

# RÉPONSE IMPULSIONNELLE INVERSE PARAMÉTRIQUE

UNE APPROCHE BASÉE SUR LA RÉDUCTION DE MODÈLES ET  
DES EXCITATIONS ALÉATOIRES

**S.MONTAGUD**<sup>1,2</sup>, J.V. AGUADO<sup>3</sup>, F. CHINESTA<sup>4</sup>, P. JOYOT<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ESTIA, Biarritz

<sup>2</sup> I2M, Bordeaux

<sup>3</sup> Institut de Calcul Intensif, Ecole Centrale Nantes

<sup>4</sup> ENSAM, Paris



# PLAN DE LA PRÉSENTATION :

1. MOTIVATION

2. SURVEILLANCE via RÉPONSE IMPULSIONNELLE PARAMÉTRIQUE

3. CONTRÔLE via RÉPONSE IMPULSIONNELLE INVERSE  
PARAMÉTRIQUE

4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

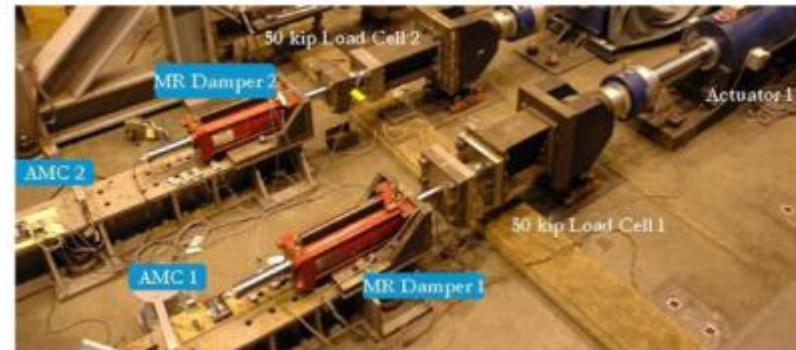
5. CONCLUSIONS

# 1. MOTIVATION

## Surveillance et contrôle actif de structures

### Laboratoires hybrides

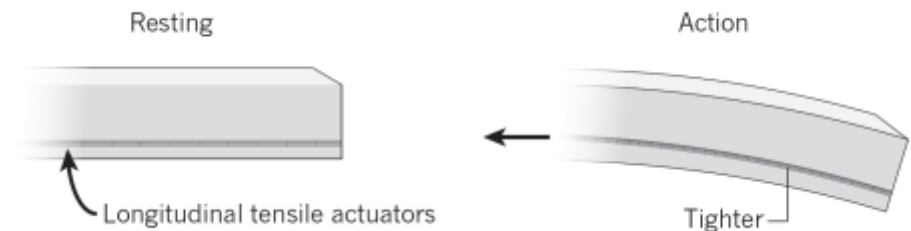
Couplage de l'expérience  
et la simulation



Z. Jiang, S. J. Kim, S. Plude and R. Christenson, "Real-Time Hybrid Simulation of a Complex Bridge Model with MR dampers using the Convolution Integral Method", JSMS, 22(10) (2013) 105008




### Robotique

Quelle force doit-on  
appliquer pour atteindre une  
configuration souhaitée ?



# 1. MOTIVATION

## Défis:

- Simulation en temps réel  Réponse impulsionnelle
- Adaptation aux scénarios changeants  PGD
- Résolution du problème inverse  Moindres carrés  
+  
excitations aléatoires

# 1. MOTIVATION

## Réponse impulsionnelle

Systeme linéaire invariable

Superposition

Comportement de la structure

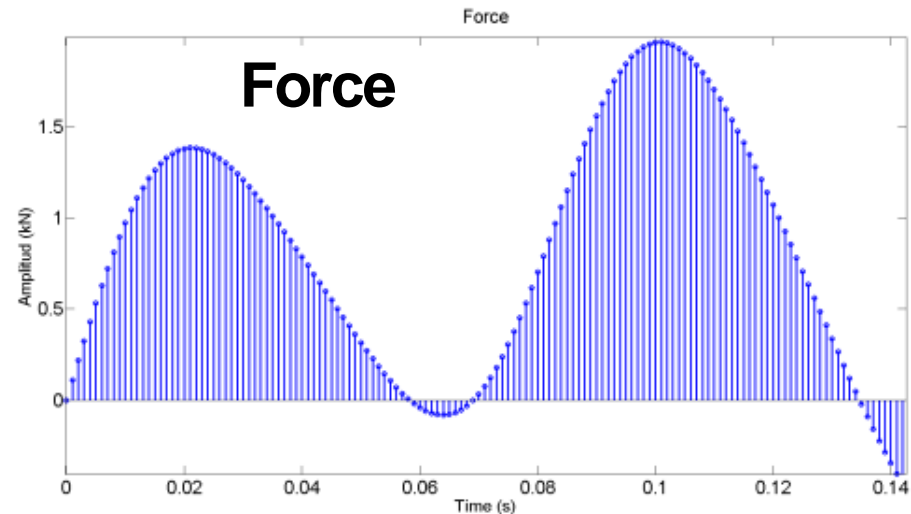
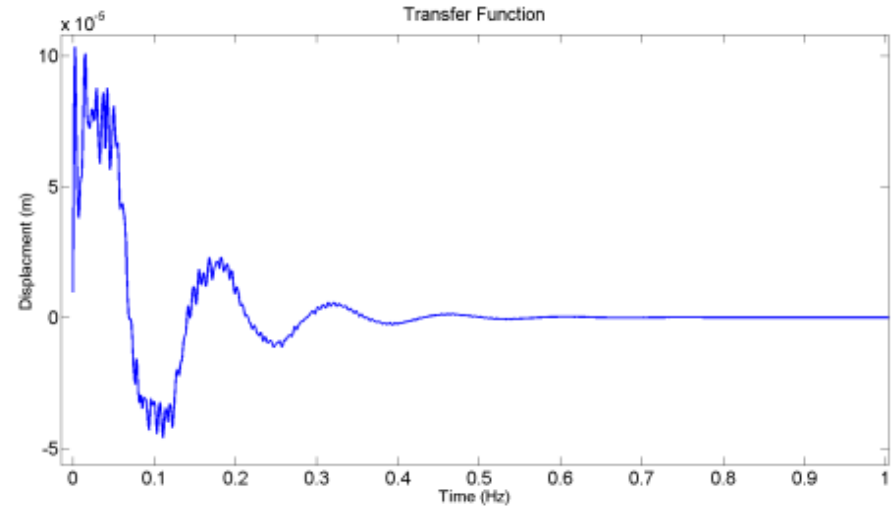
## Force

Discrétisé comme un série d'impulses:

## Déplacements

Calculés par superposition

## Réponse impulsionnelle



# 1. MOTIVATION

## Surveillance :

Réponse impulsionnelle:

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$



## Contrôle:

Réponse impulsionnelle inverse:

$$f(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

PARAMETRIQUE

## **2. SURVEILLANCE via RÉPONSE IMPULSIONNELLE PARAMETRIQUE**

## 2. RÉPONSE IMPULSIONNELLE PARAMETRIQUE

Obtention de la réponse impulsionnelle:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}_s f(t) \quad \Rightarrow \quad (-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{P}_s f(\omega)$$

$$\Downarrow \quad f(\omega) = \delta(\omega)$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{H}(\omega)\} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{H}(\omega) = (-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_s$$

$$u_j(t) = \int_0^t f(\tau) h_j(t - \tau) d\tau$$



## 2. RÉPONSE IMPULSIONNELLE PARAMÉTRIQUE

Obtention de la réponse impulsionnelle paramétrique:

Résolution de l'équation de la dynamique:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{H}(x, \omega, \cdot) = \mathbf{P}_s$$

Solution paramétrique:

PGD

Superposition Modal

POD/RBM

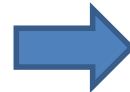
$$\mathbf{H}(x, \omega, E) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i(x) W_i(\omega) \mathcal{E}_i(E)$$

Solution séparée espace-fréquence-module de Young

## 2. RÉPONSE IMPULSIONNELLE PARAMÉTRIQUE

Transformation dans l'espace du temps:

Transformée inverse de  
Fourier



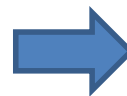
Sur les fonctions d' $\omega$  seulement

$$\mathbf{H}(x, \omega, E) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i(x) W_i(\omega) \mathcal{E}_i(E)$$

$$\mathbf{h}(x, t, E) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i(x) \mathcal{F}^{-1} \{W_i(\omega)\} \mathcal{E}_i(E) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i(x) W_i(t) \mathcal{E}_i(E)$$

Déplacements paramétriques:

Application d'une force



Convolution avec  
les fonctions 'temps'

$$\mathbf{u}(x, t, E) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i(x) (f(\tau) W_i(t - \tau)) \mathcal{E}_i(E) d\tau$$

### **3. CONTRÔLE via RÉPONSE IMPULSIONNELLE INVERSE PARAMÉTRIQUE**

### 3. RÉPONSE IMPULSIONNELLE INVERSE PARAMÉTRIQUE

#### Réponse impulsionnelle inverse

$$f(t) = \int_0^t u_j(t - \tau) g_j(\tau) d\tau \equiv u_j(t) * g_j(t)$$

Minimisation par moindres carrés et excitations aléatoires:

$$\sum_{\ell=1}^{n_{\text{train}}} \|u_{\ell j}(t) * g_j(t) - f_{\ell}(t)\|^2 + \lambda \|S(g_j(t))\|^2$$

$$1 \leq j \leq N$$

Déplacements paramétriques calculés par la réponse impulsionnelle:

$$\mathbf{u}_{\ell}(t) = \mathbf{h}(t) * f_{\ell}(t)$$

# 3. RÉPONSE IMPULSIONNELLE INVERSE PARAMÉTRIQUE

## Réponse impulsionnelle inverse

Discrétisation:

$$\sum_{\ell=1}^{n_{\text{train}}} \|\mathbf{U}_{\ell j} \mathbf{g}_j - \mathbf{f}_\ell\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{S} \mathbf{g}_j\|_2^2$$

Minimisation:

$$\mathbf{g}_j = \left( \sum_{\ell=1}^{n_{\text{train}}} \mathbf{U}_{\ell j}^T \mathbf{U}_{\ell j} + \lambda \mathbf{S}^T \mathbf{S} \right)^{-1} \left( \sum_{\ell=1}^{n_{\text{train}}} \mathbf{U}_{\ell j}^T \mathbf{f}_\ell \right)$$

### 3. RÉPONSE IMPULSIONNELLE INVERSE PARAMÉTRIQUE

#### Réponse impulsionnelle inverse paramétrique

Solution paramétrique:

$$\mathbf{g}(t, E) = \sum_{l=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{X}}_l \bar{W}_l(t) \bar{\mathcal{E}}_l(E)$$

Excitations aléatoires:

$$u_{\ell j}(t, E) = \sum_{i=1}^n X_{ij} \Upsilon_{i\ell}(t) \mathcal{E}_i(E) \quad 1 \leq \ell \leq n_{\text{train}}$$

où

$$\Upsilon_{i\ell}(t) = W_i(t) * f_{\ell}(t)$$

avec

$$\mathbf{h}(x, t, E) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i(x) W_i(t) \mathcal{E}_i(E)$$

### 3. RÉPONSE IMPULSIONNELLE INVERSE PARAMÉTRIQUE

#### Réponse impulsionnelle inverse paramétrique

Equation paramétrique:

$$\sum_{\ell=1}^{n_{\text{train}}} \|u_{\ell j}(t, E) * g_j(t, E) - f_{\ell}(t)\|^2 + \lambda \|S(g_j(t, E))\|^2$$

norme  $L_2$  en  $I_t \times I_E$

$u_{\ell j}(t, E)$  écrit en forme séparée:

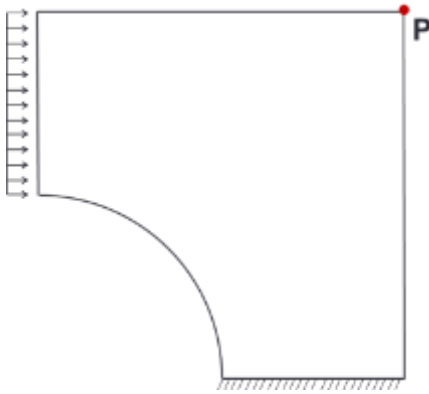
$$\sum_{\ell=1}^{n_{\text{train}}} \|(\sum_{i=1}^n X_{ij} \Upsilon_{il} \mathcal{E}_i) * g_j(t, E) - f_{\ell}(t)\|^2 + \lambda \|S(g_j(t, E))\|^2$$

**Choix de lambda?**

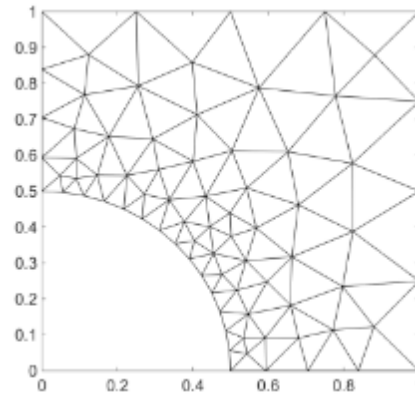
## 4. RÉSULTATS



## 4. RÉSULTATS



Contrainte plane



Rectangle:  $[1 \ 1]m$   
Rayon:  $0.5 \ m$

Maille: 124 Éléments

Nœuds : 100

Paramètres:

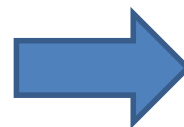
$$\rho = 1 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 10\%$$

$$k = [10 \ 200] \text{ Pa} \quad n_k = 10 \text{ Pa}$$

$$\omega = [0 \ 500] \text{ Hz} \quad \omega_k = 0.01 \text{ Hz}$$

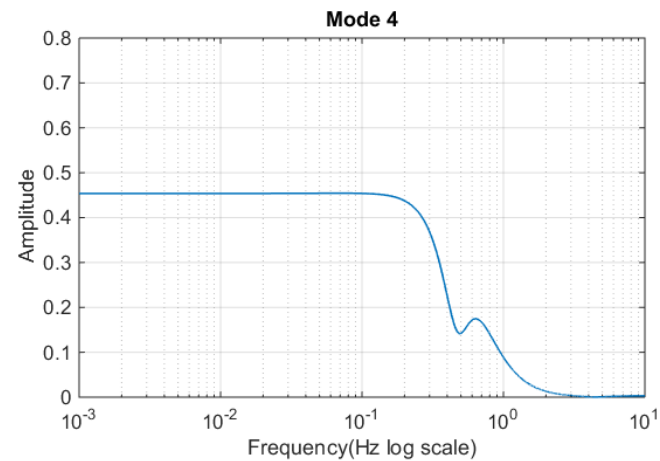
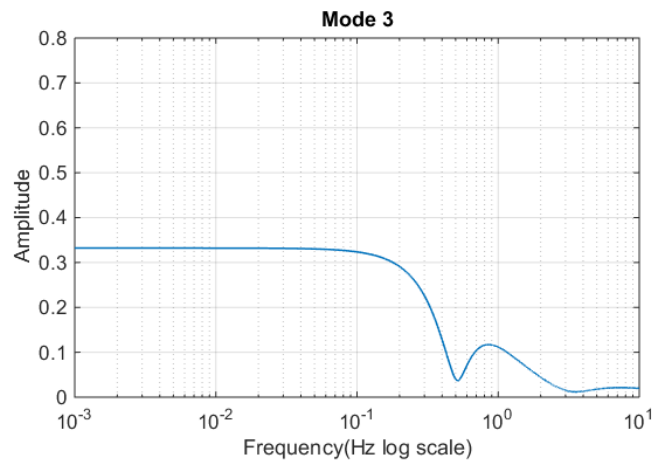
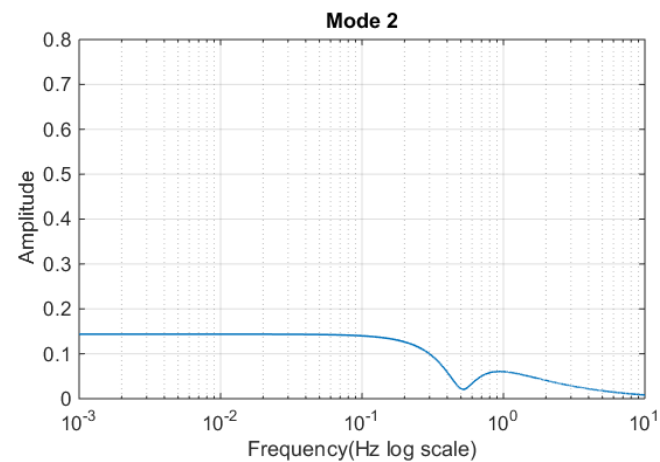
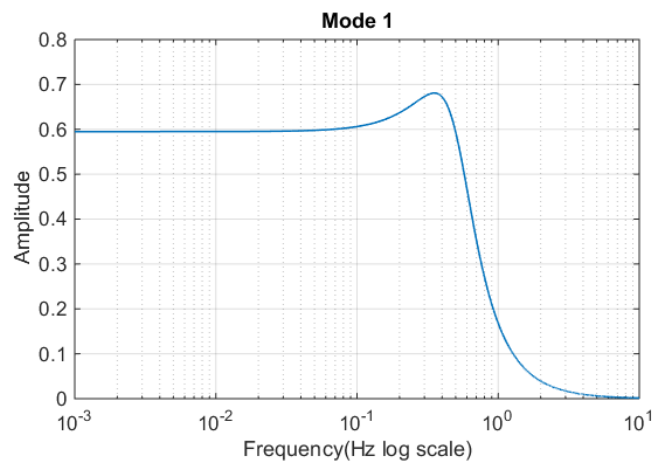
Calcul de  $h$  et  $g$   
( $\lambda = 0$ )



$$\omega_{\text{forces}} = [0 \ 50] \text{ Hz}$$

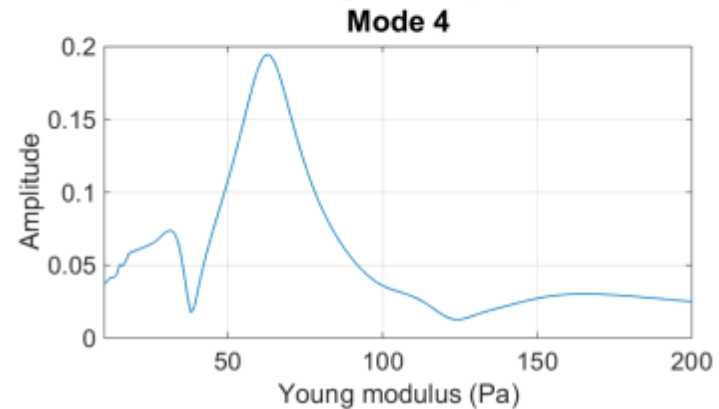
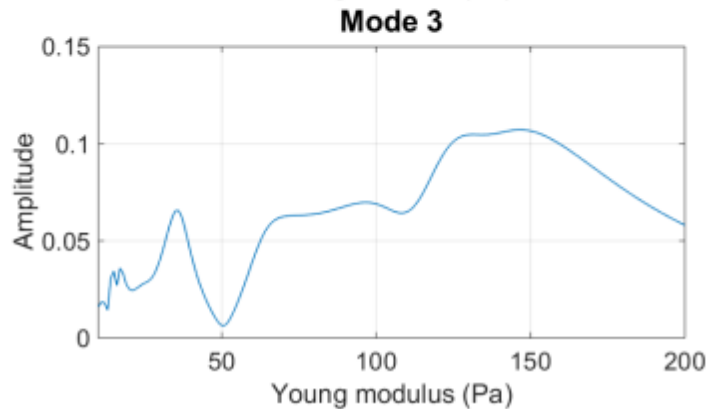
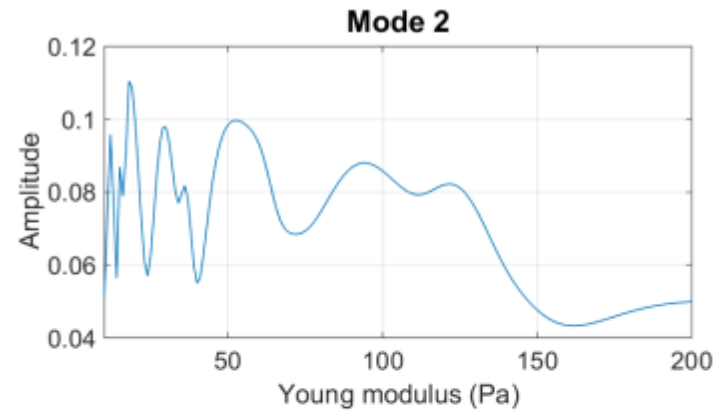
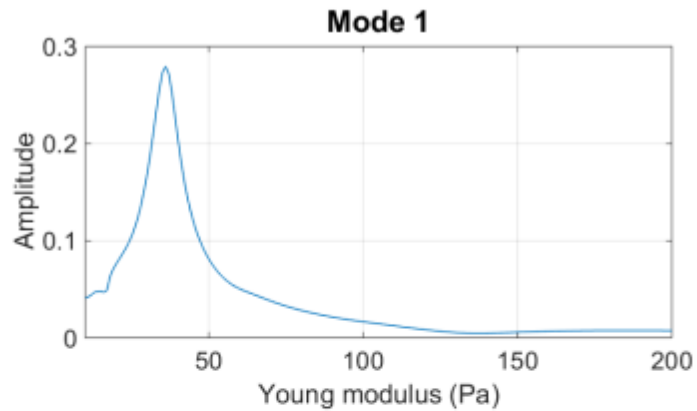
# 4. RÉSULTATS

## Fonctions PGD pour la réponse impulsionnelle paramétrique



# 4. RÉSULTATS

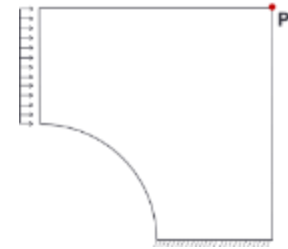
## Fonctions PGD pour la réponse impulsionnelle paramétrique



# 4. RÉSULTATS

Validation de la méthode:

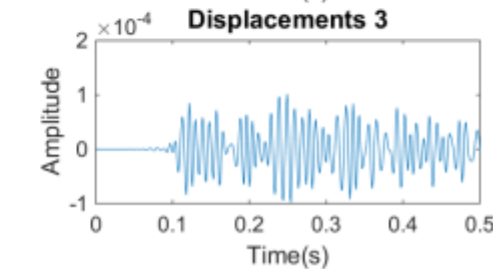
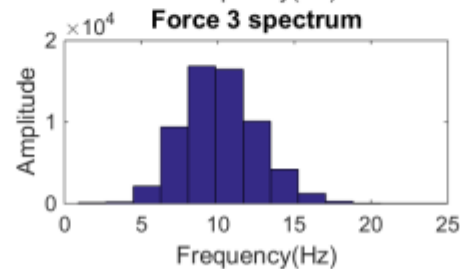
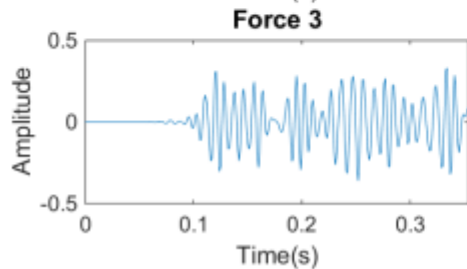
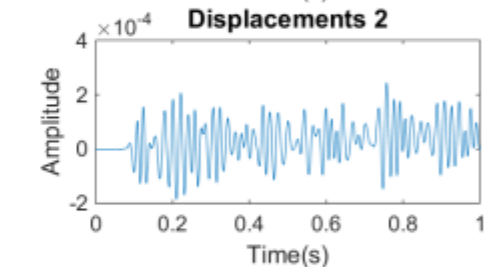
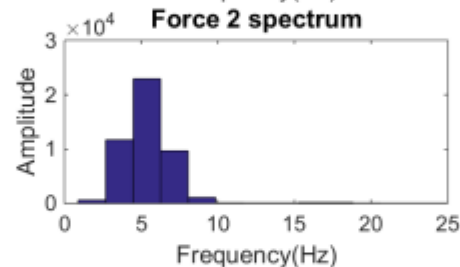
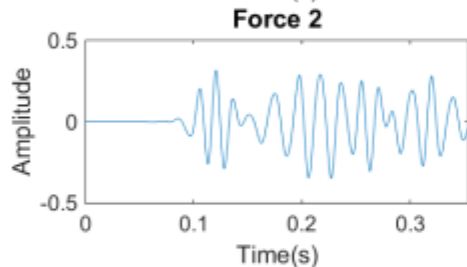
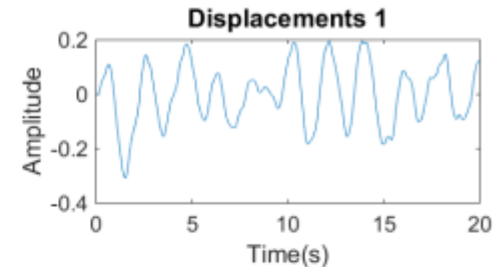
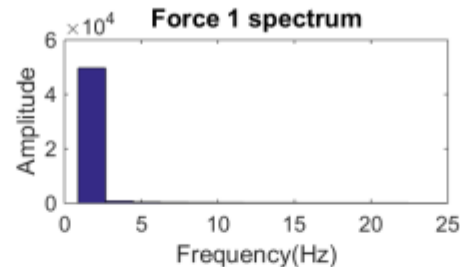
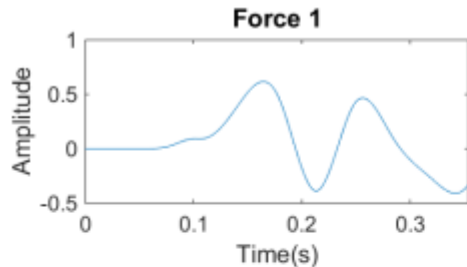
- 3 forces appliquées sur la structure
- 3 déplacements calculés
- Les 3 forces appliquées sont récupérées



Raideur  
particularisée:

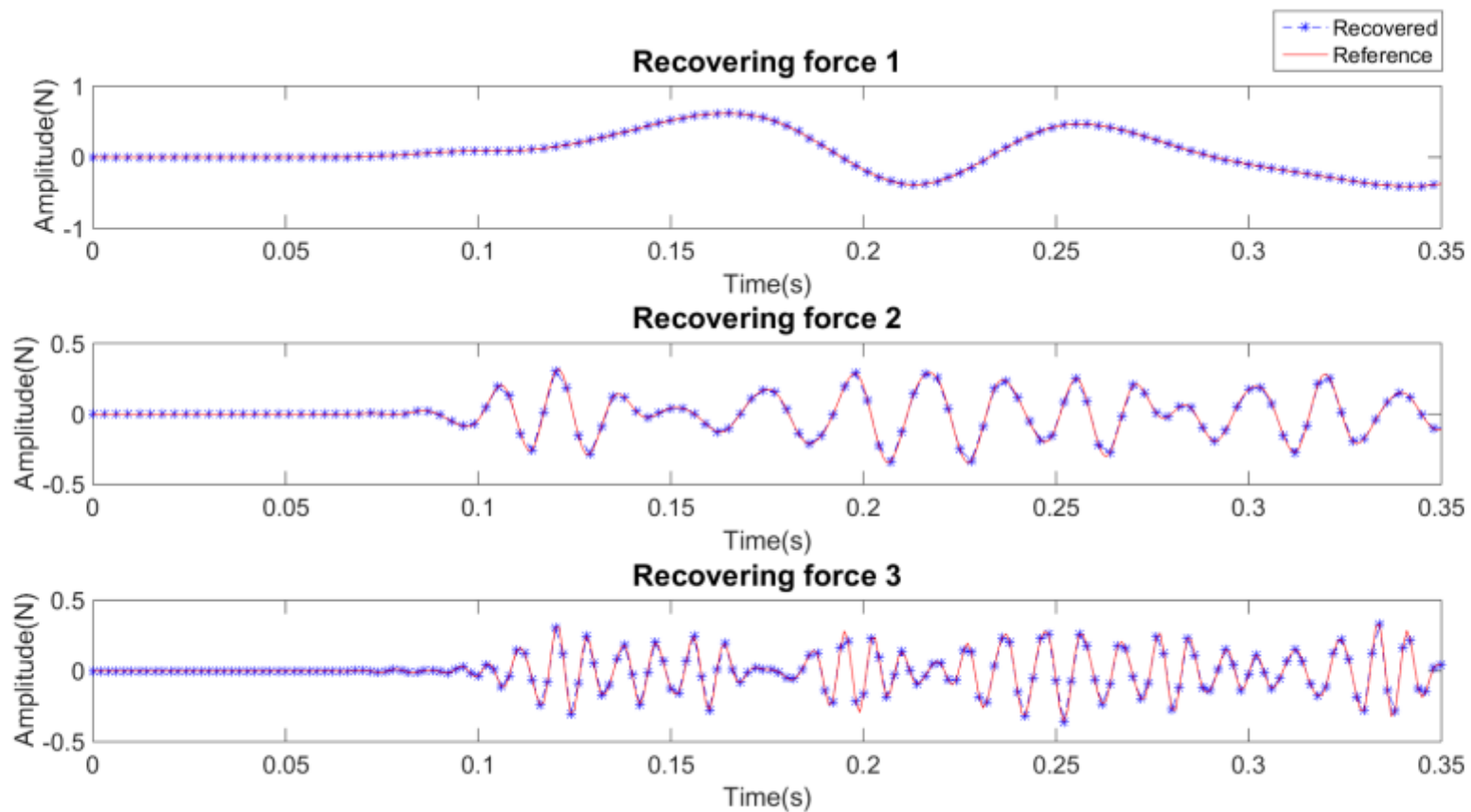
$$k = 100Pa$$

Déplacements  
mesurés au  
point **P**



# 5. RÉSULTATS

Forces récupérées en temps réel:  
Convolution avec la particularisation de  $g$



## **6. CONCLUSIONS**

## 6. CONCLUSIONS

- La théorie de la réponse impulsionnelle et les solutions paramétriques ont été appliquées pour résoudre en temps réel la surveillance et le contrôle dynamique de structures
- La surveillance est faite en appliquant la réponse impulsionnelle paramétrique inverse
- Le contrôle est fait en appliquant la réponse impulsionnelle paramétrique inverse
- La réponse impulsionnelle paramétrique inverse a été calculée en appliquant des techniques de réduction de modèles et la régularisation de Tikhonov.
- Futurs travaux:
  - Non linéarités
  - Convergence PGD-lambda