Contrôle optimal pour l'équation de diffusion à l'aide de la PGD

Pierre Joyot, Nicolas Bur, Pierre Villon, Francisco Chinesta, Joseph Canou

Contrôle optimal pour l'équation de diffusion à l'aide de la PGD

Giens 2015

P. Joyot[(a,⋆)], N. Bur[(a)], P. Villon[(b)], F. Chinesta[(c)], J. Canou[(a)]

[(a)] ESTIA-Recherche, Technopôle Izarbel, 64210 Bidart, France
[(b)] UTC, Département GSM, Centre de Recherches de Royallieu, CS 60319, 60203 Compiègne cedex, France
[(c)] GeM Institute, École Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes cedex 3, France
[(⋆)] p.joyot@estia.fr

Problématique

Nous considérons le problème de contrôle optimal gouverné par une équation de diffusion sur le domaine Ω :

$$\min_u J\left(u\left(x,z\right)\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(y\left(x,z\right)-y_d\left(x,z\right)\right)^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u\left(x,z\right)^2 dx$$

contraint par

$$\begin{cases} -\Delta y\left(x,z\right) = u\left(x,z\right)+f\left(x,z\right) & \text{dans } \Omega \\ y=0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où y est la variable d'état, y_d la consigne, u la commande et $\alpha > 0$.

Conditions d'optimalités

$$-\Delta y\left(x,z\right) - \frac{1}{\alpha}p\left(x,z\right) = f\left(x,z\right)$$

$$-\Delta p\left(x,z\right) + y\left(x,z\right) = y_d\left(x,z\right)$$

$$p\left(x,z\right) = \alpha u\left(x,z\right)$$

$$\text{avec } y=0 \text{ et } p=0 \text{ sur } \Gamma$$

Forme faible des conditions d'optimalités

$$\int_\Omega \nabla p^\star\cdot\nabla p\,dx + \int_\Omega p^\star y\,dx = \int_\Omega p^\star y_d\,dx \quad \forall p^\star$$

$$\int_\Omega \nabla y^\star\cdot\nabla y\,dx - \frac{1}{\alpha}\int_\Omega y^\star p\,dx = \int_\Omega y^\star f\,dx \quad \forall y^\star$$

Formulation PGD

L'espace peut se séparer suivant les coordonnées x, z, i.e. $\Omega = \Omega_x \times \Omega_z$. Le vecteur inconnu Ψ qui regroupe à la fois les valeurs nodales de p et de y, prend la forme

$$\Psi = \begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \sum_\alpha^\infty \begin{bmatrix} Y_x^\alpha \otimes Y_z^\alpha \\ P_x^\alpha \otimes P_z^\alpha \end{bmatrix}$$

Ainsi la formulation PGD du système est donnée par la définition suivante de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{6} A_x^j \otimes A_z^j$$

$$\begin{aligned}
A_x^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_x^p \end{bmatrix} & A_x^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_x^p \end{bmatrix} \\
A_z^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_z^p \end{bmatrix} & A_z^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_z^p \end{bmatrix} \\
A_x^3 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha}M_x^{yp} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_x^4 &= \begin{bmatrix} K_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A_z^3 &= \begin{bmatrix} 0 & M_z^{yp} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_z^4 &= \begin{bmatrix} M_z^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A_x^5 &= \begin{bmatrix} M_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_x^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_x^{py} & 0 \end{bmatrix} \\
A_z^5 &= \begin{bmatrix} K_z^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_z^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_z^{py} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^{2} B_x^j \otimes B_z^j \quad \left| \quad \begin{aligned} B_x^1 &= \begin{bmatrix} M_x^y F \\ 0 \end{bmatrix} & B_x^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ M_x^p Y_d \end{bmatrix} \\ B_z^1 &= \begin{bmatrix} M_z^y F \\ 0 \end{bmatrix} & B_z^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ M_z^p Y_d \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

Formulation PGD paramérique

Nous considérons maintenant que la consigne s'écrit βy_d ou β est un paramètre. Nous allons construire la solution du problème pour une plage de valeurs de β définie par le domaine Ω_β. Le vecteur solution s'écrit maintenant :

$$\Psi = \sum_\alpha^M \begin{bmatrix} Y_x^\alpha \otimes Y_z^\alpha \otimes Y_\beta^\alpha \\ P_x^\alpha \otimes P_z^\alpha \otimes P_\beta^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_x \otimes Y_z \otimes Y_\beta \\ P_x \otimes P_z \otimes P_\beta \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont maintenant définis par

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{6} A_x^j \otimes A_z^j \otimes A_\beta^j$$

avec

$$\begin{aligned}
A_\beta^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_\beta^p \end{bmatrix} & A_\beta^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_\beta^p \end{bmatrix} & A_\beta^3 &= \begin{bmatrix} 0 & M_\beta^{py} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A_\beta^4 &= \begin{bmatrix} M_\beta^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_\beta^5 &= \begin{bmatrix} M_\beta^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_\beta^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_\beta^{py} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^{2} B_x^j \otimes B_z^j \otimes B_\beta^j$$

avec

$$B_\beta^1 = \begin{bmatrix} \overline{M}_\beta^y F \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_\beta^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{M}_\beta^p Y_\beta \end{bmatrix}$$

où

$$\overline{M}_\beta^y = \int_{\Omega_\beta} x_\beta N_\beta^y N_\beta^{y^T}\,dx_\beta$$

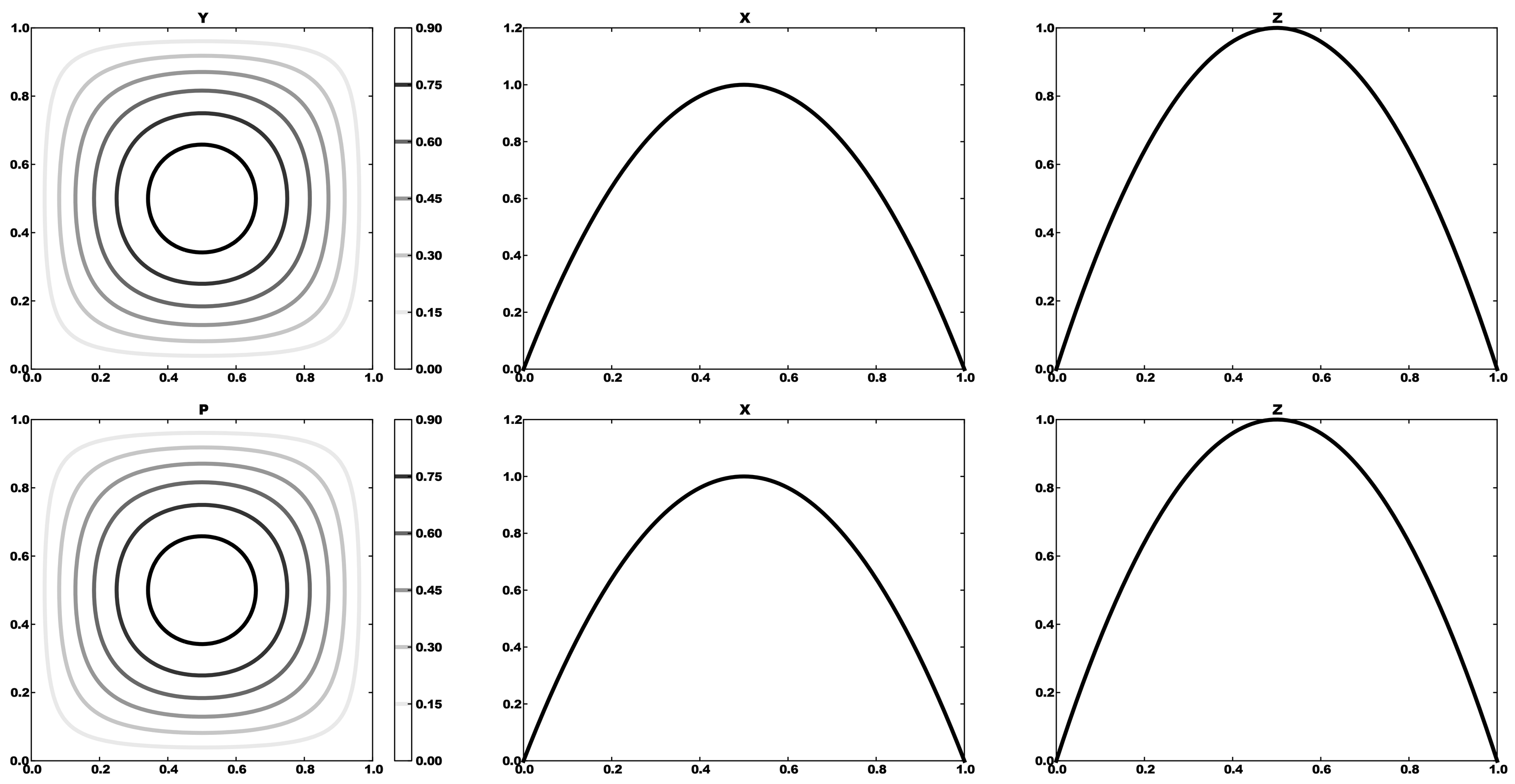
Résultats numériques

Nous validons notre démarche sur l'exemple suivant :

$$f\left(x,z\right) = -\frac{1}{\alpha}16x(1-x)z(1-z) + 32x\left(1-x\right) + 32z\left(1-z\right)$$

$$y_d\left(x,z\right) = 16x\left(1-x\right)z\left(1-z\right) + 32x\left(1-x\right) + 32z\left(1-z\right)$$

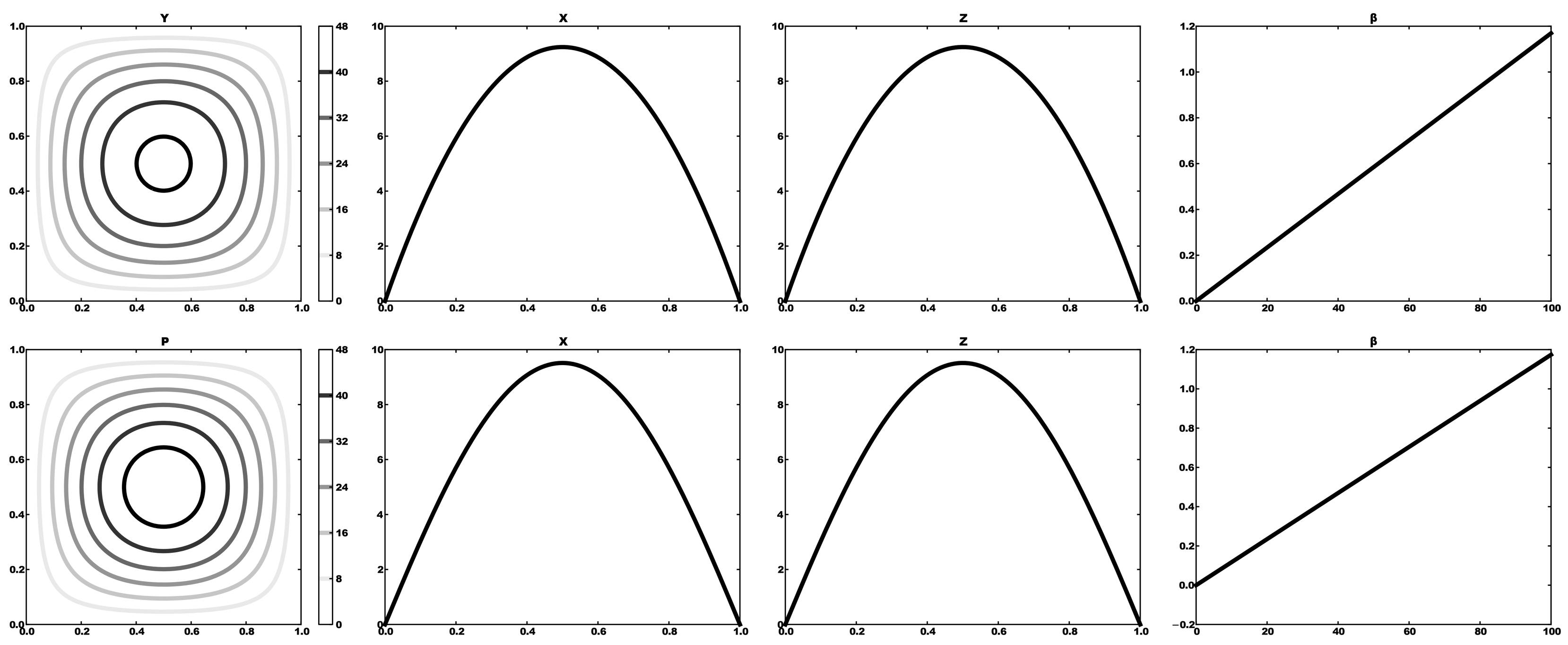
dans ces conditions la solution de notre problème est $y\left(x,z\right) = p\left(x,z\right) = 16x\left(1-x\right)z\left(1-z\right)$. Le résultat est indépendant de α.



Dans le cas paramétrique, nous prenons

$$y_d\left(x,z\right) = \beta\left(16x\left(1-x\right)z\left(1-z\right) + 32x\left(1-x\right) + 32z\left(1-z\right)\right)$$

avec $\alpha = 0.05$



Dans tous les cas la solution exacte est obtenue par le calcul d'un seul couple.