove the result for q equal to 0 and 1. Easy calculations show that this follows from the fact that G is generated by one element. □

NOTATION 5.23. *Let G be a discrete group acting on a scheme X. Let $\mathcal{S}(G,X)$ be the topos of G-equivariant étale sheaves on X. The* equivariant étale cohomology of X with coefficient in an equivariant abelian sheaf $\mathcal{A}$ *is defined as the cohomology of $\mathcal{A}$ in the topos $\mathcal{S}(G,X)$. We denote these groups by*

$$H_G^n(X,\mathcal{A}) := H^n(\mathcal{S}(G,X),\mathcal{A}).$$

PROPOSITION 5.24. *Consider the functor between abelian categories*

$$Ab(\Gamma_0;\overline{Y}) \longrightarrow Ab(B_{W_{k(v)}}^{sm})$$

induced by i_v^*. This functor sends injective objects to α_{v*}-acyclic objects.

PROOF. Let $\overline{v}$ be a point of $\overline{Y}$ lying over v so that $i_v^* = i_{\overline{v}}^*$. Let G be a subgroup of $W_{k(v)}$ and let $\mathcal{F}$ be an abelian étale Γ_0-sheaf on $\overline{Y}$. First, let us prove the following isomorphisms :

$$H_G^q(\overline{v};i_{\overline{v}}^*\mathcal{F}) \simeq H_G^q(Spec(\mathcal{O}_{\overline{Y};\overline{v}}^{sh});\phi^*\mathcal{F}) \tag{69}$$

$$\simeq \varinjlim_U H_G^q(U;\mathcal{F} \mid U) \tag{70}$$

Here, $\phi : Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}}) \to \overline{Y}$ is the strict henselization of the scheme $\overline{Y}$ at $\overline{v}$. By Lemma 5.16, $Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}})$ is also the projective limit of the $W_{k(v)}$-étale neighborhoods U of $\overline{v}$. Hence the groups $H^q_G(U;\mathcal{F} \mid U)$ are well defined.

Consider the morphism of spectral sequences from

$$\underrightarrow{\lim}_U \, [H^p(G; H^q(U;\mathcal{F} \mid U)) \Longrightarrow H^{p+q}_G(U;\mathcal{F})]$$

to

$$H^p(G; H^q(Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}}); \phi^*\mathcal{F})) \Longrightarrow H^{p+q}_G(Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}}); \phi^*\mathcal{F}).$$

It is an isomorphism at the E_2-stage by Lemma 5.22 and by the fact that étale cohomology commutes with projective limits of (affine) schemes. Hence it induces isomorphisms on the abutments and yields (70) (this argument is valid since these spectral sequences lie in the first quadrant).

The canonical morphism

$$H^q(\mathcal{O}^{sh}_{X;\overline{v}}; \phi^*\mathcal{F}) \to H^q(\overline{v}; i^*_{\overline{v}}\mathcal{F})$$

is an isomorphism, for any $q \geq 0$. The same argument as above yields (69) (the proof is easier since the spectral sequences are both trivial).

The spectral sequence

$$H^p(G; H^q(\overline{v}; i^*_{\overline{v}}\mathcal{F})) \Longrightarrow H^{p+q}_G(\overline{v}; i^*_{\overline{v}}\mathcal{F})$$

degenerates and yields the isomorphisms

$$H^n(G; i^*_{\overline{v}}\mathcal{F}) \simeq H^n_G(\overline{v}; i^*_{\overline{v}}\mathcal{F}). \tag{71}$$

Moreover, by Lemma 5.19 and Lemma 5.21, if $\mathcal{F}$ is injective in $Ab(\Gamma_0;\overline{Y})$, so is $\mathcal{F} \mid U$ in the category $Ab(G;U)$, for any G contained in $W_{k(v)}$ and for any $W_{k(v)}$-étale neighborhood U of $\overline{v}$. In this case, $H^q_G(U;\mathcal{F})$ vanishes for $q \geq 1$. Indeed, the group $H^q_G(U;\mathcal{F})$ is defined as $R^q(\Gamma^G_U)(\mathcal{F})$, where $R^q(\Gamma^G_U)$ is the q^{th} right derived functor of the left exact functor Γ^G_U, which sends an equivariant abelian sheaf $\mathcal{F}$ to the group $\mathcal{F}(U)^G$ of G-invariant global sections. Recall that higher right derived functors vanish on injective objects. Hence (70) and (71) show that

$$H^n(G; i^*_{\overline{v}}\mathcal{F}) = 0, \tag{72}$$

for any $n \geq 1$, any $G \subseteq W_{k(v)}$ and injective $\mathcal{F}$.

Now, we want to show that $i^*_{\overline{v}}\mathcal{F}$ is α_{v*}-acyclic. Recall that the morphism

$$\alpha_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

is defined by the morphism of left exact sites

$$\alpha_v^* : (G_{k(v)} - \underline{Ensf}) \longrightarrow (W_{k(v)} - \underline{Ens}),$$

where $(G_{k(v)} - \underline{Ensf})$ and $(W_{k(v)} - \underline{Ens})$ are the categories of finite $G_{k(v)}$-sets and (discrete) $W_{k(v)}$-sets respectively, endowed with their canonical topologies. Let M be a $W_{k(v)}$-module, viewed as an abelian sheaf on $(W_{k(v)} - \underline{Ens})$. The right derived functors of α_{v*} are defined as follows. The sheaf $R^q(\alpha_{v*})(M)$ is the sheafification of the presheaf given by

$$\begin{array}{ccc} G_{k(v)} - \underline{Ensf} & \longrightarrow & \underline{Ab} \\ Z & \longmapsto & H^q(\alpha_v^*(Z); M) \end{array}.$$

Every finite $G_{k(v)}$-set is a finite coproduct of homogeneous spaces $G_{k(v)}/\widehat{G}$, where $\widehat{G}$ is the closure in $G_{k(v)}$ of a subgroup G of $W_{k(v)}$. Moreover, $W_{k(v)}/G$ and $Z := G_{k(v)}/\widehat{G}$ are canonically isomorphic as $W_{k(v)}$-sets. Then, one has

$$H^q(\alpha_v^*(Z); M) := H^q(B^{sm}_{W_{k(v)}}; W_{k(v)}/G; M) = H^q(G; M).$$

Finally, (72) shows that $R^q(\alpha_{v*})(i_v^*\mathcal{F}) = 0$, for any $q \geq 1$ and injective $\mathcal{F}$. □

THEOREM 5.25. *For any closed point v of Y and any $n \geq 0$, there is a canonical isomorphism*

$$u_v^* R^n(\gamma_*) \simeq R^n(\alpha_{v*}) i_v^*.$$

PROOF. By Proposition 5.17, the natural transformation

$$u_v^* \circ \gamma_* \longrightarrow \alpha_{v*} \circ i_v^*$$

is an isomorphism. Therefore we get an isomorphism

$$R^n(u_v^* \circ \gamma_*) \simeq R^n(\alpha_{v*} \circ i_v^*).$$

Since γ_* preserves injective objects and u_v^* is exact, the left hand side is given by

$$R^n(u_v^* \circ \gamma_*) = u_v^* R^n(\gamma_*).$$

Moreover, one has

$$R^n(\alpha_{v*} \circ i_v^*) \simeq R^n(\alpha_{v*}) \circ i_v^*$$

since i_v^* is exact and sends injective objects to α_{v*}-acyclique objects, by Proposition 5.24. □

2.3. The structural morphism.

PROPOSITION 5.26. *There is a commutative diagram of topoi :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & \mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}) \arrow[d, "\widehat{\mathfrak{f}}"'] \\ B^{sm}_{\Gamma_0} \arrow[r, "\alpha"'] & B^{sm}_{\Gamma} \end{tikzcd}$$

PROOF. On the one hand, the structural morphism of schemes $Y \to Spec(k)$ induces a morphism of topoi

$$\widehat{\mathfrak{f}} : \mathcal{S}(\Gamma; \overline{Y}) \simeq \mathcal{S}(Y) \to \mathcal{S}(Spec(k)) \simeq B^{sm}_{\Gamma}.$$

On the other hand, the morphism $\overline{Y} \to Spec(\overline{k})$ is Γ_0-equivariant. Hence, we get a morphism

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}) \to \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{k}) \simeq B^{sm}_{\Gamma_0}.$$

Clearly, the morphisms of topoi $\alpha \circ \mathfrak{f}$ and $\widehat{\mathfrak{f}} \circ \gamma$ are canonically isomorphic.

□

PROPOSITION 5.27. *The composition*

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}) \longrightarrow B^{sm}_{\Gamma_0}$$

is induced by the morphism of discrete groups

$$\begin{array}{ccc} W_{k(v)} & \longrightarrow & \Gamma_0 \\ 1 & \longmapsto & [k(v) : k] \end{array}.$$

PROOF. By definition, the morphism $\mathfrak{f} \circ i_v$ is induced by the Γ_0-equivariant morphism of schemes $\coprod_{[k(v):k]} \overline{k} \simeq \overline{Y}_v \to \overline{Y} \to \overline{k}$, where $\overline{Y}_v = \overline{Y} \times_Y v$. By (60) and (61), the morphism $\mathfrak{f} \circ i_v$ is given by the sequence of morphisms

$$B^{sm}_{W_{k(v)}} \simeq B^{sm}_{\Gamma_0}/_{\Gamma_0/W_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{Y}_v) \to \mathcal{S}(\Gamma_0; \overline{k}) \simeq B^{sm}_{\Gamma_0}.$$

Then, one has the identification

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B^{sm}_{[k(v):k]\mathbb{Z}} \simeq B^{sm}_{\mathbb{Z}}/_{\mathbb{Z}/[k(v):k]\mathbb{Z}} \to B^{sm}_{\mathbb{Z}}.$$

□

3. The flask topos of a function field

Let Y be a smooth projective curve over a finite field k. Let K be the function field of Y and let $\overline{Y}$ be the base change $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$. We denote by $G_k = \Gamma$ and $W_k = \Gamma_0$ the Galois group and the Weil group of k respectively. Recall that the Weil group of the function field K is just the fiber product of topological groups

$$W_K := G_K \times_{G_k} W_k.$$

Let K_v be the completion of K with respect to v, for any valuation v of K. One has an embedding

$$\mathfrak{o}_v : G_{K_v} \longrightarrow G_K.$$

There exists a unique Weil map

$$\theta_v : W_{K_v} \to W_K$$

so that the diagram

$$\begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r, "\theta_v"] \arrow[d, "\alpha_{K_v}"'] & W_K \arrow[d, "\alpha_{v_0}"'] \\ G_{K_v} \arrow[r, "\mathfrak{o}_v"] & G_K \end{tikzcd}$$

is commutative. The Weil group of the residue field $k(v)$ is $W_{k(v)} = W_{K_v}/I_v$, where I_v is the inertia subgroup. We denote by

$$q_v : W_{K_v} \longrightarrow W_{k(v)} \text{ and } \mathfrak{q}_v : G_{K_v} \longrightarrow G_{k(v)}$$

the canonical morphisms.

Here we use small classifying topoi since the Weil group $W_{k(v)}$ of the residue field at v is totally disconnected for any valuation v of K, including the trivial one. Consider the following category $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}$. The objects of $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}$ are of the form $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v \in Y}$, where F_v is an object of $B^{sm}_{W_{k(v)}}$, F_{v_0} is an object of $B^{sm}_{W_K}$ for the generic point, and $f_v : q_v^*(F_v) \to \theta_v^*(F_{v_0})$ is a morphism of $B^{sm}_{W_{K_v}}$. A morphism ϕ from $\mathcal{F} = (F_v; f_v)_{v \in Y}$ to $\mathcal{F}' = (F'_v; f'_v)_{v \in Y}$ is a family of morphisms $\phi_v : F_v \to F'_v$ in $B^{sm}_{W_{k(v)}}$ so that the square

$$\begin{tikzcd} q_v^*(F_v) \arrow[r, "q_v^*(\phi_v)"] \arrow[d, "f_v"'] & q_v^*(F'_v) \arrow[d, "f'_v"'] \\ \theta_v^*(F_{v_0}) \arrow[r, "\theta_v^*(\phi_{v_0})"] & \theta_v^*(F'_{v_0}) \end{tikzcd}$$

is a commutative diagram of $B^{sm}_{W_{K_v}}$. In what follows, F_v (respectively ϕ_v) is called the v-component of the object $\mathcal{F}$ (respectively of the morphism ϕ) of $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}$.

Remark 5.28. *The same arguments as in the number field case show the following results. Arbitrary inductive and finite projective limits exist in the category $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}$ and are computed componentwise. The category $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}$ is a topos. For any point v of Y, one has an embedding*

$$\mathrm{i}_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}.$$

If v is a closed point of Y then i_v is a closed embedding.

3.1. The generic point of the Weil-étale topos.

3.1.1. Recall that the Weil-étale topos of Y is defined as the category $\mathcal{S}(W_k;\overline{Y})$ of W_k-equivariant sheaves on $\overline{Y}$. There is a closed embedding of topoi

$$i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(W_k;\overline{Y}),$$

for any closed point v of Y. Moreover $i_v^*(\mathcal{F})$ is the stalk $\mathcal{F}_{\overline{v}}$ of $\mathcal{F}$ at any point $\overline{v}$ of $\overline{Y}$ lying over v, endowed with its natural action of $W_{k(v)}$.

3.1.2. Let $Spec(K) \to Y$ be the generic point of Y and let

$$Spec(K\overline{k}) = Spec(K) \times_k Spec(\overline{k}) \to Y \times_k Spec(\overline{k}) = \overline{Y}$$

be the induced morphism. The topological group W_K acts on the schemes $Spec(K\overline{k})$ and $\overline{Y}$, via the continuous morphism $u : W_K \to W_k \to G_k$. By Proposition 5.2 we get a morphism of topoi

$$\mathcal{S}(W_K; Spec(K\overline{k})) \longrightarrow \mathcal{S}(W_K;\overline{Y}). \tag{73}$$

Let $\overline{K}/K\overline{k}$ be a separable closure. One easily sees that the morphism $\overline{\eta} : Spec(\overline{K}) \to Spec(K\overline{k})$ induces a morphism of topoi

$$B^{sm}_{W_K} \longrightarrow \mathcal{S}(W_K; Spec(K\overline{k})), \tag{74}$$

since the étale topos of $Spec(\overline{K})$ is the category of sets. By Proposition 5.2, one has a morphism

$$\mathcal{S}(W_K;\overline{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}(W_k;\overline{Y}), \tag{75}$$

since W_K acts on $\overline{Y}$ via the morphism $W_K \to W_k \to G_k$. Composing (74), (73) and (75), we obtain a morphism

$$i_{v_0} : B^{sm}_{W_K} \longrightarrow \mathcal{S}(W_k;\overline{Y}). \tag{76}$$

Note that $i_{v_0}^*(\mathcal{F})$ is the stalk of $\mathcal{F}$ at the geometric point $Spec(\overline{K}) \to \overline{Y}$, endowed with its natural W_K-action, for any $\mathcal{F} \in Ob(\mathcal{S}(W_k;\overline{Y}))$.

3.2. The morphism from the flask topos to the Weil-étale topos. In this subsection, we show that the family of maps

$$i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(W_k;Y)$$

induces a morphism

$$\delta : \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \longrightarrow \mathcal{S}(W_k;\overline{Y}).$$

Let v be a closed point of Y and let $\overline{v}$ be a point of $\overline{Y}$ lying over v. We denote by $Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}})$ the strict henselization of the scheme $\overline{Y}$ at the geometric point $\overline{v} \in \overline{Y}$. The morphism $\mathfrak{o}_v$ induces a specialization map $s : Spec(\overline{K}) \to Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}})$ so that the diagram

$$\begin{tikzcd} Spec(\overline{K}) \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\overline{\eta}"'] & Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}}) \arrow[d, "\mathfrak{i}"] \\ & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

is commutative. The group $W_{K_v} \subseteq G_{K_v} \subseteq G_K$ acts on $Spec(\overline{K})$, $Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}})$ and $\overline{Y}$. Note that $I_v \subseteq W_{K_v}$ acts trivially on $Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}})$ and $\overline{Y}$. Moreover, the morphism s is W_{K_v}-equivariant. In what follows, we consider $\overline{\eta}$, $\mathfrak{i}$ and s as W_{K_v}-equivariant morphisms of schemes. The pull-backs $\overline{\eta}^{\,*}$, $\mathfrak{i}^*$ and s^* are functors between W_{K_v}-equivariant sheaves. The functor i_v^* is as above the pull-back of the canonical morphism $B^{sm}_{W_{k(v)}} \to \mathcal{S}(W_k;\overline{Y})$. Also, q_v^* and θ_v^* are forgetful functors between several categories of equivariant sheaves. Finally, Γ is the global section functor, preserving the equivariant structure.

Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}(W_k;\overline{Y})$. On the one hand, one has the identifications

$$q_v^* \circ i_v^*(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathfrak{i}^*(q_v^*(\mathcal{F}))) \text{ and } \theta_v^* \circ i_{v_0}^*(\mathcal{F}) = \Gamma(\overline{\eta}^{\,*} \circ q_v^*(\mathcal{F})) = \Gamma(s^* \circ \mathfrak{i}^* \circ q_v^*(\mathcal{F})).$$

On the other hand, there is an induced morphism of W_{K_v}-sets

$$f_v : \Gamma(\mathfrak{i}^* \circ q_v^*(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(s^*(\mathfrak{i}^* \circ q_v^*(\mathcal{F}))),$$

since s is W_{K_v}-equivariant. Hence we get a functor

$$\begin{array}{cccc} \delta^* : & \mathcal{S}(W_k;\overline{Y}) & \longrightarrow & \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & (i_v^*\mathcal{F}\,;\, f_v)_{v\in Y} \end{array}.$$

This functor commutes with finite projective limits and arbitrary inductive limits, by Proposition 4.10. Hence δ^* is the pull-back of a morphism of topoi and we get the following result.

PROPOSITION 5.29. *There is a morphism of topoi*

$$\delta : \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \longrightarrow \mathcal{S}(W_k;\overline{Y})$$

so that the diagram

$$\begin{tikzcd} \coprod_{v\in Y} B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "(\mathrm{i}_v)_{v\in Y}"] \arrow[dr, "(i_v)_{v\in Y}"'] & \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \arrow[d, "\delta"] \\ & \mathcal{S}(W_k;\overline{Y}) \end{tikzcd}$$

is commutative.

REMARK 5.30. *There is a canonical equivalence*

$$\mathcal{S}(W_k;\overline{Y}) \simeq \mathcal{S}_{Et;Y} \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{W_k}. \tag{77}$$

The existence of the morphism δ follows immediately from this isomorphism of topoi.

REMARK 5.31. *On the one hand, the spectral sequence*

$$H^p(W_k; H^q(\overline{Y}; \mathcal{F})) \Rightarrow H_W^{p+q}(Y; \mathcal{F}),$$

shows that the Weil-étale topos is strongly compact, since $H^p(W_k; -)$ *and* $H^q(\overline{Y}; -)$ *commute with filtered inductive limits. On the other hand the topos* $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}$ *is not strongly compact. Therefore the map* $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \to \mathcal{S}(W_k; \overline{Y})$ *is not an isomorphism.*

REMARK 5.32. *It follows from (77) that* $\gamma : \mathcal{S}_{W;Y} \to \mathcal{S}_{Et;Y}$ *is tidy. The étale topos* $\mathcal{S}_{Et;Y}$ *is coherent hence* $\mathcal{S}_{Et;Y} \to \underline{Set}$ *is tidy (see* **[45]** *III.1.1.(1)). By (***[45]** *III.2.1), the unique morphism* $\mathcal{S}_{W;Y} \to \underline{Set}$ *is tidy. In other words, the Weil-étale topos is strongly compact.*

3.3. Some commutative diagrams associated to the Weil-étale topos.

3.3.1. *The morphism from the flask topos to the étale topos.* This morphism is defined as in the number field case. Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}_{Et}(Y) \simeq \mathcal{S}(G_k; \overline{Y})$. The specialization map $s : Spec(\overline{K}) \to Spec(\mathcal{O}^{sh}_{\overline{Y};\overline{v}})$ induces a co-specialization morphism

$$f_v : \mathcal{F}_{\overline{v}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{\eta}}, \tag{78}$$

where $\mathcal{F}_{\overline{v}}$ (respectively $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$) is the stalk of $\mathcal{F}$ at the geometric point $\overline{v} : Spec(\overline{k(v)}) \to \overline{Y}$ (respectively $\overline{\eta} : Spec(\overline{K}) \to \overline{Y}$). The map (78) is G_{K_v}-equivariant. More precisely, one has $u_v^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\overline{v}} \in Ob(B^{sm}_{G_{k(v)}})$, $u_{v_0}^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\overline{\eta}} \in Ob(B^{sm}_{G_K})$ and

$$f_v : \mathfrak{q}_v^*(u_v^*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathfrak{o}_v^*(u_{v_0}^*\mathcal{F})$$

is a map of $B^{sm}_{G_{K_v}}$. Here, $u_v : B^{sm}_{G_{k(v)}} \to \mathcal{S}_{Et}(Y)$ is the morphism induced by the morphism of schemes $Spec(k(v)) \to Y$, for any point v of Y. The morphism of topoi $\mathfrak{q}_v : B^{sm}_{G_{K_v}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}}$ (respectively $\mathfrak{o}_v : B^{sm}_{G_{K_v}} \to B^{sm}_{G_K}$) is induced by the morphism of groups $G_{K_v} \to G_{k(v)}$ (respectively $G_{K_v} \to G_K$). Moreover, the squares

$$\begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r, "q_v"] \arrow[d, "\alpha_{K_v}"'] & W_{k(v)} \arrow[d, "\alpha_v"] \\ G_{K_v} \arrow[r, "\mathfrak{q}_v"] & G_{k(v)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r, "\theta_v"] \arrow[d, "\alpha_{K_v}"'] & W_K \arrow[d, "\alpha_{v_0}"] \\ G_{K_v} \arrow[r, "\mathfrak{o}_v"] & G_K \end{tikzcd}$$

are both commutative. Hence there is a morphism

$$\alpha^*_{K_v}(f_v) : q_v^*(\alpha_v^* \circ u_v^*\mathcal{F}) = \alpha^*_{K_v} \circ \mathfrak{q}_v^*(u_v^*\mathcal{F}) \longrightarrow \alpha^*_{K_v} \circ \mathfrak{o}_v^*(u_{v_0}^*\mathcal{F}) = \theta_v^*(\alpha^*_{v_0} \circ u^*_{v_0}\mathcal{F})$$

in the category $B^{sm}_{W_{K_v}}$. We get an object $\zeta^*(\mathcal{F}) := (\alpha_v^* \circ u_v^*\mathcal{F}\,;\, \alpha^*_{K_v} f_v)_{v\in Y}$ of $\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y}$. This gives rise to a functor

$$\begin{array}{rccc} \zeta^* : & \mathcal{S}_{Et}(Y) & \longrightarrow & \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \\ & \mathcal{F} & \longmapsto & (\alpha_v^* \circ u_v^*\mathcal{F}\,;\, \alpha^*_{K_v} f_v)_{v\in Y} \end{array}$$

which commutes with arbitrary inductive limits and finite projective limits. Hence, ζ^* is the pull-back of a morphism of topoi

$$\zeta : \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y).$$

3.3.2. *Commutative diagrams.* Recall that the morphism

$$\pi = (\pi^*; \pi_*^{G_k}) : \mathcal{S}(G_k; \overline{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y)$$

is an equivalence of topoi. Here, π^* is induced by the usual pull-back along the projection $\overline{Y} \to Y$.

PROPOSITION 5.33. *For any point v of Y, the diagram of topoi*

$$\begin{tikzcd}
B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\mathrm{i}_v"'] & B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\
\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Id"'] & \mathcal{S}(W_k; \overline{Y}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}(G_k; \overline{Y}) \arrow[d, "(\pi^*; \pi_*^{G_k})"] \\
\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \arrow[rr, "\zeta"] & & \mathcal{S}_{Et}(Y)
\end{tikzcd}$$

is commutative. Moreover, if v is a closed point of Y then the top squares are both pull-backs .

PROOF. The commutativity of this diagram follows from the definition of the morphisms involved. The right hand side square on the top and the total square on the top are both pull-backs. Hence the left hand side square on the top is also a pull-back. □

For any valuation v of the function field K, there is a canonical morphism of groups $l_v : W_{k(v)} \to W_k = \mathbb{Z}$ sending 1 to $[k(v) : k]$. Here, this morphism is induced by the extension $k(v)/k$. As in the number field case, one defines a morphism

$$\mathrm{f} : \mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \longrightarrow B^{sm}_{W_k}$$

such that $\mathrm{f} \circ i_v$ is canonically isomorphic to $B^{sm}_{l_v} : B^{sm}_{W_{k(v)}} \to B^{sm}_{W_k}$, for any closed point v of Y.

PROPOSITION 5.34. *The diagram*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}^{sm}_{W;Y} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{f}"'] & \mathcal{S}(W_k; \overline{Y}) \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\
B^{sm}_{W_k} \arrow[r, "Id"] & B^{sm}_{W_k}
\end{tikzcd}$$

is commutative.

3.4. Predictions in the number field case. Let K be a number field and $\overline{Y}$ be the set of valuations of K. We assume here that the Weil-étale topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ associated to K exists. Let $\gamma : \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \to \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$, $i_v : B_{W_{k(v)}} \to \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ for $v \in \overline{Y}$ and $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \to B_{\mathbb{R}}$ be the canonical morphisms. The previous subsection suggests that there exists a morphism

$$\delta : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$$

so that the following diagram is commutative, for any closed point of $\overline{Y}$.

$$\begin{tikzcd}
B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\mathrm{i}_v"'] & B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\
\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Id"'] & \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \arrow[d, "Id"] \\
\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[rr, "\zeta"] & & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}
\end{tikzcd}$$

The top squares should be both pull-backs if v is a closed point of Y and the square

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \arrow[d, "\mathfrak{f}"] \\
B_{\mathbb{R}} \arrow[r, "Id"] & B_{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

should be commutative.

4. The Beck-Chevalley condition and the Lichtenbaum Weil-étale site

Let $C \subset C'$ be a full subcategory. Then C is said to be a left exact subcategory of C' if the inclusion functor $C \hookrightarrow C'$ commutes with finite projective limits.

4.1. Motivation. Let $T_{\overline{Y}}$ be a left exact full subcategory of $T_{W;\overline{Y}}$ endowed with the topology $\mathcal{J}$ induced by the local section topology $\mathcal{J}_{ls}$ on $T_{W;\overline{Y}}$. Let us assume that $T_{\overline{Y}}$ contains the full subcategory $Et_{\overline{Y}}$ of $T_{W;\overline{Y}}$. Denote by $\widetilde{(T_{\overline{Y}};\mathcal{J})}$ the topos of sheaves of sets on the site $(T_{\overline{Y}};\mathcal{J})$. The inclusion functors $Et_{\overline{Y}} \hookrightarrow T_{\overline{Y}} \hookrightarrow T_{W;\overline{Y}}$ induce a commutative diagram of left exact sites

$$\begin{tikzcd}
(T_{W;\overline{Y}} : \mathcal{J}_{ls}) & (T_{\overline{Y}};\mathcal{J}) \arrow[l, "\delta^*"'] \\
& (Et_{\overline{Y}};\mathcal{J}_{et}) \arrow[u, "\gamma^*"'] \arrow[ul, "\zeta^*"]
\end{tikzcd}$$

For any point v of $\overline{Y}$ we define the functor

$$i_v^* := \mathrm{i}_v^* \circ \delta^* : T_{\overline{Y}} \to T_{W;\overline{Y}} \to T_{W_{k(v)}}.$$

We get a commutative diagram of left exact sites

$$\begin{tikzcd}
(T^f_{G_{k(v)}};\mathcal{J}_{can}) \arrow[r, "\alpha_v^*"] & (T_{W_{k(v)}};\mathcal{J}_{ls}) \arrow[r, "Id"] & (T_{W_{k(v)}};\mathcal{J}_{ls}) \\
(Et_{\overline{Y}};\mathcal{J}_{et}) \arrow[r, "\gamma^*"] \arrow[u, "u_v^*"] & (T_{\overline{Y}};\mathcal{J}) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[u, "i_v^*"] & (T_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{ls}) \arrow[u, "\mathrm{i}_v^*"]
\end{tikzcd}$$

hence a commutative diagram of topoi

$$\begin{tikzcd}
B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "i_v"] & B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\
\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Id"] & \widetilde{(T_{\overline{Y}};\mathcal{J})} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \arrow[d, "Id"] \\
\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[rr, "\zeta"] & & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}
\end{tikzcd}$$

Thus $(T_{\overline{Y}};\mathcal{J})$ seems to be a natural candidate for a site for the Weil-étale topos.

4.2. The Beck-Chevalley topology. We say that the site $(T_{\overline{Y}};\mathcal{J})$ satisfies *the Beck-Chevalley condition for closed points* if the natural transformation

$$b_v : u_v^* \circ \gamma_* \longrightarrow \alpha_{v*} \circ i_v^* \tag{79}$$

is an isomorphism, for any closed point v of $\overline{Y}$. Here $u_v^*\circ\gamma_*$ and $\alpha_{v*}\circ i_v^*$ are functors from $\widetilde{(T_{\overline{Y}};\mathcal{J})}$ to $B^{sm}_{G_{k(v)}}$. In what follows, the "geometric point" $\overline{v}\to\overline{Y}$ denotes the map $(Spec(\overline{k(v)});\emptyset)\to\overline{Y}$ for v ultrametric and the map $(\emptyset;v)\to\overline{Y}$ for v archimedean.

PROPOSITION 5.35. *Assume that $(T_{\overline{Y}};\mathcal{J})$ satisfies the Beck-Chevalley condition for closed points. Let $\mathcal{X}=(X_v;f_v)$ be an object of $T_{\overline{Y}}$. Then for any closed point v of $\overline{Y}$, one has*

$$\varinjlim Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\mathcal{X}) = \varinjlim\,(X_v^H) \tag{80}$$

as $G_{k(v)}$-sets. Here the limit on the left hand side is taken over the étale neighborhoods $\overline{U}$ of the geometric point $\overline{v}\to\overline{Y}$ while the limit on the right hand side is taken over the open subgroups of finite index H of $W_{k(v)}$.

Note that for any archimedean valuation v, the map (80) is just a bijection of sets

$$\varinjlim Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\mathcal{X}) = Hom_{\mathbb{R}}(*;X_v) = X_v^{\mathbb{R}}.$$

PROOF. The topology $\mathcal{J}$ on $T_{\overline{Y}}$ is subcanonical hence the presheaf represented by an object $\mathcal{X}=(X_v;f_v)$ of $T_{\overline{Y}}$ is a sheaf $\widetilde{\mathcal{X}}$. On the one hand, one has

$$u_v^*\circ\gamma_*(\widetilde{\mathcal{X}}) = \varinjlim \widetilde{\mathcal{X}}(\zeta^*(\overline{U})) = \varinjlim Hom_{T_{\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\mathcal{X}) = \varinjlim Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\mathcal{X}),$$

where $\overline{U}$ runs over the étale neighborhoods of the geometric point $\overline{v}\to\overline{Y}$. On the other hand, one has

$$\alpha_{v*}\circ i_v^*(\widetilde{\mathcal{X}}) = \alpha_{v*}(\widetilde{X_v}) = \varinjlim\,(X_v^H).$$

Hence the proposition follows from (79).

Let us give an explicit description of the map $l_v(\widetilde{\mathcal{X}})$. Any étale neighborhood $\overline{U}$ of the geometric point $\overline{v}\to\overline{Y}$ gives rise to an object $\zeta^*(\overline{U})$ of $T_{W;\overline{Y}}$ so that $(U_v;u_v)$ is a pointed (hence nonempty) topological space. Given such a pointed object, one has a map

$$\begin{array}{ccc} Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\mathcal{X}) & \longrightarrow & \varinjlim\,(X_v)^H \\ f:=(f_w)_{w\in\overline{Y}} & \longmapsto & f_v(u_v) \end{array},$$

where H runs through the open subgroups of finite index of $W_{k(v)}$. By the universal property of the inductive limit, we get a canonical map

$$b_v(\widetilde{\mathcal{X}}) : \underrightarrow{lim}\ Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\mathcal{X}) \longrightarrow \underrightarrow{lim}\ (X_v)^H, \tag{81}$$

where $\overline{U}$ runs through the étale neighborhoods $\overline{U}$ of the geometric point $\overline{v} \to \overline{Y}$.

□

DEFINITION 5.36. *The* Beck-Chevalley site *is defined as follows. Let $T^{bc}_{W;\overline{Y}}$ be the full subcategory of $T_{W;\overline{Y}}$ defined by the objects $\mathcal{X}$ of $T_{W;\overline{Y}}$ such that $b_v(\widetilde{\mathcal{X}})$ is an isomorphism for any closed point v of $\overline{Y}$. The topology $\mathcal{J}_{bc}$ on the category $T^{bc}_{W;\overline{Y}}$ is induced by the local section topology $\mathcal{J}_{ls}$ on $T_{W;\overline{Y}}$ via the inclusion functor $T^{bc}_{W;\overline{Y}} \to T_{W;\overline{Y}}$.*

REMARK 5.37. *More generally, consider the full subcategory $\mathfrak{F}^{bc}_{W;\overline{Y}}$ of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ defined by the objects $\mathcal{F}$ of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ such that the $b_v(\mathcal{F})$ defined in (81) is an isomorphism for any closed point v of $\overline{Y}$. The category $\mathfrak{F}^{bc}_{W;\overline{Y}}$ is endowed with the topology induced by the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$.*

PROPOSITION 5.38. *The Beck-Chevalley site $(T^{bc}_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{bc})$ is left exact.*

PROOF. By Proposition 4.49, the topology $\mathcal{J}_{bc}$ is induced by the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$, via the fully faithful functor

$$T^{bc}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow T_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}.$$

It follows that $\mathcal{J}_{bc}$ is sub-canonical. The functors u_v^*, γ_*, α_{v*} and i_v^* are all left exact. The Beck-Chevalley condition for closed points is stable under finite projective limits hence the category $T^{bc}_{W;\overline{Y}}$ is left exact. □

PROPOSITION 5.39. *The local section site $(T_{W,\overline{Y}};\mathcal{J}_{ls})$ does not satisfy the Beck-Chevalley condition for closed points.*

PROOF. Consider the object $\mathcal{Z} := (Z_v \times^{W_{K_v}} W_K; Z_v; \emptyset; ...)$, where Z_v is not empty with trivial $W_{k(v)}$-action. Then $\underrightarrow{lim}\ Hom_{T_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U});\mathcal{Z}) = \emptyset$, and $\underrightarrow{lim}\ (Z_v^H) = Z_v$ is not empty. The corollary follows from Proposition 5.35. □

4.3. Conclusion. There is a morphism of left exact sites

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{f}^*: & (T_{\mathbb{R}},\mathcal{J}_{ls}) & \longrightarrow & (T_{W;\overline{Y}},\mathcal{J}_{ls}) \\ & X & \longmapsto & ((X_v = X)_{v\in\overline{Y}};\ (Id_X)) \end{array},$$

where $W_{k(v)}$ acts on $X_v = X$ under the canonical morphism $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$, for any $v \in \overline{Y}$. This morphism of left exact sites induces the morphism of topoi f of Proposition 4.23. However, this morphism of sites does not factor through the morphism

$$(T^{bc}_{W;\overline{Y}},\mathcal{J}_{bc}) \longrightarrow (T_{W;\overline{Y}},\mathcal{J}_{ls}).$$

More generally, let C be a left exact full subcategory of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ endowed with the topology $\mathcal{J}$ induced by the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. Assume that C contains the full sub-category $Et_{\overline{Y}} \subseteq T_{W;\overline{Y}} \subseteq \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. There are canonical morphisms

$$\delta : \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \widetilde{(C;\mathcal{J})} \text{ and } \gamma : \widetilde{(C;\mathcal{J})} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$$

such that $\zeta = \gamma \circ \delta$. For any $v \in \overline{Y}$, one has

$$i_v := \delta \circ \mathrm{i}_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \longrightarrow \widetilde{(C;\mathcal{J})}.$$

Assume that there is a morphism $f : \widetilde{(C;\mathcal{J})} \to B_{\mathbb{R}}$ so that the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{f}"'] & \widetilde{(C;\mathcal{J})} \arrow[d, "f"] \\ B_{\mathbb{R}} \arrow[r, "Id"] & B_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

is commutative. In this situation, one has the following result.

THEOREM 5.40. *The topos $\widetilde{(C;\mathcal{J})}$ does not satisfy the Beck-Chevalley condition for closed points.*

PROOF. Let v be an ultrametric valuation. The homogeneous space $\mathbb{R}/W_{k(v)}$ is an object of $T_{\mathbb{R}}$ hence represents an object $E_v := \widetilde{\mathbb{R}/W_{k(v)}}$ of $B_{\mathbb{R}}$.

On the one hand, one has

$$i_v^* \circ f^*(E_v) \simeq \mathrm{i}_v^* \circ \delta^* \circ f^*(E_v) \simeq \mathrm{i}_v^* \circ \mathrm{f}^*(E_v) \simeq B_{l_v}^*(E_v).$$

Therefore, $i_v^* \circ f^*(E_v)$ is the object of $B_{W_{k(v)}}$ represented by the topological space $\mathbb{R}/W_{k(v)}$ with trivial $W_{k(v)}$-action. One easily sees that $\alpha_{v*}(B_{l_v}^*(E_v))$ is the discrete set $\mathbb{R}/W_{k(v)}$ with trivial $G_{k(v)}$-action. In particular $\alpha_{v*} \circ i_v^*(f^*(E_v))$ is not empty.

On the other hand, one has

$$u_v^* \circ \gamma_*(f^*(E_v)) = \underrightarrow{lim}\ f^*(E_v)(\gamma^*(\overline{U})) = \underrightarrow{lim}\ Hom_{\widetilde{(C;\mathcal{J})}}(\gamma^*(\overline{U}); f^*(E_v)) \tag{82}$$

where $\overline{U}$ runs over the étale neighborhoods of the geometric point $\overline{v} \to \overline{Y}$. Let $\overline{U}$ be an étale neighborhood of $\overline{v} \to \overline{Y}$. The functor δ^* induces a map

$$Hom_{\widetilde{(C;\mathcal{J})}}(\gamma^*(\overline{U}); f^*(E_v)) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\delta^*\gamma^*(\overline{U}); \delta^* f^*(E_v)) = Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U}); \mathrm{f}^*(E_v)). \tag{83}$$

Moreover, the functor $\mathrm{i}_{v_0}^*$ induces a map

$$Hom_{\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}}(\zeta^*(\overline{U}); \mathrm{f}^*(E_v)) \longrightarrow Hom_{B_{W_K}}(\widetilde{U_{v_0}}; l_{v_0}^*(E_v)). \tag{84}$$

The canonical section $s : \mathbb{R} \to W_K$ of the morphism of topological groups $l_{v_0} : W_K \to \mathbb{R}$ yields a map

$$Hom_{B_{W_K}}(\widetilde{U_{v_0}}; l_{v_0}^*(E_v)) \longrightarrow Hom_{B_{\mathbb{R}}}(s^*\widetilde{U_{v_0}}; s^* l_{v_0}^*(E_v)) = Hom_{B_{\mathbb{R}}}(s^*\widetilde{U_{v_0}}; E_v), \tag{85}$$

since $l_{v_0} \circ s = Id_{\mathbb{R}}$. Finally, one has

$$Hom_{B_{\mathbb{R}}}(s^*\widetilde{U_{v_0}}; E_v) = Hom_{T_{\mathbb{R}}}(U_{v_0}; \mathbb{R}/W_{k(v)}), \tag{86}$$

since the Yoneda embedding $T_{\mathbb{R}} \to B_{\mathbb{R}}$ is fully faithful. The connected topological group $\mathbb{R}$ acts trivially on the finite set $U_{v_0} \neq \emptyset$ and $\mathbb{R}/W_{k(v)}$ has no fixed point. It follows that the set $Hom_{T_{\mathbb{R}}}(U_{v_0}; \mathbb{R}/W_{k(v)})$ is empty. Composing (83), (84), (85) and (86), we get a morphism

$$Hom_{\widetilde{(C;\mathcal{J})}}(\zeta^*(\overline{U}); \mathrm{f}^*(E_v)) \longrightarrow Hom_{T_{\mathbb{R}}}(U_{v_0}; \mathbb{R}/W_{k(v)}).$$

This shows that the set $Hom_{\widetilde{(C;\mathcal{J})}}(\gamma^*(\overline{U});f^*(E_v))$ is empty. By (82), $u_v^*\circ\gamma_*(f^*(E_v))$ is the initial object of $B^{sm}_{G_{k(v)}}$ and the canonical map

$$u_v^*\circ\gamma_*(f^*(E_v))\longrightarrow\alpha_{v*}\circ i_v^*(f^*(E_v))$$

is not an isomorphism.

□

The description of the essential image of the functor $\zeta^*:Et_{\overline{Y}}\to T_{W;\overline{Y}}$ in Proposition 4.62 suggests the following definition. Let $T^{fl}_{W;\overline{Y}}$ be the full subcategory of $T_{W;\overline{Y}}$ defined by the objects $\mathcal{X}=(X_v;f_v)$ of $T_{W;\overline{Y}}$ so that f_v is an homeomorphism for almost all valuations and a monomorphism for all valuations. Let $\mathcal{J}_{fl}$ be the topology on $T^{fl}_{W;\overline{Y}}$ induced by the local section topology on $T_{W;\overline{Y}}$. Then $T^{fl}_{W;\overline{Y}}$ is a left exact full sub-category $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$ and the topology $\mathcal{J}_{fl}$ is induced by the canonical topology of $\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}$. There is a morphism of topoi $\delta:\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}\to\widetilde{(T^{fl}_{W;\overline{Y}};\mathcal{J}_{fl})}$ and the morphism of left exact sites $\mathrm{f}^*:(T_{\mathbb{R}},\mathcal{J}_{ls})\to(T_{W;\overline{Y}},\mathcal{J}_{ls})$ factors through $(T^{fl}_{W;\overline{Y}},\mathcal{J}_{fl})$. We get a morphism of topoi $f:\widetilde{(T^{fl}_{W;\overline{Y}},\mathcal{J}_{fl})}\to B_{\mathbb{R}}$ such that $f\circ\gamma$ is canonically isomorphic to $\mathrm{f}:\mathfrak{F}_{W;\overline{Y}}\to B_{\mathbb{R}}$. Hence the next corollary follows from Theorem 5.40.

COROLLARY 5.41. *The site $(T^{fl}_{W,\overline{Y}};\mathcal{J}_{fl})$ does not satisfy the Beck-Chevalley condition for closed points.*

CHAPITRE 6

Des axiomes pour un topos de Weil en caractéristique zéro

L'étude du topos Weil-étale d'un corps de fonctions, dans la deuxième partie du chapitre précédent, suggère l'existence d'un topos associé à l'ensemble des valuations $\overline{Y}$ d'un corps de nombres K satisfaisant certaines propriétés topologiques. Dans la section 2 de ce chapitre, nous précisons la liste de ces axiomes attendus. Un topos de Weil pour K, dont l'existence pas plus que l'unicité n'est prouvée, est un topos jouissant de l'ensemble de ces propriétés. Un tel topos est en particulier muni d'un morphisme canonique connexe

$$\gamma : \mathcal{S}_{W,\overline{Y}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{Y}},$$

dans le topos étale d'Artin-Verdier.

Au cours de la partie 4, nous calculons la cohomologie de ce topos conjectural, grâce à la condition de Beck-Chevalley. Il s'agit en fait de la cohomologie Weil-étale conjecturale. Plus précisément, les groupes de cohomologie de ce topos à coefficients entiers et réels seraient ceux calculés par Lichtenbaum en degrés $i \leq 3$, et s'annuleraient en degrés supérieurs à trois. De plus, la cohomologie des faisceaux de torsion s'identifierait à leur cohomologie étale. Tous ces calculs sont faits en se ramenant, grâce aux bonnes propriétés du morphisme γ, à la cohomologie étale d'Artin-Verdier.

Dans la cinquième partie, nous montrons que l'existence de ce topos permettrait de prouver la conjecture 1 pour les anneaux d'entiers de corps de nombres. En effet, l'ordre d'annulation ainsi que la valeur spéciale de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_K(s)$ en $s = 0$ s'expriment en termes des caractéristiques d'Euler définies par S. Lichtenbaum.

La cohérence des calculs et l'analogie entre corps de fonctions et corps de nombres laissent supposer l'existence d'un tel topos. Cependant, nous donnons dans la sixième section certains arguments montrant, de manière non rigoureuse, que ce topos de Weil ne peut exister en caractéristique zéro.

1. Preliminaries

1.1. Sub-topoi. A *sub-topos of a topos* $\mathcal{S}$ is a strictly full subcategory $\mathcal{E}$ of $\mathcal{S}$ such that the inclusion functor $\mathcal{E} \to \mathcal{S}$ has a left adjoint which is left exact. This implies that $\mathcal{E}$ is already a topos. Indeed, assume that $\mathcal{S}$ is defined as $\widetilde{(\mathcal{C};T)}$. It follows from ([**24**] II.5.5) that there is a 1-1 correspondence between the set of sub-topoi of $\mathcal{S}$ and the set of topologies T' on $\mathcal{C}$ finer than T. This correspondence associates the subcategory $i_{T'} : \widetilde{(\mathcal{C};T')} \longrightarrow \widetilde{(\mathcal{C};T)} = \mathcal{S}$ to any T' finer than T. It does define a sub-topos since the inclusion $i_{T'}$ has a left exact left adjoint induced by the associated sheaf functor. Hence, a sub-topos of $\widetilde{(\mathcal{C};T)}$ is of the form $\widetilde{(\mathcal{C};T')}$, and so, is a topos. Moreover, let $(\mathcal{E}_i)_{i\in I} = \widetilde{(\mathcal{C};T_i)}_{i\in I}$ be a family of sub-topoi of $\mathcal{S}$. It is shown in ([**24**] IV.9.1.d) that one has

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i = \widetilde{(\mathcal{C};\overline{T})},$$

where $\overline{T}$ is the coarsest topology on $\mathcal{C}$ finer than each T_i. Hence, $\bigcap_{i\in I}\mathcal{E}_i$ is a sub-topos which is the greatest lower bound of the family $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$.

Let $f : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}$ be a morphism. The *image* $Im(f)$ *of the morphism* f is defined as the greatest lower bound of the family of sub-topoi in $\mathcal{S}$ containing the essential image of the functor f_*. Then, $Im(f)$ is the smallest sub-topos of $\mathcal{S}$ so that f factors through $i : Im(f) \to \mathcal{S}$. There is a factorization

$$f \simeq i \circ \widetilde{f} : \mathcal{S}' \to Im(f) \to \mathcal{S},$$

unique up to isomorphism. Here, i is an *embedding* (e.g i_* is fully faithful) and $\widetilde{f}$ is *surjective* (e.g. $\widetilde{f}^*$ is faithful). The morphism f is an embedding if and only if $\widetilde{f}$ is an equivalence, and f is surjective if and only if $Im(f) = \mathcal{S}$ (see **[24]** IV.9.1.7.2).

Given a sub-topoi $\mathcal{E}$ of $\mathcal{S}$, the inverse image $f^{-1}(\mathcal{E})$ of $\mathcal{E}$ under f is defined as the image of the canonical morphism (see **[24]** IV.9.1.6.c)

$$\mathcal{E} \times^2_{\mathcal{S}} \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'.$$

One easily sees that this morphism is an embedding. Hence the induced morphism

$$\mathcal{E} \times^2_{\mathcal{S}} \mathcal{S}' \longrightarrow f^{-1}(\mathcal{E})$$

is an equivalence. For $\mathcal{E}$ a sub-topos of $\mathcal{S}$, we set $\mathcal{E} \times^2_{\mathcal{S}} \mathcal{S}' = f^{-1}(\mathcal{E})$.

Let $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}'$ be two sub-topoi of $\mathcal{S}$. In this case, the intersection

$$\mathcal{E} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{E}' := \mathcal{E} \cap \mathcal{E}'.$$

does define a fiber product.

1.2. The final topos and the initial topos. The initial topos $Top(\emptyset)$ is defined as the category of sheaves on the empty topological space $\emptyset$. Note that a presheaf $\mathcal{P}$ on $\emptyset$ is a sheaf if and only $\mathcal{P}(\emptyset) = \{*\}$. Hence $Top(\emptyset)$ is the category with one object and one morphism (e.g. the final category). Suppose that there exists a morphism $f : \mathcal{E} \to Top(\emptyset)$. Since f^* preserves inductive limits and finite projective limits, it preserves initial and final objects. Hence one has

$$\emptyset_{\mathcal{E}} = e_{\mathcal{E}} \in Ob(\mathcal{E}),$$

where $\emptyset_{\mathcal{E}}$ and $e_{\mathcal{E}}$ are the initial and the final objects of $\mathcal{E}$. This implies that $\mathcal{E} = Top(\emptyset)$.

For any topos $\mathcal{S}$, the unique functor $\mathcal{S} \to Top(\emptyset)$ commutes obviously with inductive limits. Hence it has a right adjoint which is in fact determined by the choice of a final object of $\mathcal{S}$. Hence the category $\underline{Homtop}(Top(\emptyset); \mathcal{S})$ is isomorphic to the full subcategory of $\mathcal{S}$ constituted by the final objects. For this reason, the empty topos is also called the initial topos.

1.3. Torsion sheaves of a topos. Let $\mathcal{A}$ be an abelian object of a topos $\mathcal{S}$ and let n be a positive integer. Consider the morphism

$$m_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \times ... \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}.$$

The first arrow is the diagonal embedding. The second one is given by the abelian structure of $\mathcal{A}$. This morphism has a kernel ${}_n\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}$ in the abelian category $Ab(\mathcal{S})$. Moreover, one has $m_{n_1} \circ m_{n_2} = m_{n_2} \circ m_{n_2} = m_{(n_1 \times n_2)}$ hence we get an inductive system of sheaves $\{{}_n\mathcal{A};\, n \in \mathbb{N}\}$.

DEFINITION 6.1. *An abelian object* $\mathcal{A}$ *of* $\mathcal{S}$ *is* torsion *if and only if the canonical map*

$$\varinjlim {}_n\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

is an isomorphism.

Recall that any topos is equivalent to the category of sheaves on a (left exact) site.

PROPOSITION 6.2. *An abelian object of $\mathcal{S}$ is torsion if and only if it is the associated sheaf of a torsion abelian pre-sheaf.*

PROOF. Let $\mathcal{S}$ be the topos of sheaves on a left exact site $(\mathcal{C};\mathcal{J})$. Let P be a torsion pre-sheaf on $\mathcal{C}$ so that $F=a(P)$, where a is the associated sheaf functor. Since a is left exact, one has the exact sequences

$$0\rightarrow_n P\rightarrow P\rightarrow P \text{ and } 0\rightarrow a(_nP)\rightarrow F\rightarrow F.$$

Hence, $a(_nP)={_nF}$. On the other hand, one has the isomorphism $\underrightarrow{lim}\ _nP\simeq P$ in the category of pre-sheaves on $\mathcal{C}$. We get

$$\underrightarrow{lim}\ a(_nP)=\underrightarrow{lim}\ _nF\simeq a(P)=F,$$

because a commutes with inductive limits. Hence, an abelian sheaf is torsion if and only if it is the associated sheaf of a torsion abelian pre-sheaf. □

COROLLARY 6.3. *The pull-back of a torsion abelian sheaf is torsion.*

PROOF. Let $f:\mathcal{S}'\rightarrow\mathcal{S}$ be a morphism of topoi induced by a morphism of left exact sites $f^*:(\mathcal{C};\mathcal{J})\rightarrow(\mathcal{C}';\mathcal{J}')$. Let F be a torsion sheaf of $\mathcal{S}$. One has $f^*(F)=a(f^p(F))$, where $(f^p;f_p):\widehat{C'}\rightarrow\widehat{C}$ is the morphism of topoi of presheaves induced by the functor f^*. The presheaf $f^p(F)$ is torsion, since an inductive limit of torsion abelian groups is torsion. Therefore $f^*(F)=a(f^p(F))$ is torsion. □

1.4. Vector space coefficient. A ringed topos $(\mathcal{S};\mathcal{R})$ is a topos $\mathcal{S}$ endowed with a (commutative) ring object $\mathcal{R}$. A morphism of ringed topoi $u=(m;\Theta):(\mathcal{S};\mathcal{R})\rightarrow(\mathcal{S}';\mathcal{R}')$ is given by a morphism of topoi $m:\mathcal{S}\rightarrow\mathcal{S}'$ endowed with a morphism of rings $\Theta:m^*\mathcal{R}'\rightarrow\mathcal{R}$. We denote by $Ab(\mathcal{S};\mathcal{R})$ the category of sheaves of $\mathcal{R}$-modules. Note that for the sheaf of rings associated to the discrete ring $\mathbb{Z}$, one has $Ab(\mathcal{S};\mathbb{Z})\simeq Ab(\mathcal{S})$. For any $q\geq 0$, the functor

$$R^q(u_*):Ab(\mathcal{S};\mathcal{R})\longrightarrow Ab(\mathcal{S}';\mathcal{R}')$$

commutes with restrictions of the base ring (see **[24]** V Prop. 5.1).

In what follows, $(S_{W;\overline{Y}};\mathbb{R})$, $(S_{Et;\overline{Y}};\mathbb{R})$, $(B_{W_{k(v)}};\mathbb{R})$, $(B^{sm}_{G_{k(v)}};\mathbb{R})$ and $(B_{\mathbb{R}};\mathbb{R})$ are all ringed topoi, where $\mathbb{R}$ denotes the constant ring object associated to the discrete ring $\mathbb{R}$. The morphism γ induces a morphism of ringed topoi

$$(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}};\mathbb{R})\longrightarrow(\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}};\mathbb{R}),$$

since $\gamma^*\mathbb{R}=\mathbb{R}$. Also, i_v, u_v and $\mathfrak{f}$ induce morphisms of ringed topoi.

1.5. The base-change over the residue fields. Let K be a finite field or a local field. We define the Weil topos of $Spec(K)$ as the big classifying topos B_{W_K}. In the number field case, it is necessary to use big classifying topoi, since the Weil group of an archimedean local field is not totally disconnected. The étale topos of $Spec(K)$ is $B^{sm}_{G_K}=G_K-\underline{Set}$. More precisely, the choice of a separable closure of K defines an equivalence from the étale site of $Spec(K)$ to the site $T^f_{G_K}$ of finite G_K-sets.

DEFINITION 6.4. *Consider the functor $T^f_{G_K}\rightarrow T_{W_K}$ as a morphism of left exact sites. The base change α_* is the direct image of the induced morphism of topos*

$$\alpha:B_{W_K}\rightarrow B^{sm}_{G_K}.$$

In particular, one has a map

$$\alpha_v : B_{W_{k(v)}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

for any valuation v.

1.5.1. *For any ultrametric valuation* v, the morphism α_v is described by the square

$$\begin{array}{ccc} B^{sm}_{W_{k(v)}} & \xrightarrow{\widetilde{\alpha_v}} & B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ \uparrow{\scriptstyle p_v} & & \uparrow \\ B_{W_{k(v)}} & \longrightarrow & B_{G_{k(v)}} \end{array}$$

This diagram of topoi is commutative since the corresponding diagram of sites commutes. One has $\alpha_v = \widetilde{\alpha_v} \circ p$ hence $\alpha_{v*} = \widetilde{\alpha_{v*}} \circ p_{v*}$. The functor p_{v*} is exact and preserves injective objects, since $W_{k(v)} \simeq \mathbb{Z}$ is discrete (see [**16**] Prop. 9.1). Then one has

$$R^q(\alpha_{v*})(\mathcal{A}) \simeq R^q(\widetilde{\alpha_{v*}}) \circ p_{v*}(\mathcal{A})$$

for any abelian object $\mathcal{A}$ of $B_{W_{k(v)}}$.

Let $\widetilde{\mathbb{Z}}$ be the constant abelian object of $B_{W_{k(v)}}$. This sheaf on the site $(T_{W_{k(v)}}; \mathcal{J}_{ls})$ is represented by the discrete space $\mathbb{Z}$ with trivial action (see the proof of Lemma 6.25 below). By [**16**] Proposition 7.1, one has $p_{v*}(\widetilde{\mathbb{Z}}) = \widetilde{\mathbb{Z}}(\{*\})$ with its action of $Hom_{Top}(\{*\}; W_{k(v)}) = W_{k(v)}$. So $p_{v*}(\widetilde{\mathbb{Z}})$ is $\mathbb{Z}$ with trivial action. For any $q \geq 0$, the functor $R^q(\widetilde{\alpha_{v*}})$ is given by

$$\begin{array}{rccc} R^q(\widetilde{\alpha_{v*}}) : & B^{sm}_{W_{k(v)}} & \longrightarrow & B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ & E & \longmapsto & \varinjlim H^q(W_{k'}; E) \end{array},$$

where the inductive limit is taken over all the subgroups $W_{k'}$ of $W_{k(v)}$ of finite index. Hence $R^q(\widetilde{\alpha_{v*}})(E) = 0$ for any $q \geq 2$, since $W_{k'} \simeq \mathbb{Z}$ has strict cohomological dimension 1.

We get

$$R^q(\widetilde{\alpha_{v*}})(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ 0 \ \text{ for } \ q = 0,\ 1 \text{ and } q \geq 2.$$

Let $\widetilde{\mathbb{R}}$ be the sheaf on $T_{W_{k(v)}}$ represented by the topological space $\mathbb{R}$ with trivial action. Since $p_{v*}(\widetilde{\mathbb{R}}) = \widetilde{\mathbb{R}}(\{*\}) = Hom_{Top}(\{*\}; \mathbb{R})$ is the discrete abelian group $\mathbb{R}$ endowed with the trivial action of $Hom_{Top}(\{*\}; W_{k(v)}) = W_{k(v)}$, one has

$$R^q(\widetilde{\alpha_{v*}})(\mathbb{R}) = \mathbb{R},\ \mathbb{R},\ 0 \ \text{ for } \ q = 0,\ 1 \text{ and } q \geq 2.$$

We summarize these results in the following proposition.

Proposition 6.5. *For any ultrametric valuation v of F, one has*

$$R^q(\alpha_{v*})(\widetilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ 0 \ \textit{ for } \ q = 0,\ 1 \textit{ and } q \geq 2.$$

$$R^q(\alpha_{v*})(\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R},\ \mathbb{R},\ 0 \ \textit{ for } \ q = 0,\ 1 \textit{ and } q \geq 2.$$

For any abelian object $\mathcal{A}$ of $B_{W_{k(v)}}$ so that $\mathcal{A}(\{*\})$ is torsion, one has

$$R^q(\alpha_{v*})(\mathcal{A}) = 0 \ \textit{ for } \ q \geq 1.$$

For any abelian object $\mathcal{A}$ of $B_{W_{k(v)}}$, one has

$$R^q(\alpha_{v*})(\mathcal{A}) = 0 \ \textit{ for } \ q \geq 2.$$

Moreover, α_v^* is fully faithful.

1.5.2. *For any archimedean valuation v,* the morphism α_v is given by

$$\alpha_v : B_{\mathbb{R}} \to B_* = \mathcal{T} \to \underline{Set}.$$

In this case, α_v is the unique morphism from $B_{\mathbb{R}}$ to $\underline{Set}$. By definition of the cohomology in a topos, we get

$$R^q(\alpha_{v*})(\mathcal{A}) = H^q(\mathbb{R}; \mathcal{A}).$$

Finally, α_v^* is fully faithful, since $B_{\mathbb{R}}$ is connected and nonempty ([**24**] IV.4.3.5). In other words, $\alpha_{v*} \circ \alpha_v^* = Id$.

PROPOSITION 6.6. *For any archimedean valuation v, one has*

$$R^q(\alpha_{v*})(\widetilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z},\ 0 \ \ for \ \ q = 0,\ and\ q \geq 1.$$

$$R^q(\alpha_{v*})(\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R},\ \mathbb{R},\ 0 \ \ for \ \ q = 0,\ 1\ and\ q \geq 2.$$

For any sheaf $\widetilde{A}$ of $B_{\mathbb{R}}$ represented by a discrete abelian group A, one has

$$R^q(\alpha_{v*})(\widetilde{A}) = A,\ 0 \ \ for \ \ q = 0,\ and\ q \geq 1.$$

Moreover, α_v^* is fully faithful.

PROOF. This is ([**16**] Proposition 9.6). □

2. Description of the Weil topos

Let K be a number field, $\overline{K}/K$ an algebraic closure, Y the spectrum of the ring of integers $\mathcal{O}_K$ in K, and $\overline{Y} = (Y; Y_\infty)$ the set of all valuations of K. The trivial valuation of K corresponds to the generic point of Y. We denote by $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ the étale topos of $\overline{Y}$.

The section 2 of the previous chapter was devoted to the study of the Weil-étale topos in characteristic p. This topos satisfies a list of topological properties, as it is shown by propositions 5.4, 5.5, 5.6, 5.9, 5.11, 5.13, 5.17, 5.24 and 5.27. A Weil topos is a topos associated to a number field, which satisfies the analogous properties.

DEFINITION 6.7. *A* good diagram *on $\overline{Y}$ is given by a topos over the étale topos $\gamma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ endowed with a morphism $i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}$ for any closed point v of $\overline{Y}$, so that the diagram*

$$\begin{array}{ccc} \coprod B_{W_{k(v)}} & \xrightarrow{(\alpha_v)_v} & \coprod B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ {\scriptstyle (i_v)_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (u_v)_v} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \end{array}$$

is commutative.

In what follows, we denote by $\mathcal{S}$ a good diagram, meaning the corresponding commutative diagram of topoi.

DEFINITION 6.8. *A good diagram $\mathcal{S}$ satisfies the condition $(C1)$ if γ is connected.*

For any valuation v of K, there is a natural morphism of topological groups $l_v : W_{k(v)} \to \mathbb{R}$. In the ultrametric case, l_v sends the canonical generator σ_v of $W_{k(v)}$ to $log(N(v)) \in \mathbb{R}$. In the archimedean case, l_v is just the identity of $\mathbb{R}$. We denote by

$$B_{l_v} : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

the induced morphism of classifying topoi.

DEFINITION 6.9. *A good diagram $\mathcal{S}$ satisfies the condition $(C2)$ if there is a canonical morphism of topoi*

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

so that the composite

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

is canonically isomorphic to $B_{l_v} : B_{W_{k(v)}} \to B_{\mathbb{R}}$, for any closed point v of $\overline{Y}$.

DEFINITION 6.10. *A good diagram $\mathcal{S}$ satisfies the condition $(C3)$ if the morphism i_v is an embedding, for any closed point v of $\overline{Y}$.*

DEFINITION 6.11. *A good diagram $\mathcal{S}$ satisfies the condition $(C4)$ if the induced morphism*

$$\pi := (i_v)_{v\in\overline{Y}^0} : \coprod_{v\in\overline{Y}^0} B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

is surjective (e.g. π^* is faithful).

Given a good diagram $\mathcal{S}$, consider the following diagram $\mathcal{D}_v$

$$\begin{array}{ccc} B_{W_{k(v)}} & \xrightarrow{\alpha_v} & B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ {\scriptstyle i_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_v} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \end{array}$$

One has the following identifications

$$\alpha_v^* \circ u_v^* = i_v^* \circ \gamma^* \tag{87}$$
$$\alpha_{v*} \circ \alpha_v^* \circ u_v^* = \alpha_{v*} \circ i_v^* \circ \gamma^* \tag{88}$$
$$u_v^* = \alpha_{v*} \circ i_v^* \circ \gamma^* \tag{89}$$
$$u_v^* \circ \gamma_* = \alpha_{v*} \circ i_v^* \circ \gamma^* \circ \gamma_*. \tag{90}$$

The first one comes from the commutativity of the diagram $\mathcal{D}_v$. The third is true since α_v^* is fully faithful for any valuation v of F. Identifications (88) and (90) are obvious.

The adjoint transformation $\gamma^* \circ \gamma_* \to Id$ induces

$$b_v : \alpha_{v*} \circ i_v^* \circ \gamma^* \circ \gamma_* \longrightarrow \alpha_{v*} \circ i_v^*.$$

Then by (90), we get a natural transformation

$$b_v : u_v^* \circ \gamma_* \longrightarrow \alpha_{v*} \circ i_v^*.$$

DEFINITION 6.12. *The diagram $\mathcal{D}_v$ is said to satisfy* the Beck-Chevalley condition *if the natural transformation b_v is a isomorphism.*

DEFINITION 6.13. *A good diagram $\mathcal{S}$ satisfies the condition $(C5)$ if the diagram $\mathcal{D}_v$ satisfies the Beck-Chevalley condition for any closed point v of $\overline{Y}$.*

DEFINITION 6.14. *A good diagram $\mathcal{S}$ satisfies the condition $(C6)$ if the functor i_v^* sends injective objects to α_{v*}-acyclic objects, for any closed point v of $\overline{Y}$.*

DEFINITION 6.15. *A* Weil topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ *is a good diagram satisfying the six conditions $(C1)$ – $(C6)$.*

3. First observations on the Weil topos

Until now, neither the uniqueness (in any sense) nor the existence of a Weil topos are known. In the following, we suppose that there exists a distinguished Weil topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$, which we call *the Weil topos*.

REMARK 6.16. *It is natural to define the Weil topos as a connected topos over $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$, since the Weil group is defined as a topological group endowed with a continuous morphism to the Galois group with dense image.*

REMARK 6.17. *Suppose that γ is tidy. Then for any closed point v of $\overline{Y}$, the diagram $\mathcal{D}_v$ satisfies the Beck-Chevalley condition hence the condition $(C5)$ is satisfied. However, let v be an archimedean valuation of K. The diagram $\mathcal{D}_v$*

$$\begin{tikzcd} B_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & \underline{Set} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \end{tikzcd}$$

is a pull-back, as it is shown in Prop. 6.22. Since the class of tidy maps is stable under pull-back, the morphism $B_{\mathbb{R}} \to \underline{Set}$ is tidy. Hence the global section functor of $B_{\mathbb{R}}$ commutes with filtered inductive limits. This claim is not true, hence γ is not tidy. However, one might expect that γ is hyperconnected (hence proper).

REMARK 6.18. *The morphism γ is connected if and only if γ^* is fully faithful. Then $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is a full subcategory of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. Hence étales sheaves (such as the multiplicative group or the additive group) extend naturally to sheaves on the Weil topos.*

REMARK 6.19. *By (*[**24**] *I Corollaire 6.3), the family of functors*

$$\{i_v^* : \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \to B_{W_{k(v)}};\ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative, since the morphism π is surjective. See ([**24**] *IV.6.4.3) for the consequences of this fact.*

REMARK 6.20. *Every topological space $\mathcal{F}$ endowed with a continuous action of $\mathbb{R}$ (and more generally every object $\mathcal{F}$ of $B_{\mathbb{R}}$) defines an object $\mathfrak{f}^*\mathcal{F}$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ so that $i_v^*(s^*\mathcal{F})$ is $\mathcal{F}$ with its action of $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$. If $\mathcal{F}$ is a group object (resp. a ring, resp. an abelian group), so is the sheaf $s^*(\mathcal{F})$, since $\mathfrak{f}^*$ commutes with finite projective limits.*

REMARK 6.21. *Suppose that i_v^* has a left adjoint which is left exact. Then i_v^* preserves injective objects hence condition $(C6)$ is satisfied. However, one cannot expect this to hold, since in the function field case, the functor i_v^* does not commute with infinite products. Hence, i_v^* does not have a left adjoint.*

3.1. The diagram $\mathcal{D}_v$ is a pull-back. Let v be a closed point of $\overline{Y}$.

PROPOSITION 6.22. *The sub-topos $B_{W_{k(v)}}$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ is the inverse image of $B^{sm}_{G_{k(v)}}$ under γ. In other words, the diagram $\mathcal{D}_v$*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \end{tikzcd}$$

is a pull-back.

PROOF. Denote by $I_{W_{k(v)}}$ and $I_{G_{k(v)}}$ the images of i_v and u_v in $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ and $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ respectively. Then, one has the factorizations

$$\widetilde{i_v} \circ f_v : B_{W_{k(v)}} \to I_{W_{k(v)}} \to \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \text{ and } \widetilde{u_v} \circ g_v : B^{sm}_{G_{k(v)}} \to I_{G_{k(v)}} \to \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}.$$

Moreover, f_v and g_v are both equivalences of topoi since i_v and u_v are both embeddings, by Condition $(C3)$. The morphisms $i_v : B_{W_{k(v)}} \to \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ and $g_v \circ \alpha_v : B_{W_{k(v)}} \to I_{G_{k(v)}}$ over $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ yield a morphism

$$\widetilde{f_v} : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) = \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \times_{\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}} I_{G_{k(v)}}$$

so that

$$i_v = pr_1 \circ \widetilde{f_v} : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \times_{\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}} I_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}},$$

where pr_1 is the projection on the first component. Since i_v and pr_1 are both embeddings, one has

$$Id = i_v^* \circ i_{v*} = (pr_1 \circ \widetilde{f_v})^* \circ (pr_1 \circ \widetilde{f_v})_* = \widetilde{f_v}^* \circ pr_1^* \circ pr_{1*} \circ \widetilde{f}_{v*} = \widetilde{f_v}^* \circ \widetilde{f}_{v*}.$$

Hence $\widetilde{f_v}$ is an embedding.

Consider the morphism $\pi : \coprod_{w \in \overline{Y}^0} B_{W_{k(w)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ and denote by

$$\widetilde{\pi} : (\gamma\pi)^{-1}(I_{G_{k(v)}}) := \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \times_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}} \coprod B_{W_{k(w)}} \longrightarrow \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \tag{91}$$

the inverse image of $\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}})$ under π. Then, given two objects $\mathcal{F}$ and $\mathcal{L}$ of $\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}})$, the maps given by the functors $\widetilde{\pi}^*$ and π^* from

$$Hom_{(\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}))}(\mathcal{F};\mathcal{L}) = Hom_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}}(\mathcal{F};\mathcal{L})$$

to

$$Hom_{(\coprod B_{W_{k(w)}})}(\pi^*(\mathcal{F});\pi^*(\mathcal{L})) = Hom_{((\gamma\pi)^{-1}(I_{G_{k(v)}}))}(\widetilde{\pi}^*\mathcal{F};\widetilde{\pi}^*\mathcal{L})$$

coincide. By Condition $(C2)$, π is surjective, hence π^* is faithful and this map is injective. This shows that $\widetilde{\pi}^*$ is faithful. Hence $\widetilde{\pi}$ is surjective.

Now, one has

$$\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \times_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}} (\coprod B_{W_{k(w)}}) = \coprod_{w \in \overline{Y}^0} (\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \times_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}} B_{W_{k(w)}}). \tag{92}$$

Moreover, for any $w \neq v$, there exists a morphism

$$\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \times_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}} B_{W_{k(w)}} \longrightarrow I_{G_{k(v)}} \times_{\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}} I_{G_{k(w)}} = I_{G_{k(v)}} \bigcap I_{G_{k(w)}} = Top(\emptyset).$$

Indeed, the sub-category $I_{G_{k(v)}} \bigcap I_{G_{k(w)}}$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is reduced to its final object. Hence,

$$\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \times_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}} B_{W_{k(w)}} = Top(\emptyset) \tag{93}$$

is the initial topos for any $w \neq v$. Then, we get

$$(\gamma\pi)^{-1}(I_{G_{k(v)}}) = \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \times_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}} B_{W_{k(v)}} \tag{94}$$

$$= \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \times_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}} I_{W_{k(v)}} \tag{95}$$

$$= \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) \bigcap I_{W_{k(v)}} \tag{96}$$

$$= I_{W_{k(v)}} \tag{97}$$

The first equality is true by (92) and (93). The morphism $f_v : B_{W_{k(v)}} \to I_{W_{k(v)}}$ is an equivalence of topoi over $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. This shows (95). The topos $I_{W_{k(v)}}$ is a sub-topos of $\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}})$. Moreover $\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}})$ and $I_{W_{k(v)}}$ are two sub-topoi of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. Then (96) and (97) follow. The map (91) becomes

$$\widetilde{\pi} = j_v : I_{W_{k(v)}} \longrightarrow \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}).$$

It is a surjective inclusion of a sub-topos. Hence, we get the equality

$$I_{W_{k(v)}} = \gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}})$$

in the set of the sub-topoi of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$.

□

In the following proof, we denote by ε the Yoneda functor.

Corollary 6.23. *For any closed point v of $\overline{Y}$, the morphism*

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$$

is a closed embedding. More precisely, the image $I_{W_{k(v)}}$ of the closed embedding i_v is the closed complement of the open sub-topos of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ defined by the object $\gamma^*(\varepsilon(\overline{Y} - \{v\}))$.

Proof. The embedding $i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ is said to be a closed embedding if its image $I_{W_{k(v)}}$ is a closed sub-topos of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$, that is, the closed complement of an open sub-topos (see [**24**] IV.9.3.4 and [**24**] IV.9.3.5).

The image $I_{G_{k(v)}}$ of the morphism $u_v : B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is the closed complement of

$$j : \mathcal{U}_v := \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}/\varepsilon(\overline{Y}-\{v\})} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}.$$

The inverse image of $\mathcal{U}_v$ under γ is

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}_v) := \mathcal{S}_{W;\overline{Y}/\gamma^*(\varepsilon(\overline{Y}-\{v\}))} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}.$$

Then, the closed complement of $\gamma^{-1}(\mathcal{U}_v)$ is $\gamma^{-1}(I_{G_{k(v)}}) = I_{W_{k(v)}}$ (see [**24**] IV.9.4.3). □

Corollary 6.24. *For any closed point v of $\overline{Y}$, the functor*

$$i_{v*} : Ab(B_{W_{k(v)}}) \longrightarrow Ab(\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}})$$

induced by the morphism i_v is exact.

Proof. By ([**24**] IV.14.5), one has the following sequence of three adjoint functors between the category of abelian sheaves $Ab(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}})$ and $Ab(B_{W_{k(v)}})$:

$$i_v^* \ , \ i_{v*} \ , \ i_v^! \ .$$

In particular, i_{v*} is exact. □

3.2. The open embedding $\mathcal{S}_{W;Y} \to \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. By Proposition 4.55, there is an open embedding

$$\varphi : \mathcal{S}_{Et;Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}.$$

Its closed complement is the image of the morphism

$$(u_v)_{v\in Y_\infty} : \coprod_{v\in Y_\infty} B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}, \tag{98}$$

which is equivalent to $\coprod_{v\in Y_\infty} B^{sm}_{G_{k(v)}}$, since $(u_v)_{v\in Y_\infty}$ is an embedding.

The open sub-topos $\mathcal{S}_{Et;Y}$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is associated to the sub-terminal object $\varepsilon(Y)$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. Then, the inverse image of $\mathcal{S}_{Et;Y}$ under γ is the open sub-topos

$$\phi : \mathcal{S}_{W;Y} := \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}{}_{/\gamma^*(\varepsilon(Y))} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$$

associated to the sub-terminal object $\gamma^*(\varepsilon(Y))$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. By Proposition 6.22, the inverse image of the closed sub-topos (98) is the closed embedding

$$(i_v)_{v\in Y_\infty} : \coprod_{v\in Y_\infty} B_{W_{k(v)}} \to \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}.$$

Hence, it is the closed complement of $\mathcal{S}_{W;Y}$ in $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$.

4. Cohomology of the Weil topos.

4.1. Constant sheaves of the Weil topos.

4.1.1. *Discrete constant sheaves.* Recall that a topos $\mathcal{E}$ has a final object $e_{\mathcal{E}}$ which is unique up to unique isomorphism. We denote also by $e_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \underline{Ens}$ the unique morphism from the given topos $\mathcal{E}$ to the final topos, since such a morphism is given by a final object. The constant objects of $\mathcal{E}$ are the sheaves $e^*_{\mathcal{E}}I$, where I is a set. If I is a group (respectively a ring), then so is $e^*_{\mathcal{E}}I$, since $e^*_{\mathcal{E}}$ commutes with finite projective limits. For the étale topos $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$, the Weil topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$, the small classifying topos B^{sm}_G of a profinite group G and the classifying topos $B_{W_{k(v)}}$ of a topological group $W_{k(v)}$ we denote the structure map to the final topos by e_{Et}, e_W, e_G and $e_{W_{k(v)}}$.

LEMMA 6.25. *For any set I, consider the constant sheaf $e^*_W(I)$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. Then, for any $v \in \overline{Y}^0$, $i^*_v(e^*_W(I))$ is the constant sheaf $e^*_{W_{k(v)}}(I)$ of $B_{W_{k(v)}}$. Moreover, this sheaf on $T_{W_{k(v)}}$ is represented by the discrete topological space I with trivial $W_{k(v)}$-action.*

PROOF. The first claim follows from the fact that there is a unique morphism from $B_{W_{k(v)}}$ to $\underline{Set}$, since $e^*_{W_{k(v)}} = (e_W \circ i_v)^* = i^*_v \circ e^*_W$. The second claim was shown in [**37**]. Alternatively, consider the square

$$\begin{array}{ccc} B^{sm}_{\{1\}} & \xrightarrow{e^*_{W_{k(v)}}} & B_{W_{k(v)}} \\ \uparrow y & & \uparrow y \\ \underline{Set} & \xrightarrow{a} & T_{W_{k(v)}} \end{array}$$

The category $\underline{Set}$ is endowed with the canonical topology and $B^{sm}_{\{1\}} = \underline{Set}$ is the classifying topos of the trivial group $\{1\}$. The vertical arrows are the Yoneda embeddings. The functor a, which sends a set to the corresponding discrete topological space with trivial action, is a morphism of left exact sites. Hence the previous diagram is commutative, which shows that the constant sheaf $e^*_{W_{k(v)}}(I)$ of $B_{W_{k(v)}}$ is represented by I with trivial action. $\square$

LEMMA 6.26. *For any set I, one has the identification*

$$\gamma_*(e^*_W(I)) = e^*_{Et}(I).$$

PROOF. Again, one has $\gamma^*(e^*_{Et}(I)) = e^*_W(I)$. Hence

$$\gamma_*(e^*_W(I)) = \gamma_* \circ \gamma^*(e^*_{Et}(I)) = e^*_{Et}(I),$$

since γ is connected. $\square$

DEFINITION 6.27. *The constant sheaf of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ associated to $\mathbb{Z}$ is $e^*_W(\mathbb{Z})$. One has $i^*_v(e^*_W(\mathbb{Z})) = e^*_{W_{k(v)}}(\mathbb{Z}) = \widetilde{\mathbb{Z}}$. Moreover, $\gamma_*(e^*_W(\mathbb{Z}))$ is the constant abelian sheaf of $\mathcal{S}_{Et}$ associated to $\mathbb{Z}$.*

4.1.2. *Topological constant sheaves.* There is a canonical morphism from $B_{\mathbb{R}}$ to $\mathcal{T}$ which is induced by the unique morphism from the topological group $\mathbb{R}$ to the trivial group $\{1\}$. Composing $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \to B_{\mathbb{R}}$ with this morphism $B_{\mathbb{R}} \to \mathcal{T}$, we get a morphism

$$t : \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \to \mathcal{T}.$$

Hence the Weil topos has a canonical structure of a $\mathcal{T}$-topos. Then, we define a *topological constant sheaf of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$* as an object of the form $t^*(\mathcal{F})$, where $\mathcal{F}$ is an object of $\mathcal{T}$ (in particular a topological space).

LEMMA 6.28. *There is a natural transformation*

$$c : e^*_{Et} \circ e_{\mathcal{T}*} \to \gamma_* \circ t^*,$$

which is an isomorphism.

PROOF. For any closed point v of $\overline{Y}$, consider the following commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\
\mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "t"'] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \arrow[d, "e_{Et}"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "e_{\mathcal{T}}"] & \underline{Ens}
\end{tikzcd}$$

Let $T := t^*\mathcal{F}$ be a topological constant sheaf. Consider the morphism $e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$. One has a morphism

$$m : t^* \circ e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F}) \to t^*(\mathcal{F}),$$

and we want to show that

$$\gamma_*(m) : \gamma_* \circ t^* \circ e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F}) \to \gamma_* \circ t^*(\mathcal{F}) \tag{99}$$

is an isomorphism. Since the family $\{u^*_v;\ v \in \overline{Y}^0\}$ is conservative, it suffices to show that $u^*_v \circ \gamma_*(m)$ is an isomorphism for any $v \in \overline{Y}^0$. But

$$u^*_v \circ \gamma_*(m) = \alpha_{v*} \circ i^*_v(m) : \alpha_{v*} \circ i^*_v \circ t^* \circ e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F}) \to \alpha_{v*} \circ i^*_v \circ t^*(\mathcal{F})$$

is an isomorphism by (6.30). Hence the morphism (99) is an isomorphism, and we get a transformation

$$\gamma_* \circ t^* \circ e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*} \to \gamma_* \circ t^* \tag{100}$$

which is an isomorphism. Furthermore, one has

$$\gamma_* \circ t^* \circ e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*} \simeq \gamma_* \circ \gamma^* \circ e^*_{Et} \circ e_{\mathcal{T}*} \simeq e^*_{Et} \circ e_{\mathcal{T}*}, \tag{101}$$

The identifications of (101) come from the (unique) isomorphism $e_{Et} \circ \gamma = e_{\mathcal{T}} \circ t$ and the connectedness of γ. The proposition follows from (100) and (101). □

Lemma 6.29. *Consider the commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "\widetilde{e}_{W_{k(v)}}"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "e_{G_{k(v)}}"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "e_{\mathcal{T}}"] & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

Then, the natural transformation $e^*_{G_{k(v)}} \circ e_{\mathcal{T}*} \to \alpha_{v*} \circ \widetilde{e}^*_{W_{k(v)}}$ is an isomorphism.

Proof. The adjunction transformation $e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*} \to Id$ induces a transformation

$$r_v : e^*_{G_{k(v)}} \circ e_{\mathcal{T}*} \to \alpha_{v*} \circ \widetilde{e}^*_{W_{k(v)}},$$

and we want to show that it is an isomorphism.

Let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{T}$. The pull-back $\widetilde{e}^*_{W_{k(v)}}(\mathcal{F})$ is the same sheaf with trivial $y(W_{k(v)})$-action. Recall that, following the notations of section 1.5.1, one has $\alpha_v = \widetilde{\alpha_v} \circ p_v$. Then, $p_{v*}(\widetilde{e}^*_{W_{k(v)}}(\mathcal{F}))$ is the set $\mathcal{F}(\{*\})$ endowed with the trivial action of $Hom_{Top}(\{*\}; W_{k(v)}) = W_{k(v)}$. Hence, one has the following identification of $G_{k(v)}$-sets

$$\alpha_{v*} \circ \widetilde{e}^*_{W_{k(v)}}(\mathcal{F}) = \varinjlim \, (\mathcal{F}(\{*\}))^{W_{k'}} = \mathcal{F}(\{*\}),$$

where $G_{k(v)}$ acts trivially on $\mathcal{F}(\{*\})$.

Moreover, one has $e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\{*\})$. Hence $e^*_{G_{k(v)}} \circ e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F})$ is also canonically isomorphic to the set $\mathcal{F}(\{*\})$ with trivial $G_{k(v)}$-action.

□

Remark 6.30. *Let $\mathcal{F}$ an object of $\mathcal{T}$ and let $f : e^*_{\mathcal{T}} \circ e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ be the morphism given by adjunction. The previous lemma shows that the morphism $\alpha_{v*} \circ \widetilde{e}^*_{W_{k(v)}}(f)$ is an isomorphism.*

Remark 6.31. *For any topological constant sheaf $t^*(\mathcal{F})$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$, one has*

$$\gamma_* \circ t^*(\mathcal{F}) = e^*_{Et} \circ e_{\mathcal{T}*}(\mathcal{F}) = e^*_{Et}(\mathcal{F}(*)).$$

In other words, γ_* extends $e_{\mathcal{T}*}$. In particular, the direct image of any topological constant sheaf of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ is a discrete constant sheaf of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. For example, let T be a topological space with trivial $\mathbb{R}$-action and let $\varepsilon(T)$ be the object of $B_{\mathbb{R}}$ represented by T. Then $\widetilde{T} := \mathfrak{f}^*(\varepsilon(T))$ is a topological constant sheaf of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ and the sheaf $\gamma_*(\widetilde{T})$ is the constant étale sheaf associated to the discrete set T.

Definition 6.32. *The sheaf of* continuous real valued functions *of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ is defined by $\widetilde{\mathbb{R}} := \mathfrak{f}^*(\varepsilon(\mathbb{R}))$, where $\varepsilon(\mathbb{R})$ is the abelian object of $B_{\mathbb{R}}$ represented by the usual topological group $\mathbb{R}$ with trivial $\mathbb{R}$-action. On the one hand, $i_v^*(\widetilde{\mathbb{R}})$ is the sheaf represented by the topological group*

$\mathbb{R}$ with trivial $W_{k(v)}$-action, for any $v \in \overline{Y}^0$. On the other hand, $\gamma_*(\widetilde{\mathbb{R}})$ is the discrete constant sheaf of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ associated to the discrete group $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 6.33. *The sheaf $\widetilde{\mathbb{R}} := \mathfrak{f}^*(\varepsilon(\mathbb{R}))$ is a sheaf of modules on the ringed topos $(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}};\mathbb{R})$.*

PROOF. Let us show that $\varepsilon(\mathbb{R})$ is a $\mathbb{R}$-module of $(B_{\mathbb{R}};\mathbb{R})$. Consider $B_{\mathbb{R}}$ as the topos of sheaves on the site $(T_{\mathbb{R}};\mathcal{J}_{ls})$. Let $\mathfrak{d}:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be the continuous morphism (of ring objects in Top) from the discrete ring $\mathbb{R}^d$ to the usual topological ring $\mathbb{R}$. Since the Yoneda embedding commutes with finite projective limits, this yields a morphism of ring objects $\varepsilon(\mathfrak{d}):\mathbb{R}=\varepsilon(\mathbb{R}^d)\to\varepsilon(\mathbb{R})$ of $B_{\mathbb{R}}$. Recall that the constant object $\mathbb{R}$ of $B_{\mathbb{R}}$ is the sheaf on the site $(T_{\mathbb{R}};\mathcal{J}_{ls})$ represented by the discrete topological space $\mathbb{R}^d$ with trivial $\mathbb{R}$-action. Then, $\varepsilon(\mathbb{R})$ is a sheaf of $\mathbb{R}$-algebras, hence of $\mathbb{R}$-modules. Moreover the morphism

$$(\mathfrak{f};\Theta):(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}};\mathbb{R})\to(B_{\mathbb{R}};\mathbb{R})$$

is a morphism of ringed topoi, where $\Theta:\mathfrak{f}^*(\mathbb{R})=\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is the identity. Hence $\widetilde{\mathbb{R}} := \mathfrak{f}^*(\varepsilon(\mathbb{R}))$ is a sheaf of $\mathbb{R}$-modules.

□

4.2. The base change.

PROPOSITION 6.34. *By conditions $(C4)$ and $(C5)$, the right derived functors of the base change γ_* satisfy the following. For any abelian object $\mathcal{A}$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$, any nontrivial valuation v of F and for any $n \geq 0$, one has*

$$(R^q(\gamma_*)(\mathcal{A}))_{\overline{v}} := u_v^* \circ R^q(\gamma_*)(\mathcal{A}) \simeq R^q(\alpha_{v*})(i_v^*\mathcal{A}).$$

PROOF. By Condition $(C6)$, there is a spectral sequence

$$R^p(\alpha_{v*})\circ R^q(i_v^*)(\mathcal{A}) \Longrightarrow R^{p+q}(\alpha_{v*}\circ i_v^*)(\mathcal{A}),$$

which degenerates because of the exactness of i_v^*, and yields the isomorphisms

$$R^n(\alpha_{v*})(i_v^*\mathcal{A}) \simeq R^n(\alpha_{v*}\circ i_v^*)(\mathcal{A}).$$

Now, Condition $(C5)$ implies that

$$R^n(\alpha_{v*}\circ i_v^*)(\mathcal{A}) = R^n(u_v^*\circ\gamma_*)(\mathcal{A}) = u_v^*\circ R^n(\gamma_*)(\mathcal{A}),$$

where the second equality comes from the spectral sequence provided by the fact that γ_* preserves injective objects, and from the exactness of u_v^*. Then the last $G_{k(v)}$-module is the stalk of the étale sheaf $R^n(\gamma_*)(\mathcal{A})$ at the geometric point $\overline{v}$ of $\overline{Y}$, endowed with its natural $G_{k(v)}$-action. □

COROLLARY 6.35. *Let $\mathcal{F}$ be an étale sheaf on $\overline{Y}$. Then, one has*

$$R^q(\gamma_*)(\gamma^*\mathcal{F}) = 0,$$

for any $q \geq 2$.

PROOF. For any closed point v of $\overline{Y}$, the object $i_v^*\circ\gamma^*(\mathcal{F}) = \alpha_v^*\circ u_v^*(\mathcal{F})$ of $B_{W_{k(v)}}$ is represented by a discrete $W_{k(v)}$-module, namely $u_v^*(\mathcal{F})$ with its induced $W_{k(v)}$-action. Hence, by Proposition 6.34, Proposition 6.5 and Proposition 6.6, one has

$$u_v^*\circ R^q(\gamma_*)(\gamma^*\mathcal{F}) = R^q(\alpha_{v*})(i_v^*\circ\gamma^*\mathcal{F}) = 0,$$

for any closed point v of $\overline{Y}$ and any $q \geq 2$. The family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}};\ \ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative. Hence $R^q(\gamma_*)(\gamma^*\mathcal{F}) = 0$ for any $q \geq 2$. □

DEFINITION 6.36. *An abelian sheaf $\mathcal{F}$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ is said to be torsion when $\mathcal{F}$ is a torsion abelian object of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ (see Definition 6.1) so that $i_v^*(\mathcal{F})$ is represented by a discrete torsion $W_{k(v)}$-module for any archimedean v. Then, by Corollary 6.3, $i_v^*(\mathcal{F})(\{*\})$ is a torsion abelian object of $B_{W_{k(v)}}$, for any ultrametric valuation v.*

COROLLARY 6.37. *For any torsion abelian sheaf $\mathcal{A}$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ and any $q \geq 1$, one has*

$$R^q(\gamma_*)(\mathcal{A}) = 0.$$

PROOF. Let $\mathcal{A}$ be a torsion abelian sheaf of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. Then $i_v^*(\mathcal{A})$ is a torsion abelian sheaf of $B_{W_{k(v)}}$, hence $i_v^*(\mathcal{A})(\{*\})$ is a torsion $W_{k(v)}$-module for any ultrametric valuation v. By Proposition 6.5, one has $R^q(\alpha_{v*})(i_v^*(\mathcal{A})) = 0$ for any $q \geq 1$ and any ultrametric v. For any archimedean valuation v, $i_v^*(\mathcal{A})$ is the sheaf of $B_{W_{k(v)}} = B_{\mathbb{R}}$ represented by a discrete (hence with trivial $\mathbb{R}$-action) abelian group A_v. Then, by Proposition 6.6, one has

$$R^q(\alpha_{v*})(i_v^*(\mathcal{A})) =: H^q(B_{\mathbb{R}}; \widetilde{A_v}) = 0,$$

for any $q \geq 1$. Again, by Proposition 6.34, the corollary follows from the fact the family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}};\ \ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative. □

COROLLARY 6.38. *The sheaf $R^q(\gamma_*)(\mathbb{Z})$ is $\mathbb{Z}$ for $q = 0$ and 0 for $q \geq 2$. For any ultrametric valuation v, $u_v^*(R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z}))$ is the constant sheaf $\mathbb{Q}$ of $B^{sm}_{G_{k(v)}}$. For any archimedean valuation v, one has $u_v^*(R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z})) = 0$.*

PROOF. The sheaf $\gamma_*\mathbb{Z} = \gamma_*\gamma^*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ is the constant sheaf $\mathbb{Z}$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$, since γ is connected. Moreover, one has

$$u_v^* R^q(\gamma_*)(\mathbb{Z}) \simeq R^q(\alpha_{v*})(i_v^*\mathbb{Z}). \tag{102}$$

By Proposition 6.5 and Proposition 6.6, we obtain $R^q(\alpha_{v*})(i_v^*\mathbb{Z}) = R^q(\alpha_{v*})(\mathbb{Z}) = 0$, for any $q \geq 2$ and any closed point v of $\overline{Y}$. Therefore one has $u_v^* R^q(\gamma_*)(\mathbb{Z}) = 0$ for any valuation v. Hence $R^q(\gamma_*)(\mathbb{Z}) = 0$ for any $q \geq 2$, since the family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}};\ \ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative.

Again by Proposition 6.5 and by Proposition 6.6, the isomorphism (102) yields $u_v^*(R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z})) = \mathbb{Q}$ for v ultrametric and $u_v^*(R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z})) = 0$ for v archimedean.

□

COROLLARY 6.39. *The sheaf $\gamma_*(\widetilde{\mathbb{R}})$ is the constant sheaf of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ associated to the discrete abelian group $\mathbb{R}$. For any $q \geq 2$, one has $R^q(\gamma_*(\widetilde{\mathbb{R}})) = 0$.*

For any closed point v of $\overline{Y}$, $u_v^*(R^1(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}}))$ is the constant sheaf of $B^{sm}_{G_{k(v)}}$ associated to the discrete abelian group $\mathbb{R}$.

PROOF. The first claim follows from Lemma 6.28. By Proposition 6.34 the corollary follows from Proposition 6.5, Proposition 6.6 and the fact the family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}};\ \ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative. $\square$

REMARK 6.40. *The preceding results do not determine the étale sheaves $R^1(\mathbb{Z})$ and $R^1(\widetilde{\mathbb{R}})$ since the functor*

$$(u_v^*)_{v\in\overline{Y}^0} : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \longrightarrow \prod B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

is faithful but not fully faithful. Hence we have to introduce a new condition.

DEFINITION 6.41. *The Weil topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ satisfies the condition $(C7)$ if the sheaf $\varphi^* R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z})$ has a section of support Y (see subsection 3.2), and if $R^1(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}})$ has a section of support $\overline{Y}$.*

PROPOSITION 6.42. *Suppose that the Weil topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ satisfies the condition $(C7)$. Then, one has an isomorphism*

$$\varphi_!\varphi^*(\mathbb{Q}) \simeq R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z}).$$

PROOF. Consider the exact sequence

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

of abelian sheaves on $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. Applying the cohomological functor $R\gamma_*$ and using Corollary 6.37, we get

$$0 \to \gamma_*\mathbb{Z} \to \gamma_*\mathbb{Z} \to \gamma_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)\mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)\mathbb{Z} \to 0,$$

since the constant sheaf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is torsion. On the other hand, one has $\mathbb{Z} = \gamma^*\mathbb{Z}$, hence $\gamma_*\mathbb{Z} = \gamma_*\gamma^*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, since γ is connected. Hence the sequence

$$0 \to \gamma_*\mathbb{Z} \to \gamma_*\mathbb{Z} \to \gamma_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

is right exact so that the multiplication by n induces an isomorphism

$$m_n : R^1(\gamma_*)\mathbb{Z} \longrightarrow R^1(\gamma_*)\mathbb{Z},$$

for any $n \geq 1$. This implies that $R^1(\gamma_*)\mathbb{Z}$ is a sheaf of $\mathbb{Q}$-vector spaces on $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. Then, $\varphi^*R^1(\gamma_*)\mathbb{Z}$ is a sheaf of $\mathbb{Q}$-vector spaces on $\mathcal{S}_{Et;Y}$, since

$$\varphi : (\mathcal{S}_{Et;Y}; \mathbb{Q}) \longrightarrow (\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}; \mathbb{Q})$$

is a morphism of ringed topoi. Let $s : \mathbb{Z} \to \varphi^*R^1(\gamma_*)\mathbb{Z}$ be a section of support Y. Since $\varphi^*R^1(\gamma_*)\mathbb{Z}$ is a sheaf of $\mathbb{Q}$-vector spaces, the section s has a linear extension

$$\widetilde{s} : \mathbb{Q} \longrightarrow \varphi^*R^1(\gamma_*)\mathbb{Z}.$$

We get a morphism of sheaves of $\mathbb{Q}$-vector spaces

$$f : \varphi_!\mathbb{Q} \longrightarrow \varphi_!\varphi^*R^1(\gamma_*)\mathbb{Z} \longrightarrow R^1(\gamma_*)\mathbb{Z},$$

by composing the map $\varphi_!(\widetilde{s})$ with the morphism given by the adjunction transformation $\varphi_!\varphi^* \to Id$. Indeed, each of them is a morphism of sheaves of $\mathbb{Q}$-vector spaces.

For every closed point v of Y, the map

$$u_v^*(f) : u_v^*(\varphi_!\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \longrightarrow u_v^*(R^1(\gamma_*)\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$$

is non-zero, since the support of s is Y. Then, for any ultrametric valuation v, $u_v^*(f)$ is a non-zero morphism of one dimensional $\mathbb{Q}$-vector spaces, hence an isomorphism. Moreover,

$$u_v^*(f) : u_v^*(\varphi_!\mathbb{Q}) = 0 \longrightarrow u_v^*(R^1(\gamma_*)\mathbb{Z}) = 0$$

is obviously an isomorphism, for any archimedean valuation v.

Finally, the family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}};\ \ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative, which shows that

$$f : \varphi_!\mathbb{Q} = \varphi_!\varphi^*\mathbb{Q} \to R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z})$$

is an isomorphism. □

Proposition 6.43. *Suppose that the Weil topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ satisfies the condition $(C7)$. Then, one has an isomorphism*

$$\mathbb{R} \simeq R^1(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}}).$$

Proof. The sheaf $\widetilde{\mathbb{R}}$ is a sheaf of $\mathbb{R}$-vector spaces of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. More precisely, it is a module of the ringed topos $(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}};\mathbb{R})$, where $\mathbb{R}$ denotes the ring of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ associated to the discrete ring $\mathbb{R}$. Then, $R^1(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}})$ is a sheaf of $\mathbb{R}$-vector spaces of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$, since γ induces a morphism of ringed topoi

$$(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}};\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}};\mathbb{R}).$$

Let $s' : \mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}})$ be a section of support $\overline{Y}$. Then, s' induces a morphism of sheaves of $\mathbb{R}$-vector spaces

$$f' : \mathbb{R} \to R^1(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}}).$$

For any closed point v of $\overline{Y}$, the map

$$u_v^*(f') : u_v^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \longrightarrow u_v^*(R^1(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$$

is non-zero, since the support of s' is $\overline{Y}$. Then, $u_v^*(f')$ is a non-zero morphism of one dimensional $\mathbb{R}$-vector spaces, hence an isomorphism.

Again, the family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}};\ \ v \in \overline{Y}^0\}$$

is conservative, which shows that f' is an isomorphism.

□

4.3. Cohomology. We denote by $A^{\mathcal{D}} := Hom_c(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ the Pontryagin dual of an abelian locally compact and separated topological group, while A^D denotes $Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ for any discrete abelian group A.

Theorem 6.44. *The cohomology of the constant sheaf $\mathbb{Z}$ of the Weil topos is given by*

$$\begin{aligned} H^q_W(\overline{Y};\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \text{ for } q = 0,\\ &= 0 \text{ for } q = 1,\\ &= Pic^1(\overline{Y})^D \text{ for } q = 2,\\ &= \mu_K^D \text{ for } q = 3,\\ &= 0 \text{ for } q \geq 4. \end{aligned}$$

PROOF. By the previous section, one has

$$R^q(\gamma_*)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ \ \varphi_!\varphi^*\mathbb{Q}\ \text{ and }\ 0,$$

for $q = 0$, $q = 1$ and $q \geq 2$ respectively. By Corollary 4.58, one has $H^q_{Et}(\overline{Y};\mathbb{Q}) = 0$ for any $q \geq 1$. We get

$$H^q_{Et}(\overline{Y};\varphi_!\varphi^*\mathbb{Q}) = 0, (\prod_{Y_\infty}\mathbb{Q})/\mathbb{Q},\ \text{ and } 0$$

in dimension 0, 1 and $q \geq 2$ respectively. Moreover, the cohomology of $\mathbb{Z}$ on $Et_{\overline{Y}}$ is given by Proposition 4.60. Then the Leray spectral sequence for the base change γ_*

$$H^p_{Et}(\overline{Y}; R^q(\gamma_*)\mathbb{Z}) \Longrightarrow H^{p+q}_W(\overline{Y};\mathbb{Z})$$

yields $H^0_W(\overline{Y};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^1_W(\overline{Y};\mathbb{Z}) = 0$, $H^q_W(\overline{Y};\mathbb{Z}) = 0$ for $q \geq 4$, and the exact sequence

$$0 \to Pic(Y)^D \to H^2_W(\overline{Y};\mathbb{Z}) \to (\prod_{Y_\infty}\mathbb{Q})/\mathbb{Q} \to U_K^D \to H^3_W(\overline{Y};\mathbb{Z}) \to 0. \tag{103}$$

Now, the two exact sequences (see **[37]** Proposition 6.4)

$$0 \to Pic(Y)^D \to Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \to Hom(U_K;\mathbb{Z}) \to 0$$

and

$$0 \to Hom(U_K;\mathbb{Z}) \to Hom(U_K;\mathbb{Q}) \to Hom(U_K;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Hom(\mu_K;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

show that the sequence

$$0 \to Pic(Y)^D \to Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \to Hom(U_K;\mathbb{Q}) \to U_K^D \to \mu_K^D \to 0. \tag{104}$$

is exact. We check that (103) and (104) are the same exact sequence, which gives the theorem.
□

REMARK 6.45. *In order to complete the above proof, it would be necessary to find an isomorphic map between the exact sequences (103) and (104). Unfortunately, I am not able to define this a map in a canonical way. Indeed, there exists an isomorphism* $(\prod_{Y_\infty}\mathbb{Q})/\mathbb{Q} \simeq Hom(U_K;\mathbb{Q})$*, but such an isomorphism is not canonical.*

THEOREM 6.46. *The cohomology of the sheaf* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *of real valued functions is given by*

$$\begin{aligned} H^q_W(\overline{Y};\widetilde{\mathbb{R}}) &= \mathbb{R} \textit{ for } q = 0,\\ &= \mathbb{R} \textit{ for } q = 1,\\ &= 0 \textit{ for } q \geq 2. \end{aligned}$$

PROOF. By the preceding section, one has

$$R^q(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}\ \text{ and }\ 0,$$

for $q = 0, 1$ and $q \geq 2$ respectively. By Corollary 4.58, the constant sheaf associated to $\mathbb{R}$ on the étale site $Et_{\overline{Y}}$ is acyclic for the global section functor. Hence the Leray spectral sequence

$$H^p_{Et}(\overline{Y}; R^q(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}}) \Longrightarrow H^{p+q}_W(\overline{Y};\widetilde{\mathbb{R}})$$

degenerates and yields the theorem. □

THEOREM 6.47. *Let $\mathcal{A}$ be an abelian torsion sheaf of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. Then, there is a canonical isomorphism*

$$H^q_W(\overline{Y};\mathcal{A}) \simeq H^q_{Et}(\overline{Y};\gamma_*\mathcal{A}),$$

for any $q \geq 0$.

PROOF. The étale sheaves $R^q(\gamma_*)(\mathcal{A})$ vanish for any $q \geq 1$. Then the Leray spectral sequence for the base change from the Weil topos to the étale topos yields the theorem. $\square$

4.4. Cohomology with compact support. Recall that one has an open embedding $\phi : \mathcal{S}_{W;Y} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. Hence there is a sequence of three adjoint functors

$$\phi_! \ , \ \phi^* \ , \ \phi_* \ ,$$

since ϕ^* commutes with arbitrary inductive and projective limits. The functor $\phi_!$ (extension by $\emptyset$) is not left exact, since it does not preserve the final object. However, there is an induced functor $\phi_!^{ab}$ (extension by 0) between the categories of abelian sheaves. One has again a sequence of three adjoint functors

$$\phi_!^{ab} \ , \ \phi^* \ , \ \phi_* \ .$$

The functor $\phi_!^{ab}$ is left exact hence ϕ^* preserves abelian injective objects. The closed complement of $\mathcal{S}_{W;Y}$ in $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ is the image of the closed embedding

$$i := (i_v)_{v\in Y_\infty} : \coprod_{v\in Y_\infty} B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}.$$

By adjunction, there are canonical morphisms

$$\phi_! \circ \phi^*(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}, \ \text{ and } \ \mathcal{F} \to i_* \circ i^*(\mathcal{F}) = \prod_{v\in\overline{Y}} i_{v*} \circ i_v^*(\mathcal{F}),$$

where the first map $\phi_! \circ \phi^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \times \gamma^*(\varepsilon(Y)) \to \mathcal{F}$ is just the projection on the first factor. The sequence

$$0 \to \phi_!^{ab} \circ \phi^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \to \prod_{v\in\overline{Y}} i_{v*} \circ i_v^*(\mathcal{A}) \to 0, \tag{105}$$

is exact in $Ab(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}})$, for any abelian object $\mathcal{A}$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$.

DEFINITION 6.48. *Let $\mathcal{A}$ be an abelian object of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$. The* Weil-étale cohomology with compact support with coefficients in $\mathcal{A}$

$$H^*_c(Y;\mathcal{A}) := H^*_W(\overline{Y};\phi_!^{ab} \circ \phi^*\mathcal{A}),$$

is defined as the cohomology of $\phi_!^{ab} \circ \phi^*(\mathcal{A})$ in the topos $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$.

We denote by $A^{\mathcal{D}} = Hom_{cont}(A;\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ the Pontryagin dual of a Hausdorff abelian locally compact topological group A.

THEOREM 6.49. *One has the following equalities :*

$$\begin{aligned} H^q_c(Y;\mathbb{Z}) &= 0 \ \ for\ q = 0, \\ &= (\textstyle\prod_{Y_\infty}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \ \ for\ q = 1, \\ &= Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \ \ for\ q = 2, \\ &= \mu_F^{\mathcal{D}} \ \ for\ q = 3, \\ &= 0 \ \ for\ q \geq 4, \end{aligned}$$

PROOF. For any archimedean valuation v, the functor i_{v*} (between the abelian categories) is exact and preserves injective objects, since i_v is a closed embedding. So the Leray spectral sequence

$$H^p_W(\overline{Y}; R^q(i_{v*})(\mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}(B_{W_{k(v)}}; \mathcal{A})$$

degenerates and yields the isomorphisms

$$H^q_W(\overline{Y}; i_{v*}\mathcal{A}) \simeq H^q(B_{W_{k(v)}}; \mathcal{A})$$

for any q and any abelian object $\mathcal{A}$. Hence, one has

$$H^q_W(\overline{Y}; \prod_{v\in Y_\infty} i_{v*}i_v^*\mathbb{Z}) \simeq \prod_{v\in Y_\infty} H^q_W(\overline{Y}; i_{v*}\mathbb{Z}) \simeq \prod_{v\in Y_\infty} H^q(B_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \simeq \prod_{v\in Y_\infty} \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad 0,$$

for $q = 0$ and $q \geq 1$ respectively (see **[16]** Proposition 9.6). Then the long exact sequence of cohomology associated to (105) yields the identification

$$H^q_c(Y; \mathbb{Z}) \simeq H^q_W(\overline{Y}; \mathbb{Z}),$$

for $q \geq 2$ and the following exact sequence

$$0 \to H^0_c(Y; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \to \prod_{v\in Y_\infty} \mathbb{Z} \to H^1_c(Y; \mathbb{Z}) \to 0. \tag{106}$$

Moreover, one has $H^0_c(\overline{Y}; \mathbb{Z}) = \Gamma_W(\phi^{ab}_!\phi^*\mathbb{Z}) = 0$, and the map

$$H^0_W(\overline{Y}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{v\in Y_\infty} H^0(B_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) = \prod_{v\in Y_\infty} \mathbb{Z}$$

of the exact sequence (106) is the diagonal embedding. This yields the theorem. $\square$

THEOREM 6.50. *One has the following equalities :*

$$\begin{array}{rcl} H^q_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) & = & 0 \ \ \textit{for } q = 0, \\ & = & (\prod_{Y_\infty} \mathbb{R})/\mathbb{R} \ \ \textit{for } q = 1, \\ & = & (\prod_{Y_\infty} \mathbb{R})/\mathbb{R} \ \ \textit{for } q = 2, \\ & = & 0 \ \ \textit{for } q \geq 3. \end{array}$$

PROOF. The same argument as in the preceding proof gives

$$H^q_W(\overline{Y}; \prod_{v\in Y_\infty} i_{v*}i_v^*\widetilde{\mathbb{R}}) \simeq \prod_{Y_\infty} \mathbb{R} \ , \ \text{and} \ \ 0$$

for $q = 0, 1$ and $q \geq 2$ respectively, since

$$i_v^*\widetilde{\mathbb{R}} = i_v^*\mathfrak{f}^*\widetilde{\mathbb{R}} = l_v^*\widetilde{\mathbb{R}} = \widetilde{\mathbb{R}}.$$

Then the long cohomology exact sequence associated to (105) yields this one

$$0 \to H^0_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) \to H^0_W(\overline{Y}; \widetilde{\mathbb{R}}) \to \prod_{v\in Y_\infty} \mathbb{R} \to H^1_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) \to H^1_W(\overline{Y}; \widetilde{\mathbb{R}}) \to \prod_{v\in Y_\infty} \mathbb{R} \to H^2_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) \to 0,$$

and

$$H^q_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) = 0 \text{ for } q \geq 3.$$

One has $H^0_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) = 0$. For $i = 0, 1$, the natural map $H^i(B_{\mathbb{R}}; \widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \to H^i_W(\overline{Y}; \widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$ is a non-zero linear map of one dimensional vector spaces, hence an isomorphism. Moreover, the map $H^i(B_{\mathbb{R}}; \widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \to H^i(B_{W_{k(v)}}; \widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$ is an isomorphism (the identity) for any archimedean valuation v and $q = 0, 1$. Indeed, this morphism is induced by the morphism of topoi $l_v \simeq Id : B_{W_{k(v)}} \simeq B_{\mathbb{R}} \to B_{\mathbb{R}}$.

Hence the map

$$H^i_W(\overline{Y}; \widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \to H^i_W(\overline{Y}; \prod_{v\in Y_\infty} i_{v*}i_v^*\widetilde{\mathbb{R}}) \simeq \prod_{v\in Y_\infty} \mathbb{R}$$

is the diagonal embedding, for $i = 0, 1$. The theorem follows.

□

5. Dedekind zeta-functions at zero

5.1. The morphisms $H^q_c(Y;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \longrightarrow H^q_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}})$. Recall that there is a closed embedding

$$u = (u_v)_{v\in Y_\infty} : \coprod_{v\in Y_\infty} \underline{Set} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{Y}}.$$

In what follows, we sometimes denote this map by (u_v).

Proposition 6.51. *There are isomorphisms of sheaves*

$$R^0(\gamma_*)(\phi_!\mathbb{Z}) \simeq \varphi_!\mathbb{Z} \ \text{ and } \ R^1(\gamma_*)(\phi_!\mathbb{Z}) \simeq \varphi_!\mathbb{Q}.$$

Moreover, one has $R^q(\gamma_*)(\phi_!\mathbb{Z}) = 0$ for $q \geq 2$.

Proof. Consider the short exact sequence of abelian sheaves

$$0 \to \phi_!\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to i_*\mathbb{Z} \to 0.$$

Applying the cohomological functor $R\gamma_*$, we get the exact sequence

$$0 \to \gamma_*\phi_!\mathbb{Z} \to \gamma_*\mathbb{Z} \to \gamma_*i_*\mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)\phi_!\mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)\mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)i_*\mathbb{Z} \to R^2(\gamma_*)\phi_!\mathbb{Z} \to 0.$$

One has $\gamma_*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ since γ is connected and

$$\gamma_*i_*\mathbb{Z} = (u_v)_* \circ (\alpha_v)_*(\mathbb{Z}) = (u_v)_*(\mathbb{Z}) =: u_*\mathbb{Z},$$

since the morphisms α_v are all connected. The map $\mathbb{Z} \to u_*\mathbb{Z}$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is surjective, hence the sequence

$$0 \to \gamma_*\phi_!\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to u_*\mathbb{Z} \to 0$$

is exact, which shows that $\gamma_*\phi_!\mathbb{Z} \simeq \varphi_!\mathbb{Z}$. Moreover, we get the exact sequence

$$0 \to R^1(\gamma_*)\phi_!\mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)\mathbb{Z} \to R^1(\gamma_*)i_*\mathbb{Z} \to R^2(\gamma_*)\phi_!\mathbb{Z} \to 0 \to ...$$

For any $q \geq 1$, one has

$$R^q(\gamma_*)i_*\mathbb{Z} \simeq R^q(\gamma_* \circ i_*)\mathbb{Z} \simeq R^q((u_v)_* \circ (\alpha_v)_*)\mathbb{Z} \simeq (u_v)_* \circ R^q((\alpha_v)_*)\mathbb{Z} = 0,$$

since $R^q(\alpha_{v*})\mathbb{Z} = H^q(B_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z})$. Hence, the canonical morphism

$$R^q(\gamma_*)\phi_!\mathbb{Z} \to R^q(\gamma_*)\mathbb{Z}$$

is an isomorphism, for any $q \geq 1$. Then the result follows from Proposition 6.42 and Corollary 6.38.

□

Proposition 6.52. *One has $R^q(\gamma_*)(\phi_!\widetilde{\mathbb{R}}) = \varphi_!\mathbb{R}$ for $q = 0, 1$, and $R^q(\gamma_*)(\phi_!\widetilde{\mathbb{R}}) = 0$ for $q \geq 2$.*

Proof. Again, one has the exact sequence

$$0 \to \gamma_*\phi_!\widetilde{\mathbb{R}} \to \gamma_*\widetilde{\mathbb{R}} \to \gamma_* i_*\widetilde{\mathbb{R}} \to R^1(\gamma_*)\phi_!\widetilde{\mathbb{R}} \to R^1(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}} \to R^1(\gamma_*)i_*\widetilde{\mathbb{R}} \to R^2(\gamma_*)\phi_!\widetilde{\mathbb{R}} \to ...$$

One has $\gamma_*\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ by Lemma 6.28 and $\gamma_* i_*\widetilde{\mathbb{R}} = (u_v)_* \circ (\alpha_v)_*\widetilde{\mathbb{R}} = (u_v)_*(\mathbb{R}) =: u_*\mathbb{R}$, since $\alpha_{v*}\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ for any archimedean valuation v. The morphism $\mathbb{R} \to u_*\mathbb{R}$ of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$ is surjective. Hence the sequence

$$0 \to \gamma_*\phi_!\widetilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \to u_*\mathbb{R} \to 0$$

is exact, which shows that $\gamma_*\phi_!\widetilde{\mathbb{R}} \simeq \varphi_!\mathbb{R}$. Moreover, we get the exact sequence

$$0 \to R^1(\gamma_*)\phi_!\widetilde{\mathbb{R}} \to R^1(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}} \to R^1(\gamma_*)i_*\widetilde{\mathbb{R}} \to R^2(\gamma_*)\phi_!\widetilde{\mathbb{R}} \to ... \tag{107}$$

As in the preceding proof, the identification (for any $q \geq 1$)

$$R^q(\gamma_*)i_*\widetilde{\mathbb{R}} \simeq (u_v)_* \circ R^q((\alpha_v)_*)\widetilde{\mathbb{R}}$$

follows from Leray spectral sequences. Moreover, $R^q(\alpha_{v*})\widetilde{\mathbb{R}} = H^q(B_{\mathbb{R}};\widetilde{\mathbb{R}})$ is $\mathbb{R}$ for $q = 0, 1$ and 0 for $q \geq 2$. Hence the proposition follows from the exact sequence (107), Corollary 6.39 and Definition 6.41.

□

Proposition 6.53. *For any $q \geq 2$, one has*

$$H^q_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z}) \simeq H^q_{et}(\overline{Y};\mathbb{Z}),\ \ H^q_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Q}) \simeq H^q_{et}(\overline{Y};\mathbb{Q}),\ \ \textit{and}\ \ H^q_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R}) \simeq H^q_{et}(\overline{Y};\mathbb{R}). \tag{108}$$

Moreover, one has

$$H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z}) \simeq (\prod_{v\in Y_\infty}\mathbb{Z})/\mathbb{Z},\ \ H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Q}) \simeq (\prod_{v\in Y_\infty}\mathbb{Q})/\mathbb{Q},\ \ H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R}) \simeq (\prod_{v\in Y_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R}. \tag{109}$$

Finally, the morphisms

$$H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R})\ \ \textit{and}\ \ H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Q}) \longrightarrow H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R}) \tag{110}$$

induced by the canonical morphisms of étale sheaves $\varphi_!\mathbb{Z} \to \varphi_!\mathbb{R}$ and $\varphi_!\mathbb{Q} \to \varphi_!\mathbb{R}$ are the obvious ones.

Proof. Let $\mathcal{A}$ be an abelian sheaf of $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. The exact sequence

$$0 \to \varphi_!\varphi^*\mathcal{A} \to \mathcal{A} \to u_*u^*\mathcal{A} \to 0$$

is functorial in $\mathcal{A}$. Moreover,

$$u := (u_v)_{v\in Y_\infty} : \coprod_{v\in Y_\infty}\underline{Set} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$$

is the closed inclusion of a finite number of points of the topos $\mathcal{S}_{Et;\overline{Y}}$. Hence, $H^q_{et}(\overline{Y};u_*u^*\mathcal{A}) = 0$ for any $q \geq 1$. We obtain (108) and (109). Moreover, cohomology sends functorially short exact sequences of sheaves to long exact sequences of cohomology groups. The last claim (110) follows. □

Theorem 6.54. *For any $q \geq 0$, the canonical map*

$$H^q_c(Y;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \longrightarrow H^q_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$$

is an isomorphism.

PROOF. For any $q \neq 1,2$, the group $H^q_c(Y;\mathbb{Z})$ is torsion and $H^q_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}})=0$. Hence, one may assume that $q=1,2$. There is a canonical morphism $\mathbb{Z}\to\widetilde{\mathbb{R}}$, corresponding to $1\in\mathbb{R}$. More precisely $H^0(B_{\mathbb{R}};\widetilde{\mathbb{R}})$ is the set of maps from the one point set $\{*\}$ to the topological space $\mathbb{R}$ (since the Yoneda embedding is fully faithful). Let $s\in H^0(B_{\mathbb{R}};\widetilde{\mathbb{R}})$ sending $\{*\}$ to $1\in\mathbb{R}$. Moreover, the morphism $\mathfrak{f}:\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}\to B_{\mathbb{R}}$ yields a morphism

$$\mathfrak{f}^*: H^0(B_{\mathbb{R}};\widetilde{\mathbb{R}})\to H^0_W(\overline{Y};\mathfrak{f}^*\widetilde{\mathbb{R}}) =: H^0_W(\overline{Y};\widetilde{\mathbb{R}}).$$

Then, one has

$$\mathfrak{f}^*(s)\in H^0_W(\overline{Y};\widetilde{\mathbb{R}}) = Hom_{\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}}(\{*\};\widetilde{\mathbb{R}}) = Hom_{Ab(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}})}(\mathbb{Z};\widetilde{\mathbb{R}}).$$

We obtain a morphism

$$m := \phi_!\phi^*(\mathfrak{f}^*(s)) : \phi_!\phi^*\mathbb{Z}\longrightarrow \phi_!\phi^*\widetilde{\mathbb{R}}.$$

For any ultrametric valuation v, the morphism of $B_{W_{k(v)}}$

$$i_v^*(m) = i_v^*(\mathfrak{f}^*(s)) = l_v^*(s) : \mathbb{Z}\to\widetilde{\mathbb{R}}$$

is induced by the canonical continuous morphism $\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ (sending 1 to 1), of topological groups with trivial $W_{k(v)}$-action. Indeed, one has an isomorphism $\mathfrak{f}\circ i_v\simeq l_v$. Then, the maps

$$\alpha_{v*}\circ i_v^*(m) : \alpha_{v*}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\to\alpha_{v*}(\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$$

$$\text{and}\quad R^1(\alpha_{v*})\circ i_v^*(m) : R^1(\alpha_{v*})(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}\to R^1(\alpha_{v*})(\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$$

are the canonical morphisms $\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ of constant objects of $B^{sm}_{G_{k(v)}}$. Consider the morphisms

$$\gamma_*(m):\gamma_*(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\to\gamma_*(\widetilde{\mathbb{R}})=\mathbb{R}\ \text{ and }\ R^1(\gamma_*)(m):R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z})=\varphi_!\varphi^*\mathbb{Q}\to R^1(\gamma_*)(\widetilde{\mathbb{R}})=\mathbb{R}.$$

Let $t_0:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ and $t_1:\varphi_!\varphi^*\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ be the canonical morphisms of étale sheaves. For any closed point v of $\overline{Y}$, one has $u_v^*(\gamma_*(m)) = u_v^*(t_0)$ and $u_v^*(R^1(\gamma_*)(m)) = u_v^*(t_1)$, since $u_v^*\circ R^q(\gamma_*)\simeq R^q(\alpha_{v*})\circ i_v^*$. We get

$$\gamma_*(m)=t_0\ \text{ and }\ R^1(\gamma_*)(m)=t_1, \tag{111}$$

since the family of functors $\{u_v^*; v\in\overline{Y}^0\}$ is conservative.

The morphism of abelian sheaves $m:\phi_!\mathbb{Z}\to\phi_!\widetilde{\mathbb{R}}$ induces a morphism M of spectral sequences from

$$H^p_{et}(\overline{Y};R^q(\gamma_*)(\phi_!\mathbb{Z}))\Rightarrow H^{p+q}_W(\overline{Y};\phi_!\mathbb{Z}) = H^{p+q}_c(Y;\mathbb{Z})$$

to

$$H^p_{et}(\overline{Y};R^q(\gamma_*)(\phi_!\widetilde{\mathbb{R}}))\Rightarrow H^{p+q}_W(\overline{Y};\phi_!\widetilde{\mathbb{R}}) = H^{p+q}_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}}).$$

This morphism of spectral sequences yields a commutative square

$$\begin{tikzcd}
H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_c(Y;\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R}) \arrow[r] & H^1_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}})
\end{tikzcd}$$

so that the horizontal arrows are both isomorphisms. By (111) and (110), the map

$$H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z}) = (\prod_{v\in Y_\infty}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}\longrightarrow H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R}) = (\prod_{v\in Y_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R}$$

of the preceding diagram is the obvious one. Hence, the map

$$H^1_c(Y;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\longrightarrow H^1_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$$

is an isomorphism.

Moreover, the morphism M yields the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_c(Y;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & H^3_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^3_c(Y;\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & H^2_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}}) \arrow[r] & H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R}) \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

where the rows are exact.

Recall that $H^2_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z})=H^2_{et}(\overline{Y};\mathbb{Z})=Pic(Y)^D$ and $H^3_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Z})=H^3_{et}(\overline{Y};\mathbb{Z})=U_K^D$ are both torsion. Since $\mathbb{R}$ is torsion-free hence flat, we get a commutative square

$$\begin{tikzcd}
H^2_c(Y;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Q})\otimes\mathbb{R} \arrow[d] \\
H^2_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}}) \arrow[r] & H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

where the horizontal arrows are both isomorphisms of $\mathbb{R}$-vector spaces.

By (111) and (110), the map

$$H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Q})=(\prod_{v\in Y_\infty}\mathbb{Q})/\mathbb{Q}\longrightarrow H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R})=(\prod_{v\in Y_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R}$$

of the preceding diagram is the obvious one. Then, the map

$$H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{Q})\otimes\mathbb{R}\longrightarrow H^1_{et}(\overline{Y};\varphi_!\mathbb{R})$$

is an isomorphism, which implies that

$$H^2_c(Y;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\longrightarrow H^2_c(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$$

is an isomorphism.

□

5.2. Euler characteristics. Let $\zeta_K(s)$ be the Dedekind zeta-function of the number field K.

5.2.1. *The order of the zero of $\zeta_K(s)$ at $s=0$.* Stephen Lichtenbaum has defined the secondary Euler characteristic of $\mathbb{Z}$ by the formula

$$\chi'_c(\mathbb{Z}) \quad := \quad \sum_{i\geq 0}(-1)^i\; i\; rk(H^i_c(Y;\mathbb{Z}))$$

By Theorem 6.49, we get

$$\chi'_c(\mathbb{Z})=-(r_1+r_2-1)+2(r_1+r_2-1)=r_1+r_2-1.$$

THEOREM 6.55. *One has*

$$ord_{s=0}\;\zeta_K(s)=\chi'_c(\mathbb{Z}).$$

5.2.2. *Determinant of an acyclic complex of vector spaces.* For an acyclic complex of $\mathbb{R}$-vector spaces

$$0 \longrightarrow V^0 \xrightarrow{D} V^1 \xrightarrow{D} ... \xrightarrow{D} V^r \xrightarrow{D} 0 \tag{112}$$

and bases $\mathfrak{b}^i$ of V^i the determinant $det(V^*; D; \mathfrak{b}^*)$ is defined as follows. The exact sequence (112) induces an isomorphism

$$\bigotimes_i (det\, V^i)^{(-1)^i} \to \mathbb{R}. \tag{113}$$

Here $L^1 = L$ and $L^{-1} := L^*$ for one-dimensional $\mathbb{R}$-vector spaces L. Every basis $\mathfrak{b}^i$ determines a nonzero element of $det\, V^i$. Using (113) these elements determine a nonzero real number whose absolute value is denoted by $det(V^*; D; \mathfrak{b}^*)$. Note that $det(V^*; D; \mathfrak{b}^*)$ is unchanged up to sign if we replace the bases $\mathfrak{b}^i$ with bases $\mathfrak{a}^i$ such that $det(Id_{V^i}; \mathfrak{b}^i; \mathfrak{a}^i) = \pm 1$ for all i.

5.2.3. *The leading coefficient $\zeta_K^*(0)$ in the Taylor development of $\zeta_K(s)$ at zero.* One has

$$H^1_W(\overline{Y}; \widetilde{\mathbb{R}}) := Ext_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}; \widetilde{\mathbb{R}}) = Ext_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}; \widetilde{\mathbb{R}})$$

since cohomology commutes with restrictions of the base ring (see **[24]** V.3.5).

The sheaf $\widetilde{\mathbb{R}}$ of $B_{\mathbb{R}}$ is represented by the topological group $\mathbb{R}$ with trivial $\mathbb{R}$-action. Then the group $H^1(\mathbb{R}; \widetilde{\mathbb{R}}) := H^1(B_{\mathbb{R}}; \widetilde{\mathbb{R}})$ is canonically isomorphic to the group $Hom_{cont}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ of continuous morphisms from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Hence this group has a canonical non-zero element $Id_{\mathbb{R}} \in Hom_{cont}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = H^1(B_{\mathbb{R}}; \widetilde{\mathbb{R}})$. The morphism of (ringed) topoi $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \to B_{\mathbb{R}}$ induces a linear map

$$\mathfrak{f}^* : H^1(B_{\mathbb{R}}; \mathbb{R}) \to H^1_W(\overline{Y}; \mathbb{R}).$$

Definition 6.56. *The* canonical class *is defined by*

$$\psi = \mathfrak{f}^*(Id_{\mathbb{R}}) \in H^1_W(\overline{Y}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Note that the restriction $i_v^*(\psi) \in H^1(B_{W_{k(v)}}; \widetilde{\mathbb{R}}) = Hom_{cont}(W_{k(v)}; \mathbb{R})$ is the canonical morphism $i_v^*(\psi) = Id_{\mathbb{R}} \circ l_v : W_{k(v)} \to \mathbb{R}$, for any $v \in \overline{Y}$. One has

$$\begin{aligned} H^i_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) &:= H^i_W(\overline{Y}; \varphi_!\varphi^*\widetilde{\mathbb{R}}) && (114)\\ &= Ext_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}; \varphi_!\varphi^*\widetilde{\mathbb{R}}) = Ext_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}; \varphi_!\varphi^*\widetilde{\mathbb{R}}) && (115)\\ &= Ext_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\widetilde{\mathbb{R}}; \varphi_!\varphi^*\widetilde{\mathbb{R}}). && (116)\end{aligned}$$

Indeed, consider the morphism of ringed topoi

$$(\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}; \widetilde{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}; \mathbb{R})$$

given by $Id : \mathcal{S}_{W;\overline{Y}} \to \mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ and by the canonical morphism $Id^*\mathbb{R} = \mathbb{R} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ of $\mathcal{S}_{W;\overline{Y}}$ defined in the proof of Theorem 6.54. Then (115) and (116) follow from (**[24]** V.3.5). The same argument shows that

$$H^1_W(\overline{Y}; \widetilde{\mathbb{R}}) = Ext^1_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\widetilde{\mathbb{R}}; \widetilde{\mathbb{R}}).$$

Hence, the Yoneda product

$$Ext^1_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\widetilde{\mathbb{R}}; \widetilde{\mathbb{R}}) \times Ext^q_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\widetilde{\mathbb{R}}; \varphi_!\varphi^*\widetilde{\mathbb{R}}) \longrightarrow Ext^{q+1}_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\widetilde{\mathbb{R}}; \varphi_!\varphi^*\widetilde{\mathbb{R}})$$

yields a map

$$H^1_W(\overline{Y}; \widetilde{\mathbb{R}}) \times H^q_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}) \longrightarrow H^{q+1}_c(Y; \widetilde{\mathbb{R}}).$$

This pairing induces a map $D = \cup\psi$ from $H_c^q(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$ to $H_c^{q+1}(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$. Observe that, since ψ lies in $H^1(B_{\mathbb{R}};\widetilde{\mathbb{R}})$, $\psi \cup \psi = 0$, so cupping with ψ makes the groups $H_c^*(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$ into a complex. In other words, $D \circ D = 0$. The map

$$D := \cup\psi : H_c^1(Y;\widetilde{\mathbb{R}}) = (\prod_{Y_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R} \longrightarrow H_c^2(Y;\widetilde{\mathbb{R}}) = H_c^2(Y;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} = Hom(U_K;\mathbb{R}),$$

is induced by the $\mathbb{R}$-linear map

$$\prod_{Y_\infty}\mathbb{R} \longrightarrow Hom(U_K;\mathbb{R})$$

which sends an archimedean valuation $v \in Y_\infty$ to the morphism

$$\begin{array}{ccc} U_K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & log(|u|_v) \end{array}.$$

In particular, the complex

$$\dots \xrightarrow{D} H_c^q(Y;\widetilde{\mathbb{R}}) \xrightarrow{D} H_c^q(Y;\widetilde{\mathbb{R}}) \xrightarrow{D} \dots$$

is acyclic. We take a basis $\mathfrak{b}^1$ of $H_c^1(Y;\mathbb{Z})$ by choosing $r_1 + r_2 - 1$ archimedean valuations of F. This yields a basis of $H_c^1(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$ by Theorem 6.54. The dual basis $\mathfrak{b}^2$ of any basis of the units of K modulo torsion defines a basis of $H_c^2(Y;\mathbb{Z}) = Hom(U_K;\mathbb{Z})$. We get a basis of $H_c^2(Y;\widetilde{\mathbb{R}})$, by Theorem 6.54. Note that $det(Id_{H_c^i(Y;\widetilde{\mathbb{R}})};\mathfrak{b}^i;\mathfrak{a}^i) = \pm 1$, for any other basis $\mathfrak{a}^i$ of $H_c^i(Y;\mathbb{Z})$. It is now easy to see that the determinant of the complex $(H_c^*(Y;\widetilde{\mathbb{R}});D;\mathfrak{b}^*)$ is R^{-1}, where R is the classical regulator.

The Euler characteristic of $\mathbb{Z}$ is defined by

$$\chi_c(\mathbb{Z}) := \prod_{i\geq 0} \mid H_c^i(Y;\mathbb{Z})_{tor} \mid^{(-1)^i} \; det(H_c^*(Y;\widetilde{\mathbb{R}});D;\mathfrak{b}^*)^{-1}.$$

Using Theorem 6.49, the equality $det(H_c^*(Y;\widetilde{\mathbb{R}});D;\mathfrak{b}^*) = R^{-1}$ and the analytic class number formula $\zeta_K^*(0) = -hR/w$, we get the following theorem.

THEOREM 6.57. *Let $\zeta_K^*(0)$ be the leading coefficient in the Taylor development of $\zeta_K^*(s)$ at $s = 0$. Then*

$$\zeta_K^*(0) = \pm\chi_c(\mathbb{Z}).$$

6. Can one prove that the Weil topos does not exist?

In this section, we try to show that the Weil topos of a number field does not exist.

6.1. The following question is due to Matthias Flach. The existence of the Weil topos would imply that the class $R\gamma_*\mathbb{Z}$ described below exists. Does it lead to a contradiction?

QUESTION 6.58. *(Matthias Flach) "Can one construct a complex of étale sheaves $R\gamma_*\mathbb{Z}$ on Y with cohomology $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$ in degrees 0 and 1, i.e. a class $c \in Ext^2_Y(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, whose pullback to every closed point v is the correct class in characteristic p. By Geisser's computation this class (written as a morphism in the derived category) is*

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[1] \longrightarrow \mathbb{Z}[2]$$

where $b : \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[1] \to \mathbb{Z}[2]$ is the Ext^1-class given by $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ and $e : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[1]$ is the Ext^1-class represented by $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ with $g \in G_{k(v)} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$ acting by $g(a,b) = (a + gb, b)$."

6.2. In the proof of Theorem 6.44, we need an isomorphism

$$(\prod_{Y_\infty}\mathbb{Q})/\mathbb{Q}\simeq Hom(U_K,\mathbb{Q}).$$

These $\mathbb{Q}$-vector spaces are indeed isomorphic, but such an isomorphism is not at all canonical! In fact, there is a canonical isomorphism

$$(\prod_{Y_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R}\simeq Hom(U_K,\mathbb{R}),$$

but this map is not defined over $\mathbb{Q}$.

6.3. We assume here that the number field K is totally imaginary. Suppose that the Weil topos $\gamma:\mathcal{S}_{W,\overline{Y}}\to\mathcal{S}_{Et,\overline{Y}}$ exists. Consider the induced morphism

$$\gamma_{/Y}:\mathcal{S}_{W,Y}\longrightarrow\mathcal{S}_{Et,Y}$$

over $Y\subset\overline{Y}$. The conditions $(C5)$, $(C6)$ and $(C7)$ imply that

$$R^q(\gamma_{/Y,*})\mathbb{Z}=\mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \text{ and } 0,$$

for $q=0$, 1 and $q\geq 2$ respectively. The natural map

$$H^0_{Et}(Y,\mathbb{Q})\longrightarrow H^2_W(Y,\mathbb{Z})=Pic(Y)^D$$

is the zero map. Then the spectral sequence

$$H^p_{Et}(Y,R^q(\gamma_{/Y,*})\mathbb{Z})\Rightarrow H^{p+q}_W(Y,\mathbb{Z})$$

yields

$$H^1_W(Y,\mathbb{Z})=\mathbb{Q}.$$

Assume now that $\mathcal{S}_{W,Y}$ is locally connected. Take an ultrametric valuation v of K and define

$$p:\underline{Set}\longrightarrow B_{W_{k(v)}}\longrightarrow\mathcal{S}_{W,Y}.$$

Here the second map is induced by i_v and the first map is given by the canonical morphisms

$$\underline{Set}\longrightarrow\mathcal{T}\longrightarrow B_{W_{k(v)}}.$$

We get a point $p:\underline{Set}\longrightarrow\mathcal{S}_{W,Y}$. The fundamental pro-group $\underline{G}=\pi_1(\mathcal{S}_{W,Y},p)$ is a strict pro-group so that there is an isomorphism

$$H^1(\mathcal{S}_{W,Y},A)\simeq Hom(\underline{G},A),$$

for any abelian group A.

Question 6.59. *Is there a strict pro-group* $\underline{G}$ *such that*

$$Hom(\underline{G},\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Q}?$$

CHAPITRE 7

Une alternative à la condition de Beck-Chevalley

Le chapitre 6, en montrant que la condition de Beck-Chevalley ne peut être vraie en caractéristique nulle, amène à douter de l'existence d'un topos Weil-étale muni d'un morphisme dans le topos étale. Un tel objet se manifesterait par l'existence d'un complexe de faisceaux sur le site étale d'Artin-Verdier, dont l'hypercohomologie serait la cohomologie Weil-étale à coefficients entiers conjecturée par S. Lichtenbaum. Dans l'esprit de la question 6.58, il est nécessaire de construire ce complexe étale avant d'espérer pouvoir définir le topos Weil-étale d'un corps de nombres.

Le théorème 7.22 assure l'existence d'un tel complexe dans le cas des corps de nombres totalement imaginaires. Cette construction repose sur les calculs de **[37]** et sur les techniques développées dans le chapitre 4. L'existence de ce complexe de faisceaux étales était à priori loin d'être claire. En effet, la cohomologie Weil-étale calculée par S. Lichtenbaum, n'est pas celle d'un topos, et encore moins celle d'un topos au-dessus du topos étale. Cependant, une décomposition du topos étale de $\overline{X}=\overline{Spec(\mathcal{O}_K)}$ en une limite projective permet la construction d'un complexe $R\mathbb{Z}$ de faisceaux étales, dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale calculée par S. Lichtenbaum. Mais une deuxième difficulté apparaît immédiatement. La cohomologie des premiers faisceaux $H^q(R\mathbb{Z})$ doit permettre au complexe tronqué

$$R_W(\mathbb{Z}):=\tau_{\leq 2}R\mathbb{Z}$$

d'avoir la bonne cohomologie Weil-étale. Plus précisément, le faisceau $H^2(R\mathbb{Z})$ doit être acyclique pour le foncteur des sections globales, comme nous le montrons à l'aide de certains résultats de **[16]**.

La construction du complexe $R_W\mathbb{Z}$ permet ainsi d'espérer l'existence d'un topos Weil-étale muni d'un morphisme canonique de celui-ci dans le topos étale. Dans la deuxième section de ce chapitre, nous décrivons de manière partielle ce que devrait être le topos Weil-étale. Cette description n'est pas de nature topologique, puisqu'elle concerne essentiellement les faisceaux $R^q(\gamma_*)\mathbb{Z}$ et $R^q(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}}$. Cependant, le calcul de la cohomologie Weil-étale à support compact impose au morphisme

$$i_v : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_W(\overline{X})$$

d'être un plongement fermé, quelle que soit la valuation archimédienne v. L'existence de ce topos permettrait de vérifier la conjecture 1 pour les anneaux d'entiers de corps de nombres.

1. Un complexe étale pour la cohomologie Weil-étale

Dans cette section, nous supposons pour simplifier que le corps de nombres K est totalement imaginaire.

DÉFINITION 7.1. *Nous disons qu'un topos T est fortement compact lorsque les foncteurs $H^n(T,-)$ commutent aux limites inductives filtrantes.*

Soit $(T_i, f_{ji})_{i\in I}$ un système projectif filtrant de topos, où les $f_{ji} : T_j \to T_i$ sont les morphismes de transition. On note $T_\infty := \varprojlim T_i$ le topos limite projective et $f_i : T_\infty \to T_i$ les morphismes canoniques. Pour chaque $i \in I$, on se donne un objet abélien A_i de T_i, puis un système de morphismes $\alpha_{ij} : f_{ji}^* A_i \to A_j$ de sorte que l'on ait l'égalité suivante :

$$\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \circ f_{kj}^*(\alpha_{ij}) : f_{ki}^* A_i = f_{kj}^* f_{ji}^* A_i \longrightarrow f_{kj}^* A_j \longrightarrow A_k.$$

Alors les morphismes $f_j^*(\alpha_{ij})$ font de $(f_i^* A_i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant dans T_∞. On pose

$$A_\infty := \varinjlim f_i^* A_i.$$

Lemme 7.2. *On se place dans la situation décrite ci-dessus. Si les topos T_i sont fortement compacts, alors le morphisme canonique*

$$\varinjlim H^n(T_i, A_i) \longrightarrow H^n(T_\infty, A_\infty)$$

est un isomorphisme, quel que soit l'entier n.

Démonstration. D'après ([**24**] VI Corollaire 8.7.7) le topos T_∞ est lui aussi fortement compact. On obtient

$$H^n(T_\infty, A_\infty) = \varinjlim H^n(T_\infty, f_i^* A_i) = \varinjlim_{i\in I} (\varinjlim_{j\to i} H^n(T_j, f_{ji}^* A_i)),$$

à nouveau grâce à ([**24**] VI Corollaire 8.7.7). On vérifie facilement que le morphisme canonique

$$\varinjlim_{i\in I} (\varinjlim_{j\to i} H^n(T_j, f_{ji}^* A_i)) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} H^n(T_i, A_i)$$

est un isomorphisme. On obtient le résultat annoncé en remarquant que le morphisme canonique

$$\varinjlim_{i\in I} (\varinjlim_{j\to i} H^n(T_j, f_{ji}^* A_i)) \longrightarrow H^n(T_\infty, A_\infty)$$

se factorise à travers $\varinjlim_{i\in I} H^n(T_i, A_i)$. □

Soit $\overline{X}$ l'ensemble des valuations d'un corps de nombres K, et soit L/K une extension galoisienne finie. Les sites $(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})$ sont définis en 4.71. Rappelons que $Et_{L/K}$ est la sous-catégorie pleine de $Et_{\overline{X}}$ constituée des $\overline{X}$-schémas étales (de type fini) $\overline{U}$ dont la fibre générique U_{v_0} est un $Gal(L/K)$-ensemble fini. Un *système compatible de faisceaux sur* $(\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}})_L$ est donné par une famille (A_L, α_u), où A_L est un objet abélien de $(\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}})$, et $\alpha_u : u^* A_L \to A_{L'}$ est un morphisme défini pour chaque flèche de transition

$$u : (\widetilde{Et_{L'/K}, \mathcal{J}_{et}}) \longrightarrow (\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}}),$$

associée à une extension $L'/L/K$. Les morphismes α_u doivent satisfaire la condition de transitivité décrite ci-dessus.

Corollaire 7.3. *Soit (A_L, α_u) un système compatible de faisceaux sur $(\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}})_L$. Définissons le faisceau étale A_∞ comme ci-dessus. On a un isomorphisme*

$$\varinjlim H^n(Et_{L/K}, A_L) \simeq H^n_{Et}(\overline{X}, A_\infty)$$

où L parcourt l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{K}/K$.

Démonstration. En effet, les topos $(\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}})$ sont cohérents et donc fortement compacts (cf [**24**] VI Corollaire 5.2). Il suffit donc d'appliquer le lemme précédent. □

PROPOSITION 7.4. *Il existe une famille de faisceaux* ($R^q\mathbb{Z}$, $q \geq 0$) *sur* $\mathcal{S}_{Et,\overline{X}}$, *ainsi qu'une suite spectrale convergente*

$$H^p_{Et}(\overline{X}, R^q\mathbb{Z}) \Longrightarrow \underrightarrow{H}^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z})$$

dont l'aboutissement est la cohomologie Weil-étale de Lichtenbaum.

DÉMONSTRATION. On fixe une extension galoisienne finie L/K. Considérons le faisceau

$$\mathbb{Z}_L^{(q)} := \underrightarrow{lim}_S\, R^q(\zeta_{L,S,*})\mathbb{Z},$$

sur $(Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et})$. Ci-dessus, l'extension L/K est fixe alors que S parcourt l'ensemble des parties finies de places de K, contenant les places archimédiennes ainsi que les places ramifiées dans L/K. Pour chaque S, on a une suite spectrale de Leray

$$H^p(Et_{L/K}, R^q(\zeta_{L,S,*})\mathbb{Z}) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}),$$

associée à la composition

$$\mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow (\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}}) \longrightarrow \underline{Set}.$$

En passant à la limite sur les parties finies S, on obtient une suite spectrale convergente

$$H^p(Et_{L/K}, \mathbb{Z}_L^{(q)}) \Longrightarrow \underrightarrow{lim}_S H^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}),$$

car les foncteurs $H^p(Et_{L/K}, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes de faisceaux. D'après la proposition 4.76, la famille $(\mathbb{Z}_L^{(q)})_L$ est un système compatible de faisceaux sur $(\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}})_L$. En passant à la limite sur les extensions galoisiennes finies $\overline{K}/L/K$, on obtient donc

$$\underrightarrow{lim}_L H^p(Et_{L/K}, \mathbb{Z}_L^{(q)}) \Longrightarrow \underrightarrow{lim}_L\, \underrightarrow{lim}_S H^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}).$$

D'après le corollaire précédent, cette suite spectrale convergente s'écrit

$$H^p_{Et}(\overline{X}, R^q\mathbb{Z}) \Longrightarrow \underrightarrow{lim}_{L,S} H^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}) := \underrightarrow{H}^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}),$$

Ci-dessus, on a défini

$$R^q\mathbb{Z} := \underrightarrow{lim}\, u_L^*\mathbb{Z}_L^{(q)},$$

où $u_L : \mathcal{S}_{Et,\overline{X}} \to (\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}})$ est le morphisme canonique.

□

Les groupes $\underrightarrow{H}^q(\mathfrak{F}_{L/K(U),S}, \overline{U}, \mathbb{Z})$ sont définis par la notation 4.42 et la proposition 4.74 pour un $\overline{X}$-schéma étale connexe $\overline{U}$. Ils sont calculés dans le théorème 4.43.

LEMME 7.5. *Le faisceau* $R^q\mathbb{Z}$ *est le faisceau associé au préfaisceau*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}^q\mathbb{Z}: & Et_{\overline{X}} & \longrightarrow & \underline{Ab} \\ & \overline{U} & \longmapsto & \underrightarrow{H}^q(\mathfrak{F}_{L/K(U),S}, \overline{U}, \mathbb{Z}) \end{array}.$$

DÉMONSTRATION. Le faisceau $R^q(\zeta_{L,S,*})\mathbb{Z}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}^q_{L,S}: & Et_{L/K} & \longrightarrow & \underline{Ab} \\ & \overline{U} & \longmapsto & H^q(\mathfrak{F}_{L/K,S}/_{\overline{U}}, \mathbb{Z}) = H^q(\mathfrak{F}_{L/K(U),\widetilde{S}}, \overline{U}, \mathbb{Z}) \end{array},$$

où $\widetilde{S}$ est l'ensemble des places de $K(U)$ au-dessus de S. On en déduit que le faisceau

$$\mathbb{Z}_L^{(q)} := \underrightarrow{lim}_S\, R^q(\zeta_{L,S,*})\mathbb{Z}$$

est le faisceau associé au préfaisceau

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}^q_L := \underrightarrow{lim}_S \mathcal{P}^q_{L,S} : & Et_{L/K} & \longrightarrow & Ab \\ & \overline{U} & \longmapsto & \underrightarrow{lim}_S\, H^q(\mathfrak{F}_{L/K(U),\widetilde{S}}, \overline{U}, \mathbb{Z}) \end{array}.$$

En effet, le foncteur faisceau associé commute aux limites inductives, car c'est l'image inverse d'un morphisme de topos. On considère le morphisme de sites exacts à gauche

$$u_L^* : (Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}) \longrightarrow (Et_{\overline{X}}, \mathcal{J}_{et}).$$

Il induit le diagramme commutatif de topos suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{Et_{\overline{X}}, \mathcal{J}_{et}}) & \xrightarrow{(a,i)} & \widehat{Et}_{\overline{X}} \\ {\scriptstyle u_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (u_L^p, u_{L,p})} \\ (\widetilde{Et_{L/K}, \mathcal{J}_{et}}) & \xrightarrow{(a_L,i_L)} & \widehat{Et}_{L/K} \end{array}$$

où la catégorie $\widehat{Et}_{\overline{X}}$ est celle des préfaisceaux sur $Et_{\overline{X}}$. Pour vérifier cette affirmation, on observe les images directes de ces morphismes, pour lesquelles la commutativité est triviale. On a donc

$$a \circ u_L^p = u_L^* \circ a_L,$$

où a et a_L sont les foncteurs faisceaux associés. On obtient en particulier

$$u_L^* \mathbb{Z}_L^{(q)} := u_L^* \circ a_L(\mathcal{P}_L^q) = a \circ u_L^p(\mathcal{P}_L^q),$$

et enfin

$$R^q\mathbb{Z} := \underrightarrow{lim}_L\, u_L^* \mathbb{Z}_L^{(q)} = \underrightarrow{lim}_L\, a \circ u_L^p(\mathcal{P}_L^q) = a(\underrightarrow{lim}_L u_L^p(\mathcal{P}_L^q)),$$

où la dernière égalité est due au fait que a commute aux limites inductives. En d'autres termes, $R^q\mathbb{Z}$ est le faisceau étale sur $\overline{X}$ associé au préfaisceau $\underrightarrow{lim}_L u_L^p(\mathcal{P}_L^q)$. Ce préfaisceau s'explicite comme suit. Pour tout $\overline{X}$-schéma étale connexe $\overline{V}$, on a

$$[\underrightarrow{lim}_L u_L^p(\mathcal{P}_L^q)](\overline{V}) = \underrightarrow{lim}_L [u_L^p(\mathcal{P}_L^q)(\overline{V})] = \underrightarrow{lim}_L [\underrightarrow{lim}_{\overline{V}\to\overline{U}}\ \mathcal{P}_L^q(\overline{V})],$$

où la deuxième limite est prise sur la catégorie des flèches $\overline{V} \to \overline{U}$ pour $\overline{U}$ décrivant $Et_{L/K}$. La première égalité peut s'expliquer en disant que les limites de préfaisceaux se calculent arguments par arguments.

Dès que $\overline{V}$ est un objet de $Et_{L/K}$, on a

$$\underrightarrow{lim}_{\overline{V}\to\overline{U}}\ \mathcal{P}_L^q(\overline{U}) = \mathcal{P}_L^q(\overline{V})$$

car $Id_{\overline{V}}$ est alors un objet initial de la catégorie des flèches $\overline{V} \to \overline{U}$, pour $\overline{U}$ dans $Et_{L/K}$. On en déduit les identifications suivantes :

$$[\underrightarrow{lim}_L u_L^p(\mathcal{P}_L^q)](\overline{V}) = \underrightarrow{lim}_L [\underrightarrow{lim}_{\overline{V}\to\overline{U}}\ \mathcal{P}_L^q(\overline{V})] = \underrightarrow{lim}_L \mathcal{P}_L^q(\overline{V}) = \underrightarrow{lim}_L\ \underrightarrow{lim}_S\ H^q(\mathfrak{F}_{L/K(V),\widetilde{S}}, \overline{V}, \mathbb{Z}).$$

Ainsi, $R^q\mathbb{Z}$ est le faisceau étale sur $\overline{X}$ associé au préfaisceau

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}^q : & Et_{\overline{X}} & \longrightarrow & Ab \\ & \overline{V} & \longmapsto & \underrightarrow{lim}_{L,S}\, H^q(\mathfrak{F}_{L/K(V),\widetilde{S}}, \overline{V}, \mathbb{Z}) =: \underrightarrow{H}^q(\mathfrak{F}_{L/K(V),\widetilde{S}}, \overline{V}, \mathbb{Z}) \end{array}.$$

□

COROLLAIRE 7.6. *On a* $R^0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ *et* $R^i(\mathbb{Z}) = 0$ *pour* $i \geq 1$ *impair.*

DÉMONSTRATION. C'est immédiat. □

REMARQUE 7.7. *Les deux lemmes suivants permettent de démontrer que le faisceau $R^2\mathbb{Z}$ est acyclique pour le foncteur des sections globales sur $\overline{X}$ (i.e. sa cohomologie s'annule en degré $i \geq 1$).*

LEMME 7.8. *On a l'identification*
$$H^0_{Et}(\overline{X}, R^4\mathbb{Z}) := R^4\mathbb{Z}(\overline{X}) = \underrightarrow{H}^4(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}).$$

DÉMONSTRATION. Soit
$$J : B_{W_K} \longrightarrow B^{sm}_{G_K} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{X}}$$
le morphisme induit par l'inclusion du point générique de $\overline{X}$, ainsi que par le morphisme $W_K \to G_K$ du groupe de Weil de K dans son groupe de Galois. Pour $n \geq 0$, le faisceau étale $R^n(J_*)\mathbb{Z}$ est le faisceau associé au préfaisceau
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}^n(J_*)\mathbb{Z} : & Et_{\overline{X}} & \longrightarrow & \underline{Ab} \\ & \overline{U} & \longmapsto & H^n(W_{K(U)}, \mathbb{Z}) \end{array},$$
où $\overline{U}$ est supposé connexe. Le groupe $W_{K(U)}$ est ici le groupe de Weil du corps de nombres $K(U)$. Quelle que soit l'extension K'/K, on a un morphisme surjectif (d'après [**16**]) de groupes
$$H^4(W_{K'}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \sum_{v \in Y_\infty} H^4(W_{K'_v}, \mathbb{Z}) = \sum_{v \in Y_\infty} H^4(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) = \sum_{v \in Y_\infty} \mathbb{Z}, \tag{117}$$
où Y_∞ est l'ensemble des valuations archimédiennes de K'. On note désormais
$$u : \coprod_{X_\infty} \underline{Set} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{X}}$$
l'immersion fermée de topos correspondant à l'inclusion des places archimédiennes de K dans $\overline{X}$. Alors (117) induit un morphisme surjectif de préfaisceaux
$$\mathcal{P}^4(J_*)\mathbb{Z} \longrightarrow u_*\mathbb{Z}.$$
On obtient la suite exacte de préfaisceaux
$$0 \longrightarrow \mathcal{P}^4(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}^4(J_*)\mathbb{Z} \longrightarrow u_*\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$
d'après le lemme 7.5 et la proposition 4.43. Comme le foncteur faisceau associé est exact, on a une suite exacte de faisceaux
$$0 \longrightarrow R^4(\mathbb{Z}) \longrightarrow R^4(J_*)\mathbb{Z} \longrightarrow u_*\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$
car $u_*\mathbb{Z}$ est déjà un faisceau. On en tire la suite exacte longue de cohomologie
$$0 \longrightarrow R^4(\mathbb{Z})(\overline{X}) \longrightarrow R^4(J_*)\mathbb{Z}(\overline{X}) \longrightarrow \sum_{X_\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow ...$$
On montre dans le lemme suivant l'existence d'un isomorphisme canonique
$$R^4(J_*)\mathbb{Z}(\overline{X}) \simeq H^4(W_K, \mathbb{Z}).$$
Ainsi, les groupes $R^4(\mathbb{Z})(\overline{X})$ et $\underrightarrow{H}^4(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z})$ sont l'un et l'autre munis d'un isomorphisme dans le noyau de la flèche
$$H^4(W_K, \mathbb{Z}) \longrightarrow \sum_{X_\infty} \mathbb{Z}.$$
Le résultat est donc une conséquence du lemme suivant. □

On note W_K^1 le sous-groupe maximal compact du groupe de Weil W_K. On a l'identification $W_K = W_K^1 \times \mathbb{R}$. Dans les deux lemmes suivants, on note

$$\alpha : B_{W_K} \longrightarrow B_{W_K^1}$$

le morphisme induit par la projection de W_K sur W_K^1.

LEMME 7.9. *Quel que soit $n \geq 1$, on a $R^n(\alpha_*)\mathbb{Z} = 0$.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 9.1 de [**16**], on peut remplacer $\mathcal{T}$, B_{W_K} et $B_{W_K^1}$ par les topos obtenus en restreignant la catégorie des espaces topologiques $\underline{Top}$ à celle des espaces localement compacts à bases dénombrables d'ouverts $\underline{Top}^{lc}$. On regarde maintenant le pull-back

$$\begin{tikzcd} B_{\mathbb{R}} \arrow[r, "e_{\mathbb{R}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "l"] \\ B_{W_K} \arrow[r, "\alpha"] & B_{W_K^1} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des morphismes de localisation (on a par exemple $B_{W_K^1}/E_{W_K^1} \simeq \mathcal{T}$). On vérifie facilement que ce type de pull-back induit un isomorphisme

$$l^* R^n(\alpha_*) \simeq R^n(e_{\mathbb{R}*}) f^*.$$

D'autre part, l'objet de $\mathcal{T}$

$$R^n(e_{\mathbb{R}*}) f^* \mathbb{Z} = R^n(e_{\mathbb{R}*})\mathbb{Z}$$

est représenté par le groupe abélien discret $H^n(B_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z})$ (cf Proposition 9.2 de [**16**]). Comme ce groupe est nul pour tout entier $n \geq 1$, on a $l^* R^n(\alpha_*)\mathbb{Z} = 0$. Mais l^* est fidèle donc conservatif. Le résultat suit.

□

LEMME 7.10. *On a un isomorphisme canonique*

$$R^4(J_*)\mathbb{Z}(\overline{X}) \simeq H^4(W_K, \mathbb{Z}).$$

DÉMONSTRATION. On décompose le morphisme $J : B_{W_K} \to \mathcal{S}_{Et,\overline{X}}$ comme suit :

$$J = \beta \circ \alpha : B_{W_K} \longrightarrow B_{W_K^1} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{X}}.$$

Le lemme précédent et la suite spectrale associée à la composition ci-dessus donnent les identifications

$$R^n(J_*)\mathbb{Z} = R^n(\beta_*)(\alpha_*\mathbb{Z}) = R^n(\beta_*)\mathbb{Z}.$$

Il suffit donc de calculer $R^4(\beta_*)\mathbb{Z}(\overline{X})$. Dans ce but, on décompose le morphisme β

$$\beta = \mathrm{j} \circ p : B_{W_K^1} \longrightarrow B^{sm}_{G_K} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{X}},$$

pour disposer de la suite spectrale de Leray

$$R^i(\mathrm{j}_*) \circ R^j(p_*)\mathbb{Z} \Longrightarrow R^{i+j}(\beta_*)\mathbb{Z}.$$

Les G_K-modules $R^j(p_*)\mathbb{Z}$ se notent M^j. D'après l'équation (21) et le lemme 11 de [**16**], on a

$$M^j = 0 \text{ pour } j \text{ impair}.$$

Quel que soit le G_K-module M, le faisceau étale $R^i(\mathrm{j}_*)M$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\overline{U} \mapsto H^i(B^{sm}_{G_K}, U_{v_0}, M) = H^i(G_{K(U)}, M).$$

On obtient $R^i(\mathrm{j}_*)M = 0$ pour $i \geq 3$, car un corps de nombres totalement imaginaire est de dimension cohomologique stricte 2. De plus, la preuve de ([**16**] Lemma 12 (b)) montre l'égalité

$$H^i(G_{K(U)}, M^2) = 0 \text{ pour tout } i \geq 1.$$

En effet, si M est un G-module cohomologiquement trivial (pour G fini), alors $H^i(G', M) = 0$ pour tout sous-groupe $G' \subseteq G$ et $i \geq 1$. Ainsi, le groupe

$$R^i(\mathrm{j}_*) \circ R^j(p_*)\mathbb{Z} = R^i(\mathrm{j}_*)M^j$$

est nul lorsque $i \geq 3$, ou encore si l'indice j est impair, et enfin pour $(j = 2, i \geq 1)$. Le terme initial de la suite spectrale

$$R^i(\mathrm{j}_*)M^j := R^i(\mathrm{j}_*) \circ R^j(p_*)\mathbb{Z} \Rightarrow R^{i+j}(\beta_*)\mathbb{Z}$$

est donc de la forme suivante.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{j}_*M^4 & R^1\mathrm{j}_*M^4 & R^2\mathrm{j}_*M^4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{j}_*M^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{j}_*M^0 & R^1\mathrm{j}_*M^0 & R^2\mathrm{j}_*M^0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

On obtient immédiatement l'identification

$$R^4(\beta_*)\mathbb{Z} = \mathrm{j}_*M^4.$$

Les sections globales de ces faisceaux sont donc les mêmes :

$$(R^4(\beta_*)\mathbb{Z})(\overline{X}) = (\mathrm{j}_*M^4)(\overline{X}) = H^0(G_K, M^4) = H^4(W_K, \mathbb{Z}).$$

Pour vérifier la dernière égalité, on observe la suite spectrale

$$H^i(G_K, M^j) \Longrightarrow H^{i+j}(W_K^1, \mathbb{Z}) = H^{i+j}(W_K, \mathbb{Z})$$

explicitée dans ([**16**] lemma 12). L'égalité $H^{i+j}(W_K^1, \mathbb{Z}) = H^{i+j}(W_K, \mathbb{Z})$ provient de la suite spectrale associée à l'extension

$$0 \to \mathbb{R} \to W_K \to W_K^1 \to 0.$$

□

Rappelons que $A^{\mathcal{D}} := Hom_c(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ désigne le dual de Pontryagin d'un groupe topologique abélien A localement compact et séparé. Si A est un groupe abélien discret, on pose $A^D := Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Proposition 7.11. *Le faisceau étale $R^2\mathbb{Z}$ est acyclique pour le foncteur des sections globales sur $\overline{X}$. En d'autre termes, on a*

$$H^n_{Et}(\overline{X}, R^2\mathbb{Z}) = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

Démonstration. D'après le lemme 7.8 et le corollaire 7.6, le terme initial de la suite spectrale

$$H^p_{Et}(\overline{X}, R^q\mathbb{Z}) \Longrightarrow \underrightarrow{H}^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z})$$

est de la forme suivante.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underrightarrow{H}^4(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z}) & H^1(\overline{X},R^4\mathbb{Z}) & H^2(\overline{X},R^4\mathbb{Z}) & H^3(\overline{X},R^4\mathbb{Z}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H^0(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) & H^1(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) & H^2(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) & H^3(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbb{Z} & 0 & Pic(X)^D & U_K^D & 0 & 0
\end{array}$$

On obtient la suite exacte

$$0 \to Pic(X)^D \to Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \to H^0_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) \to U_K^D \to \mu_K^D \to H^1_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) \to 0.$$

Le groupe $H^1_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z})$ est nul car la flèche canonique $U_K^D \to \mu_K^D$ est surjective. Ensuite, la même suite spectrale donne la suite exacte

$$0 \to H^2_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) \to \underrightarrow{H}^4(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z}) \to R^4(\mathbb{Z})(\overline{X}) = \underrightarrow{H}^4(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z}) \to H^3_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) \to \underrightarrow{H}^5(\mathfrak{F}_{L/K,S},\mathbb{Z}) = 0.$$

La flèche centrale est donc un isomorphisme. On en déduit

$$H^2_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) = H^3_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) = 0$$

Enfin, les groupes $H^n_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z})$ sont nuls pour $n \geq 4$, car le site étale de $\overline{X}$ est de dimension cohomologique stricte trois (cf [**5**]). □

Remarque 7.12. *Pour montrer l'existence d'un isomorphisme*

$$H^0_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) = Hom(U_K,\mathbb{Q}),$$

on doit définir un morphisme de la suite exacte

$$0 \to Pic(X)^D \to Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \to H^0_{Et}(\overline{X},R^2\mathbb{Z}) \to U_K^D \to \mu_K^D \to 0$$

dans la suivante

$$0 \to Pic(X)^D \to Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \to Hom(U_K,\mathbb{Q}) \to U_K^D \to \mu_K^D \to 0.$$

Proposition 7.13. *Soit $(L/K,S)$ un objet de $I/_K$. On a un morphisme essentiel de topos*

$$(\delta_!,\delta^*,\delta_*) : \mathfrak{F}_{L/K,S} \longrightarrow Top\,(\mathfrak{F}_\bullet),$$

dont l'image inverse est le foncteur

$$\begin{array}{rccc}
\delta^* : & Top\,(\mathfrak{F}_\bullet) & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{L/K,S} \\
& (\mathfrak{F}_{L,S})_{(L,S)\in I/_K} & \longmapsto & \mathfrak{F}_{L,S}
\end{array}$$

De plus, le foncteur $\delta_!$ est exact. Il suit que δ^* préserve les injectifs.

Démonstration. C'est ([**24**] VI. Lemme 7.4.12). □

THÉORÈME 7.14. *Il existe un complexe $R_W\mathbb{Z}$, bien défini dans la catégorie dérivée, de faisceaux étales sur $\overline{X}$ dont l'hypercohomologie est la suivante.*

$$\begin{aligned} H^q_{Et}(\overline{X};R_W\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \text{ pour } q=0,\\ &= 0 \text{ pour } q=1,\\ &= Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \text{ pour } q=2,\\ &= \mu_K^D \text{ pour } q=3,\\ &= 0 \text{ pour } q\geq 4.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Considérons le faisceau constant $\mathbb{Z}_\bullet$ du topos total $Top(\mathfrak{F}_\bullet)$. Cet objet $\mathbb{Z}_\bullet=(\mathbb{Z},f_t)_{L,S}$ est défini par les faisceaux constants $\mathbb{Z}$ de chaque topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$, et le morphisme

$$f_t : t^*\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$

est l'isomorphisme canonique, quelle que soit la flèche de transition

$$t:\mathfrak{F}_{L'/K,S'}\longrightarrow\mathfrak{F}_{L/K,S}.$$

Comme la catégorie $Top(\mathfrak{F}_\bullet)$ est un topos, on peut plonger l'objet abélien $\mathbb{Z}_\bullet$ dans une résolution injective

$$0\to\mathbb{Z}_\bullet\to I^0_\bullet\to I^1_\bullet\to ...$$

D'après la proposition précédente, cette résolution nous donne une résolution injective

$$0\to\mathbb{Z}\to I^0_{L,S}\to I^1_{L,S}\to ...$$

du faisceau constant $\mathbb{Z}$ dans chaque topos $\mathfrak{F}_{L/K,S}$, ainsi qu'un morphisme de complexes

$$t^*I^*_{L,S}\longrightarrow I^*_{L',S'},$$

pour chaque flèche de transition t (ces morphismes satisfaisant la condition de transitivité habituelle). Pour toute flèche $(L',S')\to(L,S)$ de $I/_K$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}_{L'/K,S'} \arrow[r, "\zeta_{L',S'}"] \arrow[d, "t"] & (\widetilde{Et_{L'/K}},\mathcal{J}_{et}) \arrow[d, "u"] \\ \mathfrak{F}_{L/K,S} \arrow[r, "\zeta_{L,S}"] & (\widetilde{Et_{L/K}},\mathcal{J}_{et}) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On a donc $u_*\circ\zeta_{L',S',*}=\zeta_{L,S,*}\circ t_*$. Par adjonction, on obtient la transformation de Beck-Chevalley

$$u^*\zeta_{L,S,*}\longrightarrow u^*\zeta_{L,S,*}t_*t^*=u^*u_*\zeta_{L',S',*}t^*\longrightarrow\zeta_{L',S',*}t^*.$$

Cette transformation induit un morphisme de complexes

$$u^*\zeta_{L,S,*}I^*_{L,S}\longrightarrow\zeta_{L',S',*}t^*I^*_{L,S}\longrightarrow\zeta_{L',S',*}I^*_{L',S'},$$

où la deuxième flèche est donnée par le morphisme $t^*I^*_{L,S}\longrightarrow I^*_{L',S'}$. En fixant l'extension L/K, on a en particulier un système inductif (filtré) de complexes de faisceaux $(\zeta_{L,S,*}I^*_{L,S})_S$. On pose

$$I^*_L:=\varinjlim_S\zeta_{L,S,*}I^*_{L,S}.$$

Par définition, la cohomologie du complexe $\zeta_{L,S,*}I^*_{L,S}$ en degré n est le faisceau $R^n(\zeta_{L,S,*})\mathbb{Z}$ du topos $(\widetilde{Et_{L/K}},\mathcal{J}_{et})$. Comme les limites inductives filtrantes sont exactes, la cohomologie du complexe $I_L^* := \varinjlim_S \zeta_{L,S,*} I_{L,S}^*$ en degré n est le faisceau $\varinjlim_S R^n(\zeta_{L,S,*})\mathbb{Z}$. En reprenant les notations précédentes, on a

$$H^n(I_L^*) = \varinjlim_S H^n(\zeta_{L,S,*} I_{L,S}^*) = \varinjlim_S R^n(\zeta_{L,S,*})\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_L^{(n)}.$$

Comme le foncteur image inverse u_L^* du morphisme $u_L : \mathcal{S}_{Et,\overline{X}} \to (\widetilde{Et_{L/K}}, \mathcal{J}_{et})$ est exact, la cohomologie du complexe $u_L^*(I_L^*)$ est donnée par les faisceaux

$$H^n(u_L^*(I_L^*)) = u_L^* H^n(I_L^*) = u_L^* \mathbb{Z}_L^{(n)}.$$

En passant maintenant à la limite sur les extensions L/K, on définit le complexe

$$R\mathbb{Z} := \varinjlim_{L/K} u_L^*(I_L^*).$$

Pour résumer, on a

$$H^n(R\mathbb{Z}) = \varinjlim_{L/K} H^n(u_L^* I_L^*) = \varinjlim_{L/K} u_L^* H^n(I_L^*) = \varinjlim_{L/K} u_L^* \mathbb{Z}_L^{(n)} =: R^n\mathbb{Z},$$

où $R^n\mathbb{Z}$ est le faisceau étale défini dans la proposition 7.4. Il suit que l'hypercohomologie du complexe $R\mathbb{Z}$ est l'aboutissement de la suite spectrale

$$H_{Et}^p(\overline{X}, R^q\mathbb{Z}) \Rightarrow \underrightarrow{H}^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}).$$

de la proposition 7.4. On a donc

$$H_{Et}^n(\overline{X}, R\mathbb{Z}) = \underrightarrow{H}^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}).$$

Enfin, on peut définir le complexe tronqué

$$R_W\mathbb{Z} = \tau_{\leq 2} R\mathbb{Z},$$

de sorte que $H^n(\tau_{\leq 2}R\mathbb{Z}) = H^n(R\mathbb{Z})$ pour $n \leq 2$, et $H^n(\tau_{\leq 2}R\mathbb{Z}) = 0$ pour $n \geq 3$. Le morphisme de complexe $R_W\mathbb{Z} \to R\mathbb{Z}$ définit un morphisme de suites spectrales de

$$H_{Et}^p(\overline{X}, H^q(R_W\mathbb{Z})) \Longrightarrow H_{Et}^{p+q}(\overline{X}, R_W\mathbb{Z})$$

dans

$$H_{Et}^p(\overline{X}, H^q(R\mathbb{Z})) \Longrightarrow \underrightarrow{H}^{p+q}(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}).$$

En observant le terme initial de ce morphisme, on voit, grâce au corollaire 7.6 et à la proposition 7.11, qu'il induit des isomorphismes

$$H_{Et}^n(\overline{X}, R_W\mathbb{Z}) \simeq \underrightarrow{H}^n(\mathfrak{F}_{L/K,S}, \mathbb{Z}) \text{ pour } n \leq 3$$

alors que les groupes $H_{Et}^n(\overline{X}, R_W\mathbb{Z})$ sont nuls pour $n \geq 4$. En effet, ce morphisme de suites spectrales induit un morphisme de la suite exacte

$$0 \to Pic(X)^D \to H_{Et}^1(\overline{X}, R_W\mathbb{Z}) \to H_{Et}^0(\overline{X}, R^2\mathbb{Z}) \to U_K^D \to H_{Et}^3(\overline{X}, R_W\mathbb{Z}) \to 0$$

dans la suivante

$$0 \to Pic(X)^D \to Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \to H_{Et}^0(\overline{X}, R^2\mathbb{Z}) \to U_K^D \to \mu_K^D \to 0.$$

Les groupes $H_{Et}^n(\overline{X}, R_W\mathbb{Z})$ sont nuls pour $n \geq 4$, car les diagonales $\{p+q=n,\ n \geq 4\}$ du terme initial de la suite spectrale

$$H_{Et}^p(\overline{X}, H^q(R_W\mathbb{Z})) \Longrightarrow H_{Et}^{p+q}(\overline{X}, R_W\mathbb{Z})$$

sont nulles.

Le complexe $R_W\mathbb{Z}$ a été défini à partir d'une résolution injective $I^*_\bullet$ de $\mathbb{Z}_\bullet$ dans $Top(\mathfrak{F}_\bullet)$. Soient $I^*_\bullet$ et $J^*_\bullet$ deux résolutions injectives de $\mathbb{Z}_\bullet$ et soient $R_W\mathbb{Z}(I^*_\bullet)$ et $R_W\mathbb{Z}(J^*_\bullet)$ les complexes qu'elles définissent. On a un morphisme

$$I^*_\bullet \longrightarrow J^*_\bullet$$

qui induit à son tour un morphisme de complexes de faisceaux étales

$$R_W\mathbb{Z}(I^*_\bullet) \longrightarrow R_W\mathbb{Z}(J^*_\bullet).$$

D'après ce qui précède, ce dernier est un quasi-isomorphisme. Ainsi, le complexe $R_W\mathbb{Z}$ est bien défini dans la catégorie dérivée. $\square$

2. Une description partielle du topos Weil-étale

QUESTION 7.15. *Peut on construire un topos de Grothendieck $\mathcal{S}_{W,\overline{X}}$, fonctoriellement attaché à $\overline{X}$, satisfaisant les conditions suivantes.*

(1) *On des morphismes canoniques*

$$\gamma : \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et,\overline{X}}\ ,\quad \mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}} \quad et \quad i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}},$$

où i_v est défini pour tout point fermé v de $\overline{X}$.

(2) *La composition $\mathfrak{f} \circ i_v$ est le morphisme de topos classifiants*

$$B_{W_{k(v)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

induit par le morphisme canonique $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$, quelle que soit le point fermé $v \in \overline{X}$.

(3) *Le morphisme γ est connexe.*

(4) *Quel que soit le point fermé v de $\overline{X}$, le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et;\overline{Y}} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(5) *Le diagramme précédent est un pull-back pour toute valuation archimédienne v.*

(6) *Les complexes $R(\gamma_*)\mathbb{Z}$ et $R_W\mathbb{Z}$ sont quasi-isomorphes.*

(7) *On note $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathfrak{f}^*y(\mathbb{R})$, où $y(\mathbb{R})$ est l'objet de $B_{\mathbb{R}}$ représenté par l'action triviale de $\mathbb{R}$ sur le groupe topologique $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$R^n(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \ \textit{pour}\ n = 0,1 \ \textit{et}\ R^n(\gamma_*)\widetilde{\mathbb{R}} = 0 \ \textit{pour}\ n \geq 2.$$

Supposons maintenant qu'il existe un topos Weil-étale $\mathcal{S}_{W,\overline{X}}$ satisfaisant les conditions précédentes. On note $H^*_W(\overline{X}, -)$ la cohomologie de ce topos. Considérons le plongement ouvert

$$j : \mathcal{S}_{W,\overline{X}}/_{\gamma^*(X)} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}}.$$

On déduit de la condition (5) ci-dessus que le complémentaire fermé du sous-topos $Im(j)$ est donné par le plongement fermé

$$i : \coprod_{v \in X_\infty} B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}}.$$

La cohomologie Weil-étale à support compact, à valeurs dans un faisceau abélien $\mathcal{A}$ sur X, est définie comme suit.

$$H_c^*(X,\mathcal{A}) := H_W^*(\overline{X}, j_!\mathcal{A}).$$

PROPOSITION 7.16. *On a* $H_W^*(\overline{X},\mathbb{Z}) \simeq H_{et}^*(\overline{X}, R_W\mathbb{Z})$.

DÉMONSTRATION. C'est immédiat d'après la condition (6) ci-dessus. □

Les preuves des théorèmes (6.46), (6.49) et (6.50) s'appliquent sans aucun changement, et montrent les trois résultats suivants.

PROPOSITION 7.17. *On a*

$$\begin{aligned} H_W^q(\overline{X};\widetilde{\mathbb{R}}) &= \mathbb{R} \text{ pour } q=0,\\ &= \mathbb{R} \text{ pour } q=1,\\ &= 0 \text{ pour } q\geq 2.\end{aligned}$$

PROPOSITION 7.18. *On a*

$$\begin{aligned} H_c^q(X;\mathbb{Z}) &= 0 \ \text{ pour } q=0,\\ &= (\textstyle\prod_{X_\infty}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \ \text{ pour } q=1,\\ &= Pic^1(\overline{X})^{\mathcal{D}} \ \text{ pour } q=2,\\ &= \mu_K^{\mathcal{D}} \ \text{ pour } q=3,\\ &= 0 \ \text{ pour } q\geq 4,\end{aligned}$$

PROPOSITION 7.19. *On a*

$$\begin{aligned} H_c^q(X;\widetilde{\mathbb{R}}) &= 0 \ \text{ pour } q=0,\\ &= (\textstyle\prod_{X_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R} \ \text{ pour } q=1,\\ &= (\textstyle\prod_{X_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R} \ \text{ pour } q=2,\\ &= 0 \ \text{ pour } q\geq 3.\end{aligned}$$

PROPOSITION 7.20. *Le morphisme canonique*

$$H_c^q(X;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R} \longrightarrow H_c^q(X;\widetilde{\mathbb{R}})$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Il suffit de recopier la preuve de ([**37**] Theorem 8.1). □

De plus, les arguments de la section 5.2 du chapitre précédent montrent que la classe fondamentale

$$\psi := \mathfrak{f}^*(Id_{\mathbb{R}}) \in H_W^1(\overline{X},\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$$

définit, grâce au produit de Yoneda, un complexe acyclique

$$... \longrightarrow H_c^n(X,\widetilde{\mathbb{R}}) \longrightarrow H_c^{n+1}(X,\widetilde{\mathbb{R}}) \longrightarrow ...$$

de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On peut ainsi définir les caractéristiques d'Euler $\chi_c(\mathbb{Z})$ et $\chi_c'(\mathbb{Z})$ pour obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME 7.21. *On a les formules*

$$\zeta_K^*(0) = \pm\chi_c(\mathbb{Z}) \ \text{ et } \ ord_{s=0}\zeta_K(s) = \chi_c'(\mathbb{Z}).$$

3. Un complexe étale pour la cohomologie Weil-étale à support compact

Il m'est récemment venu à l'idée que la question précédente pouvait avoir une réponse négative. Plus précisément, on peut penser que la cohomologie Weil-étale conjecturale sans support compact ne peut se réaliser comme la cohomologie d'un topos. L'annulation de ces groupes de cohomologie sans support n'est d'ailleurs pas exigée par la conjecture de Lichtenbaum. Par contre l'existence d'un complexe de faisceaux étales $R_W(\varphi_!\mathbb{Z})$ dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale conjecturale à support compact est une condition nécessaire à cette conjecture. La méthode développée dans ce chapitre permet justement la construction d'un tel complexe. En d'autres termes, on a le résultat suivant.

Théorème 7.22. *Il existe un complexe $R_W(\varphi_!\mathbb{Z})$ de faisceaux étales sur $\overline{X}$, bien défini dans la catégorie dérivée, dont l'hypercohomologie est la cohomologie Weil-étale conjecturale à support compact :*

$$\begin{aligned} H^q_{Et}(\overline{X}; R_W(\varphi_!\mathbb{Z})) &= 0 \textit{ pour } q = 0, \\ &= (\coprod_{X_\infty} \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \textit{ pour } q = 1, \\ &= Pic^1(\overline{Y})^{\mathcal{D}} \textit{ pour } q = 2, \\ &= \mu_K^D \textit{ pour } q = 3, \\ &= 0 \textit{ pour } q \geq 4. \end{aligned}$$

Le complexe $R_W(\varphi_!\mathbb{Z})$ se construit de la même manière que le complexe $R_W(\mathbb{Z})$. Les faisceaux de cohomologie de ce complexe sont donnés ci-dessous, où $\varphi : X \to \overline{X}$ désigne le plongement ouvert canonique :

$$H^0(R_W(\varphi_!\mathbb{Z})) = \varphi_!\mathbb{Z} \text{ et } H^n(R_W(\varphi_!\mathbb{Z})) = H^n(R_W(\mathbb{Z})) \text{ pour } n \geq 1.$$

Nous laissons au lecteur les détails techniques de cette construction.

CHAPITRE 8

Le topos Weil-étale en caractéristique positive est un produit fibré

Soit Y un schéma lisse, séparé et de type fini sur un corps fini k. Le résultat principal de ce chapitre (cf Théorème 8.5) donne une équivalence canonique

$$\mathcal{S}_W(Y) \simeq \mathcal{S}_{et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{W_k},$$

où le membre de droite est un produit fibré dans la 2-catégorie des topos. Ce théorème montre que le topos Weil-étale, en caractéristique positive, se construit directement à partir du topos étale arithmétique. De plus, le morphisme γ du topos Weil-étale dans le topos étale devient un simple pull-back de la flèche $B^{sm}_{W_k} \to B^{sm}_{G_k}$, induite par le morphisme canonique $W_k \to G_k$. Ceci détermine le lien topologique entre le topos Weil-étale et le topos étale. En particulier, γ est tidy et hyperconnexe. On en déduit aussi le foncteur dérivé du changement de base $R(\gamma_*)$, au moins pour les coefficients provenant de $B^{sm}_{W_k}$. Ce théorème suggère en outre une définition du topos Weil-étale d'un schéma local hensélien dont le point fermé est le spectre d'un corps fini. Nous définissons aussi un "gros" topos Weil-étale, qui sera utilisé dans le chapitre suivant. Enfin, nous observons que le topos Weil-étale en caractéristique positive permet de définir une cohomologie de type géométrique, qui est la cohomologie l-adique munie de l'action du Frobenius, ainsi que la cohomologie Weil-étale qui est de type arithmétique.

1. Projective limits of equivariant étale topoi

Let Y be a scheme endowed with an action of a discrete group G. We denote by $\mathcal{S}(Y)$ the topos of étale sheaves of sets on Y and by $\mathcal{S}(G, Y)$ the topos of G-equivariant étale sheaves of sets on Y.

Definition 8.1. *A morphism of topoi*

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

is said to be essential *if f^* has a left adjoint.*

Lemma 8.2. *There is an essential morphism*

$$\mathcal{S}(Y) \longrightarrow \mathcal{S}(G, Y).$$

Proof. Consider the forgetful functor

$$f^* : \mathcal{S}(G, Y) \longrightarrow \mathcal{S}(Y)$$

which sends an equivariant sheaf $\mathcal{F}$ to the sheaf $\mathcal{F}$. This functor commutes with arbitrary inductive and projective limits. Therefore, one has a sequence of three adjoint functors

$$f_! \quad , \quad f^* \quad , \quad f_*.$$

The functor f_* is defined by

$$\begin{array}{cccc} f_*: & \mathcal{S}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{S}(G,Y) \\ & \mathcal{L} & \longmapsto & \prod_{g\in G}\mathcal{L} \end{array},$$

where the action of G on $\prod_{g\in G}\mathcal{L}$ is the shift functor. Indeed, let $\mathcal{F}$ be an object of $\mathcal{S}(G,Y)$. One has a family of compatible maps $\phi_g : \mathcal{F} \to g^*\mathcal{F}$. For any $\alpha \in Hom_{\mathcal{S}(Y)}(f^*\mathcal{F},\mathcal{L})$, one has a G-equivariant morphism

$$(g^*(\alpha)\circ\phi_g)_{g\in G} \,:\, \mathcal{F} \longrightarrow \prod_{g\in G} g^*\mathcal{F} \longrightarrow \prod_{g\in G} g^*\mathcal{L}.$$

We obtain a bijection

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{S}(Y)}(f^*\mathcal{F},\mathcal{L}) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{S}(G,Y)}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{L}) \\ \alpha & \longmapsto & (g^*(\alpha)\circ\phi_g)_{g\in G} \end{array}$$

Hence f_* is right adjoint to f^*.

Analogously, the functor $f_!$ is defined by

$$\begin{array}{cccc} f_!: & \mathcal{S}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{S}(G,Y) \\ & \mathcal{L} & \longmapsto & \coprod_{g\in G}\mathcal{L} \end{array}.$$

□

Let $(Y^n)_{n\in N}$ be a projective system of schemes. Assume that the transition maps $Y^n \to Y^m$ are all affine, so that the projective limit

$$\overline{Y} := \varprojlim Y^n$$

exists. The compatible system of maps $\overline{Y} \to Y^n$ induces a compatible system of morphisms of topoi

$$\mathcal{S}(\overline{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}(Y^n).$$

We get a morphism from $\mathcal{S}(\overline{Y})$ to the projective limit $\varprojlim \mathcal{S}(Y^n)$.

Lemma 8.3. *If the schemes Y^n are all quasi-compact and quasi-separated, then the canonical morphism*

$$\mathcal{S}(\overline{Y}) \longrightarrow \varprojlim \mathcal{S}(Y^n)$$

is an equivalence.

Proof. By ([**24**] VII. Corollaire 3.2.(ii)), the restricted étale site Y^n_{ret} of Y^n (respectively $\overline{Y}_{ret}$) is a site for the étale topos $\mathcal{S}(Y^n)$ (respectively $\mathcal{S}(\overline{Y})$), since Y^n is quasi-compact and quasi-separated. By ([**24**] VII. Lemme 5.6) (see also [**1**] III.Theorem 3.8), the canonical functor

$$\varinjlim Y^n_{ret} \longrightarrow \overline{Y}_{ret}$$

defines an equivalence from the inductive limit of the restricted étale sites Y^n_{ret} to the restricted étale site $\overline{Y}_{ret}$. By ([**24**] VI Théorème 8.2.3 (2)) (see also [**13**] Theorem 1.1.1), the site $\varinjlim Y^n_{ret}$ is a site for the projective limit of topoi $\varprojlim \mathcal{S}(Y^n)$. Hence the canonical morphism

$$\mathcal{S}(\overline{Y}) \longrightarrow \varprojlim \mathcal{S}(Y^n)$$

is an equivalence. □

In the situation above, we denote by $p_n : \overline{Y} \to Y^n$ and $p_{mn} : Y^m \to Y^n$ the canonical maps. Let G be a finitely generated discrete abelian group. Suppose that G acts on each scheme Y^n such that the transition maps p_{mn} are all G-equivariant. Then G acts on $\overline{Y}$ and the maps p_n are equivariant.

Corollary 8.4. *The canonical morphism*

$$\mathcal{S}(G;\overline{Y}) \longrightarrow \varprojlim \mathcal{S}(G;Y^n)$$

is an equivalence.

Proof. The site $(\mathcal{S}(Y^n);\mathcal{J}_{can})$ is a site for the topos $\mathcal{S}(Y^n)$, where $\mathcal{J}_{can}$ is the canonical topology. Let

$$\varinjlim(\mathcal{S}(Y^n);\mathcal{J}_{can}) := (\varinjlim \mathcal{S}(Y^n);\mathcal{J}_{\infty})$$

be the direct limit site. The class of objects in the direct limit category $\varinjlim \mathcal{S}(Y^n)$ is just $\coprod Ob(\mathcal{S}(Y^n))$. We refer to ([**1**] III.3) for the definition of the maps in this category. The topology $\mathcal{J}_{\infty}$ is the coarsest topology such that each functor

$$\mathcal{S}(Y^n) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{S}(Y^n)$$

is continuous, where $\mathcal{S}(Y^n)$ is endowed with its canonical topology. By Lemma 8.3 and by ([**24**] VI Théorème 8.2.3 (2)), the site $(\varinjlim \mathcal{S}(Y^n);\mathcal{J}_{\infty})$ is a site for the topos $\varprojlim \mathcal{S}(Y^n) = \mathcal{S}(\overline{Y})$. In other words, the canonical functor

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \varinjlim \mathcal{S}(Y^n) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\overline{Y}) \\ & \mathcal{F}_n & \longmapsto & p_n^*\mathcal{F}_n \end{array}$$

is fully faithful and its essential image is a generating family of $\mathcal{S}(\overline{Y})$. Moreover $\mathcal{J}_{\infty}$ is induced by the canonical topology of $\mathcal{S}(\overline{Y})$ via f^*. The maps p_n are all G-equivariant. It follows that f^* induces a functor $f^*_{eq} : \varinjlim \mathcal{S}(G;Y^n) \to \mathcal{S}(G;\overline{Y})$ so that the following diagram commutes, where the vertical arrows are the forgetful functors.

$$\begin{tikzcd} \varinjlim \mathcal{S}(Y^n) \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{S}(\overline{Y}) \\ \varinjlim \mathcal{S}(G;Y^n) \arrow[u] \arrow[r, "f^*_{eq}"] & \mathcal{S}(G;\overline{Y}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Let us show that the functor f^*_{eq} is fully faithful. The forgetful functors $\mathcal{S}(G;Y^n) \to \mathcal{S}(Y^n)$ are all faithful and so is

$$\varinjlim \mathcal{S}(G;Y^n) \to \varinjlim \mathcal{S}(Y^n).$$

It follows that f^*_{eq} is faithful since the diagram above is commutative. Let $\mathcal{F}_n$ and $\mathcal{F}_m$ be in $\varinjlim \mathcal{S}(G;Y^n)$. One has to show that the map

$$Hom_{\varinjlim \mathcal{S}(G;Y^n)}(\mathcal{F}_n;\mathcal{F}_m) \longrightarrow Hom_{\mathcal{S}(G;\overline{Y})}(f^*_{eq}\mathcal{F}_n;f^*_{eq}\mathcal{F}_m)$$

is surjective. Let $\overline{\alpha} : f^*\mathcal{F}_n \to f^*\mathcal{F}_m$ be in $Hom_{\mathcal{S}(G;\overline{Y})}(f^*\mathcal{F}_n; f^*\mathcal{F}_m)$. In other words, $\overline{\alpha}$ is a map in $\mathcal{S}(\overline{Y})$ so that the diagram

$$\begin{tikzcd} f^*\mathcal{F}_n \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d] & f^*\mathcal{F}_m \arrow[d] \\ \phi^*f^*\mathcal{F}_n \arrow[r, "\phi^*(\overline{\alpha})"] & \phi^*f^*\mathcal{F}_m \end{tikzcd}$$

commutes, where ϕ runs over a finite set S of generators of G. Since the functor f^* is fully faithful, there exists an index k and a map $\alpha : p_{kn}^*\mathcal{F}_n \to p_{km}^*\mathcal{F}_m$ in $\mathcal{S}(Y^k)$ so that $p_k^*(\alpha) = \overline{\alpha}$ in $\mathcal{S}(\overline{Y})$. If k is large enough, then the following diagram commutes as well, for any $\phi \in S$.

$$\begin{tikzcd} p_{kn}^*\mathcal{F}_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & p_{km}^*\mathcal{F}_m \arrow[d] \\ \phi_k^*p_{kn}^*\mathcal{F}_n \arrow[r, "\phi^*(\alpha)"] & \phi_k^*p_{km}^*\mathcal{F}_m \end{tikzcd}$$

Note that the first diagram is induced by the second one via p_k^*, since $p_k^*\phi_k^* = \phi^*p_k^*$ and $p_k^*p_{kn}^* = p_n^*$. Hence $\alpha \in Hom_{\mathcal{S}(G;Y^k)}(p_{kn}^*\mathcal{F}_n; p_{km}^*\mathcal{F}_m)$ gives a class in $Hom_{\underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(G;Y^n)}(\mathcal{F}_n; \mathcal{F}_m)$ which goes to $\overline{\alpha}$.

Now one has to show that $\mathcal{J}_\infty^{eq}$ *is induced by the canonical topology of* $\mathcal{S}(G;\overline{Y})$*, where* $\mathcal{J}_\infty^{eq}$ *is direct limit topology on* $\underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(G;Y^n)$. The forgetful functor $\mathcal{S}(G;Y^n) \to \mathcal{S}(Y^n)$ is continuous and faithful. By ([**24**] II.4.4), the covering families for the canonical topology of a topos are precisely the epimorphic families. It follows that the canonical topology of $\mathcal{S}(G;Y^n)$ (respectively of $\mathcal{S}(G;\overline{Y})$) is induced by the canonical topology of $\mathcal{S}(Y^n)$ (respectively of $\mathcal{S}(\overline{Y})$). The topology $\mathcal{J}_\infty^{eq}$ is the coarsest topology so that each functor

$$\mathcal{S}(G;Y^n) \longrightarrow \underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(G;Y^n)$$

is continuous, where $\mathcal{S}(G;Y^n)$ is endowed with its canonical topology. Therefore $\mathcal{J}_\infty^{eq}$ is the topology generated by the epimorphic families of $\mathcal{S}(G;Y^n)$. Respectively, $\mathcal{J}_\infty$ is the topology generated by the epimorphic families of $\mathcal{S}(Y^n)$. It follows that $\mathcal{J}_\infty^{eq}$ is induced by $\mathcal{J}_\infty$ via the functor

$$\underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(G;Y^n) \longrightarrow \underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(Y^n),$$

since the canonical topology of $\mathcal{S}(G;Y^n)$ is induced by the canonical topology of $\mathcal{S}(Y^n)$. Then the commutative diagram of sites

$$\begin{tikzcd} (\underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(Y^n);\mathcal{J}_\infty) \arrow[r, "f^*"] & (\mathcal{S}(\overline{Y});\mathcal{J}_{can}) \\ (\underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(G;Y^n);\mathcal{J}_\infty^{eq}) \arrow[r, "f_{eq}^*"] \arrow[u] & (\mathcal{S}(G;\overline{Y});\mathcal{J}_{can}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

shows that $\mathcal{J}_\infty^{eq}$ is induced by the canonical topology of $\mathcal{S}(G;\overline{Y})$ via f_{eq}^*.

It remains to show that $\underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(G;Y^n)$ *is a generating sub-category of* $\mathcal{S}(G;\overline{Y})$. Let

$$a \neq b : \mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{L}$$

be a pair of distinct maps in $\mathcal{S}(G;\overline{Y})$. Let $\widetilde{a} \neq \widetilde{b}$ be the corresponding maps in $\mathcal{S}(\overline{Y})$. The sub-category $\underrightarrow{lim}\,\mathcal{S}(Y^n)$ is a generating family of $\mathcal{S}(\overline{Y})$. Therefore there exists an object $\mathcal{Z}_n$

in the category $\mathcal{S}(Y^n)$ and a map $h : \mathcal{Z} = f^*(\mathcal{Z}_n) \to \mathcal{F}$ in $\mathcal{S}(\overline{Y})$ so that $a \circ h \neq b \circ h$. The functor $\mathcal{Z} \mapsto \coprod_{\varphi \in G} \varphi^* \mathcal{Z}$ is left adjoint to the forgetful functor (see the proof of Lemma 8.2). Hence the map h yields an equivariant map $h^{eq} : \coprod_{\varphi \in G} \varphi^* \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$ so that the composite

$$\mathcal{Z} \longrightarrow \coprod_{\varphi \in G} \varphi^* \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{F}$$

is just h. We get

$$a \circ h^{eq} \neq b \circ h^{eq} : \coprod_{\varphi \in G} \varphi^* \mathcal{Z} \to \mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{L} \quad \text{in } \mathcal{S}(G; \overline{Y}).$$

Hence the identification

$$\coprod_{\varphi \in G} \varphi^* \mathcal{Z} = \coprod_{\varphi \in G} \varphi^* f^* \mathcal{Z}_n = \coprod_{\varphi \in G} \varphi^* p_n^* \mathcal{Z}_n = \coprod_{\varphi \in G} p_n^* \varphi^* \mathcal{Z}_n = p_n^* \coprod_{\varphi \in G} \varphi^* \mathcal{Z}_n = f_{eq}^* (\coprod_{\varphi \in G} \varphi^* \mathcal{Z}_n)$$

shows that $\underrightarrow{lim}\, \mathcal{S}(G; Y^n)$ is a generating sub-category of $\mathcal{S}(G; \overline{Y})$.

The corollary follows from ([**24**] IV.1.2.1). □

2. The main result

Let Y be a smooth scheme separated and of finite type over a finite field $k = \mathbb{F}_q$. Let G_k and W_k be the Galois group and the Weil group of k respectively. We set $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$ and we denote by $\mathcal{S}_W^{sm}(Y) = \mathcal{S}(W_k; \overline{Y})$ the Weil-étale topos of Y. The diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_W^{sm}(Y) := \mathcal{S}(W_k; \overline{Y}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"] & \mathcal{S}(G_k; \overline{Y}) \simeq \mathcal{S}_{Et}(Y) \arrow[d, "\widehat{\mathfrak{f}}"] \\
B_{W_k}^{sm} \arrow[r, "\alpha"'] & B_{G_k}^{sm}
\end{tikzcd}$$

is commutative. In what follows, we will see that this diagram is in fact a pull-back of topoi.

Theorem 8.5. *The previous diagram is a pull-back of topoi. In other words, the canonical morphism*

$$\mathcal{S}_W^{sm}(Y) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B_{G_k}^{sm}} B_{W_k}^{sm}$$

is an equivalence.

Let $\underline{Sch}/k$ be the category of schemes over $Spec(k)$, $\mathcal{J}_{et}$ the étale topology on this category, and let $\mathcal{S} = (\widetilde{\underline{Sch}/k}; \mathcal{J}_{et})$ be the big étale topos of $Spec(k)$. We denote by $Y^n := Y \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$ the base change, and we identify W_k with $\mathbb{Z}$ and G_k with $\widehat{\mathbb{Z}}$. The group $G_k = \widehat{\mathbb{Z}}$ acts on the second component of Y^n. For any topos $\mathcal{E}$ and any group G of $\mathcal{E}$, we let $\mathcal{E}^G$ be the topos of left G-objects of $\mathcal{E}$. For any discrete group G, we denote by $B_G := \underline{Set}^G$ the small classifying topos of G.

Proof. Let $n \geq 2$. Consider the commutative diagram $\underline{PB1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S} \arrow[d, "f"] \\
B_{\mathbb{Z}} \arrow[r] & B_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \arrow[r] & \underline{Set}
\end{tikzcd}$$

The constant group object $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) of $\mathcal{S}$ is precisely the pull-back $f^*(\mathbb{Z})$ of the (discrete) group $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) of $\underline{Set}$. By ([**30**] 4.35), the total square and the right hand side square

are both pull-backs. Hence, the left hand side square is also a pull-back. The scheme Y^n carries a natural action of $\mathbb{Z}$ which factors through $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. The Yoneda embedding yields an object $y(\mathbb{Z};Y^n)$ of $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ and an object $y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n)$ of $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. Clearly, $y(\mathbb{Z};Y^n)$ is the pull-back of $y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n)$ under the morphism $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, since the action of $\mathbb{Z}$ on Y^n is induced by the action of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on Y^n.

We obtain a pull-back $\underline{PB2}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z};Y^n)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n)} \arrow[d] \\ \mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \arrow[r] & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

where the vertical arrows are the localization morphisms (see **[24]** IV.5.11).

One needs to show that the diagram $\underline{PB3}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\mathbb{Z};Y^n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n) \arrow[d] \\ \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z};Y^n)} \arrow[r] & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n)} \end{tikzcd}$$

is also a pull-back. The horizontal arrows are the obvious ones. The vertical arrows are defined as follows. Let G be $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ and let $s : \mathcal{F} \to y(G;Y^n)$ be an object of $\mathcal{S}^G/_{y(G;Y^n)}$. The value of the étale sheaf $f^*\mathcal{F}$ on Y^n at an étale map p is

$$f^*\mathcal{F}(p : U \to Y^n) := s_U^{-1}(p)$$

for any étale Y^n-scheme $p : U \to Y^n$, where $s_U : \mathcal{F}(U) \to y(G;Y^n)(U) = Hom(U;Y^n)$ is given by the morphism s. The fact that s is a morphism of sheaves implies that $f^*\mathcal{F}$ is a pre-sheaf. Furthermore, one easily sees that $f^*\mathcal{F}$ satisfies the sheaf property since $\mathcal{F}$ is a sheaf. Consider the diagonal embedding $G \to G(U) = G^{\pi_0(U)}$. Since $\mathcal{F}$ is an object of $\mathcal{S}^G/_{y(G;Y^n)}$, the next diagram is commutative

$$\begin{tikzcd} G \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "Id_G \times s_U"'] & G(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "s_U"] \\ G \times Y^n(U) \arrow[r] & G(U) \times Y^n(U) \arrow[r] & Y^n(U) \end{tikzcd}$$

where the map $G \times Y^n(U) \to Y^n(U)$ sends $(g; p : U \to Y^n)$ to $g \circ p$. This yields a map

$$(\varphi_g)_U : s_U^{-1}(p) = f^*\mathcal{F}(p : U \to Y^n) \longrightarrow s_U^{-1}(g \circ p) = f^*\mathcal{F}(g \circ p : U \to Y^n)$$

which is functorial in $U \to Y^n$. In other words, one has a morphism of sheaves

$$\varphi_g : f^*\mathcal{F} \longrightarrow g^*(f^*\mathcal{F}).$$

One easily sees that the family $\{\varphi_g;\ g \in G\}$ is a "G-linearisation" of $f^*(\mathcal{F})$. Hence $f^*(\mathcal{F})$ is an object of $\mathcal{S}(G;Y^n)$. The functor f^* is the pull-back of a morphism of topoi

$$f : \mathcal{S}(G;Y^n) \longrightarrow \mathcal{S}^G/_{y(G;Y^n)},$$

since this functor commutes with finite projective limits and arbitrary inductive limits (see **[24]** IV.4.10.2 and IV.4.10.6). Indeed, f^* is induced by the pull-back of the composition

$$\mathcal{S}(Y^n) \longrightarrow (\widetilde{\underline{Sch}/_{Y^n}}, \mathcal{J}_{et}) \simeq \mathcal{S}/_{y(Y^n)}.$$

Consider the diagram $\underline{D1}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathbb{Z};Y^n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(Y) \arrow[d] \\
\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z};Y^n)} \arrow[r] & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n)} \arrow[r] & \mathcal{S}_{/y(Y)}
\end{tikzcd}$$

In what follows, we show that the total square and the right hand side square of $\underline{D1}$ are both pull-backs, which implies that the left hand side square is a pull-back. The total square (respectively the right hand side square) of $\underline{D1}$ has another decomposition $\underline{D2}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(G;Y^n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(G;Y) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{S}(Y) \arrow[d] \\
\mathcal{S}^{G}/_{y(G;Y^n)} \arrow[r] & \mathcal{S}^{G}/_{y(G;Y)} \arrow[r] & \mathcal{S}/_{y(Y)}
\end{tikzcd}$$

where G is the group $\mathbb{Z}$ (respectively $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

On the one hand, there are canonical equivalences

$$\mathcal{S}^G/_{y(G;Y)} \simeq (\mathcal{S}/_{y(Y)})^G \text{ and } \mathcal{S}(G;Y) \simeq \mathcal{S}(Y)^G,$$

where G is the constant group object of $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_{/y(Y)}$ and $\mathcal{S}(Y)$ respectively. Hence, by ([**30**] 4.35), the right hand side square of $\underline{D2}$ is a pull-back. On the other hand, there are canonical equivalences

$$\mathcal{S}^G/_{y(G;Y^n)} \simeq (\mathcal{S}^G/_{y(G;Y)})/_{y(G;Y^n)} \text{ and } \mathcal{S}(G;Y^n) \simeq \mathcal{S}(G;Y)/_{f^*(y(G;Y^n))}.$$

Indeed, the second one is induced by $\mathcal{S}(Y^n) \simeq \mathcal{S}(Y)/_{f^*(y(Y^n))}$ (see [**24**] III.5.4) on equivariant objects. By ([**24**] IV.5.11), the left hand side square of $\underline{D2}$ hence the total square of $\underline{D2}$ is a pull-back. Hence the total square and the right hand side square of $\underline{D1}$ are both pull-backs. It follows that the left hand side square of $\underline{D1}$ (which is $\underline{PB3}$) is a pull-back.

We have thus shown that the three following squares are all pull-backs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathbb{Z};Y^n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n) \arrow[d] \\
\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z};Y^n)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}/_{y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n)} \arrow[d] \\
\mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \arrow[d] \\
B_{\mathbb{Z}} \arrow[r] & B_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

Therefore the total square is a pull-back. In other words, one has the fiber product

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z};Y^n) = \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};Y^n) \times_{B_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} B_{\mathbb{Z}} \simeq \mathcal{S}(Y) \times_{B_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} B_{\mathbb{Z}}.$$

Passing to the projective limit, we get

$$\varprojlim \mathcal{S}(\mathbb{Z};Y^n) = \mathcal{S}(Y) \times_{B_{\widehat{\mathbb{Z}}}} B_{\mathbb{Z}},$$

since $\varprojlim B_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = B_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ (see **[45]** IV.4.3). By Corollary 8.4, there is a canonical isomorphism $\mathcal{S}(\mathbb{Z};\overline{Y}) \simeq \varprojlim \mathcal{S}(\mathbb{Z};Y^n)$. Therefore, we get

$$\mathcal{S}^{sm}_{W;Y} := \mathcal{S}(\mathbb{Z};\overline{Y}) = \varprojlim \mathcal{S}(\mathbb{Z};Y^n) = \mathcal{S}(Y) \times_{B_{\widehat{\mathbb{Z}}}} B_{\mathbb{Z}}.$$

□

Recall that a morphism of topoi $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ is tidy if and only it satisfies the stably Beck-Chevalley condition.

LEMMA 8.6. *The map $B^{sm}_{W_k} \to B^{sm}_{G_k}$ is tidy.*

PROOF. Consider the triangle

$$\begin{tikzcd} B^{sm}_{W_k} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "h"'] & B^{sm}_{G_k} \arrow[d, "f"] \\ & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

The map h is tidy and f is strongly separated by (**[45]** IV.4.8). Hence α is tidy by (**[45]** IV.2.1.(iv)). □

COROLLARY 8.7. *The morphism γ is tidy.*

PROOF. Indeed, γ is a pull-back of α, which is tidy. By (**[45]** Theorem 4.8), the morphism γ is tidy. □

COROLLARY 8.8. *The morphism γ is hyper-connected.*

PROOF. Again γ is a pull-back of α, which is hyper-connected. Therefore the result follows from (**[31]** B.3.3.7). □

3. The base change from the Weil-étale topos to the étale topos

Again, Y is smooth, separated and of finite type over a finite field $\mathbb{F}_q$.

3.1. The Beck-Chevalley condition.

PROPOSITION 8.9. *The natural transformation*

$$\widehat{\mathfrak{f}}^* \circ \alpha_* \longrightarrow \gamma_* \circ \mathfrak{f}^*$$

is an isomorphism.

PROOF. This result is a direct consequence of Theorem 8.5. However, one can prove it as follows. Let E be a W_k-set. Then $\alpha_*(E) = \varinjlim E^H$, where H runs over the non-trivial subgroups of W_k. For any étale $\overline{Y}$-scheme U, one has the identifications

$$\widehat{\mathfrak{f}}^* \circ \alpha_*(E)(U) = (\varinjlim E^H)^{\pi_0(U)} = \varinjlim (E^{\pi_0(U)})^H \longrightarrow \gamma_* \circ \mathfrak{f}^*(E)(U) \tag{118}$$

The map (118) is an isomorphism. □

COROLLARY 8.10. *Let v be a closed point of Y. The diagram*

$$\begin{tikzcd} B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \end{tikzcd}$$

is a pull-back. In particular, i_v is a closed embedding.

Here u_v is the morphism of étale topoi induced by the closed immersion of schemes $Spec\, k(v) \to Y$. Then the maps α_v and i_v are defined by the projections

$$B^{sm}_{W_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} B^{sm}_{G_{k(v)}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}} \quad \text{and} \quad B^{sm}_{W_{k(v)}} \simeq \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} B^{sm}_{G_{k(v)}} \to \mathcal{S}^{sm}_W(Y).$$

PROOF. The closed immersion of schemes $v = Spec\, k(v) \to Y$ induces a closed embedding of topoi

$$u_v : B^{sm}_{G_{k(v)}} = \mathcal{S}_{Et}(Spec\, k(v)) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y).$$

One has the following identifications :

$$\mathcal{S}^{sm}_W(Y) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} B^{sm}_{G_{k(v)}} = (B^{sm}_{W_k} \times_{B^{sm}_{G_k}} \mathcal{S}_{Et}(Y)) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} B^{sm}_{G_{k(v)}} \tag{119}$$
$$= B^{sm}_{W_k} \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{G_{k(v)}} \tag{120}$$
$$= B^{sm}_{W_k} \times_{B^{sm}_{G_k}} (B^{sm}_{G_k})/_{(G_k/G_{k(v)})} \tag{121}$$
$$= (B^{sm}_{W_k})/_{(G_k/G_{k(v)})} \tag{122}$$
$$= (B^{sm}_{W_k})/_{(W_k/W_{k(v)})} \tag{123}$$
$$= B^{sm}_{W_{k(v)}}. \tag{124}$$

Hence the projection

$$\mathcal{S}^{sm}_W(Y) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} B^{sm}_{G_{k(v)}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

is isomorphic to the morphism $B_{W_{k(v)}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}}$ induced by the canonical map $W_{k(v)} \to G_{k(v)}$. □

REMARK 8.11. *It follows that the maps i_v and α_v coincide with the ones defined in chapter 5. In particular, α_v is induced by the canonical map $W_{k(v)} \to G_{k(v)}$ and i_v is induced by the morphism of equivariant schemes*

$$(W_{k(v)}, Spec\, k(v)) \longrightarrow (W_k, Y).$$

COROLLARY 8.12. *The pull-back square of Corollary 8.10 satisfies the Beck-Chevalley condition. In other words, the canonical transformation*

$$u_v^* \gamma_* \longrightarrow \alpha_{v*} i_v^*$$

is an isomorphism.

PROOF. This follows directly from Corallary 8.7 and Corollary 8.10. □

3.2. The base change. We denote by $R(\gamma_*)$ (respectively $R(\alpha_*)$) the total derived functor of the left exact functor γ_* (respectively of α_*).

THEOREM 8.13. *There is an isomorphism*

$$\widehat{\mathfrak{f}}^* \circ R(\alpha_*) \simeq R(\gamma_*) \circ \mathfrak{f}^*.$$

PROOF. Consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
B^{sm}_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\
\mathcal{S}^{sm}_W(Y) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & \mathcal{S}_{et}(Y) \arrow[d, "\widehat{\mathfrak{f}}"] \\
B^{sm}_{W_k} \arrow[r, "\alpha"] & B^{sm}_{G_k}
\end{tikzcd}$$

One needs to show that $\mathfrak{f}^*$ sends injective objects to γ_*-acyclic objects. Let $\mathcal{I}$ an injective object in the category of abelian objects of $B^{sm}_{W_k}$. Let $q \geq 1$ and let v be a closed point of Y. One has

$$u_v^* \circ R^q(\gamma_*) \circ \mathfrak{f}^*(\mathcal{I}) \simeq R^q(\alpha_{v*}) \circ i_v^* \circ \mathfrak{f}^*(\mathcal{I}) = 0. \tag{125}$$

The first isomorphism follows from Corollary 8.12 and Proposition 5.24, and from the fact that γ_* preserves injective objects. The morphism

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B^{sm}_{W_{k(v)}} \simeq B^{sm}_{W_k}/_{W_k/W_{k(v)}} \longrightarrow B^{sm}_{W_k}$$

is a localisation morphism, hence the pull-back $i_v^* \circ \mathfrak{f}^*$ preserves injective objects (see **[24]** IV.11.3.1). The second equality of (125) follows, since higher right derived functors vanish on injective objects. We get

$$R^q(\gamma_*) \circ \mathfrak{f}^*(\mathcal{I}) = 0,$$

since $u_v^* \circ R^q(\gamma_*) \circ \mathfrak{f}^*(\mathcal{I}) = 0$ for any $v \in Y^0$. Indeed, the family of functors

$$\{u_v^* : \mathcal{S}_{et}(Y) \to B^{sm}_{G_{k(v)}};\ \ v \in Y^0\}$$

is conservative. Then, one has

$$R(\gamma_* \circ \mathfrak{f}^*) = R(\gamma_*) \circ \mathfrak{f}^*$$

since $\mathfrak{f}^*$ is exact and sends injective objects to γ_*-acyclic objects. On the other hand, the transformation

$$\widehat{\mathfrak{f}}^* \circ \alpha_* \longrightarrow \gamma_* \circ \mathfrak{f}^*$$

is an isomorphism. Hence we get

$$R(\widehat{\mathfrak{f}}^* \circ \alpha_*) = R(\gamma_* \circ \mathfrak{f}^*) = R(\gamma_*) \circ \mathfrak{f}^*.$$

But α_* preserves injective objects and $\widehat{\mathfrak{f}}^*$ is exact. The theorem follows. □

COROLLARY 8.14. *One has $R^1(\gamma_*)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ and $R^q(\gamma_*)(\mathbb{Z}) = 0$ for any $q \geq 2$.*

PROOF. By Proposition 6.5, one has $R^1(\alpha_*)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ and $R^q(\alpha_*)(\mathbb{Z}) = 0$ for any $q \geq 2$. Thus the corollary follows from Theorem 8.13. □

4. The big Weil-étale topos in positive characteristic

4.1. Definition. Let Y be a smooth scheme of finite type over $k = \mathbb{F}_q$.

DEFINITION 8.15. *The* big Weil-étale topos of Y *is defined as the fiber product*

$$\mathcal{S}_W(Y) = \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k}$$

LEMMA 8.16. *Let G be a discrete group. The canonical map*

$$B_G \longrightarrow \mathcal{T} \times B^{sm}_G$$

is an isomorphism.

PROOF. This is Lemma 10.28. □

PROPOSITION 8.17. *The first projection*

$$\gamma : \mathcal{S}_W(Y) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y)$$

is tidy and the pull-back square

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(Y) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \arrow[d] \\ B_{W_k} \arrow[r, "\alpha"] & B^{sm}_{G_k} \end{tikzcd}$$

satisfies the Beck-Chevalley condition.

PROOF. By Lemma 8.16, $B_{W_{k(v)}} \to B^{sm}_{W_{k(v)}}$ is the pull-back of the map $\mathcal{T} \to \underline{Set}$ which is tidy, since the direct image functor of this morphism has a right adjoint (see **[24]** IV.4.10). Hence the morphism $B_{W_{k(v)}} \to B^{sm}_{G_{k(v)}}$ is tidy. Therefore, γ is tidy by (**[45]** Theorem 4.8) and the Beck-Chevalley condition follows. □

PROPOSITION 8.18. *There is an isomorphism*

$$\mathcal{S}_W(Y) \simeq \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \times \mathcal{T}.$$

Hence the canonical morphism $\mathcal{S}_W(Y) \to \mathcal{S}^{sm}_W(Y)$ has a section.

PROOF. One has

$$\mathcal{S}_W(Y) = \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k} = \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} (B^{sm}_{W_k} \times \mathcal{T}) = \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \times \mathcal{T}.$$

The unique morphism $\mathcal{T} \to \underline{Set}$ has a section $\underline{Set} \to \mathcal{T}$ (see **[24]** IV.4.10). We get two morphisms

$$\mathcal{S}_W(Y) \longrightarrow \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \text{ and } \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \longrightarrow \mathcal{S}_W(Y)$$

so that the composition

$$\mathcal{S}^{sm}_W(Y) \longrightarrow \mathcal{S}_W(Y) \longrightarrow \mathcal{S}^{sm}_W(Y)$$

is isomorphic to the identity of $\mathcal{S}^{sm}_W(Y)$. □

QUESTION 8.19. *Can one show that the direct image of the morphism $\mathcal{S}_W(Y) \to \mathcal{S}^{sm}_W(Y)$ is the inverse image of the section $\mathcal{S}^{sm}_W(Y) \to \mathcal{S}_W(Y)$? It would follow that these topoi are cohomologically equivalent.*

COROLLARY 8.20. *Let v be a closed point of Y. There is a pull-back square*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_W(Y) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \end{tikzcd}$$

PROOF. This result follows from the following identifications.

$$\mathcal{S}_W(Y) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} B^{sm}_{G_{k(v)}} = \mathcal{T} \times \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} B^{sm}_{G_{k(v)}} = \mathcal{T} \times B^{sm}_{W_{k(v)}} = B_{W_{k(v)}}$$

□

4.2. The Weil-étale topos of a local ring. Let Z be the spectrum of an henselian local ring. Assume that the closed point of Z is the spectrum of a finite field k. Since Z is henselian, one has the following identifications of étale fundamental groups.

$$\pi_1(Z) = \pi_1(Spec\, k) = G_k.$$

This yields a canonical morphism of topoi

$$\mathcal{S}_{Et}(Z) \longrightarrow B^{sm}_{G_k}.$$

DEFINITION 8.21. *We define the* Weil-étale topos and the big Weil-étale topos of the henselian scheme Z *by the fiber products*

$$\mathcal{S}^{sm}_W(Z) = \mathcal{S}_{Et}(Z) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{W_k} \textit{ and } \mathcal{S}_W(Z) = \mathcal{S}_{Et}(Z) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k}.$$

Let K be a global field and let v be an ultrametric valuation of K. For K a number field, we denote by Y the scheme $Spec(\mathcal{O}_K)$. For K a function field, we denote by Y the smooth projective algebraic curve over $k = \mathbb{F}_q$ with function field K. Let Y^h_v be the henselization of the scheme Y at the closed point v. Then, Y^h_v is the projective limit $\varprojlim U$, where U runs over the étale neighborhoods of v (e.g. $U \times_Y v \to v$ is an isomorphism). The scheme Y^h_v is henselian with closed point $Spec(k(v))$. Hence one has

$$\mathcal{S}_W(Y^h_v) = \mathcal{S}_{Et}(Y^h_v) \times_{B^{sm}_{G_{k(v)}}} B_{W_{k(v)}}.$$

4.2.1. Let K be a function field. The morphism of schemes $Y^h_v \to Y$ induces a morphism of topoi $\mathcal{S}_{Et}(Y^h_v) \to \mathcal{S}_{Et}(Y)$. The diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_{Et}(Y^h_v) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \arrow[d] \\ B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[r] & B^{sm}_{G_k} \end{tikzcd}$$

is commutative, since the corresponding diagram of schemes is commutative. We get a canonical map

$$\theta_v : \mathcal{S}_{Et}(Y^h_v) \times_{B^{sm}_{G_{k(v)}}} B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k}.$$

DEFINITION 8.22. *The* Weil geometric map at v *is the morphism of topoi*

$$\theta_v : \mathcal{S}_W(Y^h_v) \longrightarrow \mathcal{S}_W(Y).$$

PROPOSITION 8.23. *The diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(Y_v^h) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_v"'] & \mathcal{S}_{Et}(Y_v^h) \arrow[d] \\ \mathcal{S}_W(Y) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \end{tikzcd}$$

is a pull-back.

PROOF. The proposition follows from the following identifications.

$$\mathcal{S}_{Et}(Y_v^h) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} \mathcal{S}_W(Y) = \mathcal{S}_{Et}(Y_v^h) \times_{\mathcal{S}_{Et}(Y)} \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k} \tag{126}$$

$$= \mathcal{S}_{Et}(Y_v^h) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k} \tag{127}$$

$$= \mathcal{S}_{Et}(Y_v^h) \times_{B^{sm}_{G_{k(v)}}} B^{sm}_{G_{k(v)}} \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k} \tag{128}$$

$$= \mathcal{S}_{Et}(Y_v^h) \times_{B^{sm}_{G_{k(v)}}} B_{W_{k(v)}} \tag{129}$$

$$= \mathcal{S}_W(Y_v^h). \tag{130}$$

□

4.3. Geometric cohomology and arithmetic cohomology. Let Y be a smooth projective variety over a finite field k. Consider the pull-back square

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^{sm}_W(Y)/_{\mathfrak{f}^*EW_k} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "l"'] & \underline{Set} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \arrow[r, "\mathfrak{f}"] & B^{sm}_{W_k} \end{tikzcd}$$

This pull-back square satisfies the Beck-Chevalley condition, as it follows from the fact that the map

$$p : \underline{Set} \simeq B^{sm}_{W_k}/_{EW_k} \longrightarrow B^{sm}_{W_k}$$

is a localization morphism. One can prove that

$$\mathcal{S}^{sm}_W(Y)/_{\mathfrak{f}^*EW_k} \simeq \mathcal{S}^{sm}_{Et}(\overline{Y}).$$

In particular, the direct image of h_* is just the global section functor $\Gamma_{\overline{Y}}$. Therefore, we get

$$R^n(\Gamma_{\overline{Y}}) \circ l^* \simeq p^* R^n(\mathfrak{f}_*),$$

since the localization functor l^* is exact and preserves injective objects. Furthermore, p^* is the forgetful functor. Hence for any abelian group A, the W_k-set $R^n(\mathfrak{f}_*)A$ is just $H^n_{et}(\overline{Y}, A)$ endowed with its natural action of the Frobenius. On the one hand, the Weil-étale topos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^{sm}_W(Y) \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[dr, "f"'] & B^{sm}_{W_k} \arrow[d] \\ & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

gives rise to the geometric cohomology

$$H^i_{et}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l) := [\varprojlim H^i(\overline{Y}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})] \otimes \mathbb{Q}_l = [\varprojlim R^i(\mathfrak{f}_*)(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})] \otimes \mathbb{Q}_l \text{ in } B^{sm}_{W_k}$$

on the one hand and to the arithmetic cohomology (cf [**36**] Théorème 7.4)

$$H^i_W(Y,\mathbb{Z}) := R^i(f_*)\mathbb{Z} \text{ in } \underline{Set}$$

on the other.

CHAPITRE 9

Aspect dynamique du topos Weil-étale

C. Deninger a conjecturé l'existence d'une théorie cohomologique de type géométrique adaptée aux variétés arithmétiques, permettant une interprétation cohomologique des fonctions L motiviques. Il a ensuite précisé que ce formalisme pouvait être construit à partir d'un certain type de systèmes dynamiques munis de feuilletages, dont il a étudié les propriétés dans une série d'articles (cf **[6]**, **[7]**, **[8]**, **[9]**, **[10]**). La construction de tels systèmes dynamiques fonctoriellement attachés aux anneaux d'entiers de corps de nombres par exemple, fait toujours défaut. Que ce système dynamique puisse être construit ou non, son approche met en évidence une analogie profonde entre les variétés arithmétiques et cette famille de systèmes dynamiques. Cette analogie est clairement reliée à la topologie arithmétique. Par exemple, une place finie d'un corps de nombres correspond de nouveau à un noeud dans un espace de dimension trois, dont la longueur est cette fois calculée par le flot. Les contradictions ou "non sens" que l'on peut observer en topologie arithmétique n'apparaissent plus. La formule du produit, les formules explicites en théorie analytique des nombres ou encore les conjectures de Lichtenbaum, s'expriment de manière très cohérentes dans ce cadre dynamique. Dans ce contexte, le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres K devrait correspondre à un espace de dimension trois, muni d'un feuilletage, lui-même compatible à l'action lisse du groupe de Lie $\mathbb{R}$. Une place finie de norme $N(v)$ dans K doit être vue comme une orbite fermée du flot de longueur $log(N(v))$, alors qu'une place archimédienne correspondrait à un point fixe.

Dans les deux premières sections de ce chapitre, nous étudions le lien existant entre le grors topos Weil-étale $\mathcal{S}_W(Y)$ défini dans le chaptitre précédent (cf 8.15) et le système dynamique conjecturalement associé à un schéma Y sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. Il est pour cela nécessaire de traduire les propriétés de ce système en termes de topos. On se rend alors compte que le topos Weil-étale est muni d'une projection

$$p : \mathcal{S}_W(Y) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z})$$

sur le topos associé à l'espace homogène $\mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z}$. Cette projection est $\mathbb{R}$-équivariante, en ce sens qu'elle est définie au-dessus de $B_{\mathbb{R}}$. Une feuille, définie comme la fibre du morphisme p au-dessus d'un point du cercle $u \in \mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z}$, est équivalente au topos étale (légèrement modifié) associé au schéma $\overline{Y} := Y \times_k \overline{k}$. Un point fermé v de Y fournit une inclusion fermée, à nouveau au-dessus de $B_{\mathbb{R}}$, du topos associé à $\mathbb{R}/log(N(v))\mathbb{Z}$ dans le topos Weil-étale. En supposant que ce système dynamique puisse être effectivement attaché à Y, nous montrons que l'on peut lui associer un topos muni d'un morphisme canonique dans le topos Weil-étale. Ce morphisme est alors compatible à l'action de $\mathbb{R}$, aux orbites fermées ainsi qu'au feuilletage. Puisqu'un topos peut être vu comme la généralisation d'un espace topologique, le topos Weil-étale semble être un bon candidat pour le système dynamique associé à un schéma de caractéristique p.

Dans la troisième section, nous revenons à la caractéristique zéro. Dans l'esprit de ce qui précède, on peut imaginer que le système dynamique conjecturalement associé à un anneau d'entiers $\overline{X}$ soit une vision topologique intuitive du topos Weil-étale de $\overline{X}$, lui aussi conjectural. En effet, la cohomologie totale du topos Weil-étale est censée être de type arithmétique alors que celle de l'espace feuilleté sous-jacent au système dynamique (leaf-wise reduced cohomology), munie de sa structure $\mathbb{R}$-équivariante, devrait fournir une cohomologie de type géométrique. Or la section 4.3 du chapitre précédent suggère que ces deux théories cohomologiques proviennent du même objet géométrique, d'ailleurs incarné par le topos Weil-étale en caractéristique p. Quoi qu'il en soit, cette idée vague nous a amené à espérer que l'étude de ce système dynamique conjectural pouvait permettre une description, au moins partielle, de ce que doit être le topos Weil-étale $\mathcal{S}_{W,\overline{X}}$ en caractéristique nulle. On retrouve par exemple un morphisme canonique

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}_{W,\overline{X}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

traduisant le caractère dynamique de ce topos conjectural. Une place finie v doit correspondre à un morphisme

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}},$$

de sorte que la composition $\mathfrak{f} \circ i_v$ soit donnée par la flèche $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$, qui envoie $1 = Frob_v$ sur $log(N(v))$. Une place archimédienne doit donner lieu à un plongement fermé

$$i_v : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_{W,\overline{X}},$$

de sorte que la composition $\mathfrak{f} \circ i_v$ soit l'identité du topos classifiant $B_{\mathbb{R}}$. Le chapitre précédent suggère de définir le topos Weil-étale de $\overline{X}$ à l'aide d'un produit fibré. Dans la quatrième partie, l'étude du groupe des périodes du système dynamique correspondant à $Spec(\mathbb{Z}_S)$, donne une idée dans cette direction. On peut en effet définir le topos

$$\mathcal{S}_{Et}(Spec\,\mathbb{Z}_S) \times_{B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S}} B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}},$$

où la flèche $\mathcal{S}_{Et}(Spec\,\mathbb{Z}_S) \to B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S}$ est induite par le caractère cyclotomique

$$\kappa : G_S \longrightarrow \mathbb{Z}^*_S := \prod_{p \in S} \mathbb{Z}^*_p.$$

Le morphisme $B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}} \to B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S}$, quant à lui, est donné par l'inclusion du sous-groupe discret de $\widehat{\mathbb{Z}}^*_S$ engendré par les Frobenius définis par les premiers q étrangers à S. Cette idée sera le point de départ du dernier chapitre.

1. Le système dynamique en caractéristique positive

Soit Y un schéma régulier, séparé et de type fini sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. La donnée de Y est équivalente à celle du couple $(\overline{Y} = Y \otimes \overline{k}; \varphi)$, où φ est l'automorphisme de Frobenius sur $\overline{Y}$. Alors l'ensemble des points fermés Y^0 de Y est en bijection avec celui des orbites finies $\mathfrak{o}$ de l'ensemble $\overline{Y}(\overline{k})$, des $\overline{k}$-points de $\overline{Y}$ sous l'action de φ. Si le point fermé $y \in Y^0$ correspond à l'orbite $\mathfrak{o}$, alors

$$log(N(y)) = |\mathfrak{o}|\, log(q).$$

Le couple $(\overline{Y}; \varphi)$ est souvent vu comme l'analogue d'un couple (N, φ), où N est une variété différentiable lisse de dimmension $2\,dim(Y)$, dont φ est un difféomorphisme. On note W_k le groupe $\{\varphi^{\mathbb{Z}}\}$ et

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{l}: & W_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & log(q) \end{array}$$

le morphisme canonique. L'action de W_k sur N permet de définir une action différentiable de $\mathbb{R}$ sur une variété M de dimension trois. En effet, W_k opère sur le produit $\mathrm{N}\times\mathbb{R}$ par la formule

$$\begin{aligned}\varphi^{\nu}\,.\,(n;u) &= (\varphi^{-\nu}(n); l(\varphi^{\nu}).u)\\ &= (\varphi^{-\nu}(n); \nu\, log(q)\, u), \text{ pour } \nu\in\mathbb{Z},\, n\in\mathrm{N},\, u\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Autrement dit, l'action de W_k se fait à droite sur N et à gauche sur $\mathbb{R}$. On définit alors le quotient

$$\mathrm{M} := (\mathrm{N}\times\mathbb{R})/W_k.$$

Le groupe $\mathbb{R}$ opère différentiablement sur M par la formule

$$\phi^t[n;u] = [n; e^t.u],$$

et le morphisme

$$\begin{array}{cccc}\phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & Diff(\mathrm{M})\\ & t & \longmapsto & \phi^t\end{array}$$

désigne l'action de $\mathbb{R}$ sur M. Dans cette situation, les orbites fermées γ de l'action de $\mathbb{R}$ sur M correspondent bijectivement aux orbites finies $\mathfrak{o}$ de N sous l'action de $W_k = \{\varphi^{\mathbb{Z}}\}$. La longueur d'une telle orbite est donnée par

$$l(\gamma) = |\mathfrak{o}|\, log(q).$$

D'autre part, la projection canonique

$$p:\mathrm{M} := (\mathrm{N}\times\mathbb{R})/W_k \longrightarrow \mathbb{R}/W_k$$

est différentiable et $\mathbb{R}$-équivariante, lorsque $\mathbb{R}$ opère naturellement sur l'espace homogène $\mathbb{R}/W_k$. Les fibres $\mathcal{F}_{\overline{u}} := p^{-1}(\{\overline{u}\})$ de p définissent un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur M compatible à l'action de $\mathbb{R}$. Explicitement, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les images des immersions fermées

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{M}\\ n & \longmapsto & [n;u]\end{array}$$

pour $u\in\mathbb{R}$. Les trajectoires du flot sont partout perpendiculaires aux feuilles. Dans cette section, nous traduisons la situation décrite ci-dessus en termes de topos. La sous-section 1.1 ci-dessous est préliminaire à cette étude.

1.1. La topologie des sections locales. Soit $(\underline{Top}\,;\mathcal{J}_{ouv})$ le site constitué de la catégorie des espaces topologiques (éléments d'un univers fixé), munie de la topologie engendrée par la prétopologie des recouvrements ouverts. On note $\mathcal{J}_{ls}$ la topologie sur $\underline{Top}$ engendrée par la prétopologie des recouvrements admettant des sections locales. Ces deux topologies sont les mêmes (i.e. $\mathcal{J}_{ls} = \mathcal{J}_{ouv}$) et nous désignons par $\mathcal{T}$ le topos des faisceaux sur ce site. Par le plongement de Yoneda, le groupe topologique $\mathbb{R}$ définit un groupe $y(\mathbb{R})$ de $\mathcal{T}$. Le topos classifiant $B_{\mathbb{R}}$ du groupe topologique $\mathbb{R}$ est défini comme la catégorie des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une action à gauche de $y(\mathbb{R})$. Soit $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$ la catégorie des espaces topologiques sur lesquels $\mathbb{R}$ opère continûment. La topologie (encore notée $\mathcal{J}_{ls}$) des recouvrements admettant des sections locales est définie comme la topologie induite sur $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$ par le foncteur d'oubli

$$\underline{Top}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{Top}.$$

Le plongement de Yoneda définit un foncteur pleinement fidèle

$$\underline{Top}^{\mathbb{R}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Via ce foncteur, $\mathcal{J}_{ls}$ est la topologie induite par la topologie canonique de $B_{\mathbb{R}}$ et $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$ est une sous-catégorie génératrice de $B_{\mathbb{R}}$. On en déduit une équivalence de topos

$$B_{\mathbb{R}} \longrightarrow (\widetilde{\underline{Top}^{\mathbb{R}}; \mathcal{J}_{ls}}).$$

Soit maintenant $(\mathbb{R}, Z)$ une action continue du groupe topologique $\mathbb{R}$ sur un espace Z. L'objet $y(\mathbb{R}, Z)$, défini par le plongement de Yoneda, est un objet de $B_{\mathbb{R}}$. On peut donc définir le topos localisé

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}, Z) := B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},Z)}.$$

D'après ([**24**] III Proposition 5.4), on a un isomorphisme

$$B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},Z)} \simeq (\widetilde{\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},Z)}; \mathcal{J}})$$

où $\mathcal{J}$ est la topologie induite par $\mathcal{J}_{ls}$ sur $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$ via le foncteur

$$\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},Z)} \to \underline{Top}^{\mathbb{R}},$$

qui consiste à oublier la flèche sur $(\mathbb{R}, Z)$. Cette topologie $\mathcal{J}$ est donc induite par la topologie des sections locales sur $\underline{Top}$. On la note à nouveau $\mathcal{J}_{ls}$.

PROPOSITION 9.1. *Le site* $(\widetilde{\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},Z)}; \mathcal{J}_{ls}})$ *est un site pour le topos* $\mathcal{S}(\mathbb{R}, Z)$.

Dans la suite, on appelle

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}; Z) := B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};Z)}.$$

le topos des gros $\mathbb{R}$*-faisceaux sur* Z. Cette terminologie se justifie par le fait qu'un objet de $\mathcal{S}(\mathbb{R}; Z)$ est donné par un objet $\mathcal{F}$ de $\mathcal{T}/_{y(Z)}$ muni d'une action de $y(\mathbb{R})$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} y(\mathbb{R}) \times \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ y(\mathbb{R}) \times y(Z) \arrow[r] & y(Z) \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'équivalence

$$\mathcal{T}/_{y(Z)} := (\widetilde{\underline{Top}; \mathcal{J}_{ouv}})/_{y(Z)} \simeq (\widetilde{\underline{Top}/_Z; \mathcal{J}_{ouv}}) =: TOP(Z),$$

où $TOP(Z)$ désigne le gros topos de l'espace topologique Z (cf [**24**] IV.2.5), montre alors que $\mathcal{F}$ est un gros faisceau sur Z muni d'une action de $\mathbb{R}$ compatible à celle définie sur Z.

1.2. Le système dynamique associé à un corps fini. Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini et $\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q$ une clôture algébrique. On associe à $Spec(\mathbb{F}_q)$ le système dynamique pointé $\mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ opère par translations à gauche (cf [**7**] 2.7). Une extension finie $\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$ de degré n induit un morphisme $\mathbb{R}$-équivariant

$$\mathbb{R}/log(q^n)\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z}.$$

Cette flèche est d'ailleurs un revêtement étale de degré n. On note

$$\mathbb{M}_q := (\mathbb{R}, \mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z})$$

le système dynamique pointé associé à $\mathbb{F}_q$. Nous allons définir un foncteur de la forme suivante :

$$\begin{array}{cccc} \alpha^* : & Et_{Spec(\mathbb{F}_q)} & \longrightarrow & Top^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_q} \\ & Spec(\mathbb{F}_{q^{n_1}} \times ... \times \mathbb{F}_{q^{n_s}}) & \longmapsto & \mathbb{M}_{q^{n_1}} \coprod ... \coprod \mathbb{M}_{q^{n_s}} \end{array}$$

Le Frobenius F est un générateur topologique privilégié du groupe de Galois

$$G_{\mathbb{F}_q} := Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q).$$

De manière analogue, le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}, p)$ possède un générateur canonique $f : x \to x + log(q)$. Ci-dessus, p est le point distingué de $\mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}$. On peut ainsi définir un morphisme

$$\pi_1(\mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}, p) \longrightarrow G_{\mathbb{F}_q},$$

en envoyant f sur F. La catégorie des revêtements étales de $Spec(\mathbb{F}_q)$ est équivalente à la catégorie $(G_{\mathbb{F}_q} - \underline{Ensf})$, des ensembles finis sur lesquels $G_{\mathbb{F}_q}$ opère continûment. De même, la catégorie des revêtements étales de $\mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}$ est équivalente à la catégorie $(\pi_1(\mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}, p) - \underline{Ens})$. Enfin, tout revêtement étale $p : X \to \mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}$ est canoniquement muni d'une action continue de $\mathbb{R}$, de sorte que la projection soit $\mathbb{R}$-équivariante. On obtient une suite de foncteurs

$$\alpha^* : Et_{Spec(\mathbb{F}_q)} \longrightarrow (G_{\mathbb{F}_q} - \underline{Ensf}) \longrightarrow (\pi_1(\mathbb{R}/log(q)\mathbb{R}, p) - \underline{Ens}) \longrightarrow Top^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_q}.$$

Tous ces foncteurs sont exacts à gauche, puisqu'ils préservent l'objet final et les produits fibrés. On note α^* le foncteur composé. Un recouvrement étale de $Et_{Spec(\mathbb{F}_q)}$ est envoyé sur un recouvrement de $\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_q}$ pour la topologie des sections locales, puisqu'un étalement admet des sections locales au-dessus de son image. En effet, soit $p : Y \to Z$ un homéomorphisme local et z un point de $p(Y)$. Il existe un point y dans la fibre $p^{-1}(z)$ et des voisinages ouverts V_y et V_z de y et z dans Y et Z respectivement, de sorte que $p\mid_{V_y}: V_y \to V_z$ soit un homéomorphisme. Alors, on définit une section locale $s : V_z \to Y$ comme l'inverse de $p\mid_{V_y}$ composé avec l'inclusion de V_y dans Y.

Ainsi, le foncteur

$$\alpha^* : (Et_{Spec(\mathbb{F}_q)}; \mathcal{J}_{et}) \longrightarrow (\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_q}; \mathcal{J}_{ls})$$

est un morphisme de sites exacts à gauche, puisqu'il est continu et exact à gauche. On en déduit l'existence d'un morphisme de topos

$$\alpha : (\widetilde{\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_q}}; \mathcal{J}_{ls}) \longrightarrow (\widetilde{Et_{Spec(\mathbb{F}_q)}}; \mathcal{J}_{et}).$$

On note $W_{\mathbb{F}_q}$ l'image dans $\mathbb{R}$ du groupe de Weil de $\mathbb{F}_q$. Alors $\mathbb{M}_q$ est l'espace homogène $(\mathbb{R}, \mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q})$, avec $W_{\mathbb{F}_q} = log(q)\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$(\widetilde{\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_q}}; \mathcal{J}_{ls}) \simeq B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q})} \simeq B_{W_{\mathbb{F}_q}}.$$

De plus, le topos étale de $Spec(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à la catégorie des ensembles sur lesquels le groupe de Galois $G_{\mathbb{F}_q}$ opère continument, une clôture séparable $\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q$ ayant été choisie. En d'autres termes, on a une équivalence

$$(\widetilde{Et_{Spec(\mathbb{F}_q)}}; \mathcal{J}_{et}) \simeq B^{sm}_{G_{\mathbb{F}_q}},$$

où $B^{sm}_{G_{\mathbb{F}_q}}$ est le petit topos classifiant du groupe profini $G_{\mathbb{F}_q}$. On obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 9.2. *Le foncteur α^* qui associe le système dynamique $\mathbb{M}_q$ au corps fini $\mathbb{F}_q$ induit un morphisme de topos*

$$\alpha : B_{W_{\mathbb{F}_q}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{\mathbb{F}_q}}.$$

Ce morphisme est donné par la flèche canonique $W_{\mathbb{F}_q} \to G_{\mathbb{F}_q}$

La proposition précédente établit un lien clair entre l'idée de C. Deninger, consistant à voir un corps fini comme le système dynamique $\mathbb{M}_q$, et celle de S. Lichtenbaum qui consiste à remplacer le groupe de Galois d'un corps fini par son groupe de Weil. En effet, le chapitre précédent montre que le morphisme du topos Weil-étale dans le topos étale d'un schéma sur $\mathbb{F}_q$ n'est qu'un pull-back de la flèche α. Dans la suite de ce travail, nous verrons le topos classifiant $B_{W_{\mathbb{F}_q}}$ comme le topos associé à l'espace homogène $\mathbb{M}_q = \mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z}$.

1.3. L'isomorphisme $\mathcal{S}(W_k;\mathrm{N}) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M})$. Nous reprenons les notations de l'introduction de cette première partie. Le morphisme

$$l : W_k = W_{\mathbb{F}_q} \to \mathbb{R}$$

définit un morphisme de topos classifiants

$$B_l : B_{W_k} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Le pull-back B_l^* est défini par restriction du groupe d'opérateurs, il commute donc aux limites inductives et projectives quelquonques. Ce foncteur possède donc un adjoint à droite et un adjoint à gauche. On obtient une suite de trois foncteurs adjoints

$$B_{l!}\ ;\quad B_l^*\ ;\quad B_{l*}.$$

Le foncteur

$$\begin{array}{rccc} B_{l!}: & B_{W_k} & \longrightarrow & B_{\mathbb{R}} \\ & Z & \longmapsto & Z\times^{y(W_k)} y(\mathbb{R}) \end{array}$$

envoie un objet Z de B_{W_k} sur le quotient $Z\times^{y(W_k)} y(\mathbb{R}) := (Z\times y(\mathbb{R}))/y(W_k)$, où $y(W_k)$ opère à droite sur Z et à gauche sur $y(\mathbb{R})$ via le morphisme l. Alors $B_{l!}$ se factorise à travers le foncteur

$$\begin{array}{rccc} f_!: & B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)} & \longrightarrow & B_{\mathbb{R}} \\ & Z\to y(\mathbb{R}/W_k) & \longmapsto & Z \end{array}.$$

Le foncteur $f_!$ est défini comme l'adjoint à gauche de l'image inverse du morphisme de localisation

$$f : B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R}/W_k)} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Ce qui précède induit l'équivalence

$$h : B_{W_k} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)}$$

dont l'image directe est donnée par le foncteur

$$\begin{array}{rccc} h_*: & B_{W_k} & \longrightarrow & B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)} \\ & Z & \longmapsto & Z\times^{y(W_k)} y(\mathbb{R}) \to y(\mathbb{R}/W_k) \end{array}.$$

De plus, les morphismes B_l et $f\circ h$ sont canoniquement isomorphes dans la catégorie $\underline{Homtop}\,(B_{W_k};B_{\mathbb{R}})$. Ainsi, le morphisme B_l s'interprète comme le morphisme de localisation

$$B_{W_k} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Par ailleurs, le topos des gros W_k-faisceaux sur N est défini comme le topos localisé

$$\mathcal{S}(W_k;\mathrm{N}) := B_{W_k}/_{y(W_k;\mathrm{N})},$$

où l'objet $y(W_k;\mathrm{N})$ de B_{W_k} est donné par l'action de W_k sur N. On a donc un morphisme de localisation

$$\mathcal{S}(W_k;\mathrm{N}) \longrightarrow B_{W_k}$$

qui traduit l'action de W_k sur N. L'équivalence h induit une équivalence de topos localisés

$$B_{W_k}/_{y(W_k,\mathrm{N})} \longrightarrow (B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R}/W_k)})/_{h_*y(W_k,\mathrm{N})} = B_{\mathbb{R}}/_{h_*y(W_k,\mathrm{N})}.$$

En conservant les notations de la section précédente, l'objet $h_*y(W_k,\mathrm{N})$ est représenté par l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{M} := (\mathrm{N}\times\mathbb{R})/W_k$. On a alors un diagramme commutatif de topos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(W_k;\mathrm{N}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}) \arrow[d, "p"] \\
B_{W_k} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "B_l"'] & B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)} \arrow[d, "f"] \\
& B_{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des équivalences. On a donc la proposition suivante.

Proposition 9.3. *Les topos* $\mathcal{S}(W_k;\mathrm{N})$ *et* $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M})$ *sont canoniquement isomorphes en tant que topos sur* $B_{\mathbb{R}}$.

1.4. Le morphisme strucural et les orbites fermées. D'après ce qui précède, on a un morphisme

$$p : \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)} = B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_q)}.$$

Définition 9.4. *Le* morphisme flot $\mathfrak{f}$ *est le morphisme de localisation*

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}) = B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathrm{M})} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

On voit d'ailleurs que le morphisme $\mathfrak{f}$ se factorise à travers p. Soit γ une orbite fermée de l'action de $\mathbb{R}$ sur M correspondant à une orbite finie $\mathfrak{o}$ de N sous l'action de W_k. En posant $|\mathfrak{o}| = n$, on a

$$l(\gamma) = |\mathfrak{o}|\, log(q) = n\, log(q).$$

Soit de plus $k(\gamma) = \mathbb{F}_{q^n}$. L'immersion fermée $\gamma : \mathbb{M}_{q^n} := \mathbb{R}/nlog(q)\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{M}$ est $\mathbb{R}$-équivariante. Elle induit un plongement fermé de topos

$$i_\gamma : B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_{q^n})} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M})$$

tel que la composition

$$p\circ i_\gamma : B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_{q^n})} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_q)}$$

soit donnée par le revêtement $\mathbb{R}$-équivariant

$$\mathbb{M}_{q^n} = \mathbb{R}/(|\mathfrak{o}|\, log(q)\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}/log(q)\mathbb{Z} = \mathbb{M}_q.$$

En utilisant les équivalences $B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_{q^n})} = B_{W_{k(\gamma)}}$ et $B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_q)} = B_{W_k}$ on obtient le résultat suivant (voir la sous-section 3.2 pour plus de détails sur ce qui précède).

Proposition 9.5. *Une orbite fermée* γ *induit un plongement fermé*

$$i_\gamma : B_{W_{k(\gamma)}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M})$$

tel que la composition

$$\mathfrak{f}\circ i_\gamma : B_{W_{k(\gamma)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

est induite par le morphisme canonique $W_{k(\gamma)} \to \mathbb{R}$.

1.5. Le topos des faisceaux sur M **est un produit fibré.** On note $E_{\mathbb{R}}$ l'objet de $B_{\mathbb{R}}$ représenté par l'espace topologique $\mathbb{R}$ sur lequel $\mathbb{R}$ opère par translations à gauche. Alors on a un isomorphisme $\mathcal{T} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{E_{\mathbb{R}}}$ de sorte que la composition $\mathcal{T} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{E_{\mathbb{R}}} \to B_{\mathbb{R}}$ soit induite par le morphisme de groupes $\{1\} \to \mathbb{R}$ (cf [**24**] IV.5.8.2). On note aussi

$$\mathcal{S}(\mathrm{M}) := \mathcal{T}/_{y(\mathrm{M})} \simeq (\widetilde{\underline{Top}/_{\mathrm{M}}, \mathcal{J}_{ouv}})$$

le gros topos de l'espace topologique M (cf [**24**] IV.2.5).

Proposition 9.6. *On a un isomorphisme*

$$\mathcal{S}(\mathrm{M}) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}) \times_{B_{\mathbb{R}}} \mathcal{T},$$

et un morphisme canonique $\mathcal{S}(\mathrm{M}) \to \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}$.

Démonstration. L'objet $\mathfrak{f}^*(E_{\mathbb{R}})$ est donné par la seconde projection

$$E_{\mathbb{R}} \times y(\mathbb{R}; \mathrm{M}) \longrightarrow y(\mathbb{R}; \mathrm{M}).$$

On obtient un isomorphisme (cf [**24**] IV.5.8.3)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M})/_{\mathfrak{f}^*(E_{\mathbb{R}})} = (B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathrm{M})})/_{(E_{\mathbb{R}} \times y(\mathbb{R};\mathrm{M}))} \simeq \mathcal{T}/_{y(\mathrm{M})} =: \mathcal{S}(\mathrm{M}).$$

Les deux carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathrm{M}) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M})/_{\mathfrak{f}^*(E_{\mathbb{R}})} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}) \arrow[d, "p"'] \\
\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)} \simeq (B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathbb{R}/W_k)})/_{f^*(E_{\mathbb{R}})} \arrow[r] \arrow[d] & B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathbb{R}/W_k)} \arrow[d, "f"'] \\
\mathcal{T} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{E_{\mathbb{R}}} \arrow[r] & B_{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

sont des pull-backs, où les flèches horizontales sont les morphismes de localisation. □

1.6. Le feuilletage. Chaque point $\overline{u} \in \mathbb{R}/W_k$ est une application continue $\overline{u} : \{*\} \to \mathbb{R}/W_k$ qui induit un morphisme de topos localisés

$$\overline{u} : \mathcal{T}/_{\{*\}} = \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}.$$

Cette flèche est d'ailleurs une section du morphisme de localisation $\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)} \to \mathcal{T}$. On définit la feuille de $\mathcal{S}(\mathrm{M})$ au-dessus de $\overline{u}$ en posant

$$\mathcal{S}(\mathrm{F}_{\overline{u}}) := \mathcal{S}(\mathrm{M}) \times_{\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}} \mathcal{T}.$$

Ainsi $\mathcal{S}(\mathrm{F}_{\overline{u}})$ est l'image inverse par le morphisme $\mathcal{S}(\mathrm{M}) \to \mathcal{T}/_{\mathbb{R}/W_k}$ du sous-topos de $\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}$ donné par l'image du morphisme $\overline{u} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}$. Comme ce morphisme est un plongement fermé, le morphisme

$$\mathcal{S}(\mathrm{F}_{\overline{u}}) = \mathcal{S}(\mathrm{M}) \times_{\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}} \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathrm{M})$$

est lui aussi un plongement fermé. Cette affirmation est triviale car ce morphisme est simplement donné par l'inclusion fermée de la feuille $\mathrm{F}_{\overline{u}} \to \mathrm{M}$.

2. Propriétés analogues du topos Weil-étale

Soit Y un schéma régulier, séparé et de type fini sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. Le gros topos Weil-étale de Y est défini par le produit fibré

$$\mathcal{S}_W(Y) \simeq \mathcal{S}_{et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k},$$

où G_k et W_k désignent le groupe de Galois et le groupe de Weil de k respectivement.

2.1. Le morphisme flot et les orbites fermées. La seconde projection définit un morphisme

$$p : \mathcal{S}_W(Y) := \mathcal{S}_{et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k} \longrightarrow B_{W_k}.$$

On a aussi un morphisme $B_l : B_{W_k} \to B_{\mathbb{R}}$ induit par la flèche $l : W_k \to \mathbb{R}$.

Définition 9.7. *Le* morphisme flot *est défini par composition*

$$\mathfrak{f} := B_l \circ p : \mathcal{S}_W(Y) \longrightarrow B_{W_k} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Le morphisme $\mathfrak{f}$ se factorise à travers le morphisme de localisation $f : B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)} \to B_{\mathbb{R}}$ et p devient

$$p : \mathcal{S}_W(Y) \longrightarrow B_{W_k} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R},\mathbb{R}/W_k)}.$$

D'après le corollaire 8.10, un point fermé v de Y induit un plongement fermé

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_W(Y).$$

On a la proposition suivante.

Proposition 9.8. *Un point fermé v de Y induit un plongement fermé*

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_W(Y)$$

tel que la composition

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

est induite par le morphisme canonique $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$.

2.2. Le topos $\mathcal{Y}$. On reprend les notations de la section 2.1.2. D'après ce qui précède $\mathfrak{f} : \mathcal{S}_W(Y) \to B_{\mathbb{R}}$ doit être vu intuitivement comme le topos $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}) \to B_{\mathbb{R}}$ des gros $\mathbb{R}$-faisceaux sur M. Pour obtenir l'analogue du topos $\mathcal{S}(\mathrm{M})$, il suffit de considérer le pull-back du morphisme $\mathfrak{f}$ le long du $\mathcal{T}$-point canonique de $B_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{T} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{E_{\mathbb{R}}} \to B_{\mathbb{R}}.$$

Définition 9.9. *On définit le topos $\mathcal{Y}$ par le produit fibré*

$$\mathcal{Y} := \mathcal{S}_W(Y) \times_{B_{\mathbb{R}}} \mathcal{T}.$$

Proposition 9.10. *Le morphisme canonique $\mathcal{Y} \to \mathcal{T}$ induit un morphisme*

$$\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}.$$

Démonstration. Le diagramme suivant, dans lequel les flèches horizontales sont les morphismes de localisation, est composé de deux pull-backs.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \simeq \mathcal{S}_W(Y)/_{\mathfrak{f}^*(E_{\mathbb{R}})} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_W(Y) \arrow[d, "p"'] \\
\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)} \simeq (B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathbb{R}/W_k)})/_{f^*(E_{\mathbb{R}})} \arrow[r] \arrow[d] & B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathbb{R}/W_k)} \arrow[d, "f"'] \\
\mathcal{T} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{E_{\mathbb{R}}} \arrow[r] & B_{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

La projection $\mathcal{Y} \to \mathcal{T}$ se factorise donc à travers le morphisme de localisation $\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)} \to \mathcal{T}$, pour induire la flèche $\mathcal{Y} \to \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}$. □

2.3. Le feuilletage. A nouveau, chaque point $\overline{u} \in \mathbb{R}/W_k$ définit un plongement fermé de topos

$$\overline{u} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}.$$

Définition 9.11. *La feuille $\mathcal{F}_{\overline{u}}$ de $\mathcal{Y}$ au-dessus de $\overline{u}$ est définie par le produit fibré*

$$\mathcal{F}_{\overline{u}} := \mathcal{Y} \times_{\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}} \mathcal{T}.$$

La seconde projection définit donc un morphisme canonique

$$\mathcal{F}_{\overline{u}} = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}} \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{Y}.$$

Proposition 9.12. *Le morphisme précédent $\mathcal{F}_{\overline{u}} \to \mathcal{Y}$ est un plongement fermé.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{F}_{\overline{u}}$ est l'image inverse par le morphisme $\mathcal{Y} \to \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}$ du sous-topos fermé $\overline{u} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}$. Il suit que

$$\mathcal{F}_{\overline{u}} = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)}} \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

est un plongement fermé. □

Proposition 9.13. *Soit $\overline{u}$ un point de $\mathbb{R}/W_k$. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{F}_{\overline{u}} \simeq \mathcal{S}_{Et}(\overline{Y}) \times \mathcal{T},$$

où $\mathcal{S}_{Et}(\overline{Y})$ est le topos étale du schéma $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$.

Démonstration. Les deux carrés commutatifs suivants sont des pull-backs.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\overline{u}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Y} \simeq \mathcal{S}_W(Y)/_{\mathfrak{f}^*(E_{\mathbb{R}})} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_W(Y) \arrow[d, "p"'] \\
\mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_k)} \simeq (B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathbb{R}/W_k)})/_{f^*(E_{\mathbb{R}})} \arrow[r] & B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R};\mathbb{R}/W_k)}
\end{tikzcd}$$

Le carré total est aussi un pull-back. Il s'identifie à

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_u \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k} \arrow[d, "p"'] \\
\mathcal{T} \arrow[r] & B_{W_k}
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\mathcal{T} \to B_{W_k}$ est le $\mathcal{T}$-point canonique de B_{W_k}. On a donc

$$\mathcal{F}_u \simeq \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k} \times_{B_{W_k}} \mathcal{T} \simeq \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} \mathcal{T}.$$

Mais le morphisme $\mathcal{T} \to B^{sm}_{G_k}$ se factorise à travers $\underline{Set} \to B^{sm}_{G_k}$, le point canonique de $B^{sm}_{G_k}$. On en déduit l'identification

$$\mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} \mathcal{T} \simeq \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} \underline{Set} \times_{\underline{Set}} \mathcal{T}. \tag{131}$$

Montrons l'équivalence suivante :

$$\mathcal{S}_{Et}(\overline{Y}) \simeq \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} \underline{Set}. \tag{132}$$

On a les isomorphismes

$$\underline{Set} = \mathcal{S}_{Et}(Spec(\overline{k})) = \underleftarrow{lim}\, \mathcal{S}_{Et}(Spec(k^n)) = \underleftarrow{lim}\, B^{sm}_{G_{k^n}},$$

où k^n/k est l'unique extension de degré n. Par ailleurs, le morphisme $B^{sm}_{G_{k^n}} \to B^{sm}_{G_k}$ induit par l'inclusion $G_{k^n} \to G_k$, s'identifie au morphisme de localisation

$$B^{sm}_{G_k}/_{(G_k/G_{k^n})} \longrightarrow B^{sm}_{G_k}.$$

Le pull-back de l'objet G_k/G_{k^n} de $B^{sm}_{G_k}$ par le morphisme $\mathcal{S}_{Et}(Y) \to B^{sm}_{G_k}$ est précisément l'objet de $\mathcal{S}_{Et}(Y)$ représenté par $Y^n := Y \times_k k^n$. On en déduit

$$\mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{G_{k^n}} = \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{G_k}/_{(G_k/G_{k^n})} = \mathcal{S}_{Et}(Y)/_{y(Y^n)} = \mathcal{S}_{Et}(Y^n).$$

On obtient (132) grâce aux identifications

$$\mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} \underline{Set} = \underleftarrow{lim}\, \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{G_{k^n}} = \underleftarrow{lim}\, \mathcal{S}_{Et}(Y^n) = \mathcal{S}_{Et}(\overline{Y}).$$

Ci-dessus, on utilise le fait (cf Lemme 8.3) que la limite projective des topos étales d'une famille filtrante de schémas Y^n (respectivement $Spec(k^n)$) quasi-séparés, quasi-compacts et dont les morphismes de transition sont affines, s'identifie au topos étale du schéma limite projective $\overline{Y}$ (respectivement $Spec(\overline{k})$). Les isomorphismes (131) et (132) donnent le résultat annoncé.

□

REMARQUE 9.14. *Soit Y un schéma régulier de dimension d sur un corps fini k. Alors le topos Weil-étale $\mathcal{S}_W(Y)$ peut être vu comme l'analogue du topos $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M})$, où M est une variété différentiable de dimension $2d+1$. Les feuilles*

$$\mathcal{F}_{\overline{u}} \simeq \mathcal{S}_{Et}(\overline{Y}) \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

de $\mathcal{Y}$ sont analogues à des sous-variétés fermées de codimension 1 de M.

2.4. Le morphisme du topos dynamique dans le topos Weil-étale. Soit Y un schéma régulier, séparé et de type fini sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. Imaginons que l'on puisse associer à Y un système dynamique feuilleté

$$(\mathrm{M}_Y, \mathrm{F}, \phi)$$

de la forme décrite dans l'introduction de la section 1 (cf [**10**], [**8**] [**7**]) (voir aussi [**7**] 2.7). On note $\mathfrak{D}(Y) = (\mathbb{R}, \mathrm{M}_Y)$ l'action continue de $\mathbb{R}$ sur l'espace topologique M_Y. Soitγ_v l'orbite fermée dans M_Y de longueur $log(N(v))$ correspondant au point fermé v de Y. Il existe alors un foncteur

$$\mathfrak{D} : Et_Y \longrightarrow \underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},\mathrm{M}_Y)}.$$

Il me semble naturel que ce foncteur soit exact à gauche, c'est à dire qu'il commute aux produits fibrés. Dans cette situation, l'ouvert $U \subset Y$ complémentaire d'un ensemble fini S de points fermés est envoyé sur le complémentaire ouvert M_U dans M_Y des orbites fermées correspondant aux points de S. Nous supposons aussi qu'un morphisme étale $U \to V$ au-dessus de Y est envoyé sur (une application continue $\mathbb{R}$-équivariante qui est) un étalement.

Proposition 9.15. *Dans la situation précédente, il existe un morphisme de topos*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \longrightarrow \mathcal{S}_{et}(Y),$$

de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_{W_{k(v)}} & \xrightarrow{\alpha_v} & B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ {\scriptstyle i_{\gamma_v}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_v} \\ \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S}_{Et}(Y) \end{array}$$

soit un pull-back, quel que soit le point fermé $v \in Y$.

Démonstration. Puisqu'un étalement admet des sections locales au-dessus de son image, on obtient un morphisme de sites exacts à gauche

$$\mathfrak{D} : (Et_Y;\mathcal{J}_{et}) \longrightarrow (\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},\mathrm{M}_Y)};\mathcal{J}_{ls}),$$

et donc un morphisme de topos

$$\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \longrightarrow \mathcal{S}_{et}(Y).$$

Soit v un point fermé de Y. Il lui correspond une orbite fermée γ_v dans M_Y de longueur $log(N(v))$, où $N(v)$ est le cardinal du corps résiduel $k(v)$. Le morphisme de topos

$$i_{\gamma_v} : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y)$$

défini dans la proposition 9.5 est induit par le morphisme de sites exacts à gauche

$$\begin{array}{cccc} i^*_{\gamma_v} : & (Top^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},\mathrm{M}_Y)};\mathcal{J}_{ls}) & \longrightarrow & (Top^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_{N(v)}};\mathcal{J}_{ls}) \\ & Z & \longmapsto & Z \times_{\mathrm{M}_Y} \mathbb{M}_{N(v)} \end{array}$$

où $\mathbb{R}$ opère diagonalement sur $Z \times_{\mathrm{M}_Y} \mathbb{M}_{N(v)}$. Alors, le diagramme suivant de sites exacts à gauche doit être commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_{N(v)}} & \xleftarrow{\alpha_v^*} & Et_{Spec(k(v))} \\ {\scriptstyle i^*_{\gamma_v}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u_v^*} \\ \underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},\mathrm{M}_Y)} & \xleftarrow{\mathfrak{D}} & Et_Y \end{array}$$

Ainsi, le diagramme de la proposition est commutatif. De plus, l'image de $B^{sm}_{G_{k(v)}}$ dans $\mathcal{S}_{Et}(Y)$ est le sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert défini par l'objet $y(U) = y(Y - \{v\})$ de $\mathcal{S}_{Et}(Y)$, qui est un sous-objet de l'objet final. De la même manière, l'image de $B_{W_{k(v)}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y)$ est le sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert défini par l'objet

$$\gamma^*(y(U)) = y(\mathrm{M}_U)$$

de $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y)$. $\square$

PROPOSITION 9.16. *On a un morphisme canonique*

$$d : \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \longrightarrow \mathcal{S}_W(Y) \simeq \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k}$$

DÉMONSTRATION. Le diagramme de sites exacts à gauche suivant est (pseudo)-commutatif.

$$\begin{tikzcd}
(Et_Y;\mathcal{J}_{et}) \arrow[r] & (\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},\mathrm{M}_Y)};\mathcal{J}_{ls}) \\
(Et_{Spec(\mathbb{F}_q)};\mathcal{J}_{et}) \arrow[r] \arrow[u] & (\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_q};\mathcal{J}_{ls}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ci-dessus, les flèches verticales sont données par changements de bases, car le foncteur $\mathfrak{D}$ a été supposé exact à gauche. On obtient un diagramme commutatif de topos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \arrow[d] \\
B_{W_k} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_q)} \arrow[r] & B^{sm}_{G_k}
\end{tikzcd}$$

La proposition s'obtient donc par la propriété universelle du produit fibré

$$\mathcal{S}_W(Y) \simeq \mathcal{S}_{Et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B_{W_k}$$

□

REMARQUE 9.17. *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \arrow[r, "d"] \arrow[dr] & \mathcal{S}_W(Y) \arrow[d] \\
 & B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_q)} \simeq B_{W_k}
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{T} \to B_{\mathbb{R}}$ le $\mathcal{T}$-point canonique de $B_{\mathbb{R}}$. On a un morphisme

$$(d;Id_{\mathcal{T}}) : \mathcal{S}(\mathrm{M}_Y) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \times_{B_{\mathbb{R}}} \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}_W(Y) \times_{B_{\mathbb{R}}} \mathcal{T} =: \mathcal{Y}$$

PROPOSITION 9.18. *Soient $\overline{u}$ un point du cercle $\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q}$, $\mathcal{S}(\mathrm{F}_{\overline{u}}) \to \mathcal{S}(\mathrm{M}_Y)$ et $\mathcal{F}_{\overline{u}} \to \mathcal{Y}$ les plongements fermés correspondants. Alors $\mathcal{S}(\mathrm{F}_{\overline{u}})$ est l'image inverse du sous-topos fermé $\mathcal{F}_{\overline{u}}$ de $\mathcal{Y}$, à travers le morphisme $(d;Id_{\mathcal{T}}) : \mathcal{S}(\mathrm{M}_Y) \longrightarrow \mathcal{Y}$.*

DÉMONSTRATION. La remarque 9.17 montre que le morphisme $(d;Id_{\mathcal{T}})$ est un morphisme de topos au-dessus de

$$B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_q)} \times_{B_{\mathbb{R}}} \mathcal{T} \simeq \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q})}.$$

Soient $\overline{u}$ un point du cercle $\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q}$, $\overline{u} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q})}$ le $\mathcal{T}$-point de $\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q})}$ correspondant et $\mathrm{F}_{\overline{u}}$ la feuille de M_Y au-dessus de $\overline{u}$. Alors on a

$$\mathcal{S}(\mathrm{F}_{\overline{u}}) = \mathcal{S}(\mathrm{M}_Y) \times_{\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q})}} \mathcal{T} = \mathcal{S}(\mathrm{M}_Y) \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y} \times_{\mathcal{T}/_{y(\mathbb{R}/W_{\mathbb{F}_q})}} \mathcal{T} = \mathcal{S}(\mathrm{M}_Y) \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{F}_{\overline{u}},$$

où $\mathcal{F}_{\overline{u}}$ est la feuille de $\mathcal{Y}$ au-dessus de $\overline{u}$. □

PROPOSITION 9.19. *Soit v un point fermé de Y. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "i_{\gamma_v}"] & B_{W_{k(v)}} \arrow[d, "i_v"] \\ \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \arrow[r, "d"] & \mathcal{S}_W(Y) \end{tikzcd}$$

est un pull-back.

DÉMONSTRATION. Soit v un point fermé de Y. Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "i_{\gamma_v}"] & B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_Y) \arrow[r, "d"] & \mathcal{S}_W(Y) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(Y) \end{tikzcd}$$

Ici, γ_v désigne l'orbite fermée de M_Y correspondant au point fermé $v \in Y$. On a vu que le carré de droite ainsi que le carré total sont des pull-backs. Le carré de gauche est donc lui aussi un pull-back. □

3. Le système dynamique en caractéristique nulle

C. Deninger conjecture l'existence d'un foncteur de la catégorie des schémas plats de type fini sur $Spec(\mathbb{Z})$ dans celle des systèmes dynamiques munis d'un feuilletage (cf **[6]**, **[7]**, **[8]**, **[9]**, **[10]**). Un tel morphisme $X \to Spec(\mathbb{Z})$ induirait donc un morphisme de systèmes dynamiques. On se restreint désormais aux anneaux d'entiers de corps de nombres. Soit K un corps de nombres, $X := Spec(\mathcal{O}_K)$ le spectre de l'anneau d'entiers de K, X_∞ l'ensemble des places archimédiennes de K et $\overline{X} := (X; X_\infty)$ la compactification d'Arakelov de X. Le système dynamique (M_X, ϕ) associé à X est muni d'un feuilletage F de codimension 1 dont les feuilles sont partout perpendiculaires aux trajectoires du flot. Pour simplifier, nous pensons $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ comme une variété $\mathcal{C}^\infty$. Alors $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ est compacte, connexe de dimension 3 (ou plus généralement de dimension $dim(X) + 1$), qui est une compactification de M_X. Le flot est donné par une application $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R} \times \mathrm{M}_{\overline{X}} & \longrightarrow & \mathrm{M}_{\overline{X}} \\ & (t; m) & \longmapsto & \phi^t(m) \end{array}$$

respectant les conditions d'une action. Ce flot est compatible au feuilletage F. Plus précisément, ϕ^t induit un difféomorphisme

$$\mathrm{F}_m \longrightarrow \mathrm{F}_{\phi^t(m)},$$

quel que soit le couple $(t; m)$, où F_m désigne la feuille contenant $m \in \mathrm{M}$. Un point fermé $v \to X$ correspond à une orbite fermée

$$\gamma_v := \mathbb{R}/log(N(v))\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{M}_{\overline{X}},$$

où $N(v) := \sharp(k(v))$ est la norme de v. En faisant opérer naturellement $\mathbb{R}$ sur l'espace homogène $\mathbb{R}/log(N(v))\mathbb{Z}$, l'immersion γ_v est $\mathbb{R}$-équivariante. Ainsi, la longueur de l'orbite γ_v mesurée par le flot doit être

$$l(\gamma_v) = log(N(v)).$$

Un point $v_\infty \in X_\infty \subset \overline{X}$ correspond à un point fixe du flot $m_\infty \in \mathrm{M}_{\overline{X}}$. On remarque d'ailleurs que la feuille F_{m_∞}passant par un tel point fixe est globalement stabilisée par le flot. Dans la suite, on oublie le feuilletage ainsi que la structure différentielle. Alors, $(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\overline{X}})$ est réduit à un espace topologique muni d'une action continue du groupe topologique $\mathbb{R}$. Un morphisme étale

$$\overline{V} \longrightarrow \overline{U}$$

induit une application continue $\mathbb{R}$-équivariante

$$(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\overline{V}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\overline{U}})$$

qui est un étalement.

3.1. Le morphisme flot. Le topos $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$ est défini comme le topos localisé

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}) := B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})}.$$

Définition 9.20. *Le* morphisme flot *est le morphisme de localisation*

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Ce morphisme est d'ailleurs induit par l'application continue $\mathbb{R}$-équivariante

$$\mathrm{M}_{\overline{X}} \longrightarrow \{*\},$$

où $\{*\}$ est l'espace ponctuel sur lequel $\mathbb{R}$ opère trivialement. Ainsi le *morphisme flot* $\mathfrak{f}$ traduit l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{M}_{\overline{X}}$. Pour préciser cette intuition, considérons un espace topologique Z sur lequel un groupe discret G opère par automorphismes. Soient $\mathcal{S}(G; Z)$ et $B_G^{sm} := G - \underline{Ens}$ les topos des petits G-faisceaux sur Z et sur le point $\{*\}$ respectivement. L'unique application continue $Z \to \{*\}$ est G-équivariante. Elle induit un morphisme de topos

$$\mathcal{S}(G; Z) \longrightarrow B_G^{sm}.$$

3.2. L'inclusion des orbites fermées de $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$. Soit v un point fermé de $X \subset \overline{X}$. Il lui correspond une orbite fermée

$$\gamma_v : \mathbb{R}/log(N(v))\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{M}_{\overline{X}}.$$

Considérons l'ouvert complémentaire $\mathcal{U} = \mathrm{M}_{\overline{X}} - Im(\gamma_v)$ dans $\mathrm{M}_{\overline{X}}$, où $Im(\gamma_v)$ désigne l'image dans $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ de l'immersion fermée γ_v. L'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ est stable sous l'action de $\mathbb{R}$. L'objet $y(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$ qu'il représente est un sous-objet de l'objet final (car $\mathcal{U} \to \mathrm{M}_{\overline{X}}$ est un monomorphisme) de ce topos. Il définit un sous-topos ouvert

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})/_{y(\mathbb{R}; \mathcal{U})} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}).$$

Le sous-topos fermé complémentaire de cet ouvert dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$ est l'image essentielle du du foncteur

$$i_{\gamma_v *} : \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R}/log\, N(v)) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}),$$

où

$$i_{\gamma_v} : \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R}/log\, N(v)) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}),$$

est le morphisme de topos induit par la flèche

$$\gamma_v : \mathbb{M}_{N(v)} \longrightarrow (\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$$

de la catégorie $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$. En effet, γ_v induit un morphisme

$$y(\mathbb{M}_{N(v)}) = y(\mathbb{R}, \mathbb{R}/log\, N(v)) \longrightarrow y(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$$

dans la catégorie $B_{\mathbb{R}} \simeq (\widetilde{\underline{Top}^{\mathbb{R}}}; \mathcal{J}_{ls})$ qui induit à son tour un morphisme de topos localisés

$$i_{\gamma_v} : B_{W_{k(v)}} \simeq B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_{N(v)})} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})}.$$

La composition $\mathfrak{f}\circ i_{\gamma_v}$ est donnée par les applications équivariantes

$$\mathbb{M}_{N(v)} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\overline{X}}) \longrightarrow \{*\}$$

de la catégorie $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$. Autrement dit, $\mathfrak{f}\circ i_{\gamma_v}$ est donné par le morphisme de localisation $B_{\mathbb{R}}/_{y(\mathbb{M}_{N(v)})} \to B_{\mathbb{R}}$, et s'identifie donc à la flèche $B_{W_{k(v)}} \to B_{\mathbb{R}}$ induite par le morphisme de groupes topologiques $l_v : W_{k(v)} \to \mathbb{R}$ envoyant le générateur canonique de $W_{k(v)}$ sur $log(N(v))$.

Proposition 9.21. *Une orbite fermée γ_v induit un plongement fermé*

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}).$$

De plus, la composition

$$\mathfrak{f}\circ i_v : B_{W_{N(v)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

est isomorphe à la flèche

$$B_{l_v} : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}},$$

où $l_v : W_{k(v)} \to \mathbb{R}$ est le morphisme canonique.

3.3. Les points fixes du flot. Soit $v_\infty \in X_\infty$ une valuation archimédienne du corps de nombres K. On note $m_\infty \in \mathrm{M}_{\overline{X}}$ le point fixe du flot correspondant, et on pose $\overline{V} := \overline{X} - \{v_\infty\}$. Alors, le système dynamique associé à $\overline{V}$ est

$$\mathfrak{D}(\overline{V}) = \mathrm{M}_{\overline{V}} = \mathrm{M}_{\overline{X}} - \{m_\infty\}.$$

L'ouvert $\mathrm{M}_{\overline{V}}$ de $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ est stable sous l'action de $\mathbb{R}$ et définit un sous-topos ouvert

$$\mathcal{V} := \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})/_{y(\mathbb{R};\mathrm{M}_{\overline{V}})} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}).$$

Le sous-topos fermé complémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$ est l'image essentielle du foncteur

$$(i_{m_\infty})_* : B_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}(\mathbb{R}; \{*\}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}),$$

où

$$i_{m_\infty} : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}),$$

est le morphisme de topos induit par la flèche

$$m_\infty : \{*\} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\overline{X}})$$

de la catégorie $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$. De plus, le morphisme composé $\mathfrak{f}\circ i_{m_\infty}$ est induit par la composition

$$\{*\} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\overline{X}}) \longrightarrow \{*\},$$

qui est l'identité du point dans la catégorie $\underline{Top}^{\mathbb{R}}$. Ainsi, on a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{f}\circ i_{m_\infty} \simeq Id_{B_{\mathbb{R}}}.$$

Proposition 9.22. *Un point fixe m_∞ de $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ sous l'action de $\mathbb{R}$ induit un morphisme de topos*

$$i_{m_\infty} : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$$

qui est un plongement fermé. De plus, le sous-topos ouvert complémentaire est

$$\mathcal{V} := \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})/_{y(\mathbb{R};\mathrm{M}_{\overline{V}})} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}),$$

où $\mathrm{M}_{\overline{V}}$ est le système dynamique associé au schéma $\overline{X} - \{m_\infty\}$. Enfin, le morphisme composé

$$\mathfrak{f}\circ i_{m_\infty} : B_{W_{k(x)}} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

est isomorphe à l'identité de $B_{\mathbb{R}}$.

3.4. Existe-t-il un morphisme du topos $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\overline{X}})$ dans le topos étale de $\overline{X}$? Supposons que le foncteur conjecturé par C. Deninger existe. Par restriction, on obtient un foncteur

$$\begin{array}{rccc} \gamma^* : & Et_{\overline{X}} & \longrightarrow & \underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathrm{M}_{\overline{X}}} \\ & \overline{U} \to \overline{X} & \longmapsto & \mathrm{M}_{\overline{U}} \to \mathrm{M}_{\overline{X}} \end{array}$$

où les morphismes $\mathrm{M}_{\overline{U}} \to \mathrm{M}_{\overline{X}}$ sont des étalements $\mathbb{R}$-équivariants.

Hypothèse 9.23. *On suppose dans cette sous-section que le foncteur γ^* commute aux limites projectives finies.*

Une famille surjective de morphismes étales de schémas

$$\{\overline{U_i} \to \overline{U};\ i \in I\}$$

induit une famille surjective d'étalements $\mathbb{R}$-équivariants

$$\{\mathrm{M}_{\overline{U_i}} \to \mathrm{M}_{\overline{U}};\ i \in I\}.$$

Puisqu'un étalement admet des sections locales au-dessus de son image, le foncteur γ^* envoie un recouvrement pour la prétopologie étale sur un recouvrement pour la prétopologie des sections locales. Ainsi, on a un morphisme de sites exacts à gauche

$$\gamma^* : (Et_{\overline{X}}; \mathcal{J}_{et}) \longrightarrow (\underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},\mathrm{M}_{\overline{X}})}; \mathcal{J}_{ls}).$$

La proposition suivante en découle immédiatement.

Proposition 9.24. *Si l'hypothèse 9.23 est satisfaite, alors on a un morphisme de topos*

$$\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}) \longrightarrow \mathcal{S}_{et}(\overline{X}).$$

Pour un point fermé $v \in X \subset \overline{X}$, on note

$$\alpha_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

le morphisme de topos de la proposition 9.2 associé au corps résiduel $k(v)$ en la valuation ultramétrique v. Ce morphisme se déduit du morphisme de sites exacts à gauche

$$\begin{array}{rccc} \alpha_v^* : & (Et_{Spec(k(v))}; \mathcal{J}_{et}) & \longrightarrow & (Top^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_{N(v)}}; \mathcal{J}_{ls}) \\ & \mathbb{F}_q/k(v) & \longmapsto & \mathbb{M}_q/\mathbb{M}_{N(v)} \end{array}$$

On note

$$u_v : B^{sm}_{k(v)} \longrightarrow \mathcal{S}_{et}(\overline{X})$$

le plongement fermé induit par l'inclusion fermée de schémas $Spec(k(v)) \to \overline{X}$. Par définition, u_v est induit par le morphisme de sites exacts à gauche

$$\begin{array}{rccc} u_v^* : & (Et_{\overline{X}}; \mathcal{J}_{et}) & \longrightarrow & (Et_{Spec(k(v))}; \mathcal{J}_{et}) \\ & \overline{U} & \longmapsto & \overline{U} \times_{\overline{X}} Spec(k(v)) \end{array}$$

D'autre part, le morphisme de topos

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$$

est induit par le morphisme de sites exacts à gauche

$$\begin{array}{rccc} i_v^* : & (Top^{\mathbb{R}}/_{\mathrm{M}_{\overline{X}}}; \mathcal{J}_{ls}) & \longrightarrow & (Top^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_{N(v)}}; \mathcal{J}_{ls}) \\ & Z & \longmapsto & Z \times_{\mathrm{M}_{\overline{X}}} \mathbb{M}_{N(v)} \end{array}$$

où $\mathbb{R}$ opère diagonalement sur $Z \times_{\mathrm{M}_{\overline{X}}} \mathbb{M}_{N(v)}$. Alors, le diagramme suivant de sites est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{M}_{N(v)}} & Et_{Spec(k(v))} \arrow[l, "\alpha_v^*"'] \\ \underline{Top}^{\mathbb{R}}/_{(\mathbb{R},\mathrm{M}_{\overline{X}})} \arrow[u, "i_v^*"] & Et_{\overline{X}} \arrow[l, "\gamma^*"'] \arrow[u, "u_v^*"'] \end{tikzcd}$$

De plus, l'image de $B^{sm}_{G_{k(v)}}$ dans $\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$ est le sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert défini par l'objet $y(\overline{U}) = y(\overline{X} - \{v\})$ de $\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$, qui est un sous-objet de l'objet final. De la même manière, l'image de $B_{W_{k(v)}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$ est le sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert défini par l'objet $\gamma^*(y(\overline{U})) = y(\mathrm{M}_{\overline{U}})$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$. Cet objet est un sous-objet de l'objet final, puisqu'il est représenté par l'ouvert complémentaire de l'orbite fermée associée à v dans $\mathrm{M}_{\overline{X}}$. On obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 9.25. *Soit v un point fermé de X. Si l'hypothèse 9.23 est satisfaite, alors on a un diagramme commutatif de topos*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"'] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

De plus, ce diagramme est un pull-back.

Soit maintenant $v_\infty \in X_\infty \subset \overline{X}$ une place archimédienne de K, et $m_\infty \in \mathrm{M}_{\overline{X}}$ le point fixe correspondant. On a un unique morphisme de topos

$$\alpha_{v_\infty} : \mathcal{S}(\mathbb{R}; \{m_\infty\}) = B_{\mathbb{R}} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v_\infty)}} = \underline{Ens}$$

que l'on peut voir comme étant induit par le morphisme de sites exacts à gauche

$$\alpha^*_{v_\infty} : (\underline{Ens}; \mathcal{J}_{can}) \longrightarrow (Top^{\mathbb{R}}; \mathcal{J}_{ls})$$

qui envoie un ensemble E sur l'espace topologique discret E sur lequel $\mathbb{R}$ opère trivialement. On note

$$u_{v_\infty} : \underline{Ens} \longrightarrow \mathcal{S}_{et}(\overline{X})$$

le plongement fermé induit par l'inclusion fermée $v_\infty \to \overline{X}$. Le morphisme u_{v_∞} est induit par le morphisme de sites exacts à gauche

$$\begin{array}{cccc} u^*_{v_\infty} : & (Et_{\overline{X}}; \mathcal{J}_{et}) & \longrightarrow & (\underline{Ens}; \mathcal{J}_{can}) \\ & \overline{U} & \longmapsto & \overline{U} \times_{\overline{X}} v_\infty \end{array}$$

Le morphisme de topos

$$i_{v_\infty} : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}})$$

est induit par le morphisme de sites exacts à gauche

$$\begin{array}{cccc} i^*_{v_\infty} : & (Top^{\mathbb{R}}/_{\mathrm{M}_{\overline{X}}}; \mathcal{J}_{ls}) & \longrightarrow & (Top^{\mathbb{R}}; \mathcal{J}_{ls}) \\ & Z & \longmapsto & Z \times_{\mathrm{M}_{\overline{X}}} m_\infty \end{array}$$

On obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 9.26. *Soit $v_\infty \in X_\infty$ une valuation archimédienne de K. Si l'hypothèse 9.23 est satisfaite, alors le diagramme ci-dessous est un pull-back de topos.*

$$\begin{tikzcd} B_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\alpha_{v_\infty}"] \arrow[d, "i_{v_\infty}"'] & \underline{Ens} \arrow[d, "u_{v_\infty}"'] \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathrm{M}_{\overline{X}}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

4. Le groupe des périodes de $Spec(\mathbb{Z}_S)$

Soient $K/\mathbb{Q}$ un corps de nombres et $X = Spec(\mathcal{O}_{K,S})$ le spectre de l'anneau des S-entiers de K, pour un ensemble fini S de places ultramétriques. Rappelons que $\mathfrak{D}(X)$ est donné par un triple $(\mathrm{M}_X; \mathrm{F}; \phi^t)$. Ici, M_X est un espace topologique de dimension trois que nous pensons comme une variété $\mathcal{C}^\infty$. La flèche

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathrm{M}_X \longrightarrow \mathrm{M}_X$$

est une action $\mathcal{C}^\infty$. Le feuilletage F est de codimension 1, compatible au flot et ses feuilles sont partout perpendiculaires aux $\mathbb{R}$-orbites. Enfin, les points fermés v de X correspondent à des orbites fermées γ_v de M_X sous l'action de $\mathbb{R}$, de sorte que $l(\gamma_v) = log(N(v))$. Le feuilletage F est par définition une partition de M_X par des sous-variétés connexes de co-dimension 1. Cette partition doit être localement triviale. Plus précisément, tout point m de M_X doit avoir un voisinage ouvert U difféomorphe à la boule ouverte unité B de $\mathbb{R}^3$ de sorte que la partition induite de B soit donnée par les sous-variétés $B \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^2)$ pour $x \in]-1, 1[$.

4.1. Le morphisme période. Rappelons qu'un champ de vecteur est par définition une section globale du fibré tangent $T\mathrm{M}_X \to \mathrm{M}_X$ (cette section étant $\mathcal{C}^\infty$), alors qu'une 1-forme différentielle est une section globale du fibré co-tangent $T^*\mathrm{M}_X \to \mathrm{M}_X$. Le flot engendre un champ de vecteurs V_ϕ (en posant $V_\phi(m) = T_0(\phi_m)(1)$, où $\phi_m : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_X$ est l'unique application C^∞ et $\mathbb{R}$-équivariante telle que $\phi_m(0) = m$, lorsque $\mathbb{R}$ opère sur lui-même par translations). On note aussi $T\mathrm{F}$ le fibré tangent au feuilletage. Alors $T\mathrm{F}$ est un sous-fibré de $T\mathrm{M}_X$, et les sous-espaces vectoriels $T\mathrm{F}_m$ et $\mathbb{R}V_\phi(m)$ sont en somme directe dans $T\mathrm{M}_X$, car les trajectoires du flot sont partout perpendiculaires aux feuilles. On définit alors une 1-forme différentielle ω_ϕ par

$$\omega_\phi \mid_{T\mathrm{F}} = 0 \;\text{ et }\; < \omega_\phi; V_\phi >= 1.$$

La forme ω_ϕ est fermée (i.e. $d\omega_\phi = 0$), puisque l'on peut choisir des cartes locales de sorte que $\omega_\phi = dx$. On voit aussi que ω_ϕ est ϕ-invariante, c'est à dire que $\phi^{t*}\omega_\phi = \omega_\phi$, quel que soit le réel t.

REMARQUE 9.27. *La donné de $(\mathrm{M}_X; \mathrm{F}; \phi^t)$ est équivalente à celle de $(\mathrm{M}_X; \omega; \phi^t)$, où ω est une 1-forme fermée ϕ^t-invariante. En effet, $Ker(\omega)$ est alors un sous-fibré intégrable de $T\mathrm{M}_X$ qui est ϕ^t-invariant. Par le théorème de Frobenius, on a $Ker(\omega) = T\mathrm{F}$, où F est un feuilletage de co-dimension 1.*

La 1-forme ω_ϕ définit une classe dans le groupe de cohomologie $H^1_{dR}(\mathrm{M}_X; \mathbb{R}) = H^1(\mathrm{M}_X; \mathbb{R})$ à valeurs dans le faisceau constant $\mathbb{R}$. En effet, ω_ϕ est fermée et la cohomologie de De Rham s'identifie à celle du faisceau $\mathbb{R}$, car le complexe de De Rham est une résolution (grâce au lemme de Poincaré) du faisceau $\mathbb{R}$ par des faisceaux fins. On a donc

$$\psi := [\omega_\phi] \in H^1(\mathrm{M}_X; \mathbb{R}) = Hom(\pi_1(\mathrm{M}_X); \mathbb{R}) = Hom(\pi_1(\mathrm{M}_X)^{ab}; \mathbb{R}).$$

Le morphisme induit par la classe ψ est donné par

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \pi_1(\mathrm{M}_X)^{ab} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [\gamma] & \longmapsto & \int_\gamma \omega_\phi \end{array}$$

où $[\gamma] \in \pi_1(\mathrm{M}_X)^{ab}$ est représenté par un lacet libre γ de M_X.

DÉFINITION 9.28. *Le morphisme* $\psi : \pi_1(\mathrm{M}_X)^{ab} \to \mathbb{R}$ *s'appelle* le morphisme période. *Le* groupe des périodes *du système* $(\mathrm{M}_X;\mathrm{F};\phi^t)$ *est défini comme l'image* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *de ce morphisme. On appelle aussi* ψ la classe fondamentale.

PROPOSITION 9.29. *Le groupe des périodes contient le sous-groupe de* $\mathbb{R}$ *engendré par les longueurs* $l(\gamma)$ *des orbites fermées du flot.*

DÉMONSTRATION. Soit γ une orbite fermée du flot. Il existe un réel $l(\gamma) > 0$ tel que $\gamma : \mathbb{R}/l(\gamma)\mathbb{Z} \to \mathrm{M}_X$ soit une immersion $\mathbb{R}$-équivariante. La longueur de γ est par définition le réel positif $l(\gamma)$. L'immersion γ définit un lacet libre dans M_X et donc une classe $[\gamma]$ dans $\pi_1(\mathrm{M}_X)^{ab}$. Alors, on a

$$\psi([\gamma]) = \int_\gamma \omega_\phi = l(\gamma) \in \Lambda.$$

□

THÉORÈME 9.30. *Quelle que soit la feuille* $\mathrm{N} = \mathrm{F}_m$ *du feuilletage* F, *on a l'égalité*

$$\Lambda = \{t \in \mathbb{R};\ \phi^t(\mathrm{N}) = \mathrm{N}\}.$$

Ainsi, le groupe des périodes Λ *opère sur* N *par difféomorphismes. On en déduit une action* τ *de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathrm{N}\times_\Lambda\mathbb{R}$. *Le sous-fibré* $T\mathrm{N}\times_\Lambda\mathbb{R}$ *du fibré tangent à* $\mathrm{N}\times_\Lambda\mathbb{R}$ *est intégrable et* τ*-invariant. Il définit donc un feuilletage* F' *dont les feuilles sont difféomorphes à* N. *On obtient alors un isomorphisme de systèmes dynamiques feuilletés*

$$(\mathrm{M}_X;\mathrm{F};\phi^t) \longrightarrow (\mathrm{N}\times_\Lambda\mathbb{R};\mathrm{F}';\tau).$$

De plus, on a la suite exacte

$$1 \to \pi_1(\mathrm{N};n_0) \to \pi_1(\mathrm{M}_X;n_0) \to \Lambda \to 1.$$

pour tout point n_0 *de* N.

DÉMONSTRATION. On renvoie à **[7]** 3.12. □

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_X)$ le topos des gros $\mathbb{R}$-faisceaux sur M_X, où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle. Soit $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}_X$ une feuille. On munit Λ de sa topologie discrète. Ce groupe opère sur N. On note alors

$$\mathcal{S}(\Lambda;\mathrm{N}) = B_\Lambda/_{y(\Lambda;\mathrm{N})}$$

le topos des gros Λ-faisceaux sur N, où B_Λ est le gros topos classifiant du groupe discret Λ, dans lequel l'objet $y(\Lambda;\mathrm{N})$ est représenté par l'action $(\Lambda;\mathrm{N})$.

COROLLAIRE 9.31. *Les topos* $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_X)$ *et* $\mathcal{S}(\Lambda;\mathrm{N})$ *sont équivalents en tant que topos définis sur* $B_\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Le morphisme $\Lambda \to \mathbb{R}$ est une injection continue, donc un monomorphisme dans la catégorie des espaces topologiques. Ainsi $y(\Lambda) \to y(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de

$y(\mathbb{R})$ dans le topos $\mathcal{T}$. Le quotient $y(\mathbb{R})/y(\Lambda)$ existe dans $\mathcal{T}$, et définit un objet de $B_\mathbb{R}$. On a donc deux morphismes $B_\Lambda \to B_\mathbb{R}$, $B_\mathbb{R}/_{y(\mathbb{R})/y(\Lambda)} \to B_\mathbb{R}$ et une équivalence

$$\begin{array}{rccc} h: & B_\Lambda & \longrightarrow & B_\mathbb{R}/_{y(\mathbb{R})/y(\Lambda)} \\ & Z & \longmapsto & Z \times^{y(\Lambda)} y(\mathbb{R}) \to y(\mathbb{R})/y(\Lambda) \end{array}$$

au-dessus de $B_\mathbb{R}$. Le morphisme

$$\mathrm{N} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{N} \times^\Lambda \mathbb{R} := (\mathrm{N} \times \mathbb{R})/\Lambda$$

admet des sections locales, puisqu'il s'agit d'un revêtement étale galoisien de groupe Λ. Ce morphisme est donc couvrant pour la topologie des sections locales. D'après ([**16**] Lemma 3), le plongement de Yoneda préserve les relations d'équivalences effectives $X_1 \rightrightarrows X_0$ lorsque $X_0 \to X$ est couvrant pour une topologie moins fine que la topologie canonique. On obtient donc

$$y(\mathrm{N}) \times^{y(\Lambda)} y(\mathbb{R}) = y(\mathrm{N} \times^\Lambda \mathbb{R}).$$

En négligeant les flèches sur $y(\mathbb{R})/y(\Lambda)$, on a

$$h(y(\Lambda;\mathrm{N})) = (y(\mathbb{R}), y(\mathrm{N}) \times^{y(\Lambda)} y(\mathbb{R})) = y(\mathbb{R}, \mathrm{N} \times^\Lambda \mathbb{R}) = y(\mathbb{R}; \mathrm{M}_X),$$

où la dernière égalité provient du théorème 9.30. On en déduit un isomorphisme de topos localisés

$$\mathcal{S}(\Lambda;\mathrm{N}) = B_\Lambda/_{y(\Lambda;\mathrm{N})} \longrightarrow (B_\mathbb{R}/_{y(\mathbb{R})/y(\Lambda)})/_{y(\mathbb{R};\mathrm{M}_X)} = B_\mathbb{R}/_{y(\mathbb{R};\mathrm{M}_X)} = \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_X)$$

à nouveau au-dessus de $B_\mathbb{R}$.

□

Corollaire 9.32. *Le morphisme flot* $\mathfrak{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_X) \to B_\mathbb{R}$ *se factorise à travers* B_Λ. *On obtient un morphisme* $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_X) \to B_\Lambda$.

Démonstration. Ce corollaire est évident car d'après la proposition précédente, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\Lambda;\mathrm{N}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_\Lambda & \longrightarrow & B_\mathbb{R} \end{array}$$

où la première flèche horizontale est un isomorphisme. □

4.2. Un diagramme commutatif.

4.2.1. *Motifs et systèmes locaux.*

Définition 9.33. *Soit* M *un système dynamique feuilleté. Le faisceau* $\mathcal{R}_\mathrm{M}$ *est le faisceau des fonctions* C^∞ *sur* M_X, *à valeurs réelles, qui sont localement constantes sur les feuilles.*

Soit V/K une variété sur K. Supposons qu'il lui corresponde un morphisme de systèmes dynamiques feuilletés

$$\pi : \mathrm{M}_V \to \mathrm{M}_{Spec(K)}.$$

Le foncteur dérivé

$$V \mapsto R\pi_*(\mathcal{R}_V)$$

définit une théorie cohomologique à valeurs dans la catégorie abélienne des $\mathcal{R}_K$-modules $\mathbb{R}$-équivariants, où $\mathcal{R}_V = \mathcal{R}_{\mathrm{M}_V}$ et $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_{\mathrm{M}_{Spec(K)}}$. Ce foncteur se factorise à travers la catégorie des motifs mixtes sur K et induit un foncteur

$$M \mapsto \mathcal{G}(M).$$

On note $X = Spec(\mathcal{O}_{K,S})$, $\mathcal{R}_X = \mathcal{R}_{\mathrm{M}_X}$ et j le morphisme de systèmes dynamiques induit par le morphisme $Spec(K) \to X$. Si M a bonne réduction en dehors de S, alors

$$\mathcal{F}(M) := j_*\mathcal{G}(M)$$

est un faisceau $\mathbb{R}$-équivariant sur M_X, de $\mathcal{R}_X$-modules localement libres de même rang que M. D'autre part, la catégorie des faisceaux $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R}_X$-modules localement libres $\mathbb{R}$-équivariants est équivalente à celles des systèmes locaux F de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, via le foncteur (cf **[7]** 3.6)

$$F \mapsto F \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_X.$$

On peut donc associer un système local $F(M)$ à un tel motif, ce système local étant d'ailleurs déterminé par sa représentation de monodromie

$$\pi_1(\mathrm{M}_X, m)^{ab} \longrightarrow Aut(F_m),$$

où F_m est la fibre de F en un point $m \in \mathrm{M}_X$. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{R}_X$-module comme ci-dessus sur lequel $\mathbb{R}$ opère via $\psi_{\mathcal{F}}$. On peut définir le twist $\mathcal{F}(\alpha)$ comme le faisceau $\mathcal{F}$ sur lequel $\mathbb{R}$ opère via $\psi^t_{\mathcal{F}(\alpha)} = e^{-t\alpha}\psi^t_{\mathcal{F}}$, quel que soit le réel α. Il lui correspond un système local $F(\alpha)$. En prenant $\mathcal{F} = \mathcal{R}_X$, le système local $\underline{\mathbb{R}}(\alpha) := F(\alpha)$ est donné par la représentation

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathrm{M}_X)^{ab} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ \gamma & \longmapsto & exp\,(\alpha.\psi(\gamma)) \end{array},$$

où ψ est le morphisme période. Enfin, le foncteur $M \mapsto F(M)$ a une $\mathbb{Q}$-structure (cf **[7]** 4.2), c'est à dire qu'il existe un foncteur $M \mapsto F_{\mathbb{Q}}(M)$, à valeurs dans la catégorie des systèmes locaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de sorte que l'on ait un isomorphisme fonctoriel en M

$$F(M) = F_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

4.2.2. *Le groupe des périodes de* $Spec(\mathbb{Z})$.

Proposition 9.34. *Le groupe des périodes* $\mathrm{M}_{Spec(\mathbb{Z})}$ *est* $\Lambda_X = log(\mathbb{Q}^*_+)$*, où* $\mathbb{Q}^*_+$ *est le groupe multiplicatif des rationnels positifs.*

Les arguments avancés par C. Deninger sont repris ci-dessous.

Argument 1. On note $X = Spec(\mathbb{Z})$ et $\overline{X} = (Spec(\mathbb{Z}), \infty)$. D'après (**[11]** section 3), il devrait exister une trajectoire, donnée par un plongement équivariant

$$\iota_\infty : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathrm{M}_X,$$

de sorte que $\iota_\infty(0) = m_\infty$ soit le point stationnaire correspondant à la place archimédienne de $\mathbb{Q}$. Ici, ϕ opère sur $\mathbb{R}^{\geq 0}$ par $\phi^t(r) = re^{-2t}$. Le plongement ι_∞ doit être lisse lorsque l'on munit $\mathbb{R}^{\geq 0}/\{\pm 1\}$ de la structure induite par celle de $\mathbb{R}$ via l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\geq 0} \\ r & \longmapsto & r^2 \end{array}.$$

Enfin, cette trajectoire doit être perpendiculaire aux feuilles. Il suit que l'image inverse de la feuille F_{m_∞} par ι_∞ est réduite à 0, puisque 0 est l'unique point fixe de $\mathbb{R}^{\geq 0}$ sous l'action de $\mathbb{R}$. De plus, cette trajectoire intersecte la feuille F_m en un nombre dénombrable de points, quel que soit $m \neq m_\infty$. Autrement dit, le sous-ensemble $\iota_\infty^{-1}(\mathrm{F}_m)$ de $\mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$ est dénombrable. Par ailleurs, en posant $m_1 = \iota_\infty(1)$, on a

$$\iota_\infty[r] = \phi^{-log(r)}(m_1) \text{ et } \iota_\infty[rs] = \phi^{-log(r)}(\iota_\infty[s]).$$

La multiplication de $\mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$ est donc en relation avec le flot. Il serait donc naturel que l'on ait

$$\iota_\infty^{-1}(\mathrm{F}_{\iota_\infty[r]}) = r\mathbb{Q}^*/\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^*/\{\pm 1\}.$$

Dans ce cas, l'espace des feuilles de $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ serait

$$\mathbb{R}_+^*/\mathbb{Q}_+^* \cup \{0\} = \mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}^*,$$

sur lequel $\mathbb{R}$ opère par multiplication par e^{-t}. La feuille F_{m_∞} (notée $\{0\}$ ci-dessus) est bien fixe sous l'action du groupe $\mathbb{R}$, puisque m_∞ l'est. L'espace des feuilles de M_X serait donc

$$\mathbb{R}_+^*/\mathbb{Q}_+^*$$

sur lequel $\mathbb{R}$ opère en multipliant par e^{-t}. Mais le logarithme

$$log : \mathbb{R}_+^*/\mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}/log(\mathbb{Q}_+^*)$$

définit un isomorphisme $\mathbb{R}$-équivariant, lorsque $\mathbb{R}$ opère sur $\mathbb{R}/log(\mathbb{Q}_+^*)$ par translations. On obtiendrait donc

$$\Lambda_X = log(\mathbb{Q}_+^*).$$

Argument 2. D'après la proposition 9.29, on a $log(\mathbb{Q}_+^*) \subset \Lambda_X$. En effet, chaque point fermé p de $X = Spec(\mathbb{Z})$ correspond à une orbite fermée de longueur $log(p)$. D'autre part, le système local canonique $\underline{\mathbb{R}}(1)$ sur M_X est donné par la représentation de dimension 1

$$exp \circ \psi : \pi_1^{ab}(\mathrm{M}_X) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

où ψ est le morphisme période. Donc $\underline{\mathbb{R}}(1)$ a une structure rationnelle (i.e. $\underline{\mathbb{R}}(1) = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, où F système local de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels) si et seulement si $exp \circ \psi$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Q}_+^*$, c'est à dire si $\Lambda_X \subset log(\mathbb{Q}_+^*)$. Mais $\underline{\mathbb{R}}(1)$ a bien une structure rationnelle qui est donnée par $F_{\mathbb{Q}}(M)$, pour le motif $M = \mathbb{Q}(1)$. En effet l'isomorphisme

$$F_{\mathbb{Q}}(M) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = F_{\mathbb{R}}(M)$$

montre que $\underline{\mathbb{Q}}(1) := F_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(1))$ est un système local de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de sorte que

$$\underline{\mathbb{Q}}(1) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \underline{\mathbb{R}}(1).$$

On obtient

$$\Lambda_X = log(\mathbb{Q}_+^*).$$

Proposition 9.35. *Soit K un corps de nombres et $Y = Spec(\mathcal{O}_{K,S})$ le spectre de l'anneau des S-entiers dans K. On note $J_{K,S}$ le sous-groupe de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par les nombres $N(\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des points de $Y = Spec(\mathcal{O}_{K,S})$. On note Λ_Y et $\Lambda_X = log(\mathbb{Q}_+^*)$ les groupes de périodes des systèmes dynamiques associés à Y et $Spec(\mathbb{Z})$ respectivement. Alors on a les inclusions*

$$log(J_{K,S}) \subseteq \Lambda_Y \subseteq log(\mathbb{Q}_+^*) \subseteq \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION. La première inclusion résulte de la proposition 9.29. Le morphisme de systèmes dynamiques

$$\mathrm{M}_Y \longrightarrow \mathrm{M}_{Spec(\mathbb{Z})}$$

induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathrm{M}_Y) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda_Y \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\pi_1(\mathrm{M}_{Spec(\mathbb{Z})}) \arrow[r] & log(\mathbb{Q}_+^*) \arrow[r] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

La deuxième inclusion en découle.

□

4.2.3.

HYPOTHÈSE 9.36. *Nous supposerons dans la suite que le groupe des périodes* $\mathrm{M}_{Spec(\mathbb{Z}_S)}$ *est* $log(\mathbb{Q}^*_{+,S})$*, où* $\mathbb{Q}^*_{+,S}$ *est le groupe des rationnels positifs étrangers à* S *(cf* **[7]** *4.8, 4.9).*

Soit S un ensemble fini de nombres premier et $X_S = Spec(\mathbb{Z}_S)$ le spectre de l'anneau des S-entiers de $\mathbb{Q}$. On note aussi $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}$ l'extension maximale de $\mathbb{Q}$ non ramifiée en dehors de S, puis

$$\pi_1^{et}(X_S,\overline{\eta}) = G_S = Gal(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$$

le groupe fondamental étale de X_S défini par le point géométrique $\overline{\eta} : Spec(\overline{\mathbb{Q}}) \to X_S$. Enfin, on note $(\mathrm{M}_S, \mathrm{F}, \phi)$ le système dynamique feuilleté conjecturalement associé à $Spec(\mathbb{Z}_S)$. D'après la remarque précédente, son groupe des périodes est

$$\Lambda_S = log(\mathbb{Q}^*_{+,S}) \simeq \mathbb{Q}^*_{+,S}.$$

Le foncteur $\mathfrak{D}$ transforme un revêtement étale de schémas en un revêtement topologique. On suppose de plus qu'un revêtement étale galoisien $Y \to X_S$ de groupe G est envoyé sur un G-torseur $y(\mathfrak{D}(Y))$ du topos $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_S)$ (nous renvoyons au chapitre suivant pour plus de détails sur ce paragraphe). Il lui correspond un morphisme dans le petit topos classifiant

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_S) \longrightarrow B_G^{sm}.$$

Considérons maintenant un système projectif de revêtements étales galoisiens Y_i/X_S de groupes G_i de sorte que $G_S = \varprojlim G_i$. On obtient alors un système compatible de morphismes $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_S) \to B^{sm}_{G_i}$, induisant un morphisme dans le topos limite projective

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_S) \longrightarrow \varprojlim B^{sm}_{G_i} = B^{sm}_{G_S}.$$

Plus directement, les objets $y(Y_i)$ du topos étale $\mathcal{S}_{Et}(X_S)$ sont des G_i-torseurs, et induisent donc un morphisme

$$\mathcal{S}_{Et}(X_S) \longrightarrow B^{sm}_{G_S}.$$

Considérons maintenant l'extension $\mathbb{Q}(\mu_{S^\infty})/\mathbb{Q}$ engendré par les racines p^n-ièmes de l'unité, pour $p \in S$. Alors le groupe de Galois de cette extension est

$$Gal(\mathbb{Q}(\mu_{S^\infty})/\mathbb{Q}) = \prod_{p\in S} \mathbb{Z}_p^* =: \widehat{\mathbb{Z}}_S^*.$$

Cette extension est non ramifiée en dehors de S. On obtient le caractère cyclotomique

$$\kappa : G_S \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_S^*.$$

Il s'en déduit un morphisme de topos classifiants

$$B_\kappa : B^{sm}_{G_S} \longrightarrow B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S}.$$

D'autre part, l'inclusion canonique

$$\begin{array}{rccc} diag: & \mathbb{Q}^*_{+;S} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}^*_S \\ & q & \longmapsto & (q;...;q) \end{array}.$$

induit un morphisme

$$B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}} \longrightarrow B_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S} \longrightarrow B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S}$$

du gros topos classifiant du groupe discret $\mathbb{Q}^*_{+;S}$ dans le petit topos classifiant du groupe profini $\widehat{\mathbb{Z}}^*_S$. Dans ces conditions, on a la proposition suivante (cf [**7**] 4.8).

Proposition 9.37. *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_S) \arrow[r] \arrow[d] & B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}} \arrow[d] \\ B^{sm}_{G_S} \arrow[r] & B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

4.2.4. En acceptant l'hypothèse 9.36, il semble que le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{D}: & Et_{\overline{X}} & \longrightarrow & Top^{\mathbb{R}}/_{\mathfrak{D}(\overline{X})} \\ & U & \longmapsto & \mathfrak{D}(U) \end{array}$$

ne puisse être exact à gauche, car il ne préserve pas les monomorphismes. En effet, l'espace des feuilles de $\mathfrak{D}(Spec(\mathbb{Z}))$ est $\mathbb{R}/log(\mathbb{Q}^*_+)$, alors que celui de $\mathfrak{D}(Spec(\mathbb{Z}_S))$ est $\mathbb{R}/log(\mathbb{Q}^*_{+,S})$. On ne peut donc pas en déduire l'existence d'un morphisme de sites exacts à gauche, et à fortiori, d'un morphisme de topos. On devrait pouvoir remédier à ce problème en associant à $Spec(\mathbb{Z}_S)$ l'ouvert complémentaire dans $\mathfrak{D}(Spec(\mathbb{Z}))$ des orbites fermées correspondant aux points de S. On obtiendrait alors un morphisme

$$\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_{\overline{X}}) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$$

et un diagramme commutatif de topos

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r] \arrow[d] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d] \\ \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_S) \arrow[r] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

quel que soit le point fermé v (ultramétrique ou archimédien) de $\overline{X}$. De plus, le morphisme

$$\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathrm{M}_S) \longrightarrow B^{sm}_{G_S}$$

défini ci-dessus se factoriserait alors à travers

$$\mathcal{S}_{Et}(X_S) \longrightarrow B^{sm}_{G_S},$$

de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_S) \arrow[r] \arrow[d] & B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}} \arrow[d] \\ \mathcal{S}_{Et}(X_S) \arrow[r] & B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On obtiendrait alors un morphisme canonique

$$\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_S) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(X_S) \times_{B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S}} B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}}.$$

Soit maintenant $\overline{U}$ un ouvert de $Spec(\mathbb{Z})$ contenant la place archimédienne ∞ de $\mathbb{Q}$. Le seul diagramme commutatif que l'on peut attendre est le suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_{\overline{U}}) \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[d] & B_{\mathbb{R}} \arrow[d] \\ \mathcal{S}_{Et}(\overline{U}) \arrow[r] & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

car la composition

$$\mathfrak{f} \circ i_{\gamma_\infty} : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathrm{M}_{\overline{U}}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

est l'identité de $B_{\mathbb{R}}$.

REMARQUE 9.38. *La discussion ci-dessus suggère de considérer les produits fibrés*

$$\mathcal{S}_{Et}(X_S) \times_{B^{sm}_{\widehat{\mathbb{Z}}^*_S}} B_{\mathbb{Q}^*_{+;S}} \text{ et } \mathcal{S}_{Et}(\overline{U}) \times B_{\mathbb{R}}.$$

CHAPITRE 10

Le topos étale modifié

La construction du complexe $R_W\mathbb{Z}$ dans le chapitre 7, permet d'espérer l'existence d'un topos Weil-étale en caractéristique zéro muni d'un morphisme canonique de celui-ci dans le topos étale d'Artin-Verdier. Pour une courbe projective lisse Y sur un corps fini, l'isomorphisme

$$\mathcal{S}_W(Y) \simeq \mathcal{S}_{et}(Y) \times_{B^{sm}_{G_k}} B^{sm}_{W_k},$$

donne une construction directe du topos Weil-étale à partir du topos étale arithmétique de Y. Cette définition pour un corps de fonctions suggère la construction du topos Weil-étale d'un corps de nombres K à partir du topos étale d'Artin-Verdier de $\overline{X} = \overline{Spec\,\mathcal{O}_K}$. L'extension cyclotomique d'un corps de nombres joue souvent le rôle de l'extension non ramifiée $K \otimes_k \overline{k}/K$ du corps de fonction d'une courbe Y. Dans notre contexte, ce rôle a été précisé dans la section 4.2 du chapitre précédent, grâce aux idées de C. Deninger qui permettent d'imaginer un corps de nombres comme un système dynamique feuilleté. Puisque l'extension cyclotomique K^{cy}/K d'un corps de nombres est ramifiée, on ne peut définir que localement un nouveau topos par produit fibré. La méthode de la descente, sous la forme de limite inductive d'un topos simplicial tronqué, permet ensuite de recoller ces topos produits le long d'un recouvrement étale. Puisqu'il n'y a clairement pas lieu de privilégier un recouvrement parmi les autres, on est amené à considérer la limite projective, prise sur les classes d'équivalence de recouvrements étales (Nisnevich), de ces topos ainsi recollés. Ce procédé permet de modifier le topos étale de $\overline{X}$, en libérant notamment les Frobenius de leur complétion profinie, afin d'obtenir naturellement un morphisme non trivial

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

dans le topos classifiant $B_{\mathbb{R}}$. Ce morphisme *flot* traduit le caractère dynamique du topos étale modifié $\mathcal{S}_m(\overline{X})$, en un sens précisé dans le chapitre précédent. L'existence de ce morphisme reste étonnante, lorsqu'elle est comparée à l'absence de revêtements étales non triviaux de $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$ d'une part, et à l'hyperconnexité du morphisme

$$\gamma : \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow \mathcal{S}_{et}(\overline{X})$$

dans le topos étale d'autre part.

Ce topos est aussi muni de flèches

$$i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \text{ et } \theta_v : \mathcal{S}_W(\overline{X}^h_v) \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}),$$

pour toute valuation non triviale v, rendant commutatifs les diagrammes envisagés dans les chapitres précédents. En composant i_v avec le morphisme flot, on obtient le morphisme de topos classifiants

$$\mathfrak{f} \circ i_v : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

induit par la flèche canonique $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$. Une place ultramétrique v peut ainsi être pensée comme une orbite fermée du flot de longueur $log\,(N(v))$, alors qu'une place archimédienne doit être vue comme un point fixe. Cependant, i_v n'est une inclusion fermée que lorsque v

est une place archimédienne. Ceci reste malgré tout cohérent pour deux raisons. D'une part, la condition de Beck-Chevalley ne peut être satisfaite par ce topos. D'autre part, les calculs conjecturaux de la cohomologie Weil-étale à support compact nécessitent que la flèche i_v soit une inclusion fermée uniquement lorsque v est archimédienne. Si la situation est à peu près claire en ce qui concerne des points fermés de $\overline{X}$, elle est beaucoup plus mystérieuse au voisinage du point générique.

Ainsi, le topos $\mathcal{S}_m(\overline{X})$ construit dans ce chapitre possède quelques propriétés topologiques qui devront être satisfaites par le topos Weil-étale. Malheureusement, je suis actuellement incapable de calculer la cohomologie de ce topos, dont je ne prétends pas qu'il s'agisse du "bon" topos Weil-étale. Cependant, ce procédé permet de modifier le topos étale d'Artin-Verdier, afin d'obtenir les propriétés topologiques décrites ci-dessus.

1. Préliminaires

Dans ce chapitre, on désigne par $\mathfrak{Top}$ la 2-catégorie des topos de Grothendieck. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ sont deux topos, on note $\underline{Homtop}(\mathcal{E},\mathcal{S})$ la catégorie des morphismes (géométriques) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{S}$.

1.1. Limites inductives de topos. Les limites inductives quelconques existent dans la 2-catégorie des topos. Dans un premier temps, nous rappelons la définition des plus simples d'entre elles, que sont les sommes et sommes amalgamées. Ensuite, nous donnons la définition générale, qui nous permettra de "recoller" des topos le long d'une famille couvrante.

1.1.1. *Sommes.* Soit $\{\mathcal{E}_i;\ i \in I\}$ une famille de topos indexée sur un ensemble I. Alors la somme $\coprod \mathcal{E}_i$ des topos $\mathcal{E}_i$ existe. La catégorie sous-jacente à ce topos est la catégorie produit $\prod \mathcal{E}_i$, où les $\mathcal{E}_i$ sont ici vues comme des catégories. Pour tout topos $\mathcal{F}$, on a bien une équivalence de catégorie (fonctorielle en $\mathcal{F}$)

$$\prod \underline{Homtop}(\mathcal{E}_i;\mathcal{F}) \ \simeq\ \underline{Homtop}(\coprod \mathcal{E}_i;\mathcal{F}).$$

On peut aussi remarquer que la somme vide (ou la 2-limite inductive vide) existe. Il s'agit du topos initial, défini comme la catégorie finale ou celle des faisceaux sur l'espace topologique vide.

1.1.2. *Sommes amalgamées.* Etant donné une paire de morphismes de topos $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $f' : \mathcal{E} \to \mathcal{F}'$, on peut contruire la somme amalgamée (ou pushout) $\mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}'$ dans la 2-catégorie des topos. La catégorie $\mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}'$ est définie comme suit. Les objets sont les triples $(F;F';a)$, où F est un objet de $\mathcal{F}$, F' un objet de $\mathcal{F}'$, et a un isomorphisme $f^*F \simeq f'^*F'$ dans $\mathcal{E}$. Cette catégorie est un topos car les foncteurs f^* et f'^* commutent aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques. Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (F;F';a) & \longmapsto & F \end{array}$$

commute aux limites inductives quelconques ainsi qu'aux limites projectives finies. C'est donc l'image inverse d'un morphisme de topos

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}'.$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}' \arrow[d] \\ \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}' \end{tikzcd}$$

où le morphisme $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}'$ est défini comme ci-dessus. Enfin, quel que soit le topos $\mathcal{H}$, on a une équivalence de la catégorie $\underline{Homtop}\,(\mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}';\mathcal{H})$ dans celle des triples

$$(\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{H},\ \psi : \mathcal{F}' \to \mathcal{H},\ \beta : \varphi f \simeq \psi f').$$

1.1.3. *Cas général.* Soient $\mathbb{K}$ une petite catégorie et $\mathbb{K}^{op}$ sa catégorie opposée. Considérons deux pseudo-foncteurs

$$\mathcal{G} : \mathbb{K} \to \mathfrak{Top} \text{ et } w : \mathbb{K}^{op} \to \underline{Cat},$$

où $\underline{Cat}$ désigne la 2-catégorie des catégories, et $\mathfrak{Top}$ celle des topos de Grothendieck. Le topos limite inductive $w * \mathcal{G}$ satisfait la propriété universelle suivante. Quel que soit le topos $\mathcal{H}$, on a une équivalence de catégories

$$\underline{Homtop}(w * \mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq \underline{Nat}(w, \underline{Homtop}(\mathcal{G}(-), \mathcal{H})) \tag{133}$$

fonctorielle en $\mathcal{H}$. Ici, la catégorie $\underline{Nat}$ est celle des (pseudo)-transformations naturelles entre pseudo-foncteurs $\mathbb{K} \to \underline{Cat}$. Le topos $w * \mathcal{G}$ est construit de la manière suivante.

Un objet de cette catégorie est un couple $< D_{(-)}, u_{(-)} >$, où $D_K : w(K) \to \mathcal{G}(K)$ est un foncteur pour $K \in Ob(\mathbb{K})$, et u_α est un isomorphisme de foncteurs

$$D_K \circ w(\alpha) \simeq \mathcal{G}(\alpha)^* \circ D_{K'} : w(K') \to \mathcal{G}(K),$$

quel que soit la flèche $\alpha : K \to K'$ de $\mathbb{K}$. De plus, les transformations u_α doivent être compatibles (cf **[42]** 2.4).

Un morphisme $(D, u) \to (D', u')$ dans $w * \mathcal{G}$ est une famille $(\tau_K,\ K \in Ob(\mathbb{K}))$ de transformations

$$\tau_K : D_K \to D'_K : w(K) \to \mathcal{G}(K)$$

naturelles en K. Plus précisément, quel que soit la flèche $\alpha : K_1 \to K_2$, le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(\alpha)^* \circ D_{K_2} \arrow[r, "\mathcal{G}(\alpha)^*.\tau_{K_1}"] & \mathcal{G}(\alpha)^* \circ D'_{K_2} \\ D_{K_1} \circ w(\alpha) \arrow[u, "u_\alpha"] \arrow[r, "\tau_{K_1}.w(\alpha)"] & D'_{K_1} \circ w(\alpha) \arrow[u, "u'_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

1.1.4. *Exemples.* Pour la somme $\mathcal{F}\coprod_{\mathcal{E}}\mathcal{F}'$, on prend $\mathbb{K} := 0 \rightrightarrows^1_2$, avec $u : 0 \to 1$ et $v : 0 \to 2$. On pose alors $\mathcal{G}(0) = \mathcal{E}$, $\mathcal{G}(1) = \mathcal{F}$, $\mathcal{G}(2) = \mathcal{F}'$, $\mathcal{G}(u) = f$ et $\mathcal{G}(v) = f'$. Le pseudo-foncteur w associe la catégorie finale $\mathbf{1}$ aux objets 1 et 2, et la catégorie $a \rightleftarrows b$ à l'objet 0, où les flèches entre les objets distincts a et b sont des isomorphismes réciproques.

Pour une somme $\{\mathcal{E}_i;\ i \in I\}$, $\mathbb{K}$ est la catégorie discrète associée à l'ensemble I, et w est le pseudo-foncteur constant associé à la catégorie finale $\mathbf{1}$.

1.2. Limite inductive de topos simpliciaux tronqués. Considérons la catégorie simpliciale tronquée

$$\Delta_{\leq 2}: \quad \Delta_2 \leftleftarrows\!\leftarrow \Delta_1 \leftleftarrows\!\rightarrow \Delta_0.$$

On définit un pseudo-foncteur

$$w : \Delta_{\leq 2} \longrightarrow \underline{Cat}$$

en envoyant les objets Δ_0, Δ_1 et Δ_2 sur la catégorie finale $\mathbf{1}$. Un *topos simplicial tronqué* est un pseudo-foncteur

$$\mathcal{S}_\bullet : \ \Delta_{\leq 2}^{op} \longrightarrow \mathfrak{Top},$$

c'est à dire un diagramme de topos de la forme

$$\mathcal{S}_2 \rightrightarrows^{d_0}_{d_2} \rightarrow^{d_1} \mathcal{S}_1 \rightrightarrows^{d_0}_{d_1} \leftarrow^{s} \mathcal{S}_0,$$

où s est une section des morphismes d_0 et d_1.

Définition 10.1. *La* limite inductive d'un topos simplicial tronqué $\mathcal{S}_\bullet$ *est la limite* $\underrightarrow{lim}\ \mathcal{S}_\bullet := w * \mathcal{G}$ *du couple de pseudo-foncteurs*

$$\mathcal{S}_\bullet : \ \Delta_{\leq 2}^{op} \longrightarrow \mathfrak{Top} \ \textit{et}\ w : \Delta_{\leq 2} \longrightarrow \underline{Cat},$$

où w est le pseudo-foncteur défini ci-dessus.

Remarque 10.2. *La catégorie $\underrightarrow{lim}\ \mathcal{S}_\bullet$ ci-dessus est celle dont les objets sont les suites $(\mathcal{F}_i, \xi_\alpha)$, où $\mathcal{F}_i$ est un objet de $\mathcal{S}_i$ pour $i \leq 2$, et $\xi_\alpha : \mathcal{F}_i \simeq \alpha^*\mathcal{F}_j$ est un isomorphisme pour chaque flèche $\alpha : \Delta_j \to \Delta_i$ de $\Delta_{\leq 2}$.*

On peut aussi définir la catégorie $Desc(\mathcal{S}_\bullet)$ des objets de $\mathcal{S}_0$ munis d'une donnée de descente. Les objets de cette catégorie sont les couples $(\mathcal{F}, a)$, où $\mathcal{F}$ est un objet de $\mathcal{S}_0$ muni d'un isomorphisme

$$a : d_1^*\mathcal{F} \longrightarrow d_0^*\mathcal{F}$$

de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites.

– On a $s^*(a) = Id_{\mathcal{F}}$.

– En négligeant les isomorphismes de transitivité, on a $(d_0^*a) \circ (d_2^*a) = d_1^*a$.

La deuxième condition s'exprime plus précisément par la commutativité du diagramme suivant, dans lequel les flèches notées t sont données par les isomorphimes de transitivité.

$$\begin{tikzcd}
 & d_2^*d_1^*\mathcal{F} \arrow[rr, "d_2^*a"] \arrow[dl, "t"'] & & d_2^*d_0^*\mathcal{F} \arrow[dr, "t"] & \\
d_1^*d_1^*\mathcal{F} \arrow[drr, "d_1^*a"] & & & & d_0^*d_1^*\mathcal{F} \arrow[dll, "d_0^*a"'] \\
 & & d_1^*d_0^*\mathcal{F} \simeq d_0^*d_0^*\mathcal{F} & &
\end{tikzcd}$$

Le résultat suivant est donné dans ([**42**] Proposition 3.4).

Proposition 10.3. *On a une équivalence*

$$\underrightarrow{lim}\ \mathcal{S}_\bullet \simeq Desc(\mathcal{S}_\bullet).$$

DÉFINITION 10.4. *Soit* $\mathcal{R} = \{U_i \to e_{\mathcal{S}};\ \ i \in I\}$ *une famille couvrant l'objet final d'un topos* $\mathcal{S}$. *Le* topos simplicial tronqué de localisation $\mathcal{S}/_{\mathcal{R}}$ *associé au recouvrement* $\mathcal{R}$ *est donné par le diagramme*

$$\coprod_{i,j,k\in I^3} \mathcal{S}/_{U_{ijk}} \rightrightarrows^{d_0}_{d_2}\rightarrow^{d_1} \coprod_{i,j\in I^2} \mathcal{S}/_{U_{ij}} \rightrightarrows^{d_0}_{d_1}\leftarrow^{s} \coprod_{i\in I} \mathcal{S}/_{U_i}.$$

Ci-dessus, les objets U_{ij} (respectivement U_{ijk}) sont les produits $U_i \times U_j$ (respectivement $U_i \times U_j \times U_k$) définis dans le topos $\mathcal{S}$. Le morphisme d_2 (respectivement d_1, d_0) est induit par les projections sur les deux premières composantes $U_{ijk} \to U_{ij}$ (respectivement...). La section s est induite par les morphismes diagonaux $U_i \to U_{ii}$.

REMARQUE 10.5. *Si l'on note* $U := \coprod U_i$, *on a*

$$\coprod_{i\in I} \mathcal{S}/_{U_i} = \mathcal{S}/_U \ ,\ \coprod_{i,j\in I^2} \mathcal{S}/_{U_{ij}} = \mathcal{S}/_U \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}/_U \ \ et \ \ \coprod_{i,j,k\in I^3} \mathcal{S}/_{U_{ijk}} = \mathcal{S}/_U \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}/_U \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}/_U$$

Le topos simplicial tronqué $\mathcal{S}/_{\mathcal{R}}$ *est donc simplement*

$$\mathcal{S}/_U \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}/_U \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}/_U \rightrightarrows^{d_0}_{d_2}\rightarrow^{d_1} \mathcal{S}/_U \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}/_U \rightrightarrows^{d_0}_{d_1}\leftarrow^{s} \mathcal{S}/_U.$$

EXEMPLE 10.6. Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ un site exact à gauche pour un topos $\mathcal{S}$, et soit $\mathcal{R} = \{U_i \to X,\ i \in I\}$ une famille couvrant l'objet final X de $\mathcal{C}$. On a une équivalence canonique $\widetilde{(\mathcal{C}, \mathcal{J})}/_{y(U_i)} = (\widetilde{\mathcal{C}/_{U_i}, \mathcal{J}_{ind}})$, où $\mathcal{J}_{ind}$ est la topologie induite. Le topos simplicial précédent $\mathcal{S}/_{\mathcal{R}}$ se réécrit donc

$$\coprod_{i,j,k\in I^3} \widetilde{\mathcal{C}/_{U_{ijk}}} \rightrightarrows^{d_0}_{d_2}\rightarrow^{d_1} \coprod_{i,j\in I^2} \widetilde{\mathcal{C}/_{U_{ij}}} \rightrightarrows^{d_0}_{d_1}\leftarrow^{s} \coprod_{i\in I} \widetilde{\mathcal{C}/_{U_i}},$$

où les catégories $\mathcal{C}/_-$ sont munies des topologies induites. La limite inductive

$$\underrightarrow{lim}\ \mathcal{S}/_{\mathcal{R}} \simeq Desc(\mathcal{S}/_{\mathcal{R}})$$

s'explicite comme suit. Un objet de cette catégorie est donné par une famille $(\mathcal{F}_i, a_{ij})$, où $\mathcal{F}_i$ est un objet de $\widetilde{\mathcal{C}/_{U_i}}$ et a_{ij} un isomorphisme

$$a_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \longrightarrow \mathcal{F}_j|_{U_{ij}},$$

de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites. Quel que soit $i \in I$, on a

$$a_{ii}|_{U_i} = Id_{\mathcal{F}_i},$$

où la restriction du morphisme a_{ii} est prise relativement au morphisme diagonal $U_i \to U_i \times U_i$. Quel que soit $(i, j, k) \in I^3$, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}|_{U_{ijk}} \simeq \mathcal{F}_j|_{U_{jk}}|_{U_{ijk}} \arrow[dr, "d_0^*(a_{jk})"] & \\
\mathcal{F}_i|_{U_{ij}}|_{U_{ijk}} \simeq \mathcal{F}_i|_{U_{ik}}|_{U_{ijk}} \arrow[ur, "d_2^*(a_{ij})"] \arrow[rr, "d_1^*(a_{ik})"] & & \mathcal{F}_k|_{U_{ik}}|_{U_{ijk}} \simeq \mathcal{F}_k|_{U_{jk}}|_{U_{ijk}}
\end{tikzcd}$$

On consière à nouveau une famille $\mathcal{R} = \{U_i \to e,\ i \in I\}$ couvrant l'objet final d'un topos $\mathcal{S}$. Les morphismes de localisation

$$\mathcal{S}/_{U_{ijk}} \longrightarrow \mathcal{S},\ \mathcal{S}/_{U_{ij}} \longrightarrow \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{S}/_{U_i} \longrightarrow \mathcal{S}$$

munis des isomorphismes de transitivité associés aux morphismes composés, forment naturellement un système compatible de morphismes. En d'autres termes, on obtient un objet de la catégorie

$$\underline{Nat}\,(w, \underline{Homtop}\,(\mathcal{S}/_{\mathcal{R}}, \mathcal{S})).$$

L'équivalence (133) fournit donc un morphisme canonique

$$l : \varinjlim \mathcal{S}/_{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

LEMME 10.7. *Le morphisme l précédent est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. On se place dans la situation de l'exemple précédent. D'après la proposition 10.3, il suffit de montrer que la catégorie des faisceaux sur X est équivalente à celle des faisceaux sur $\coprod U_i$ munis d'une donnée de descente. Une preuve de cette affirmation se trouve dans ([**15**] Chapter 4, Example 4.1). □

Ce résultat s'énonce aussi en disant que le morphisme de topos

$$\mathcal{S}/_U \longrightarrow \mathcal{S}$$

est un morphisme de descente effective. C'est un cas très particulier du fait que les morphismes ouverts et surjectifs de topos sont de tels morphismes (cf [**32**]). Si $\mathcal{S}$ est le topos étale d'un schéma dont $\mathcal{R}$ est un recouvrement étale, alors ce résultat est aussi un cas particulier de ([**24**] VIII Théorème 9.4 (c)).

1.3. Torseurs. La notion de torseur dans un topos généralise celle de revêtement étale galoisien d'un espace topologique.

DÉFINITION 10.8. *Soit $\mathcal{E}$ un topos et G un groupe de $\mathcal{E}$. Un G-torseur de $\mathcal{E}$ est un objet X de $\mathcal{E}$ muni d'une action (à droite) de G satisfaisant les conditions équivalentes suivantes :*
- *Le quotient de la relation d'équivalence*

$$X \times G \rightrightarrows X$$

  est l'objet final de $\mathcal{S}$.
- *Il existe une famille $\{U_i \to e_{\mathcal{S}}\}$ couvrant l'objet final dans $\mathcal{S}$ de sorte que la restriction $X\,|_{U_i}$ soit isomorphe au fibré à opérateurs trivial (i.e. $G\,|_{U_i}$ opérant par translations sur lui-même).*

NOTATION 10.9. *On note $\underline{Tors}_G(\mathcal{E})$ la catégorie des G-torseurs de $\mathcal{E}$.*

EXEMPLE 10.10. *Soient X un espace topologique, G un groupe discret et $\widetilde{X} \to X$ un revêtement galoisien de groupe G. Alors le faisceau sur X représenté par l'espace étalé $\widetilde{X}$ est un G-torseur du topos $\mathcal{S}(X)$ des faisceaux sur X.*

EXEMPLE 10.11. *Soit G un schéma en groupes et Y un schéma au-dessus de S. On note $\mathcal{S}$ le gros topos étale du schéma S, puis B_G le topos classifiant du groupe de $\mathcal{S}$ représenté par G. Soit de plus (V, q) un fibré symétrique sur Y (i.e. une forme quadratique) de rang n et O_n le groupe orthogonal sur S. Alors le faisceau $Isom(q, q_n)$ des isométries de q dans q_n est un O_n-torseur de $\mathcal{S}$, où (L_n, q_n) est le fibré symétrique trivial. Supposons maintenant que l'on ait une représentation orthogonale*

$$G_Y := G \times_S Y \longrightarrow Aut(V, q) =: O(q).$$

Alors l'objet $Isom(q, q_n)$ est un O_n-torseur de B_G.

Exemple 10.12. *Si G est un groupe d'un topos $\mathcal{E}$, on note B_G le topos des objets de $\mathcal{E}$ sur lesquels G opère à gauche. Le morphisme de G dans le groupe unité e de $\mathcal{E}$ induit un morphisme $\pi : B_G \to \mathcal{E}$. L'objet π^*G est alors donné par le groupe G muni de son action triviale. Le morphisme*

$$E_G \times \pi^*G \longrightarrow E_G,$$

défini par translations à droite de π^*G sur E_G est un morphisme de B_G. Ainsi, E_G est un objet de B_G sur lequel π^*G opère à droite. Ceci fait de E_G un π^*G torseur de B_G.

Soient $q : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ un morphisme et X un G-torseur de $\mathcal{E}$. Alors q^*X est un q^*G-torseur de $\mathcal{S}$. En effet, q^*G opère sur q^*X car q^* commute aux produits finis et le quotient de q^*X par q^*G est l'objet final de $\mathcal{S}$ car q^* commute aux limites inductives. Le résultat suivant provient de ([**24**] IV Exercice 5.9).

Proposition 10.13. *Soit $q : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ un topos au-dessus de $\mathcal{E}$, et soit G un groupe de $\mathcal{E}$. Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \underline{Homtop}_{\mathcal{E}}(\mathcal{S}, B_G) & \longrightarrow & \underline{Tors}_{q^*G}(\mathcal{S}) \\ f & \longmapsto & f^*E_G \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Corollaire 10.14. *Soient $t : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ un morphisme et G un groupe de $\mathcal{E}$. Alors le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} B_{u^*G} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p"] & B_G \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{E}' \arrow[r, "u"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

est un pullback.

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ un topos. La catégorie

$$\underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, \mathcal{E}') \times_{\underline{Homtop}\,(\mathcal{T},\mathcal{E})} \underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, B_G)$$

est celle des triples (t_1, t_2, β) où $t_1 : \mathcal{T} \to \mathcal{E}'$, $t_2 : \mathcal{T} \to B_G$ sont des morphismes et $\beta : u \circ t_1 \simeq \pi \circ t_2$ est un isomorphisme dans $\underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, \mathcal{E})$. Il faut montrer que cette catégorie est équivalente à $\underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, B_{u^*G})$, quel que soit le topos $\mathcal{T}$. On vérifie immédiatement qu'il existe un isomorphisme canonique de foncteur

$$\alpha : p^*u^* \simeq v^*\pi^*.$$

Le diagramme précédent est donc commutatif, ce qui définit un foncteur

$$\begin{array}{cccc} P : & \underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, B_{u^*G}) & \longrightarrow & \underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, \mathcal{E}') \times_{\underline{Homtop}\,(\mathcal{T},\mathcal{E})} \underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, B_G) \\ & f & \longmapsto & (pf, vf, f^*\alpha) \end{array}$$

Nous allons définir un foncteur en sens inverse

$$\begin{array}{ccc} \underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, \mathcal{E}') \times_{\underline{Homtop}\,(\mathcal{T},\mathcal{E})} \underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, B_G) & \longrightarrow & \underline{Homtop}\,(\mathcal{T}, B_{u^*G}) \\ (t_1, t_2, \beta) & \longmapsto & t \end{array}.$$

Soit (t_1, t_2, β) comme ci-dessus. Le morphisme t_2 définit un objet de $\underline{Homtop}_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}, B_G)$, où $\mathcal{T}$ est muni du morphisme $u \circ t_1 : \mathcal{T} \to \mathcal{E}$. D'après la proposition précédente, cet objet correspond à un $(u \circ t_1)^*G$-torseur T de $\mathcal{T}$. Ce torseur est donc un $t_1^*(u^*G)$-torseur de $\mathcal{T}$. Il lui correspond donc un objet t de la catégorie $\underline{Homtop}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{T}, B_{u^*G})$, où $\mathcal{T}$ est muni du morphisme $t_1 : \mathcal{T} \to \mathcal{E}'$. On vérifie que ceci définit le foncteur quasi-inverse de P. $\square$

1.4. Morphismes hyperconnexes. Un sous-quotient d'un objet Y dans un topos est un objet X de sorte qu'il existe un monomorphisme $Z \hookrightarrow Y$ et un épimorphisme $Z \twoheadrightarrow X$ (X est un quotient d'un sous-objet de Y). Comme les monomorphismes et les épimorphismes sont stables par pull-backs et push-outs dans un topos, ceci est équivalent à ce que X soit un sous-objet d'un quotient de Y.

DÉFINITION 10.15. *Un morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est* localique *si tout objet de $\mathcal{F}$ est un sous-quotient d'un objet de la forme f^*Y.*

EXEMPLE 10.16. *Il suit immédiatement de la définition que l'unique morphisme $\mathcal{S} \to \underline{Set}$ est localique si est seulement si $\mathcal{S}$ est engendré par ses ouverts (i.e. si les sous-objets de l'objet final de $\mathcal{S}$ forment une famille génératrice de cette catégorie). C'est toujours le cas lorsque $\mathcal{S}$ est le topos des faisceaux sur un espace topologique. Plus généralement, le morphisme $\mathcal{S} \to \underline{Set}$ est localique si est seulement si $\mathcal{S}$ est la catégorie des faisceaux sur une* locale.

EXEMPLE 10.17. *Un morphisme de localisation $f : \mathcal{S}/_Z \to \mathcal{S}$ est localique. En effet, l'adjoint à gauche $f_!$ de f^* est fidèle, donc le morphisme d'adjonction $X \to f^*f_!X$ est un monomorphisme, quel que soit l'objet X de $\mathcal{S}/_Z$.*

EXEMPLE 10.18. *Un plongement de topos f est localique. En effet, le morphisme d'adjonction $f^*f_*X \to X$ est un isomorphisme.*

REMARQUE 10.19. *Si une composition*

$$f \circ g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est localique, alors le morphisme g est localique.

Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ un morphisme de topos. On considère la sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ dont les objets sont les sous-quotients des f^*X.

LEMME 10.20. *La catégorie $\mathcal{G}$ est un topos.*

DÉMONSTRATION. Une preuve est donnée dans ([**31**] A.4.6.3). □

DÉFINITION 10.21. *Dans cette situation, le morphisme f est dit* hyperconnexe *lorsque le foncteur f^* induit une équivalence entre $\mathcal{E}$ et le topos $\mathcal{G}$.*

THÉORÈME 10.22. *Tout morphisme peut être factorisé, de manière unique à équivalence près, par un morphisme hyperconnexe suivi d'un morphisme localique.*

DÉMONSTRATION. Considérons un morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ et le topos $\mathcal{G}$ défini ci-dessus. On note $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ le morphisme dont l'image inverse h^* est l'inclusion de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$. On peut aussi définir un morphisme $l : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$, dont l'image inverse l^* est induite par f^* de manière évidente. On a un isomorphisme $f \simeq l \circ h$. De plus, h et l sont respectivement hyperconnexe et localique. L'unicité de cette factorisation provient de ([**31**] A.4.6.4). □

PROPOSITION 10.23. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
- *f est hyperconnexe.*
- *f^* est pleinement fidèle, et son image est fermée par sous-objets.*
- *f^* est pleinement fidèle, et son image est fermée par quotients.*
- *Quel que soit l'objet X de $\mathcal{E}$, f^* induit une équivalence*

$$Sub_{\mathcal{E}}(X) \simeq Sub_{\mathcal{F}}(f^*X)$$

DÉMONSTRATION. C'est ([**31**] A.4.6.6). □

On note $\mathfrak{LTop}/_{\mathcal{S}}$ la 2-catégorie des topos localiques sur $\mathcal{S}$. On désigne par $\mathfrak{Top}/_{\mathcal{S}}$ celle des topos sur $\mathcal{S}$. On vérifie immédiatement que $\mathfrak{LTop}/_{\mathcal{S}}$ est une sous-2-catégorie pleine de $\mathfrak{Top}/_{\mathcal{S}}$. La factorisation hperconnexe-localique permet de définir l'adjoint l à gauche du pseudo-foncteur d'inclusion

$$\mathfrak{LTop}/_{\mathcal{S}} \hookrightarrow \mathfrak{Top}/_{\mathcal{S}}.$$

DÉFINITION 10.24. *La* réflexion localique *est le pseudo-foncteur*

$$l : \mathfrak{Top}/_{\mathcal{S}} \hookrightarrow \mathfrak{LTop}/_{\mathcal{S}}$$

défini par la factorisation hyperconnexe-localique.

LEMME 10.25. *Considérons un pull-back de topos de Grothendieck*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Si f est hyperconnexe, alors f' l'est aussi.

DÉMONSTRATION. On renvoie de nouveau à ([**31**] B.3.3.7). □

Plus généralement, la factorisation hyperconnexe-localique est stable par pull-back. Le prochain résultat est due à Ieke Moerdijk (cf [**44**] Corollary 5.4).

THÉORÈME 10.26. *La féflexion localique préserve les limites de systèmes projectifs filtrants de topos.*

Ce théorème permet de généraliser ([**44**] Theorem 5.1 (iii)). En effet, on en déduit immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 10.27. *Soient $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ un sytème projectif filtrant de topos, et $\mathcal{F}$ un topos. Considérons une famille compatible de flèches $f_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{F}$ ainsi que la flèche induite $f : \mathcal{E}_\infty \to \mathcal{F}$, où $\mathcal{E}_\infty$ est le topos limite projective.*
Si chaque morphisme f_i est hyperconnexe, alors f est hyperconnexe.

La compatibilité des morphismes f_i signifie que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_j \arrow[d, "t_{ji}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \mathcal{E}_i \arrow[r, "f_i"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

DÉMONSTRATION. Considerons $\mathcal{F}$ comme le topos de base. La réflexion localique définit un pseudo-foncteur

$$l : \mathfrak{Top}/_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathfrak{LTop}/_{\mathcal{F}}.$$

Ci-dessous, on designe simplement par $\mathcal{E}_i$ l'objet $\mathcal{E}_i \to \mathcal{F}$ de $\mathfrak{Top}/\mathcal{F}$. D'après le théorème précédent, le morphisme

$$l(\varprojlim \mathcal{E}_i) \longrightarrow \varprojlim l(\mathcal{E}_i)$$

est une equivalence. Mais $l(\mathcal{E}_i) = \mathcal{F}$ (où $\mathcal{F}$ est en fait $Id_{\mathcal{F}}$) car $f_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{F}$ est hyperconnexe. On obtient une équivalence

$$l(\varprojlim \mathcal{E}_i) \simeq \varprojlim l(\mathcal{E}_i) \simeq \mathcal{F}.$$

En d'autres termes, le morphisme $f : \varprojlim \mathcal{E}_i \to \mathcal{F}$ est hyperconnexe. □

1.5. Sur les topos classifiants. Soient G un groupe discret, B_G son gros topos classifiant et B_G^{sm} son petit topos classifiant. Le morphisme canonique $B_G \to \mathcal{T}$ est induit par le morphisme de groupes topologiques $G \to \{1\}$. On a aussi un morphisme canonique $B_G \to B_G^{sm}$. L'image inverse de ce morphisme envoie un G-ensemble E sur l'objet de B_G représenté par l'action (continue) de G sur l'espace discret E.

LEMME 10.28. *Si G est un groupe discret alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} B_G \arrow[r] \arrow[d] & B_G^{sm} \arrow[d] \\ \mathcal{T} \arrow[r] & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

est un pull-back.

DÉMONSTRATION. Soit $e_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \underline{Set}$ l'unique morphisme de $\mathcal{T}$ dans le topos final. Alors G est un groupe de $\underline{Set}$ et $B_G^{sm} := \underline{Set}^G$ est le topos classifiant associé. De même $e_{\mathcal{T}}^*(G)$ est le groupe de $\mathcal{T}$ représenté par le groupe discret G et $B_G := \mathcal{T}^{e_{\mathcal{T}}^*(G)}$ est le topos classifiant associé. Ce lemme est donc une conséquence du corollaire 10.14. □

Soit $\underline{Top}$ la catégorie des espaces d'un univers fixé munie de la topologie des recouvrements ouverts $\mathcal{J}_{ouv}$. On sait que cette topologie est la même que la topologie $\mathcal{J}_{ls}$ des sections locales. Le site $(\underline{Top}; \mathcal{J}_{ls})$ est un site pour $\mathcal{T}$.

LEMME 10.29. *Le morphisme*

$$e_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \longrightarrow \underline{Set}$$

est hyperconnexe.

DÉMONSTRATION. Montrons que le topos $\mathcal{T}$ n'a pas d'ouvert non trivial. Soit $\mathcal{F}$ un sous-objet de l'objet final $e_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T} = (\underline{Top}; \mathcal{J}_{ls})$. Pour tout $X \in Ob(\underline{Top})$, on a $e_{\mathcal{T}}(X) = \{*\}$, et en particulier $e_{\mathcal{T}}(\{*\}) = \{*\}$. Comme l'application $\mathcal{F}(X) \to e_{\mathcal{T}}(X) = \{*\}$ est injective, l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ est soit vide soit réduit à un point, quel que soit l'espace X.

Supposons que $\mathcal{F}(\{*\}) = \{*\}$. Pour tout $X \in Ob(\underline{Top})$, on a une unique application continue $X \to \{*\}$ et donc une application $\mathcal{F}(\{*\}) = \{*\} \to \mathcal{F}(X)$. Il suit que $\mathcal{F}(X)$ est non vide et donc réduit à un point. On a dans ce cas $\mathcal{F} = e_{\mathcal{T}}$.

Supposons que $\mathcal{F}(\{*\}) = \emptyset$. Soit X un objet non vide de $\underline{Top}$. On peut donc choisir un point $x : \{*\} \to X$ de X. L'application induite $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\{*\}) = \emptyset$ montre alors que $\mathcal{F}(X)$ est vide. Comme $\mathcal{F}(X)$ est vide pour tout espace $X \neq \emptyset$, on a $\mathcal{F} = \emptyset_{\mathcal{T}}$.

Le foncteur $e_{\mathcal{T}}^*$ induit donc une équivalence

$$Sub_{\underline{Set}}(\{*\}) \simeq Sub_{\mathcal{T}}(e_{\mathcal{T}}^*(\{*\})) \simeq Sub_{\mathcal{T}}(e_{\mathcal{T}}).$$

Ici, $\{*\}$ désigne l'objet final de $\underline{Set}$ et $e_{\mathcal{T}}$ désigne à la fois l'objet final de $\mathcal{T}$ et l'unique morphisme $\mathcal{T} \to \underline{Set}$.

Soit maintenant I un objet de $\underline{Set}$. On a

$$I = \coprod_{i \in I} \{i\}.$$

Comme le foncteur $e_{\mathcal{T}}^*$ commute aux sommes, on a $e_{\mathcal{T}}^*(I) = \coprod_{i \in I} e_{\mathcal{T}}^*\{i\} = \coprod_{i \in I} e_i$, où $e_i = e_{\mathcal{T}}$ est l'objet final de $\mathcal{T}$. Soit $S \hookrightarrow e_{\mathcal{T}}^*(I)$ (un monomorphisme représentant) un sous-objet. Comme dans $\mathcal{T}$, les sommes sont disjointes et universelles, le morphisme canonique

$$\coprod S_i := \coprod (e_i \times_{\coprod e_i} S) \longrightarrow (\coprod e_i) \times_{\coprod e_i} S = S$$

est un isomorphisme. Alors $\coprod S_i \to e_{\mathcal{T}}^*(I) = \coprod e_i$ et $S \hookrightarrow e_{\mathcal{T}}^*(I)$ représentent le même sous-objet. De plus, $S_i \hookrightarrow e_i$ est un monomorphisme. D'après ce qui précède, l'objet final $e_i = e$ de $\mathcal{T}$ n'a pas de sous-objet non trivial. Donc S_i est soit l'objet initial soit l'objet final de $\mathcal{T}$. Il suit que le foncteur $e_{\mathcal{T}}^*$ induit une équivalence

$$Sub_{\underline{Set}}(I) \simeq Sub_{\mathcal{T}}(e_{\mathcal{T}}^*(I)),$$

quel que soit l'ensemble I. En d'autres termes, le morphisme $e_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \underline{Set}$ est hyperconnexe. □

PROPOSITION 10.30. *Soit G un groupe discret. Alors le morphisme canonique*

$$B_G \longrightarrow B_G^{sm}$$

est hyperconnexe.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 10.28, ce morphisme est un pull-back du morphisme $\mathcal{T} \to \underline{Set}$, qui est hyperconnexe, d'après (10.29). On obtient la proposition grâce au fait que la classe des morphismes hyperconnexes est stable par pull-backs. □

LEMME 10.31. *Soient G et H deux groupes topologiques et $f : G \to H$ un morphisme continu dont l'image $f(G)$ est dense dans H. Alors le morphisme induit*

$$B_f : B_G^{sm} \longrightarrow B_H^{sm}$$

est hyperconnexe.

DÉMONSTRATION. Soit I un objet de B_H^{sm}. Alors $B_f^*(I)$ est l'objet de B_G^{sm} défini par l'ensemble I sur lequel G opère continûment à travers le morphisme $f : G \to H$. Soit $S \hookrightarrow B_f^*(I)$ un sous-objet dans B_G^{sm}. Autrement dit, S est un sous-ensemble de I stable sous l'action de G. Le sous-ensemble H' de H constitué des éléments stabilisant S est une partie fermée de H contenant $f(G)$ qui est dense dans H. Donc $H' = H$ et S est stable sous l'action de H. On en déduit que B_f^* induit une équivalence

$$Sub_{B_H^{sm}}(I) \simeq Sub_{B_G^{sm}}(B_f^*(I)),$$

quel que soit l'objet I de B_H^{sm}. □

Le résultat suivant est démontré dans ([**45**] IV.4.3).

LEMME 10.32. *Soit $(G_i)_{i \in I}$ un système projectif strict (i.e. les morphismes de transition sont surjectifs) de groupes finis. On note $G := \varprojlim G_i$ le groupe topologique profini qu'il définit. Alors le morphisme canonique*

$$B_G^{sm} \longrightarrow \varprojlim B_{G_i}^{sm}$$

est une équivalence. Ici, le topos B_G^{sm} est celui des ensembles sur lesquels G opère continûment et le terme de droite est une 2-limite projective.

2. Construction du topos étale modifié

2.1. Les topos $\mathcal{E}(U)$. Soit $U = Spec(\mathcal{O}_{K;\widetilde{S}}) \to Spec(\mathbb{Z})$ un ouvert du spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres K. On note V son image dans $Spec(\mathbb{Z})$ et S le complémentaire fermé de V dans $Spec(\mathbb{Z})$. Soit $\overline{K}/K$ une clôture algébrique et soit $K_{\widetilde{S}}/K$ la sous-extension maximale de $\overline{K}/K$ non-ramifiée en dehors de $\widetilde{S}$. Le groupe de Galois $G_{\widetilde{S}} := G(K_{\widetilde{S}}/K)$ s'identifie au groupe fondamental étale du schéma U muni du point géométrique $\overline{u} : Spec(\overline{K}) \to U$. Considérons l'extension cyclotomique $\overline{K}/K(\mu_S^{\infty})/K$ engendrée par les racines p^n-ièmes de l'unité pour $p \in S$. On note

$$G_U^{cy} := Gal(K(\mu_S^{\infty})/K)$$

le groupe de Galois de cette extension. Comme l'extension $K(\mu_S^{\infty})/K$ est abélienne, le groupe G_U^{cy} ne dépend pas de la clôture séparable choisie (plus précisément, il en dépend à isomorphisme canonique près). En effet, soit $\overline{K}'/K$ une autre clôture algébrique et soit $\overline{K}'/K'(\mu_S^{\infty})/K$ l'extension cyclotomique associée. On se donne un K-isomorphisme $\tau : \overline{K} \to \overline{K}'$. Il induit un K-isomorphisme $\overline{\tau} : K(\mu_S^{\infty}) \to K'(\mu_S^{\infty})$, et on obtient un isomorphisme

$$\begin{array}{cccc} f_{\overline{K},\overline{K}'} : & Gal(K(\mu_S^{\infty})/K) & \longrightarrow & Gal(K'(\mu_S^{\infty})/K) \\ & \sigma & \longmapsto & \overline{\tau}\sigma\overline{\tau}^{-1} \end{array}$$

qui ne dépend pas du choix de τ car le groupe $Gal(K(\mu_S^{\infty})/K)$ est abélien.

L'extension $K(\mu_S^{\infty})/K$ est non ramifiée en dehors de $\widetilde{S}$, et la tour d'extension $K_{\widetilde{S}}/K(\mu_S^{\infty})/K$ définit un morphisme surjectif

$$\pi_1(U, \overline{u}) = G_{\widetilde{S}} \twoheadrightarrow G_U^{cy}.$$

Considérons le groupe G_U^{cy} comme la limite projective (stricte) $\varprojlim_{i\in I} G_i$. Une sous-extension $\overline{K}/K(\mu_n)/K$, pour un multiple n des premiers $p \in S$, fournit canoniquement un revêtement étale galoisien pointé $x_i : Spec(\overline{K}) \to X_i$ de groupe G_i, au-dessus de $(U, \overline{u})$. On obtient un système projectif de G_i-torseurs $(X_i)_{i\in I}$ dans le topos $\mathcal{S}_{Et}(U)$. Il s'en déduit un système projectif de morphismes de topos

$$\mathcal{S}_{Et}(U) \longrightarrow B_{G_i}^{sm}.$$

Par la propriété universelle de la limite projective, l'existence de cette famille de morphismes est équivalente à celle d'un morphisme

$$\mathcal{S}_{Et}(U) \longrightarrow \varprojlim B_{G_i}^{sm}.$$

Ainsi, l'identification du lemme 10.32

$$\varprojlim B_{G_i}^{sm} \simeq B_{G_U^{cy}}^{sm}$$

nous fournit un morphisme

$$\mathcal{S}_{Et}(U) \longrightarrow B_{G_U^{cy}}^{sm}.$$

PROPOSITION 10.33. *Le morphisme*

$$\mathcal{S}_{Et}(U) \longrightarrow B_{G_U^{cy}}^{sm}.$$

est défini à isomorphisme canonique près.

Démonstration. Un point géométrique $\overline{u} : Spec(\overline{K}) \to X$ permet de définir un groupe profini $G^{cy}_{U,\overline{u}} = \varprojlim G_i$ ainsi qu'un système projectif de G_i-torseurs $(X_i)_{i\in I}$. De manière équivalente, une clôture algébrique $\overline{K}/K$ définit un morphisme de topos $\mathcal{S}_{Et}(U) \to B^{sm}_{G^{cy}_{U,\overline{u}}}$. Soit $\overline{v} : Spec(\overline{K}') \to X$ le point géométrique défini par une autre clôture algébrique $\overline{K}'/K$ et soit $\mathcal{S}_{Et}(U) \to B^{sm}_{G^{cy}_{U,\overline{v}}}$ le morphisme qu'il définit. L'isomorphisme canonique $f : G^{cy}_{U,\overline{u}} \to G^{cy}_{U,\overline{v}}$ induit un diagramme commutatif de topos

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}_{Et}(U) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B^{sm}_{G^{cy}_{U,\overline{u}}} \arrow[rr, "B_f"] & & B^{sm}_{G^{cy}_{U,\overline{v}}} \end{tikzcd}$$

□

Remarque 10.34. *Lorsque U est un ouvert de $Spec(\mathbb{Z})$, on a $G^{cy}_U = \prod_{p\in S} \mathbb{Z}^*_p$. Le morphisme*

$$\kappa : G_{\mathbb{Q};S} \longrightarrow \prod_{p\in S} \mathbb{Z}^*_p$$

est alors le caractère cyclotomique. Pour $U = Spec(\mathcal{O}_{K;\widetilde{S}})$, le groupe G^{cy}_U est un sous-groupe de $\prod_{p\in S} \mathbb{Z}^*_p$.

Proposition 10.35. *Soient U et V des ouverts d'anneaux d'entiers de corps de nombres K et L respectivement. Un morphisme de schémas $\phi : V \to U$ induit de manière canonique un morphisme de groupe profinis*

$$G^{cy}_V \longrightarrow G^{cy}_U.$$

Démonstration. On note S_U et S_V les complémentaires fermés dans $Spec(\mathbb{Z})$ des images ouvertes de U et V respectivement. On a $S_U \subseteq S_V$ Choisissons une clôture algébrique $\overline{L}/L$ de L. On a

$$L(\mu^{\infty}_{S_U}) = L.K(\mu^{\infty}_{S_U}).$$

Il s'en déduit un morphisme injectif

$$G(L(\mu^{\infty}_{S_U})/L) \hookrightarrow G(K(\mu^{\infty}_{S_U})/K) = G^{cy}_U.$$

De plus, la tour d'extension $L(\mu^{\infty}_{S_V})/L(\mu^{\infty}_{S_U})/L$ définit un morphisme surjectif

$$G^{cy}_V = G(L(\mu^{\infty}_{S_V})/L) \twoheadrightarrow G(L(\mu^{\infty}_{S_U})/L).$$

En composant les deux morphismes précédents, on obtient une flèche

$$G^{cy}_V \longrightarrow G^{cy}_U.$$

Soient $\overline{L}/L$ et $\overline{L}'/L$ deux clôtures algébriques de L et soient $\overline{v}$ et $\overline{v}'$ les points géométriques de V qu'elles définissent. On note encore $\overline{v}$ et $\overline{v}'$ les points géométriques de U induits par le morphisme $V \to U$. Alors le diagramme de groupes

$$\begin{tikzcd} G^{cy}_{V,\overline{v}} \arrow[r] \arrow[d] & G^{cy}_{U,\overline{v}} \arrow[d] \\ G^{cy}_{V,\overline{v}'} \arrow[r] & G^{cy}_{U,\overline{v}'} \end{tikzcd}$$

est commutatif, où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques définis plus haut. □

PROPOSITION 10.36. *Le diagramme de topos*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_{Et}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(U) \arrow[d] \\ B^{sm}_{G^{cy}_V} \arrow[r] & B^{sm}_{G^{cy}_U} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. En reprenant les notations de la preuve précédente, le morphisme $G^{cy}_V \to G^{cy}_U$ se factorise comme suit.

$$G^{cy}_V := G(L(\mu^{\infty}_{S_V})/L) \twoheadrightarrow G(L(\mu^{\infty}_{S_U})/L) \hookrightarrow G(K(\mu^{\infty}_{S_U})/K) =: G^{cy}_U.$$

Il suffit donc de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_{Et}(V) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(U) \arrow[d] \\ B^{sm}_{G(L(\mu^{\infty}_{S_U})/L)} \arrow[r] & B^{sm}_{G^{cy}_U} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Par la propriété universelle de la limite projective (cf lemme 10.32)

$$B^{sm}_{G^{cy}_U} = \varprojlim B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)},$$

il suffit de vérifier que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_{Et}(V) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "q"'] & \mathcal{S}_{Et}(U) \arrow[d, "p"] \\ B^{sm}_{G(L(\mu_n)/L)} \arrow[r, "t"] & B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)} \end{tikzcd}$$

quel que soit le multiple n des premiers de S_U.

Le morphisme $p : \mathcal{S}_{Et}(U) \to B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}$ est induit par l'existence du $G(K(\mu_n)/K)$-torseur $\widetilde{U}$ du topos $\mathcal{S}_{Et}(U)$, lui-même défini par l'extension cyclotomique $K(\mu_n)/K$. Alors, le morphisme composé

$$p \circ \phi : \mathcal{S}_{Et}(V) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U) \longrightarrow B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)} \tag{134}$$

est donné par le torseur $\phi^*\widetilde{U}$ de $\mathcal{S}_{Et}(V)$. Si nous voyons $\widetilde{U}$ comme un revêtement étale de U, alors $\phi^*\widetilde{U}$ est représenté par le revêtement étale $\widetilde{U} \times_U V \to V$. Considérons maintenant le torseur $\widetilde{V}$ de $\mathcal{S}_{Et}(V)$ défini par le morphisme

$$q : \mathcal{S}_{Et}(V) \longrightarrow B^{sm}_{G(L(\mu_n)/L)}.$$

Cet objet est représenté par le revêtement étale $\widetilde{V} \to V$ défini par l'extension $L(\mu^{\infty}_n)/L$. En d'autres termes, on a

$$\widetilde{V} = q^* E_{G(L(\mu_n)/L)}.$$

Le morphisme (134) correspond au torseur

$$\phi^*\widetilde{U} = \widetilde{U} \times_U V \to V = \coprod_{G(K(\mu_n)/K)/G(L(\mu_n)/L)} \widetilde{V}.$$

D'autre part, le morphisme

$$t \circ q : \mathcal{S}_{Et}(V) \longrightarrow B^{sm}_{G(L(\mu_n)/L)} \longrightarrow B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}. \tag{135}$$

est donné par le torseur $q^*t^*(E_{G(K(\mu_n)/K)})$. Ici $t^*(E_{G(K(\mu_n)/K)})$ est l'objet de $B^{sm}_{G(L(\mu_n)/L)}$ défini par $G(K(\mu_n)/K)$ sur lequel $G(L(\mu_n)/L)$ agit via l'injection $G(L(\mu_n)/L) \hookrightarrow G(K(\mu_n)/K)$. On a donc un isomorphisme dans $B^{sm}_{G(L(\mu_n)/L)}$

$$t^*(E_{G(K(\mu_n)/K)}) \simeq \coprod_{G(K(\mu_n)/K)/G(L(\mu_n)/L)} E_{G(L(\mu_n)/L)}.$$

Puisque le foncteur q^* commute aux sommes, on obtient

$$q^*t^*(E_{G(K(\mu_n)/K)}) = q^* \coprod E_{G(L(\mu_n)/L)} = \coprod q^* E_{G(L(\mu_n)/L)} = \coprod \widetilde{V},$$

où la somme est prise sur le quotient $G(K(\mu_n)/K)/G(L(\mu_n)/L)$.

Ainsi les morphismes (134) et (135) sont isomorphes, car ils correspondent à des $G(K(\mu_n)/K)$-torseurs isomorphes.

□

Définition 10.37. *Soit $U = Spec(\mathcal{O}_{K;\widetilde{S}})$ un ouvert de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres K. On note aussi $\mathbb{Q}^*_+$ le groupe multiplicatif des rationnels positifs. Le groupe $J_{K;\widetilde{S}}$ désigne le groupe des idéaux fractionnaires de K étrangers à $\widetilde{S}$. Le* groupe des périodes de *U est le sous-groupe*

$$\Lambda_U := N(J_{K;\widetilde{S}}) \subseteq N(J_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}^*_+$$

engendré dans $\mathbb{Q}^*_+$ par les entiers $N(u) := |k(u)|$, où u parcourt l'ensemble des points fermés de U.

Proposition 10.38. *Un morphisme*

$$V = Spec(\mathcal{O}_{L;\widetilde{S}_V}) \longrightarrow U = Spec(\mathcal{O}_{K;\widetilde{S}_U})$$

induit une inclusion de groupes

$$\Lambda_V \subseteq \Lambda_U \subseteq \mathbb{Q}^*_+.$$

Démonstration. La composée des applications normes

$$J_{L;\widetilde{S}_V} \longrightarrow J_{K;\widetilde{S}_U} \longrightarrow J_{\mathbb{Q}}$$

coincide avec la norme $J_{L;\widetilde{S}_V} \to J_{\mathbb{Q}}$. On en déduit les inclusions

$$\Lambda_V = N(J_{L;\widetilde{S}_V}) \subseteq \Lambda_U = N(J_{K;\widetilde{S}_U}) \subseteq \Lambda_{Spec(\mathbb{Z})} = N(J_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}^*_+.$$

□

Proposition 10.39. *On a un morphisme canonique*

$$Frob : \Lambda_U \longrightarrow G^{cy}_U.$$

dont l'image est dense, lorsque G^{cy}_U est muni de sa topologie profinie.

DÉMONSTRATION. Choisissons à nouveau une clôture séparable $\overline{K}/K$. Soit $\mathfrak{q}$ un point fermé de U. Le Frobénius de $\mathfrak{q}$ définit une classe de conjugaison dans $G(K_{\widetilde{S}}/K)$ et donc un élément bien déterminé $Fr_{\mathfrak{q}}$ dans le groupe abélien G_U^{cy}. On a

$$Fr_{\mathfrak{q}} = (N(\mathfrak{q}), ..., N(\mathfrak{q})) \in G_U^{cy} \subseteq \prod_{p \in S} \mathbb{Z}_p^*.$$

Par linéarité, on définit le morphisme $Frob$ par l'application

$$N(u) \in \Lambda_U \mapsto (N(u), ..., N(u)) \in G_U^{cy}$$

Le fait que l'image de ce morphisme soit dense est une conséquence du théorème de densité de Chebotarev. □

REMARQUE 10.40. *Un morphisme $V \to U$ induit un diagramme commutatif de groupes*

$$\begin{tikzcd} \Lambda_V \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda_U \arrow[d] \\ G_V^{cy} \arrow[r] & G_U^{cy} \end{tikzcd}$$

Le groupe de Galois $G_U^{cy} \subseteq \prod_{p \in S} \mathbb{Z}_p^*$ est profini. Le groupe des périodes $\Lambda_U \subseteq \mathbb{Q}_+^*$, quant à lui, est muni de la topologie discrète.

COROLLAIRE 10.41. *On a un morphisme canonique de topos*

$$B_{\Lambda_U} \longrightarrow B^{sm}_{G_U^{cy}}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de composer le morphisme canonique $B_{\Lambda_U} \longrightarrow B^{sm}_{\Lambda_U}$ avec le morphisme $B^{sm}_{\Lambda_U} \longrightarrow B^{sm}_{G_U^{cy}}$ induit par le morphisme de groupe $Frob : \Lambda_U \to G_U^{cy}$. □

PROPOSITION 10.42. *Le morphisme canonique*

$$B_{\Lambda_U} \longrightarrow B^{sm}_{G_U^{cy}}$$

est hyperconnexe.

DÉMONSTRATION. L'image du morphisme $\Lambda_U \to G_U^{cy}$ est dense. D'après le lemme 10.31, le morphisme induit sur les topos classifiants

$$B^{sm}_{\Lambda_U} \longrightarrow B^{sm}_{G_U^{cy}}$$

est hyperconnexe. D'après la proposition 10.30, le morphisme

$$B_{\Lambda_U} \longrightarrow B^{sm}_{\Lambda_U}$$

est lui aussi hyperconnexe. La proposition découle du fait que la composée de morphismes hyperconnexes est hyperconnexe. □

Ainsi, on dispose de deux morphismes canoniques de topos

$$\mathcal{S}_{Et}(U) \longrightarrow B^{sm}_{G_U^{cy}} \text{ et } B_{\Lambda_U} \longrightarrow B^{sm}_{G_U^{cy}}.$$

2.1.1. *Entrée des places archimédiennes.*

DÉFINITION 10.43. *Soit U un ouvert de $\overline{Spec(\mathcal{O}_K)}$, c'est à dire un ouvert de $Spec(\mathcal{O}_K)$ auquel on a adjoint une partie de l'ensemble des places archimédiennes de K. Lorsque U ne possède pas de places archimédiennes, les groupes G_U^{cy} et Λ_U sont ceux qui ont été définis plus haut. Lorsque U possède des places à l'infini, on pose $G_U^{cy} = \{1\}$ et $\Lambda_U := \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie naturelle.*

REMARQUE 10.44. *On note U_∞ l'ensemble des points archimédiens de U. Ici, les points de U_∞ sont des points de U.*

PROPOSITION 10.45. *Soit U et V comme ci-dessus et soit $\phi : V \to U$ un morphisme au-dessus de $\overline{Spec(\mathbb{Z})}$. Alors ϕ induit de manière canonique des morphismes de groupes*

$$G_V^{cy} \longrightarrow G_U^{cy} \text{ et } \Lambda_V \longrightarrow \Lambda_U$$

DÉMONSTRATION. Si U ne possède pas de places archimédiennes, alors V non plus et le résultat a déjà été démontré dans ce cas. Supposons que U_∞ soit non vide. On a alors un unique morphisme de G_V^{cy} dans le groupe trivial $G_U^{cy} = \{1\}$. Lorsque V_∞ est non vide, le morphisme

$$\Lambda_V = \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda_U = \mathbb{R}$$

est simplement l'identité de $\mathbb{R}$. Lorsque $V_\infty = \emptyset$, ce morphisme est donné par

$$\begin{array}{rccc} log: & \Lambda_V & \longrightarrow & \Lambda_U = \mathbb{R} \\ & N(v) & \longmapsto & log(N(v)) \end{array}$$

où v parcourt l'ensemble des points fermés du schéma affine V. □

DÉFINITION 10.46. *Soient U un ouvert de $\overline{Spec(\mathcal{O}_K)}$, pour un corps de nombres K. On définit le topos $\mathcal{E}(U)$ par le produit fibré*

$$\mathcal{E}(U) := \mathcal{S}_{Et}(U) \times_{B^{sm}_{G_U^{cy}}} B_{\Lambda_U}.$$

Lorsque U_∞ est non vide, on a donc

$$\mathcal{E}(U) := \mathcal{S}_{Et}(U) \times B_{\mathbb{R}},$$

car $B^{sm}_{G_U^{cy}}$ est le topos final dans ce cas. Soient U_i des objets connexes comme ci-dessus et soit $U = \coprod U_i$ une réunion disjointe finie. On définit alors

$$\mathcal{E}(U) := \coprod \mathcal{E}(U_i),$$

Ce topos est défini à équivalence canonique près.

2.2. Le topos $\mathcal{S}_m(\overline{X})$. Dorénavant, $\overline{X} = \overline{Spec(\mathcal{O}_K)}$ désigne le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres K muni des places archimédiennes de K. Pour $U \to \overline{X}$ un $\overline{X}$-schéma étale, on note $\mathcal{E}(U)$ le topos défini ci-dessus. On a $\Lambda_{\overline{X}} = \mathbb{R}$.

PROPOSITION 10.47. *Soit U un $\overline{X}$-schéma étale. On a des morphismes canoniques*

$$\gamma_U : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \text{ et } p_U : \mathcal{E}(U) \longrightarrow B_{\Lambda_U} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Démonstration. Soit $U := \coprod U_i$ la décomposition de U en composantes connexes. On a par définition

$$\mathcal{E}(U) := \coprod \mathcal{E}(U_i).$$

Par la propriété universelle de la somme d'une famille de topos, la donnée d'une famille de morphismes $\mathcal{E}(U_i) \to \mathcal{S}$ dans un topos $\mathcal{S}$ est équivalente à celle d'un morphisme

$$\mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \mathcal{S}.$$

On peut donc supposer U connexe. Par définition du produit fibré, on a des projections canoniques $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{S}_{Et}(U)$ et $\mathcal{E}(U) \to B_{\Lambda_U}$. On obtient γ_U en composant la première projection avec le morphisme $\mathcal{S}_{Et}(U) \to \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$ induit par le morphisme de schéma $U \to \overline{X}$. Respectivement, on obtient p_U en composant la deuxième projection avec le morphisme de topos classifiant $B_{\Lambda_U} \to B_{\mathbb{R}}$ induit par le morphisme de groupes topologiques $\Lambda_U \to \mathbb{R}$, à son tour induit par $U \to \overline{X}$. □

Proposition 10.48. *Soit $\phi : U_i \to U_j$ un morphisme de $\overline{X}$-schémas étales. Alors on a un morphisme canonique*

$$\varepsilon(\phi) : \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \mathcal{E}(U_j).$$

De plus, pour deux morphismes $\varphi \circ \phi : U_i \to U_j \to U_k$, on a un isomorphisme canonique de transitivité

$$\varepsilon(\varphi) \circ \varepsilon(\phi) \simeq \varepsilon(\varphi \circ \phi) \;\; \textit{dans} \;\; \underline{Homtop}\,(\mathcal{E}(U_i); \mathcal{E}(U_k)).$$

Démonstration. A nouveau, on peut supposer U_i, U_j et U_k connexes. Choisissons une clôture algébrique $\overline{K(U_i)}/K(U_i)$ du corps de fonctions de U_i. Les morphismes

$$\mathcal{S}_{Et}(U_i) \to \mathcal{S}_{Et}(U_j) \;\; , \;\; B^{sm}_{G^{cy}_{U_i}} \to B^{sm}_{G^{cy}_{U_j}} \;\text{ et }\; B_{\Lambda_{U_i}} \to B_{\Lambda_{U_j}}$$

sont induits respectivement par le morphisme $\phi : U_i \to U_j$ et par les morphismes canoniques de groupes topologiques $G^{cy}_{U_i} \to G^{cy}_{U_j}$ et $\Lambda_{U_i} \hookrightarrow \Lambda_{U_j}$. On sait que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{Et}(U_i) & \longrightarrow & \mathcal{S}_{Et}(U_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^{sm}_{G^{cy}_{U_i}} & \longrightarrow & B^{sm}_{G^{cy}_{U_j}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B_{\Lambda_{U_i}} & \longrightarrow & B_{\Lambda_{U_j}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^{sm}_{G^{cy}_{U_i}} & \longrightarrow & B^{sm}_{G^{cy}_{U_j}} \end{array}$$

sont commutatifs (cette affirmation est triviale lorsque U_j possède des points archimédiens). On en déduit l'existence d'un morphisme

$$\mathcal{S}_{Et}(U_i) \times_{B^{sm}_{G^{cy}_{U_i}}} B_{\Lambda_{U_i}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U_j) \times_{B^{sm}_{G^{cy}_{U_j}}} B_{\Lambda_{U_j}}.$$

De la même manière, on vérifie la dernière affirmation de cette proposition composantes par composantes. L'existence de l'isomorphisme de transitivité

$$\varepsilon(\varphi) \circ \varepsilon(\phi) \simeq \varepsilon(\varphi \circ \phi)$$

provient alors du fait que les flèches $G^{cy}_{U_i} \to G^{cy}_{U_i}$, $\Lambda_{U_i} \to \Lambda_{U_i}$ et $\mathcal{S}_{Et}(U_i) \to \mathcal{S}_{Et}(U_j)$ satisfont la condition de transitivité évidente.

□

LEMME 10.49. *Soit U un $\overline{X}$-schéma étale. Le morphisme canonique*

$$\mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U)$$

est hyperconnexe.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $U = U_i$ connexe. Le morphisme $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{S}_{Et}(U)$ est un pull-back du morphisme canonique $B_{\Lambda_U} \to B_{G_U^{cy}}$, qui est hyperconnexe en vertu de la proposition 10.42. Il suit que ce pull-back est lui aussi hyperconnexe.

Maintenant, supposons $U = \coprod U_i$ non nécessairement connexe. Alors

$$\mathcal{E}(U) := \coprod \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U) = \coprod \mathcal{S}_{Et}(U_i)$$

est une réunion disjointe de morphismes hyperconnexes. Ce morphisme est donc hyperconnexe. □

LEMME 10.50. *Soit $V \to U$ un morphisme de $\overline{X}$-schémas étales. Les morphismes canoniques induits rendent le diagramme suivant commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{S}_{Et}(V) \arrow[r] & \mathcal{S}_{Et}(U)
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer V et U connexes. Le morphisme

$$\mathcal{E}(V) = \mathcal{S}_{Et}(V) \times_{B^{sm}_{G_V^{cy}}} B_{\Lambda_V} \longrightarrow \mathcal{E}(U) = \mathcal{S}_{Et}(U) \times_{B^{sm}_{G_U^{cy}}} B_{\Lambda_U}$$

est donné, pour la première composante, par le morphisme de topos étales

$$\mathcal{S}_{Et}(V) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U).$$

Le lemme est donc évident. □

2.2.1. Dans la suite, on considère les recouvrement Zariski $\mathcal{R} = \{U_i \subset \overline{X};\ i \in I\}$ de $\overline{X}$, où les U_i sont connexes. On pose

$$U_{ij} := U_i \cap U_j \text{ et } U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k.$$

On note $G_i := G^{cycl}_{U_i}$ et $\Lambda_i := \Lambda_{U_i}$. En particulier, si U_i possède la place archimédienne alors $G_i = \{1\}$ et $\Lambda_i = \mathbb{R}$. Pour un couple $(i, j) \in I^2$, le groupe G_{ij} est le plus petit quotient de

$$G^{cycl} := Gal(K^{cycl}/K)$$

à travers lequel les flèches $G^{cycl} \to G_i$ et $G^{cycl} \to G_j$ se factorisent. Plus précisément, si $G/H_i = G_i$ et $G/H_j = G_j$ alors $G_{ij} := G/(H_i \cap H_j)$. Lorsque U_j possède une place archimédienne, alors $G_{ij} = G_i$. Le groupe Λ_{ij} est défini comme l'intersection

$$\Lambda_i \cap \Lambda_j \subset \mathbb{R}.$$

A nouveau, ce groupe coincide avec $\Lambda_{U_{ij}}$ lorsque U_i et U_j sont contenus dans X. On définit de manière analogue les groupes G_{ijk} et Λ_{ijk}.

NOTATION 10.51. *On pose*

$$\mathcal{E}^*(U_{ij}) := \mathcal{S}_{Et}(U_{ij}) \times_{B^{sm}_{G_{ij}}} B_{\Lambda_{ij}}\ ,\ \mathcal{E}^*(U_{ijk}) := \mathcal{S}_{Et}(U_{ijk}) \times_{B^{sm}_{G_{ijk}}} B_{\Lambda_{ijk}}.$$

Définition 10.52. *Soit $\mathcal{R} = \{U_i \subset \overline{X};\ i \in I\}$ un recouvrement Zariski de $\overline{X}$. On considère le topos simplicial tronqué*

$$\mathcal{E}/_{\mathcal{R}} := \coprod_{i,j,k \in I^3} \mathcal{E}^*(U_{ijk}) \rightrightarrows^{d_0}_{d_2} \rightarrow^{d_1} \coprod_{i,j \in I^2} \mathcal{E}^*(U_{ij}) \rightrightarrows^{d_0}_{d_1} \leftarrow^{s} \coprod_{i \in I} \mathcal{E}(U_i).$$

Ci-dessus, les morphismes de topos $\mathcal{E}(U_{ij}) \to \mathcal{E}(U_i)$ sont induits par les morphismes de $\overline{X}$-schémas étales $U_{ij} \to U_i$. La section $s : \coprod \mathcal{E}(U_i) \to \coprod \mathcal{E}(U_{ij})$ est induite par les morphismes diagonaux $U_i \to U_{ii}$.

Définition 10.53. *Soit $\mathcal{R} = \{U_i \subset \overline{X};\ i \in I\}$ un recouvrement Zariski de $\overline{X}$. On définit le topos*

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) := \varinjlim \mathcal{E}/_{\mathcal{R}} \simeq Desc(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}})$$

comme la limite inductive du topos simplicial $\mathcal{E}/_{\mathcal{R}}$.

Remarque 10.54. *Le topos $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ est un recollement des topos $\mathcal{E}(U_i)$, pour $i \in I$. On note q_i la projection $U_{ij} \to U_i$. La catégorie $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ est définie comme suit. Un objet de cette catégorie est une famille $(F_i,\ a_{i,j})$, où F_i est un objet de $\mathcal{E}(U_i)$ pour tout $i \in I$ et*

$$a_{i,j} : \varepsilon(q_i)^*(F_i) \ \simeq\ \varepsilon(q_j)^*(F_j)$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{E}^*(U_{ij})$. Cette famille $(a_{ij})_{ij}$ doit satisfaire les conditions d'une donnée de descente.

Exemple 10.55. *Soit $\mathcal{R}_0$ le recouvrement dont le seul objet est l'identité de $\overline{X}$. Alors, le topos simplicial $\mathcal{E}/_{\mathcal{R}_0}$ est le topos simplicial constant*

$$\mathcal{E}/_{\mathcal{R}_0} :=\ \mathcal{E}(\overline{X}) \rightrightarrows^{d_0}_{d_2} \rightarrow^{d_1} \mathcal{E}(\overline{X}) \rightrightarrows^{d_0}_{d_1} \leftarrow^{s} \mathcal{E}(\overline{X}).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{R}_0) &:= \varinjlim \mathcal{E}/_{\mathcal{R}_0} \\ &= \mathcal{E}(\overline{X}) \\ &= \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \times B_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Proposition 10.56. *Pour tout $i \in I$ on a un morphisme canonique*

$$f_{\mathcal{R};i} : \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{R}).$$

Le morphisme induit

$$f_{\mathcal{R}} = (f_{\mathcal{R};i})_{i \in I} : \coprod_{i \in I} \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{R})$$

est surjectif.

Démonstration. La première affirmation est vraie par définition de la limite inductive. Ces morphismes sont définis de la manière suivante. Si $(F_i,\ a_{i,j})$ est un objet de $\mathcal{E}(\mathcal{R})$, on a

$$f^*_{\mathcal{R};k}(F_i,\ a_{i,j}) = F_k.$$

La deuxième affirmation est alors immédiate. □

Proposition 10.57. *Soient $\mathcal{R} = \{U_i \subset \overline{X};\ i \in I\}$ et $\mathcal{R}' = \{V_j \subset \overline{X};\ j \in J\}$ deux recouvrements Zariski de $\overline{X}$, de sorte que $\mathcal{R}$ soit plus fin que $\mathcal{R}'$. Alors il existe un morphisme*

$$t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{R}').$$

Ce morphisme de topos est défini à isomorphisme canonique près.

Démonstration. Choisissons un couple (ν, f_ν) de sorte que $f_\nu(i) : U_i \to V_{\nu(i)}$ soit un morphisme au-dessus de $\overline{X}$, pour tout $i \in I$. Quel que soit $(i,j,k) \in I^3$, on a des morphismes topos

$$\varepsilon(f_\nu(i)) : \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \mathcal{E}(V_{\nu(i)}),\ \ \varepsilon(f_\nu(ij)) : \mathcal{E}^*(U_{ij}) \longrightarrow \mathcal{E}^*(V_{\nu(i)\nu(j)})$$
$$\text{et } \ \varepsilon(f_\nu(ijk)) : \mathcal{E}^*(U_{ijk}) \longrightarrow \mathcal{E}^*(V_{\nu(i)\nu(j)\nu(k)}).$$

Ces morphismes sont induits respectivement par les morphismes de schémas

$$f_\nu(i) : U_i \to V_{\nu(i)}\ ,\ f_\nu(ij) := (f_\nu(i), f_\nu(j)) : U_{ij} \to V_{\nu(i)\nu(j)}$$
$$\text{et } f_\nu(ijk) := (f_\nu(i), f_\nu(j), f_\nu(k)) : U_{ijk} \to V_{\nu(i)\nu(j)\nu(k)}.$$

Les morphismes de topos précédents sont compatibles en ce sens qu'ils rendent tous les diagrammes commutatifs. En d'autres termes, on a un morphisme de topos simpliciaux tronqués

$$\mathcal{E}/_{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{E}/_{\mathcal{R}'},$$

et en particulier, un morphisme induit sur les topos limites inductives

$$t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\nu, f_\nu) : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{R}').$$

Par définition, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(U_i) \arrow[r, "\varepsilon(f_\nu(i))"] \arrow[d, "f_{\mathcal{R}',\nu(i)}"'] & \mathcal{E}(V_{\nu(i)}) \arrow[d, "f_{\mathcal{R}',\nu(i)}"] \\
\mathcal{E}(\mathcal{R}) \arrow[r, "t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\nu,f_\nu)"] & \mathcal{E}(\mathcal{R}')
\end{tikzcd}$$

est commutatif, quel que soit $i \in I$. De la même manière, le diagramme analogue pour un couple (i,j) ou un triplet (i,j,k) est commutatif. Ainsi, le morphisme $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\nu, f_\nu)$ est induit par la famille compatible de morphismes

$$\mathcal{E}(U_i) \to \mathcal{E}(V_{\nu(i)}) \to \mathcal{E}(\mathcal{R}'),\ \ \mathcal{E}^*(U_{ij}) \to \mathcal{E}^*(V_{\nu(i)\nu(j)}) \to \mathcal{E}(\mathcal{R}')$$
$$\text{et } \ \mathcal{E}^*(U_{ijk}) \to \mathcal{E}^*(V_{\nu(i)\nu(j)\nu(k)}) \to \mathcal{E}(\mathcal{R}').$$

Cette famille de morphismes est dite compatible car les triangles obtenus avec les morphismes (d_i, s, etc...) du topos simplicial $\mathcal{E}/_{\mathcal{R}}$ commutent.

Il s'agit de montrer que le morphisme $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\nu, f_\nu)$ ne dépend pas du couple (ν, f_ν). Soit (μ, f_μ) un autre couple satisfaisant la même propriété. Pour tout élément i de I, on a un morphisme $(f_\nu(i), f_\mu(i)) : U_i \to V_{\nu(i)} \times_{\overline{X}} V_{\mu(i)} = V_{\nu(i)\mu(i)}$. La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}(V_{\nu(i)}) \arrow[dr] & \\
\mathcal{E}(U_i) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{E}^*(V_{\nu(i)\mu(i)}) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & \mathcal{E}(\mathcal{R}') \\
 & \mathcal{E}(V_{\mu(i)}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

assure l'existence d'isomorphismes canoniques

$$f_{\mathcal{R}',\nu(i)} \circ \varepsilon(f_\nu(i)) \simeq f_{\mathcal{R}',\nu(i)\mu(i)} \circ \varepsilon(f_\nu(i), f_\mu(i)) \simeq f_{\mathcal{R}',\mu(i)} \circ \varepsilon(f_\mu(i)) \tag{136}$$

dans la catégorie $\underline{Homtop}\,(\mathcal{E}(U_i);\mathcal{E}(\mathcal{R}'))$. Soit maintenant un couple $(i;j)\in I\times I$. Considérons le diagramme commuatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{E}^*(V_{\nu(i)\nu(j)}) \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
 & & \mathcal{E}(V_{\nu(i)}) \arrow[dr] & \\
\mathcal{E}^*(U_{ij}) \arrow[r] \arrow[uurr] \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[ddrr] & \mathcal{E}(U_i) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathcal{E}^*(V_{\nu(i)\mu(i)}) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{E}(\mathcal{R}') \\
 & & \mathcal{E}(V_{\mu(i)}) \arrow[ur] & \\
 & & \mathcal{E}^*(V_{\mu(i)\mu(j)}) \arrow[u] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Dans un premier temps, on oublie le topos $\mathcal{E}(U_i)$ et les flèches dont il est la source. Ce diagramme montre alors que les morphismes de $\mathcal{E}^*(U_{ij})$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{R}')$ définis via les couples (ν,f_ν) et (μ,f_μ) sont canoniquement isomorphes. Explicitement, on a un isomorphisme

$$f_{\mathcal{R}',\nu(i)\nu(j)}\circ\varepsilon(f_\nu(ij))\simeq f_{\mathcal{R}',\mu(i)\nu(j)}\circ\varepsilon(f_\mu(ij)) \tag{137}$$

dans $\underline{Homtop}\,(\mathcal{E}^*(U_{ij});\mathcal{E}(\mathcal{R}'))$. En regardant maintenant la totalité du diagramme, on voit que les isomorphismes de (137) sont conpatibles à ceux de (136). Le même type de diagrammes fournit

$$f_{\mathcal{R}',\nu(i)\nu(j)\nu(k)}\circ\varepsilon(f_\nu(ijk))\simeq f_{\mathcal{R}',\mu(i)\nu(j)\mu(k)}\circ\varepsilon(f_\mu(ijk)) \tag{138}$$

et montre la compatibilité des identifications (136), (137) et (138). Plus précisément, les couples (ν,f_ν) et (μ,f_μ) définissent respectivement des objets $\widetilde{t}(\nu,f_\nu)$ et $\widetilde{t}(\mu,f_\mu)$ de la catégorie

$$\underline{Nat}(w,\underline{Homtop}\,(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}},\mathcal{E}(\mathcal{R}'))).$$

dont les diagrammes précédents montrent qu'ils sont canoniquement isomorphes. L'équivalence (133) montre alors que les objets $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\nu,f_\nu)$ et $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\mu,f_\mu)$ de la catégorie

$$\underline{Homtop}\,(\mathcal{E}(\mathcal{R});\mathcal{E}(\mathcal{R}'))$$

sont canoniquement isomorphes.

$\square$

COROLLAIRE 10.58. *Soit $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ trois recouvrements Nisnevich de $\overline{X}$, tels que $\mathcal{R}$ raffine $\mathcal{R}'$ et que $\mathcal{R}'$ raffine $\mathcal{R}''$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$t_{\mathcal{R}',\mathcal{R}''}\circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}\simeq t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}\ \textit{ dans }\ \underline{Homtop}\,(\mathcal{E}(\mathcal{R});\mathcal{E}(\mathcal{R}'')).$$

DÉMONSTRATION. Soient I, J et K les ensembles sur lesquels les recouvrements $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ sont indexés. Il existe des couples (ν,f_ν) et (μ,f_μ), avec $\nu:I\to J$ et $\mu:J\to K$, satisfaisant la propriété habituelle. Bien sûr, le couple $(\mu\circ\nu,f_\mu\circ f_\nu)$ satisfait aussi cette propriété. On vérifie facilement que les morphismes de topos $t_{\mathcal{R}',\mathcal{R}''}(\mu,f_\mu)\circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\nu,f_\nu)$ et $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(\mu\circ\nu,f_\mu\circ f_\nu)$ sont canoniquement isomorphes. Comme ces morphismes ne dépendent pas des couples (μ,f_μ), (ν,f_ν) et $(\mu\circ\nu,f_\mu\circ f_\nu)$, on obtient le résultat annoncé.

□

Corollaire 10.59. *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux recouvrements ouverts de $\overline{X}$, qui se raffinent mutuellement. Alors les morphismes*
$$t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \to \mathcal{E}(\mathcal{R}') \text{ et } t_{\mathcal{R}',\mathcal{R}} : \mathcal{E}(\mathcal{R}') \to \mathcal{E}(\mathcal{R})$$
sont des équivalences quasi-inverses.

Démonstration. D'après le corollaire précédent, on a un isomorphisme canonique $t_{\mathcal{R}',\mathcal{R}} \circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} \simeq t_{\mathcal{R},\mathcal{R}}$. Mais le morphisme $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}}$ peut être construit à partir du couple (Id_I, Id_{U_i}), où I est l'ensemble sur lequel le recouvrement $\mathcal{R}$ est indexé. On obtient immédiatement $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(Id_I, Id_{U_i}) = Id_{\mathcal{E}(\mathcal{R})}$. Les morphismes $t_{\mathcal{R}',\mathcal{R}} \circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}$ et $Id_{\mathcal{E}(\mathcal{R})}$ sont donc canoniquement isomorphes. Le même argument montre aussi que $t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} \circ t_{\mathcal{R}',\mathcal{R}}$ et $Id_{\mathcal{E}(\mathcal{R}')}$ sont isomorphes. □

Définition 10.60. *On dit que deux recouvrements Nisnevich de $\overline{X}$ sont équivalents lorsqu'ils se raffinent mutuellement. On note $\mathfrak{R}$ l'ensemble ordonné filtrant des classes d'équivalences de recouvrements Nisnevich. On note aussi $\mathfrak{R}$ la catégorie associée à cet ensemble ordonné.*

Remarque 10.61. *Ce qui précède montre l'existence d'un pseudo-foncteur*
$$\begin{array}{cccc} \mathcal{E}: & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{Top} \\ & \mathcal{R} & \longmapsto & \mathcal{E}(\mathcal{R}) \end{array}.$$

Définition 10.62. *On définit* le topos étale modifié de $\overline{X}$ *comme la limite projective*
$$\mathcal{S}_m(\overline{X}) := \varprojlim \mathcal{E}(\mathcal{R})$$
prise sur l'ensemble des classes d'équivalences de recouvrements ouverts de $\overline{X}$.

3. Les morphismes de structure

Nous définissons dans cette section les morphismes attachés au topos $\mathcal{S}_m(\overline{X})$.

3.1. Les morphismes γ et $\mathfrak{f}$.

Lemme 10.63. *Soit $\mathcal{R} = \{U_i \to \overline{X};\ i \in I\}$ un recouvrement ouvert de $\overline{X}$. On a des morphismes canoniques*
$$\gamma_{\mathcal{R}} : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \text{ et } \mathfrak{f}_{\mathcal{R}} : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$
De plus, on a des isomorphismes
$$\gamma_{\mathcal{R}} \circ f_{\mathcal{R};i} \simeq \gamma_{U_i} : \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \text{ et } \mathfrak{f}_{\mathcal{R}} \circ f_{\mathcal{R};i} \simeq p_{U_i} : \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

Démonstration. On a une famille compatible de morphismes
$$\gamma_{U_i} : \mathcal{E}(U_i) \to \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \text{ , } \gamma_{U_{ij}} : \mathcal{E}^*(U_{ij}) \to \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \text{ et } \gamma_{U_{ijk}} : \mathcal{E}^*(U_{ijk}) \to \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}).$$
Cette famille fournit le morphisme $\gamma_{\mathcal{R}}$ par la propriété universelle de la limite inductive $\mathcal{E}(\mathcal{R})$. De même, les morphismes
$$\mathcal{E}(U_i) \to B_{\mathbb{R}} \text{ , } \mathcal{E}^*(U_{ij}) \to B_{\mathbb{R}} \text{ et } \mathcal{E}^*(U_{ijk}) \to B_{\mathbb{R}}$$
sont compatibles. Ils induisent une flèche
$$\mathfrak{f}_{\mathcal{R}} : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$
La deuxième affirmation du lemme découle directement de la définition de ces morphismes. □

Théorème 10.64. *On a un morphisme canonique*

$$\gamma : \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}).$$

Démonstration. Soient $\mathcal{R} = \{U_i \to \overline{X},\, i \in I\}$ et $\mathcal{R}' = \{V_j \to \overline{X},\, j \in J\}$ deux recouvrements ouverts de $\overline{X}$, de sorte que $\mathcal{R}$ raffine $\mathcal{R}'$. Il faut montrer qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\gamma_{\mathcal{R}'} \circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} \;\simeq\; \gamma_{\mathcal{R}} \text{ dans } \underline{Homtop}\,(\mathcal{E}(\mathcal{R}); \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})). \tag{139}$$

Par définition de la limite inductive $\mathcal{E}(\mathcal{R})$, il suffit de montrer l'existence (d'un système compatible) d'isomorphismes canoniques

$$\gamma_{\mathcal{R}'}\circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}\circ f_{\mathcal{R};i} \simeq \gamma_{\mathcal{R}}\circ f_{\mathcal{R};i}\,,\ \gamma_{\mathcal{R}'}\circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}\circ f_{\mathcal{R};ij} \simeq \gamma_{\mathcal{R}}\circ f_{\mathcal{R};ij} \text{ et } \gamma_{\mathcal{R}'}\circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}\circ f_{\mathcal{R};ij} \simeq \gamma_{\mathcal{R}}\circ f_{\mathcal{R};ij} \tag{140}$$

quel que soit $(i, j, k) \in I^3$. Soit $\nu : I \to J$ une application et $(f_\nu(i) : U_i \to V_{\nu(i)})_{i\in I}$ une famille de morphismes au-dessus de $\overline{X}$. Par définition des morphismes en question, on a des isomorphismes canoniques

$$\gamma_{\mathcal{R}'} \circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} \circ f_{\mathcal{R};i} \simeq \gamma_{\mathcal{R}'} \circ f_{\mathcal{R}';\nu(i)} \circ \varepsilon(f_\nu(i)) \simeq \gamma_{V_{\nu(i)}} \circ \varepsilon(f_\nu(i)) \simeq \gamma_{U_i}.$$

De même, on a un isomorphisme canonique $\gamma_{\mathcal{R}} \circ f_{\mathcal{R};i} \simeq \gamma_{U_i}$. Le même argument est valable pour un couple $(i, j) \in I^2$ ainsi que pour un triplet $(i, j, k) \in I^3$. On a obtenu (140) et donc (139). □

Théorème 10.65. *Le morphisme γ est hyperconnexe.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} = \{U_i \to \overline{X},\ i \in I\}$ un recouvrement ouvert de $\overline{X}$. Montrons que le morphisme

$$\gamma_{\mathcal{R}} : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$$

est hyperconnexe. Le topos simplicial suivant est un cas particulier de l'exemple 1.2.

$$\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}} : \quad \coprod_{(i,j,k)\in I^3} \mathcal{S}_{Et}(U_{ijk}) \rightrightarrows^{d_0}_{d_2}\!\!\rightarrow^{d_1} \coprod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{S}_{Et}(U_{ij}) \rightrightarrows^{d_0}_{d_1}\!\!\leftarrow^{s} \coprod_{i\in I} \mathcal{S}_{Et}(U_i).$$

D'après la proposition 10.7, on a un isomorphisme

$$Desc(\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}}) \simeq \varinjlim\,(\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}}) \simeq \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}).$$

D'un autre coté, le topos $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ est la limite du topos simplicial

$$\mathcal{E}/_{\mathcal{R}} : \quad \coprod_{(i,j,k)\in I^3} \mathcal{E}^*(U_{ijk}) \rightrightarrows^{\varepsilon(d_0)}_{\varepsilon(d_2)}\!\!\rightarrow^{\varepsilon(d_1)} \coprod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{E}^*(U_{ij}) \rightrightarrows^{\varepsilon(d_0)}_{\varepsilon(d_1)}\!\!\leftarrow^{\varepsilon(s)} \coprod_{i\in I} \mathcal{E}(U_i).$$

De plus, les morphismes

$$\gamma_1 : \coprod \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \coprod \mathcal{S}_{Et}(U_i)\,,\ \gamma_2 : \coprod \mathcal{E}^*(U_{ij}) \longrightarrow \coprod \mathcal{S}_{Et}(U_{ij})$$
$$\text{et } \gamma_3 : \coprod \mathcal{E}^*(U_{ijk}) \longrightarrow \coprod \mathcal{S}_{Et}(U_{ijk})$$

définissent un morphisme de topos simplicial

$$\mathcal{E}/_{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}}.$$

Ainsi, un objet de $\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$ peut être vu comme un couple $(F; a)$, où F est un objet de $\coprod \mathcal{S}_{Et}(U_i)$ et $a : d_0^*F \simeq d_1^*F$ une donnée de descente. L'image inverse du morphisme $\gamma_{\mathcal{R}}$ devient

$$\begin{array}{rccc} \gamma^*_{\mathcal{R}} : & Desc(\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}}) & \longrightarrow & Desc(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}}) \\ & (F, a) & \longmapsto & (\gamma_1^* F, \gamma_2^* a) \end{array}$$

Pour montrer que ce morphisme est hyperconnexe, il faut donc montrer que $\gamma_{\mathcal{R}}^*$ induit une équivalence

$$Sub_{Desc(\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}})}(F,a) \simeq Sub_{Desc(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}})}(\gamma_1^*F, \gamma_2^*a),$$

quel que soit l'objet (F,a). Si (L,b) est un sous-objet de (F,a), alors $(\gamma_1^*L, \gamma_2^*b)$ est un sous-objet de $(\gamma_1^*F, \gamma_2^*a)$, car $\gamma_{\mathcal{R}}^*$ est exact à gauche. On obtient de cette manière un foncteur

$$\begin{array}{cccc} f: & Sub_{Desc(\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}})}(F,a) & \longrightarrow & Sub_{Desc(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}})}(\gamma_1^*F, \gamma_2^*a) \\ & (L,b) \hookrightarrow (F,a) & \longmapsto & (\gamma_1^*L, \gamma_2^*b) \hookrightarrow (\gamma_1^*F, \gamma_2^*a) \end{array}$$

Soit maintenant

$$(\mathcal{L}, \beta) \hookrightarrow (\gamma_1^*F, \gamma_2^*a)$$

un sous-objet de $(\gamma_1^*F, \gamma_2^*a)$ dans $Desc(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}})$. En particulier, $\mathcal{L} \hookrightarrow \gamma_1^*F$ est un sous objet dans $\coprod \mathcal{E}(U_i)$. Comme le morphisme γ_1 est hyperconnexe, il existe un sous-objet $L \hookrightarrow F$ dans $\coprod \mathcal{S}_{Et}(U_i)$, unique à isomorphisme près, tel que $\gamma_1^*L \simeq \mathcal{L}$ (en tant que sous-objets de γ_1^*F). En effet, le foncteur γ_1^* induit une équivalence

$$Sub_{\coprod \mathcal{S}_{Et}(U_i)}(F) \simeq Sub_{\coprod \mathcal{E}(U_i)}(\gamma_1^*F).$$

La flèche β est donc un isomorphisme

$$\beta : \varepsilon(d_0)^*\gamma_1^*L = \gamma_2^*d_0^*L \longrightarrow \gamma_2^*d_1^*L = \varepsilon(d_1)^*\gamma_1^*L \quad \text{dans } \coprod \mathcal{E}^*(U_{ij}).$$

Le foncteur γ_2^* est pleinement fidèle car le morphisme γ_2 est hyperconnexe (et donc connexe). Il existe donc un unique isomorphisme

$$b : d_0^*L \simeq d_1^*L \quad \text{dans } \coprod \mathcal{S}_{Et}(U_{ij})$$

tel que $\gamma_2^*(b) = \beta$. Le premier diagramme ci-dessous est commutatif car $(\mathcal{L}, \beta) \hookrightarrow (\gamma_1^*F, \gamma_2^*(a))$ est un morphisme de $Desc(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}})$.

$$\begin{tikzcd} \varepsilon(d_0)^*\mathcal{L} = \gamma_2^*d_0^*L \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \gamma_2^*d_1^*L = \varepsilon(d_1)^*\mathcal{L} \arrow[d] \\ \varepsilon(d_0)^*\gamma_1^*F = \gamma_2^*d_0^*F \arrow[r, "\gamma_2^*(a)"] & \gamma_2^*d_1^*F = \varepsilon(d_1)^*\gamma_1^*F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} d_0^*L \arrow[r, "b"] \arrow[d] & d_1^*L \arrow[d] \\ d_0^*F \arrow[r, "a"] & d_1^*F \end{tikzcd}$$

Le fait que γ_2^* est pleinement fidèle montre alors la commutativité du deuxième carré. Enfin, la pleine fidélité de γ_1^* et γ_3^* permet de vérifier facilement que b est bien une donnée de descente en utilisant le fait que β en est une. Ainsi, (L,b) est un objet de $Desc(\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}})$ muni d'un monomorphisme $(L,b) \hookrightarrow (F,a)$ et tel que $\gamma_{\mathcal{R}}^*(L,b) \simeq (\mathcal{L}, \beta)$ (cette flèche est un monomorphisme car le foncteur $(F,a) \mapsto F$ est conservatif, d'après la proposition 10.56).

Il est clair que ce qui précède définit un foncteur

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & Sub_{Desc(\mathcal{E}/_{\mathcal{R}})}(\gamma_1^*F, \gamma_2^*a) & \longrightarrow & Sub_{Desc(\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{\mathcal{R}})}(F,a) \\ & (\mathcal{L}, \beta) & \longmapsto & (L,b) \end{array},$$

quasi-inverse de f. Ceci prouve que $\gamma_{\mathcal{R}}$ est hyperconnexe.

Le morphisme

$$\gamma : \mathcal{S}_m(\overline{X}) := \underleftarrow{lim}\ \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$$

est la limite des morphismes $\gamma_{\mathcal{R}}$, qui sont tous hyperconnexes. On en déduit que γ est lui-même hyperconnexe, grâce au corollaire 10.27.

□

COROLLAIRE 10.66. *Quel que soit le morphisme étale $U \to \overline{X}$, le morphisme*

$$\mathcal{S}_m(\overline{X})/_{\gamma^*U} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U),$$

induit par γ, est hyperconnexe.

DÉMONSTRATION. Considérons le pull-back

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_m(\overline{X})/_{\gamma^*U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_U \arrow[d] \\
\mathcal{S}_m(\overline{X}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})
\end{tikzcd}$$

Ci-dessus, on a noté abusivement γ^*U l'objet $\gamma^*(y(U))$, et les flèches verticales sont celles obtenues par localisation. La flèche du haut est hyperconnexe, car la classe des morphismes hyperconnexes est stable par pull-back. Le résultat provient donc de l'équivalence canonique habituelle

$$\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})/_{y(U)} := (\widetilde{Et_{\overline{X}}})/_{y(U)} \simeq (\widetilde{Et_{\overline{X}}/U}) =: \mathcal{S}_{Et}(U).$$

□

COROLLAIRE 10.67. *Quel que soit le morphisme étale $U \to \overline{X}$, l'ensemble ordonné formé par les ouverts du topos localisé $\mathcal{S}_m(\overline{X})/_{\gamma^*U}$ est en bijection croissante avec celui des ouvert Zariski de U.*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire précédent, l'ensemble ordonné des ouverts du topos $\mathcal{S}_m(\overline{X})/_{\gamma^*U}$ est en bijection croissante avec celui des ouverts du topos étale $\mathcal{S}_{Et}(U)$. Ce dernier est isomorphe à celui des ouvert Zariski de U, d'après ([**24**] VIII. Proposition 6.1). □

THÉORÈME 10.68. *On a un morphisme canonique*

$$\mathfrak{f} : \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux recouvrements ouverts de $\overline{X}$, de sorte que $\mathcal{R}$ raffine $\mathcal{R}'$. On doit montrer qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{f}_{\mathcal{R}'} \circ t_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} \ \simeq \ \mathfrak{f}_{\mathcal{R}} \text{ dans } \underline{Homtop}\,(\mathcal{E}(\mathcal{R}); B_{\mathbb{R}}). \tag{141}$$

On procède comme dans la preuve du théorème (10.64).

□

REMARQUE 10.69. *Les morphismes γ et $\mathfrak{f}$ s'obtiennent de manière beaucoup plus directe, mais moins explicite, grâce à l'exemple 10.55. En effet, soit $\mathcal{R}_0$ le recouvrement dont le seul objet est l'identité de $\overline{X}$ (c'est le recouvrement final). Par définition de la limite projective, on a un morphisme canonique*

$$(\gamma, \mathfrak{f}) : \mathcal{S}_m(\overline{X}) := \varprojlim \mathcal{E}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{R}_0) = \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \times B_{\mathbb{R}}.$$

3.2. Le topos Weil-étale de l'hensélisé X_v^h.

3.2.1. *Le topos étale $\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)$.* Soit v un point fermé de $\overline{X}$. L'hensélisé de $\overline{X}$ en v défini par la limite projective

$$X_v^h := \varprojlim U,$$

où U parcourt le système projective formé des voisinages étale de v dans $\overline{X}$ (des morphismes étales $U \to \overline{X}$ tels que $U \times_{\overline{X}} v \simeq v$). Le point générique de X_v^h est donné par l'immersion ouverte

$$Spec(\overline{K}^{D_v}) := Spec(K_v^h) \hookrightarrow X_v^h,$$

où D_v est le groupe de décomposition en la place v. Le corps valué K_v^h est hensélien de groupe de Galois D_v. Respectivement, le point fermé de X_v^h est donné par l'immersion

$$v \hookrightarrow X_v^h.$$

Le groupe de Galois du corps résiduel $k(v)$ est défini comme le quotient

$$G_{k(v)} := D_v/I_v,$$

où I_v désigne le groupe d'inertie en v. Lorsque v est archimédienne, on a $I_v = D_v$. De plus, ce groupe I_v est trivial si v est complexe et isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lorsque v est réelle.

DÉFINITION 10.70. *Soit v un point fermé de $\overline{X}$. On définit le topos $\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)$ de la manière suivante. Considérons le foncteur*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & B^{sm}_{D_v} & \longrightarrow & B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ & E & \longmapsto & E^{I_v} \end{array}.$$

Ce foncteur est exact à gauche et accessible, c'est un foncteur de recollement. On définit $\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)$ comme le topos recollé (cf **[24]** *IV.9.5)*

$$\mathcal{S}_{Et}(X_v^h) := (B^{sm}_{G_{k(v)}}, B^{sm}_{D_v}, \rho).$$

REMARQUE 10.71. *D'après le théorème (***[24]** *IV.9.5.4), si v est une place ultramétrique, alors le topos $(B^{sm}_{G_{k(v)}}, B^{sm}_{D_v}, \rho)$ défini ci-dessus est équivalent à la catégorie des faisceaux sur le site étale du schéma X_v^h. Pour une place archimédienne v, le groupe de Galois $G_{k(v)} := D_v/I_v$ est trivial, et le foncteur de recollement*

$$\rho : B^{sm}_{D_v} \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}} = \underline{Set}$$

est le foncteur des sections globales du topos $B^{sm}_{D_v} = B^{sm}_{I_v}$.

PROPOSITION 10.72. *Le morphisme*

$$\begin{array}{rccc} u_v^h: & B_{G_{k(v)}} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) = (B^{sm}_{G_{k(v)}}, B^{sm}_{D_v}, \rho) \\ & X & \longmapsto & (X, e, f) \end{array}.$$

est un plongement fermé. Ci-dessus, e est l'objet final de $B^{sm}_{D_v}$ est f est l'unique flèche de l'ensemble X dans le point $\rho(e) = \{*\}$. De même, le morphisme

$$\begin{array}{rccc} u_v^{gh}: & B^{sm}_{D_v} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \\ & E & \longmapsto & (E^{I_v}, E, f) \end{array}.$$

est un plongement ouvert, où $f : E^{I_v} \hookrightarrow E$ est l'inclusion.

DÉMONSTRATION. C'est (cf **[24]** IV.9.5.4.(b)). □

PROPOSITION 10.73. *Soit v un point fermé de $\overline{X}$. Le morphisme canonique*

$$\mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \longrightarrow \varprojlim \mathcal{S}_{Et}(U)$$

est un isomorphisme, où la limite est prise sur les voisinages étales de v.

DÉMONSTRATION. Pour v une place ultramétrique, ce résultat est donné par le lemme 8.3. Pour une place archimédienne, ce résultat ne servira pas dans la suite, et nous en laissons la démonstration au lecteur. □

3.2.2. *Le topos $\mathcal{S}_W(X_v^h)$.* Soit v une place ultramétrique de K. Comme le groupe fondamental du schéma X_v^h s'identifie à celui de son point fermé $Spec(k(v))$, on a un morphisme

$$\mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \longrightarrow B^{sm}_{G_{k(v)}}.$$

Dans le chapitre 8, nous avons défini *le topos Weil-étale de ce schéma hensélien* par le produit fibré

$$\mathcal{S}_W(X_v^h) := \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \times_{B^{sm}_{G_{k(v)}}} B_{W_{k(v)}}.$$

On pourrait d'ailleurs adopter les notations

$$G^{cy}_{X_v^h} = G_{k(v)} \text{ et } W_{k(v)} = \Lambda_{X_v^h}.$$

En effet, le groupe $G_{k(v)}$ est le groupe de Galois de l'extension $K_v^h(\mu_S^\infty)/K_v^h$, où μ_S^∞ désigne le groupe des racines n^{ieme} de l'unité, pour les multiples n des premiers p de

$$S = Spec(\mathbb{Z}) - Im(X_v^h).$$

D'autre part, le groupe de Weil $W_{k(v)}$ est le sous-groupe

$$N(v)^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}_+^*$$

engendré par la norme $N(v)$ de l'unique point fermé de X_v^h. Ceci nous mène à la définition suivante.

DÉFINITION 10.74. *Soit v une place archimédienne de K. On définit le topos*

$$\mathcal{S}_W(X_v^h) := \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \times B_{\mathbb{R}}.$$

PROPOSITION 10.75. *Si $v \in X_\infty$, on a un plongement ouvert*

$$i_v^{gh} : B_{(I_v \times \mathbb{R})} \longrightarrow \mathcal{S}_W(X_v^h).$$

Le topos fermé complémentaire est donné par le plongement fermé

$$i_v^h : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_W(X_v^h).$$

Le foncteur de recollement est défini par l'image directe du morphisme canonique

$$B_{(I_v \times \mathbb{R})} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

DÉMONSTRATION. En ce qui concerne le plongement fermé, il suffit de déterminer l'image inverse du sous-topos fermé $Im(i_v^h)$ de $\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)$ à travers le morphisme $\mathcal{S}_W(X_v^h) \to \mathcal{S}_{Et}(X_v^h)$. Ce sous-topos est donné par les identifications

$$\mathcal{S}_W(X_v^h) \times_{\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)} \underline{Set} = B_{\mathbb{R}} \times \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \times_{\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)} \underline{Set} = B_{\mathbb{R}} \times \underline{Set} = B_{\mathbb{R}}.$$

Respectivement, considérons l'image inverse du plongement ouvert $i_v^{gh} : B^{sm}_{I_v} \hookrightarrow \mathcal{S}_{Et}(X_v^h)$ par le morphisme $\mathcal{S}_W(X_v^h) \to \mathcal{S}_{Et}(X_v^h)$. On a dans ce cas les isomorphismes suivants.

$$\mathcal{S}_W(X_v^h) \times_{\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)} B^{sm}_{I_v} = B_{\mathbb{R}} \times \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \times_{\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)} B^{sm}_{I_v} = B_{\mathbb{R}} \times B^{sm}_{I_v} = B_{(I_v \times \mathbb{R})}.$$

Seule la dernière égalité nécessite un argument. D'après le corollaire 10.14, le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_{\mathbb{R}}^{f^*I_v} \arrow[r] \arrow[d] & B_{I_v}^{sm} \arrow[d] \\ B_{\mathbb{R}} \arrow[r, "f"] & \underline{Set} \end{tikzcd}$$

est un pull-back. Ci-dessus, la catégorie $B_{\mathbb{R}}^{f^*I_v}$ est celle des objets de $B_{\mathbb{R}}$ munis d'une action du groupe f^*I_v. Ce groupe est donné par l'action triviale de $\mathbb{R}$ sur le groupe discret I_v. L'isomorphisme canonique

$$B_{\mathbb{R}}^{f^*I_v} = B_{(I_v\times\mathbb{R})},$$

montre donc la deuxième affirmation de cette proposition. La troisième me parait claire. □

PROPOSITION 10.76. *Le diagramme suivant est un pull-back.*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v^h"] & B_{G_{k(v)}}^{sm} \arrow[d, "u_v^h"] \\ \mathcal{S}_W(X_v^h) \arrow[r, "pr"] & \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \end{tikzcd}$$

Le morphisme α_v est induit par la flèche canonique $W_{k(v)} \to G_{k(v)}$ et le morphisme pr est la projection.

DÉMONSTRATION. Rappelons que si $v \in X_\infty$, alors $G_{k(v)} = 0$ et $W_{k(v)} = \mathbb{R}$. Quel que soit le point fermé v, on a les identifications

$$\mathcal{S}_W(X_v^h)\times_{\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)}B_{G_{k(v)}}^{sm} = B_{W_{k(v)}}\times_{B_{G_{k(v)}}^{sm}}\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)\times_{\mathcal{S}_{Et}(X_v^h)}B_{G_{k(v)}}^{sm} = B_{W_{k(v)}}\times_{B_{G_{k(v)}}^{sm}}B_{G_{k(v)}}^{sm} = B_{W_{k(v)}}.$$

En d'autres termes, le diagramme de la proposition est un pull-back. □

3.3. Les morphismes associés aux valuations.

LEMME 10.77. *Soient v point fermé et U un ouvert de $\overline{X}$ contenant v. Alors on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(X_v^h) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \arrow[d] \\ \mathcal{E}(U) \arrow[r] & \mathcal{S}_{Et}(U) \end{tikzcd}$$

De plus, si $v \in V \subset U$, alors le triangle suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(X_v^h) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{E}(V) \arrow[d] \\ & \mathcal{E}(U) \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Que la valuation v soit archimédienne ou ultramétrique, on a des morphismes canoniques

$$\Lambda_{X_v^h} \to \Lambda_U,\ G_{X_v^h}^{cy} \to G_U^{cy} \text{ et } \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \to \mathcal{S}_{Et}(U)$$

induits par la flèche $X_v^h \to U$ (cette flèche est bien déterminée car $X_v^h := \varprojlim U$). Ces morphismes rendent commutatifs les deux diagrammes que l'on imagine, et définissent une flèche

$$\mathcal{S}_W(X_v^h) := \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \times_{B_{G^{cy}_{X_v^h}}} B_{\Lambda_{X_v^h}} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(U) \times_{B_{G^{cy}_U}} B_{\Lambda_U} =: \mathcal{E}(U).$$

La première affirmation du lemme est alors immédiate. La deuxième se vérifie aussi composante par composante. □

Définition 10.78. *Soit $\mathcal{R} = \{U_i \to \overline{X},\ i \in I\}$ un recouvrement ouvert et v un point fermé de $\overline{X}$. On dira que $\mathcal{R}$ est* v-simple *lorsque les conditions suivantes sont satisfaites.*

– *Il existe un unique indice $i(v) \in I$ tel que $U_{i(v)} \times_{\overline{X}} v$ soit non vide.*
– *Les U_i sont connexes.*

Soit v un point fermé de $\overline{X}$. La famille des recouvrements ouverts v-simples est cofinale dans celle des recouvrements ouverts de $\overline{X}$.

Théorème 10.79. *Quel que soit le point fermé v de $\overline{X}$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(X_v^h) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_v"] & \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \arrow[d] \\ \mathcal{S}_m(\overline{X}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{R} := \{U_i \to \overline{X},\ i \in I\}$ un recouvrement ouvert v-simple de $\overline{X}$. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_W(X_v^h) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \arrow[d] \\ \mathcal{E}(U_{i(v)}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(U_{i(v)}) \arrow[d] \\ \mathcal{E}(\mathcal{R}) \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{R}}"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

D'après le lemme précédent, le carré du haut est commutatif. La commutativité du carré du bas provient directement de la définition de $\gamma_{\mathcal{R}}$. Le carré total est donc lui aussi commutatif. En utilisant le triangle commutatif du lemme précédent et la propriété universelle de la limite projective, on obtient un morphisme

$$\theta_v : \mathcal{S}_W(X_v^h) \longrightarrow \varprojlim \mathcal{E}(U_{i(v)}) \longrightarrow \varprojlim \mathcal{E}(\mathcal{R}) =: \mathcal{S}_m(\overline{X}),$$

rendant le diagramme du théorème commutatif. □

Remarque 10.80. *Il semble que le diagramme du théorème précédent ne soit pas un pullback. De la même manière, le carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} W_{K_v} \arrow[r] \arrow[d] & G_{K_v} \arrow[d] \\ W_K \arrow[r] & G_K \end{tikzcd}$$

n'est pas cartésien.

THÉORÈME 10.81. *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "\alpha_v"] \arrow[d, "i_v"] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_m(\overline{X}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

Le morphisme α_v *est induit par la flèche canonique* $W_{k(v)} \to G_{k(v)}$, *et le morphisme* i_v *est défini comme la composition*

$$i_v := \theta_v \circ i_v^h : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \mathcal{S}_W(X_v^h) \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}).$$

DÉMONSTRATION. La proposition 10.76 et le théorème précédent donnent directement le résultat. □

THÉORÈME 10.82. *Quel que soit le point fermé* v *de* $\overline{X}$, *on note* $l_v : B_{W_{k(v)}} \to B_{\mathbb{R}}$ *le morphisme de topos classifiants induit par la flèche canonique* $W_{k(v)} \to \mathbb{R}$. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathfrak{f} \circ i_v \simeq l_v$$

dans la catégorie $\underline{Homtop}\,(B_{W_{k(v)}}, B_{\mathbb{R}})$.

DÉMONSTRATION. Pour vérifier la commutativité du triangle en question, nous reprenons la définition de i_v. Pour un recouvrement ouvert v-simple $\mathcal{R}$ de $\overline{X}$, on a la composition

$$B_{W_{k(v)}} = B_{W_{k(v)}} \times_{B^{sm}_{G_{k(v)}}} B^{sm}_{G_{k(v)}} \to B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{B^{sm}_{G^{cy}_U}} \mathcal{S}_{Et}(U_{i(v)}) \to \mathcal{E}(\mathcal{R}) \to B_{\mathbb{R}}.$$

Ce morphisme est canoniquement isomorphe au suivant

$$B_{W_{k(v)}} \to B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \to B_{\mathbb{R}},$$

lui-même défini par la composition des morphismes canoniques de groupes

$$W_{k(v)} \to \Lambda_{U_{i(v)}} \to \mathbb{R}.$$

Le diagramme suivant est donc commutatif.

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "i_{v,\mathcal{R}}"] \arrow[dr, "l_v"'] & \mathcal{E}(\mathcal{R}) \arrow[d, "\mathfrak{f}_{\mathcal{R}}"] \\ & B_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

Le morphisme

$$i_v := (i_{v,\mathcal{R}})_{\mathcal{R}} : B_{W_{k(v)}} \longrightarrow \varprojlim \mathcal{E}(\mathcal{R})$$

est défini par le système compatible de flèches $i_{v,\mathcal{R}}$. Le théorème provient de la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} B_{W_{k(v)}} \arrow[r, "i_v"] \arrow[drr, "l_v"'] & \varprojlim \mathcal{E}(\mathcal{R}) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathfrak{f}"] & \mathcal{E}(\mathcal{R}) \arrow[d, "\mathfrak{f}_{\mathcal{R}}"] \\ & & B_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

□

3.3.1. La nature du topos $\mathcal{S}_m(\overline{X})$ au voisinage du point générique reste mystérieuse, mais le groupe topologique $\mathbb{R}$ y est présent, comme le montre le résultat suivant.

PROPOSITION 10.83. *Pour chaque valuation archimédienne v de K, il existe un morphisme*

$$g_v : B_{I_v\times\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_K}$$

tel que la composition

$$\mathfrak{f}\circ g_v : B_{I_v\times\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

est donnée par la projection $I_v \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Soit donc v une valuation archimédienne. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B_{I_v\times\mathbb{R}} \arrow[r] \arrow[d] & B^{sm}_{I_v} \arrow[d] \\
\mathcal{S}_W(X_v^h) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_v"] & \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \arrow[d] \\
\mathcal{S}_m(\overline{X}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})
\end{tikzcd}$$

Comme le morphisme

$$B^{sm}_{I_v} \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(X_v^h) \longrightarrow \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$$

se factorise à travers $B^{sm}_{G_K} \to \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$, on obtient une flèche dans le produit fibré

$$g_v : B_{I_v\times\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_K}.$$

Par définition de θ_v, la composition

$$B_{I_v\times\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

est définie par la projection de groupes topologiques $I_v \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\square$

3.4. Les sous-topos fermés associés aux points fermés de $\overline{X}$.

LEMME 10.84. *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas et $Z \subseteq X$ un sous-schéma fermé. Alors le diagramme de topos*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_{Et}(Y\times_X Z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}_{Et}(Z) \arrow[d] \\
\mathcal{S}_{Et}(Y) \arrow[r, "f"] & \mathcal{S}_{Et}(X)
\end{tikzcd}$$

est un pull-back.

DÉMONSTRATION. Soit U l'ouvert complémentaire de Z dans X, et soit $y(U)$ l'objet de $\mathcal{S}_{Et}(X)$ qu'il représente. Alors le Y-faisceau étale

$$f^*y(U) = y(f^*U) = y(Y\times_X U)$$

est représenté par l'ouvert $V := Y \times_X U$ de Y. Le complémentaire fermé dans $\mathcal{S}_{Et}(X)$ de l'ouvert $\mathcal{S}_{Et}(X)/y(U)$ est l'image de l'inclusion fermée

$$\mathcal{S}_{Et}(Z) \hookrightarrow \mathcal{S}_{Et}(X).$$

De même, le complémentaire fermé dans $\mathcal{S}_{Et}(X)$ de l'ouvert $\mathcal{S}_{Et}(X)/y(V)$ est donné par l'inclusion

$$\mathcal{S}_{Et}(Y \times_X Z) \hookrightarrow \mathcal{S}_{Et}(Y).$$

Le lemme est donc une conséquence de ([**24**] IV Corollaire 9.4.3). $\square$

LEMME 10.85. *Considérons un topos simplicial tronqué*

$$\mathcal{S}_\bullet : \quad \mathcal{S}_2 \rightrightarrows^{d_0}_{d_2} \rightarrow^{d_1} \mathcal{S}_1 \rightrightarrows^{d_0}_{d_1} \leftarrow^{s} \mathcal{S}_0$$

muni d'un système compatible de morphismes $\gamma_i : \mathcal{S}_i \to \mathcal{S}$, pour $i = 0, 1, 2$. Soit de plus $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S}$ un sous-topos fermé. On obtient un nouveau topos simplicial tronqué

$$\mathcal{S}_\bullet \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F} : \quad \mathcal{S}_2 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F} \rightrightarrows^{d_0}_{d_2} \rightarrow^{d_1} \mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F} \rightrightarrows^{d_0}_{d_1} \leftarrow^{s} \mathcal{S}_0 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F}.$$

Dans cette situation, le carré

$$\begin{tikzcd} \varinjlim (\mathcal{S}_\bullet \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d, "i"] \\ \varinjlim (\mathcal{S}_\bullet) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

est un pull-back.

Rappelons que la catégorie $\varinjlim \mathcal{S}_\bullet$ est celle dont les objets sont les suites (X_i, ξ_α), où X_i est un objet de $\mathcal{S}_i$ pour $i \leq 2$, et $\xi_\alpha : \alpha^* X_j \simeq X_i$ est un isomorphisme pour chaque flèche $\alpha : \Delta_j \to \Delta_i$ de $\Delta_{\leq 2}$.

DÉMONSTRATION. On note U le sous-objet de l'objet final de $\mathcal{S}$ définissant l'ouvert complémentaire de $\mathcal{F}$. Alors l'image inverse de ce sous-topos ouvert par le morphisme γ est défini par le sous-objet

$$\gamma^*(U) = (\gamma_i^* U, \xi_\alpha),$$

où

$$\xi_\alpha : \alpha^* \gamma_j^* U \simeq \gamma_i^* U$$

est l'identification définie par l'isomorphisme $\gamma_i \simeq \gamma_j \circ \alpha$. Par définition, le sous-topos fermé

$$\varinjlim (\mathcal{S}_\bullet) \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F} \hookrightarrow \varinjlim (\mathcal{S}_\bullet)$$

est la sous-catégorie strictement pleine de $\varinjlim (\mathcal{S}_\bullet)$ définie par les objets (X_i, ξ_α) dont la restriction

$$(X_i, \xi_\alpha) \times \gamma^* U$$

est l'objet final de $\varinjlim (\mathcal{S}_\bullet)/_{\gamma^* U}$. Ainsi, (X_i, ξ_α) est un objet de cette sous-catégorie si et seulement si

$$X_i \times \gamma_i^* U$$

est l'objet final de $\mathcal{S}_i/_{\gamma_i^* U}$ pour tout $i = 0, 1, 2$, ou de manière équivalente, si X_i est un objet de la sous-catégorie

$$\mathcal{S}_i \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S}_i.$$

Il suit que le sous-topos fermé $\varinjlim (\mathcal{S}_\bullet) \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F}$ de $\varinjlim (\mathcal{S}_\bullet)$ est la limite du topos simplicial tronqué $\mathcal{S}_\bullet \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F}$. En d'autres termes, le diagramme du lemme est un pull-back. $\square$

LEMME 10.86. *Soient v un point fermé de $\overline{X}$ et $\mathcal{R} = \{U_i \to \overline{X}\}$ un recouvrement ouvert v-simple de $\overline{X}$. Le diagramme suivant est un pull-back.*

$$\begin{tikzcd}
B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{B^{sm}_{G^{cy}_{U_{i(v)}}}} B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[r] \arrow[d] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\
\mathcal{E}(\mathcal{R}) \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{R}}"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Le topos $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ est défini comme la limite du topos simplicial $\mathcal{E}/_{\mathcal{R}}$. D'après le lemme 10.85, le produit fibré

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

est donc la limite du topos simplicial $\mathcal{E}/_{\mathcal{R}} \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}$ explicité ci-dessous :

$$(\coprod \mathcal{E}^*(U_{ijk})) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} \rightrightarrows^{d_0}_{d_2} \to^{d_1} (\coprod \mathcal{E}^*(U_{ij})) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} \rightrightarrows^{d_0}_{d_1} \leftarrow^{s} (\coprod \mathcal{E}(U_i)) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}.$$

On a $U_i \times_{\overline{X}} v \neq \emptyset$ si et seulement si $i = i(v)$. Soit $\mathcal{U}_v$ le faisceau étale sur $\overline{X}$ représenté par le schéma $\overline{X} - v$. Le pull-back de $\mathcal{U}_v$ par le morphisme $\gamma_1 : \coprod \mathcal{E}(U_i) \to \mathcal{S}_{Et}(\overline{X})$ est un objet $\gamma_1^*(\mathcal{U}_v) = (X_i)_{i \in I}$ dont la composante X_i est l'objet final de $\mathcal{E}(U_i)$ pour tout $i \neq i(v)$. On en déduit

$$(\coprod \mathcal{E}(U_i)) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} = \mathcal{E}(U_{i(v)}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}.$$

De même, on a les identifications

$$(\coprod \mathcal{E}^*(U_{ij})) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} = \mathcal{E}^*(U_{i(v)i(v)}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} = \mathcal{E}(U_{i(v)}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}$$

et

$$(\coprod \mathcal{E}^*(U_{ijk})) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} = \mathcal{E}(U_{i(v)}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}.$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{E}(U_{i(v)}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} = B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{G^{cy}_{U_{i(v)}}} \mathcal{S}_{Et}(U_{i(v)}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} = B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{G^{cy}_{U_{i(v)}}} B^{sm}_{G_{k(v)}},$$

où la dernière égalité est donnée par le lemme 10.84, compte tenu de l'isomorphisme

$$U_{i(v)} \times_{\overline{X}} v \simeq v.$$

Le topos simplicial $\mathcal{E}/_{\mathcal{R}} \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}$ est donc le topos simplicial constant de valeur

$$B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{G^{cy}_{U_{i(v)}}} B^{sm}_{G_{k(v)}}.$$

On obtient le résultat annoncé grâce aux identifications

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathcal{R}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} &= (\underrightarrow{lim}\, \mathcal{E}/_{\mathcal{R}}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} \\
&= \underrightarrow{lim}\, (\mathcal{E}/_{\mathcal{R}} \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}) \\
&= \underrightarrow{lim}\, (B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{G^{cy}_{U_{i(v)}}} B^{sm}_{G_{k(v)}}) \\
&= B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{G^{cy}_{U_{i(v)}}} B^{sm}_{G_{k(v)}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Afin de mieux comprendre la limite

$$\varprojlim\,[\,B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{G^{cy}_{U_{i(v)}}} B^{sm}_{G_{k(v)}}],$$

considérons ouvert $U \subset X$ du point fermé $v \in X$. On écrit

$$G^{cy}_U = \varprojlim G(K(\mu_n)/K)$$

où l'entier n parcourt l'ensemble des multiples des premiers $p \in S_U := X - U$. L'image de $G_{k(v)}$ à travers le morphisme

$$G_{k(v)} \to G^{cy}_U \to G(K(\mu_n)/K) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$$

est le sous-groupe

$$I_{v,U,n} \simeq \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} \subseteq G(K(\mu_n)/K) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$$

engendré par le Frobenius $Frob_v \in G(K(\mu_n)/K)$. Ainsi, f est le plus petit entier positif tel que

$$q^f \equiv 1 \text{ mod } n,$$

où q est la norme de v. De plus, le groupe $G_{k(v)}$ s'identifie à la limite des groupes $I_{v,U,n}$, lorsque U décrit l'ensemble des ouverts de X contenant v, et n l'ensemble des multiples des premiers $p \in S_U$. Comme la famille

$$(I_{v,U,n})_{U,n}$$

est un système projectif strict de groupes finis, dont la limite est $G_{k(v)}$, on a un isomorphisme

$$B^{sm}_{G_{k(v)}} = \varprojlim B^{sm}_{I_{v,U,n}}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&(142) \qquad \varprojlim\,[B_{\Lambda_U} \times_{B^{sm}_{G^{cy}_U}} B^{sm}_{G_{k(v)}}] &=& \; [\varprojlim B_{\Lambda_U}] \times_{[\varprojlim B^{sm}_{G^{cy}_U}]} B^{sm}_{G_{k(v)}}\\
&(143) &=& \; [\varprojlim B_{\Lambda_U}] \times_{[\varprojlim B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}]} [\varprojlim B^{sm}_{I_{v,U,n}}]\\
&(144) &=& \; \varprojlim{}_U\,[\,B_{\Lambda_U} \times_{[\varprojlim B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}]} [\varprojlim B^{sm}_{I_{v,U,n}}]\,]\\
&(145) &=& \; \varprojlim{}_U\,[\varprojlim{}_n\,[B_{\Lambda_U} \times_{B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}} B^{sm}_{I_{v,U,n}}]\,].
\end{aligned}$$

On fixe U et n. La flèche $B^{sm}_{I_{v,U,n}} \to B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}$ s'identifie au morphisme de localisation

$$B^{sm}_{I_{v,U,n}} \simeq B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}/_{[G(K(\mu_n)/K)/I_{v,U,n}]} \longrightarrow B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}.$$

On en déduit l'isomorphisme

$$B_{\Lambda_U} \times_{B^{sm}_{G(K(\mu_n)/K)}} B^{sm}_{I_{v,U,n}} = B_{\Lambda_{U,n}} \tag{146}$$

où le sous-groupe $\Lambda_{U,n} \subseteq \Lambda_U$ est défini par la suite exacte

$$0 \to \Lambda_{U,n} \to \Lambda_U \to G(K(\mu_n)/K)/I_{v,U,n} \to 0.$$

En effet, l'isomorphisme

$$\Lambda_U/\Lambda_{U,n} \simeq G(K(\mu_n)/K)/I_{v,U,n},$$

induit par cette suite exacte, est Λ_U-équivariant. Les identifications (145) et (146) donnent

$$\varprojlim\,[B_{\Lambda_U} \times_{B^{sm}_{G^{cy}_U}} B^{sm}_{G_{k(v)}}] = \varprojlim{}_{U,n}\; B_{\Lambda_{U,n}} \tag{147}$$

REMARQUE 10.87. *La limite projective des groupes*

$$\Lambda_{U,n} \subseteq \mathbb{Q}_+^*,$$

est leur intersection

$$\varprojlim \Lambda_{U,n} = \bigcap \Lambda_{U,n} \subseteq \mathbb{Q}_+^*.$$

Clairement, ce groupe est engendré dans $\mathbb{Q}_+^*$ *par l'entier* $N(v) := |k(v)|$. *De plus, les morphismes* $\Lambda_{U,n} \to I_{v,U,n}$ *passent à la limite et induisent un morphisme*

$$Frob : \varprojlim \Lambda_{U,n} = N(v)^{\mathbb{Z}} = W_{k(v)} \longrightarrow \varprojlim I_{v,U,n} = G_{k(v)}.$$

Ce morphisme envoie $N(v)$ *sur le Frobenius dans* $G_{k(v)}$, *c'est le morphisme canonique du groupe de Weil dans le groupe de Galois de* $k(v)$. *Cependant, le morphisme*

$$B_{\varprojlim \Lambda_{U,n}} \longrightarrow \varprojlim B_{\Lambda_{U,n}}$$

n'est pas une équivalence.

NOTATION 10.88. *Soit* v *un point fermé de* X. *La famille des groupes* $\Lambda_{U,n}$ *forme un système projectif de manière évidente. On note ce pro-groupe formel*

$$\underline{\Lambda}_v := (\Lambda_{U,n})_{U,n}.$$

Pour une place archimédienne $v \in X_\infty$, *on note* $\underline{\Lambda}_v$ *le pro-groupe topologique constant* $\mathbb{R}$.

Un pro-groupe $\underline{G} := (G_i)_{i\in I}$ est dit *strict* lorsque les flèches de transitions $G_j \to G_i$ sont surjectives. De tels objets apparaissent naturellement en tant que pro-groupes fondamentaux de topos pointés et localement connexes. Le topos classifiant d'un pro-groupe strict est défini dans ([**24**] IV.2.7). Dans notre cas, le pro-groupe $\underline{\Lambda}_v$ n'est pas strict. Cette situation est étudiée dans [**33**]. Le petit topos classifiant $B^{sm}_{\underline{G}}$ d'un pro-groupe discret $\underline{G} = (G_i)_{i\in I}$, non nécessairement strict, est la catégorie des $\underline{G}$-ensembles définis de la manière suivante. Un $\underline{G}$-ensemble est une famille $E = (E_i)_{i\in I}$ munie de G_j-morphismes $\zeta_t : t^*E_i \to E_j$, pour chaque flèche de transition $t : G_j \to G_i$ de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites.

- Le groupe G_i opère sur l'ensemble E_i.
- Pour une flèche de transition $t : G_j \to G_i$, on a $E_i = t_*E_j$ et le morphisme

$$\zeta_t : t^*E_i = t^*t_*E_j \to E_j$$

  est donné par adjonction.

Un morphisme $\underline{G}$-equivariant $f : (E_i) \to (E'_i)$ est une famille de G_i-morphismes $f_i : E_i \to E'_i$ tels que $f_j \circ \zeta_t = \zeta_t \circ t^*(f_i)$. La catégorie des $\underline{G}$-ensembles $B^{sm}_{\underline{G}}$ ainsi définie est un topos. Quel que soit $j \in I$ on a un morphisme $B^{sm}_{\underline{G}} \to B^{sm}_{G_j}$ (cf [**33**] Proposition 3.2). L'image directe de ce morphisme est le foncteur $(E_i)_{i\in I} \mapsto E_j$. Si $h_j : \mathcal{E} \to B^{sm}_{G_j}$ est un système compatible de morphismes de topos, alors le foncteur

$$\begin{array}{rccc} h_* : & \mathcal{E} & \longrightarrow & B^{sm}_{\underline{G}} \\ & X & \longmapsto & (h_{i*}X)_{i\in I} \end{array}$$

est l'image directe d'un morphisme de topos, dont le pull-back est défini comme suit (cf [**33**] Theorem 3.8).

$$h^*(E) = h^*(E_i)_{i\in I} = \varinjlim h_i^* E_i.$$

On en déduit une équivalence

$$B^{sm}_{\underline{G}} \simeq \varprojlim B^{sm}_{G_i}.$$

Définition 10.89. *Soit v une place ultramétrique de K. Le petit topos classifiant du pro-groupe discret $\underline{\Lambda}_v$ est le topos*

$$B^{sm}_{\underline{\Lambda}_v} = \varprojlim B^{sm}_{\Lambda_{U,n}}.$$

Le gros topos classifiant de ce pro-groupe est défini comme la limite projective

$$B_{\underline{\Lambda}_v} = \varprojlim B_{\Lambda_{U,n}}.$$

Pour une place archimédienne v, $\underline{\Lambda}_v$ est le pro-groupe topologique constant $\mathbb{R}$. On pose

$$B_{\underline{\Lambda}_v} = B_{\mathbb{R}}.$$

On note à nouveau $\mathcal{T}$ le topos des faisceaux sur le site constitué de la catégorie des espaces topologiques, munie de la topologie des recouvrements ouverts.

Proposition 10.90. *Soit v une place ultramétrique. On a une équivalence*

$$B_{\underline{\Lambda}_v} = B^{sm}_{\underline{\Lambda}_v} \times \mathcal{T}.$$

Démonstration. Les limites projectives de topos commutent entre elles, et en particulier aux produits. On obtient

$$B_{\underline{\Lambda}_v} := \varprojlim B_{\Lambda_{U,n}} = \varprojlim\, [B^{sm}_{\Lambda_{U,n}} \times \mathcal{T}] = [\varprojlim B^{sm}_{\Lambda_{U,n}}] \times \mathcal{T} = B^{sm}_{\underline{\Lambda}_v} \times \mathcal{T}.$$

Ci-dessus, l'identification

$$B_{\Lambda_{U,n}} = B^{sm}_{\Lambda_{U,n}} \times \mathcal{T}$$

provient du lemme 10.14. □

Théorème 10.91. *Quel que soit le point fermé v de $\overline{X}$, le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} B_{\underline{\Lambda}_v} \arrow[r] \arrow[d] & B^{sm}_{G_{k(v)}} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_m(\overline{X}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

est un pull-back.

Démonstration. D'après le lemme 10.86, si $\mathcal{R}$ est un recouvrement Nisnevich v-simple de $\overline{X}$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} = B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{B^{sm}_{G^{cy}_{U_{i(v)}}}} B^{sm}_{G_{k(v)}}.$$

On a les identifications suivantes.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m(\overline{X}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} &= [\varprojlim \mathcal{E}(\mathcal{R})] \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}} \\ &= \varprojlim\, [\, \mathcal{E}(\mathcal{R}) \times_{\mathcal{S}_{Et}(\overline{X})} B^{sm}_{G_{k(v)}}] \\ &= \varprojlim\, [\, B_{\Lambda_{U_{i(v)}}} \times_{B^{sm}_{G^{cy}_{U_{i(v)}}}} B^{sm}_{G_{k(v)}}] \\ &= \varprojlim B_{\Lambda_{U,n}} \\ &= B_{\underline{\Lambda}_v} \end{aligned}$$

La première et la dernière égalité sont directement issues des définitions de $\mathcal{S}_m(\overline{X})$ et $B_{\underline{\Lambda}_v}$ respectivement. La deuxième est vraie, car les limites projectives de topos commutent aux produits fibrés. La troisième a été rappelée ci-dessus, et la quatrième est démontrée dans l'identification (147) pour une place ultramétrique et dans (**??**) pour une place archimédienne. Le diagramme du théorème est donc un pull-back. $\square$

COROLLAIRE 10.92. *Quelle que soit la place archimédienne v de K, le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} B_{\mathbb{R}} \arrow[r] \arrow[d, "i_v"'] & \underline{Set} \arrow[d, "u_v"] \\ \mathcal{S}_m(\overline{X}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{S}_{Et}(\overline{X}) \end{tikzcd}$$

est un pull-back. En particulier le morphisme

$$i_v : B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{S}_m(\overline{X})$$

est un plongement fermé.

DÉMONSTRATION. La première affirmation est directement donnée par le théorème précédent. Le morphisme u_v est un plongement fermé. L'image inverse $\gamma^{-1}(Im(u_v))$ du sous-topos fermé $Im(u_v)$ correspondant est donc un sous topos fermé de $\mathcal{S}_m(\overline{X})$. Ce sous-topos est précisément l'image de i_v, car le diagramme précédent est un pull-back. Le morphisme i_v est donc lui aussi un plongement fermé. $\square$

Bibliographie

[1] M. Artin, *Grothendieck Topologies.* Notes on a Seminar, Harvard University, 1962.

[2] M. Bienenfeld, *An étale cohomology duality theorem for number fields with a real embedding.* Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), no.1, 71-96.

[3] K. S. Brown, *Cohomology of groups.* Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1982.

[4] Cartan-Eilenberg, *Homological algebra.* Princeton University Press, Princeton, 1956.

[5] C. Deninger, *An extension of Artin-Verdier duality to nontorsion sheaves.* J. Reine Angew. Math. 366 (1986), 18-31.

[6] C. Deninger, *Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces.* Doc. Math. J. DMV. Extra Volume ICM I (1998), 23-46

[7] C. Deninger, *On dynamical systems and their possible significance for arithmetic geometry.* Regulators in analysis, geometry and number theory, 29–87, Progr. Math., 171, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[8] C. Deninger, *Number theory and dynamical systems on foliated spaces.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 103 (2001), no. 3, 79–100.

[9] C. Deninger, *A note on arithmetic topology and dynamical systems.* Algebraic number theory and algebraic geometry, 99-114, Contemp. Math., 300, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[10] C. Deninger, *On the nature of the "explicit formulas" in analytic number theory, a simple example.* Number theoretic methods (Iizuka, 2001), 97–118, Dev. Math., 8, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[11] C. Deninger, *A dynamical systems analogue of Lichtenbaum's conjectures on special values of Hasse-Weil zeta functions.* Preprint, 2006.

[12] R. Diaconescu, *Change of base for toposes with generators.* J. Pure Appl. Algebra 6 (1975), no. 3, 191–218

[13] E. J. Dubuc, *On the representation theory of Galois and Atomic Topoi.* To appear in JPAA.

[14] O. Endler, *On Henselization of Valued Fields.* Bol. Soc. Brasil. Mat. 4 (1973), no.2, 97-109.

[15] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure and A. Vistoli, *Fundamental algebraic geometry. Grothendieck's FGA explained.* Mathematical Surveys and Monographs, 123.

[16] M. Flach, *Cohomology of topological groups with applications to the Weil group.* Compositio Math. 144 (2008), no. 3, 633–656.

[17] T. Geisser, *Weil-étale cohomology over finite fields.* Math. Ann. 330 (2004), no. 4, 665–692.

[18] T. Geisser, *Arithmetic cohomology over finite fields and special values of ζ-functions.* Duke Math. J. 133 (2006), no. 1, 27–57.

[19] R. Godement, *Théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1958.

[20] S. Greco, *Algebras over non local hensel rings.* J. of Algebra, 8 (1968), 45-49.

[21] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. J. (2) 9 (1957), 119-221.

[22] A. Grothendieck, *Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets.* Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris, 1966, 215-306.

[23] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamenal (SGA1).* Lectures Notes in Math. 224, Springer, 1971.

[24] A. Grothendieck, M. Artin and J.L. Verdier, *Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas (SGA4).* Lectures Notes in Math. 269, 270, 305, Springer, 1972.

[25] R. Huber, *Étale cohomology of Henselian rings and cohomology of abstract Riemann surfaces of fields.* Math. Ann. 295 (1993), no. 4, 703–708.

[26] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[27] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations. II.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[28] L. Illusie, *What is ... a topos ?* Notices Amer. Math. Soc. 51 (2004), no. 9, 1060–1061.

[29] L. Illusie, *On oriented products, fiber products and vanishing toposes.*

[30] P.T. Johnstone, *Topos Theory.* London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. Academic Press , London-New York, 1977

[31] P. T. Johnstone, *Sketches of an elephant : a topos theory compendium. Vol. 1, 2.* Oxford Logic Guides, 43. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2002.

[32] A. Joyal, M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck.* Mem. Amer. Math. Soc. 51 (1984), no. 309,

[33] J.F. Kennison, *Pro-group actions and fundamental pro-groups.* J. Pure Appl. Algebra 66 (1990), no. 2, 185–218.

[34] F. Kopei, *A remark on a relation between foliations and number theory.* Preprint, 2006.

[35] S. Lang, *Algebra.* Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.

[36] S. Lichtenbaum, *The Weil-étale topology on schemes over finite fields.* Compositio Math. 141 (2005), no. 3, 689–702.

[37] S. Lichtenbaum, *The Weil-étale topology for Number Rings.* To appear in Ann. of Math.

[38] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Oxford Graduate Texts in Mathematics 6, 2002.

[39] B. Mazur, *Notes on étale cohomology of number fields.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 6 (1973), 521-556.

[40] J.S. Milne, *Etale Cohomology.* Princeton Math. Series 33, Princeton University Press 1980.

[41] J.S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems.* Perspectives in Mathematics 1, Academic Press, Inc., Boston, Mass., 1996.

[42] I. Moerdijk, *The classifying topos of a continuous groupoid. I.* Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1988), no. 2, 629–668.

[43] I. Moerdijk, *Classifying Spaces and Classifying Topoi.* Lecture Notes in Math 1616, Springer, 1995

[44] I. Moerdijk, *Continuous fibrations and inverse limits of toposes.* Compositio Math. 58 (1986), no. 1, 45–72.

[45] I. Moerdijk ; J.J.C. Vermeulen, *Proper maps of toposes.* Mem. Amer. Math. Soc. 148 (2000), no. 705.

[46] B. Morin, *Utilisation d'une cohomologie étale équivariante en topologie arithmétique.* Compositio Math. 144 (2008), no. 1, 32-60.

[47] M. Morishita, *Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number fields.* Preprint 2007.

[48] M. Morishita, *Milnor's link invariants attached to certain Galois groups over Q.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 76 (2000), no. 2, 18–21.

[49] N. Ramachandran, *A note on arithmetic topology.* C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 23 (2001), no.4, 130-135.

[50] N. Ramachandran, *Values of zeta functions at* $s = 1/2$. Int. Math. Res. Not. 2005, no. 25, 1519–1541.

[51] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens.* Lecture notes in math. 169 Springer, Heidelberg, 1970.

[52] A. Reznikov, *Embedded incompressible surfaces and homology of ramified covering of 3-manifolds.* Preprint, 1999.

[53] A. Reznikov, *Embedded incompressible surfaces and homology of ramified covering of 3-manifolds.* Sel. math, New series 6 (2000), 1-39.

[54] J.P. Serre, *Corps Locaux.* Hermann, Paris, 1968.

[55] J.P. Serre, *Cohomologie Galoisienne.* Lectures Notes in Math. 11, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1965

[56] A. Sikora, *Analogies between group action on 3-manifolds and number fields.* Comment. Math. Helv. 78 (2003), no.4, 832-844.

[57] R. Strano, *On the étale cohomology of Hensel rings.* Comm. Algebra 12 (1984), no. 17-18, 2195-2211.

[58] R. Swan, *A new method in fixed point theory.* Comment. Math. Helv. 34 (1960), 1-16.

[59] G. Tamme, *Introduction to étale cohomology.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[60] J. Tate, *Number theoretic background.* Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 3–26, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[61] J.L. Waldspurger, *Entrelacements sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Bull. Sci. Math. (2) 100 (1976), no. 2, 113–139.

[62] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge studies in advanced math. 38.

[63] A. Weil, *Sur la théorie du corps de classes.* J. Math. Soc. Japan 3, (1951). 1–35.

[64] T. Zink, *Etale cohomology and duality in number fields.* Haberland, Galois cohomology, Berlin, 1978, Appendix 2.