

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Constant MAZERAN

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

\*\*\*\*\*

SUR LA STRUCTURE MATHÉMATIQUE ET L'APPROXIMATION NUMÉRIQUE  
DE L'HYDRODYNAMIQUE LAGRANGIENNE BIDIMENSIONNELLE

\*\*\*\*\*

Soutenue le : jeudi 8 novembre 2007

Après avis des rapporteurs :

MM. Patrick LE TALLEC Professeur, Ecole Polytechnique  
Benoit PERTHAME Professeur, Ecole Normale Supérieure

Devant la commission d'examen formée de :

MM. Rémi ABGRALL Professeur, Université Bordeaux I, Président du jury  
Charles-Henri BRUNEAU Professeur, Université Bordeaux I  
Bruno DESPRÉS Directeur de recherche, CEA Bruyères-le-Châtel  
Pierre FABRIE Professeur, Université Bordeaux I  
Patrick LE TALLEC Professeur, Ecole Polytechnique  
Jean OVADIA Docteur Ingénieur, CEA-CESTA  
Benoit PERTHAME Professeur, Ecole Normale Supérieure



J'ai préparé cette thèse au CEA-DAM de Bruyères-le-Châtel, Ile de France, bâtiment B, « couloir des thésards », bureau 18.

Au début, c'était super. Devant un tableau noir blanchi de quelques formules de mécanique des fluides, on m'avait accueilli par un « si vous résolvez cette équation, vous avez réglé le problème de l'énergie sur la planète ». Au bout de quelques mois, c'était plus dur. Un jour que mes grommellements avaient franchi les sas de sécurité, on m'avait répondu : « Mazeran ne vous plaignez donc pas, moi lorsque j'étais à Los Alamos on m'avait mis dans un bureau sans fenêtre ». La fin fut terrible : « Vanité des vanités ... mais souvenez-vous de ces bénédictins du XIVème siècle, travaillant sans relache sur leur manuscrit, à la lumière de la bougie ... pour quoi ? »

Je remercie Bruno Després pour m'avoir fait partager - le mot est faible - un de ses thèmes de recherche, l'hydrodynamique lagrangienne. J'ai trouvé ce sujet passionnant, et te suis profondément reconnaissant de m'avoir permis de préparer un doctorat en mathématiques appliquées à tes côtés, en plus de m'avoir transmis ta vision très originale du *numérique*. Dans un tel contexte, tu as une sacrée trempe que je n'oublierai pas.

J'adresse ici une pensée fraternelle à mes camarades de thèse de la DAM, ceux qui sont venus puis vite partis, ceux qui sont arrivés après moi et qui ont soutenu avant, ce qui y sont restés après, aussi : Benjamin, Céline, David, Hugues, Julien, Lisl, Marie-Christine, Paul-Edouard, Sébastien, Sylvain. Grâce à vous les journées de travail ont pris une allure humaine. Merci également à mes amis américains Charles et Rodney, professeurs d'anglais à moins que vous ne soyez agents doubles, pour la bulle d'oxygène quasi-hebdomadaire.

Une pensée encore à l'égard du Pôle Numérique Environnement et Constantes, auquel j'étais rattaché : Stéphane Jaouen, Hervé Jourden, François Hermeline, Bruno Scheurer. Quel dommage de ne pas avoir eu plus d'échanges ! Bonne continuation dans le « X », et n'oubliez pas les petits scribes du « B ».

Je n'oublie pas, de façon individuelle, les chercheurs rencontrés lors de mes escapades scientifiques hors du bunker. J'ai beaucoup apprécié d'entrevoir au cours des séminaires et autres congrès l'accueillante communauté des mathématiques appliquées françaises.

J'exprime ma reconnaissance la plus respectueuse à Messieurs Perthame et Le Tallec qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir relire ce mémoire. Votre regard extérieur très encourageant m'a assurément apporté le dernier élan pour conclure cette longue aventure. J'adresse également mes remerciements à Messieurs Abgrall et Ovidia pour bien vouloir apporter, le jour de la soutenance, leur critique experte respectivement en méthodes eulériennes et lagrangiennes.

En bout de course, je suis très heureux de soutenir cette thèse à l'Université de Bordeaux, dont je garde un excellent souvenir lorsque j'étais étudiant à l'école MATMECA ; son directeur, Pierre Fabrie, m'a d'ailleurs fait la joie d'accepter mon invitation dans le jury, quelques années après son judicieux conseil à me lancer dans cette voie. Je souhaiterais donc enfin remercier Charles-Henri Bruneau pour m'avoir encouragé à m'inscrire (et reinscrire maintes fois !) dans cette Université. Un détail, me permettant ainsi d'associer à ce travail de trois années un lieu qui m'a donné envie de faire des mathématiques.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Généralités sur la structure des modèles fluides en coordonnées lagrangiennes</b>	<b>11</b>
1.1 Coordonnées semi-lagrangiennes pour la mécanique des milieux continus . . .	12
1.2 Structure mathématique dans le cas monodimensionnel . . . . .	13
1.3 Généralisation au cas multidimensionnel . . . . .	16
1.4 Changement de coordonnées dans les systèmes . . . . .	18
1.5 Structure mathématique en coordonnées lagrangiennes . . . . .	20
1.6 Fermeture des systèmes de lois de conservation lagrangiens . . . . .	22
1.7 Discussion sur les systèmes conservatifs avec contraintes involutives . . . . .	23
1.7.1 Magnétohydrodynamique idéale tridimensionnelle . . . . .	24
1.7.2 Système de Born-Infeld Augmenté . . . . .	25
<b>2 Symétrisation de l'hydrodynamique lagrangienne multidimensionnelle</b>	<b>29</b>
2.1 La notion d'hyperbolicité pour les systèmes multidimensionnels . . . . .	30
2.2 Formulation lagrangienne de l'hydrodynamique multidimensionnelle . . . . .	32
2.3 Formulation lagrangienne canonique . . . . .	36
2.4 Faible hyperbolicité dans les systèmes . . . . .	41
2.5 Symétrisation des lois de conservation en coordonnées lagrangiennes . . . . .	43
2.6 Classification des systèmes . . . . .	46
<b>3 Approximation numérique</b>	<b>49</b>
3.1 Discrétisation spatiale du système de lois de conservation géométrique . . .	50
3.2 Discrétisation spatiale du système de lois de conservation physique . . . . .	53
3.2.1 Compatibilité entre vitesses aux arêtes et aux nœuds . . . . .	54
3.2.2 Formulation aux nœuds . . . . .	57
3.2.3 Critère de croissance de l'entropie . . . . .	59
3.2.4 Critère de conservation de l'impulsion et de l'énergie totale . . . . .	60
3.3 Traitement des conditions aux limites . . . . .	66
3.4 Discrétisation en temps . . . . .	68
<b>4 Etude théorique de convergence pour les ondes acoustiques</b>	<b>75</b>
4.1 Système linéarisé et méthodes d'approximation . . . . .	76
4.2 Estimation d'erreur de la méthode Volumes-Finis standard . . . . .	79
4.3 Estimation d'erreur du solveur aux nœuds . . . . .	82
4.4 Estimation d'erreur des méthodes discrètes en temps . . . . .	86

<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>95</b>
5.1	Rappel de l'approche Volumes-Finis usuelle . . . . .	96
5.2	Tube à choc de Sod . . . . .	97
5.3	Problème de Saltzman . . . . .	97
5.4	Effondrement d'une couronne dans le vide . . . . .	99
5.5	Problème de Noh . . . . .	106
5.6	Compression isentropique de Kidder . . . . .	109
5.7	Montée en ordre <i>via</i> une variante isentropique . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Extension en géométrie axisymétrique</b>	<b>119</b>
6.1	Formulation symétrisée en coordonnées lagrangiennes cylindriques . . . . .	120
6.2	Les équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes axisymétriques . . . . .	124
6.3	Discrétisation en formulation entièrement axisymétrique . . . . .	126
6.3.1	Discrétisation du système géométrique . . . . .	126
6.3.2	Discrétisation du système physique . . . . .	129
6.3.3	Conservation de la masse et vitesses aux nœuds . . . . .	131
6.3.4	Solveur axisymétrique aux nœuds . . . . .	131
6.3.5	Intégration en temps et résultats numériques . . . . .	135
6.4	Discrétisation en formulation plane . . . . .	138
6.5	Discrétisation à symétrie sphérique . . . . .	142
	<b>Conclusion</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Preuve des relations thermodynamiques du théorème 9</b>	<b>151</b>
<b>B</b>	<b>Symétrie du solveur aux nœuds dans les écoulements à géométrie convergente</b>	<b>155</b>
<b>C</b>	<b>Compatibilité entre vitesses aux nœuds et aux arêtes en géométrie axisymétrique</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>160</b>

# Introduction

Le premier code de calcul hydrodynamique capable de traiter automatiquement les écoulements avec chocs était lagrangien. En l’imaginant en 1950 dans un article fondateur [53], Von Neumann et Richtmeyer ouvraient la voie aux méthodes en énergie interne grâce à la notion de viscosité artificielle, capable de modéliser les effets dissipatifs d’un choc. Pour ces auteurs, l’emploi du formalisme lagrangien étaient parfaitement naturel car il simplifiait les équations. Wilkins étendra plus tard ces principes, introduits dans un cadre monodimensionnel, aux géométries bidimensionnelles sur maillages mobiles [73]. Quelques années plus tard et de façon complètement indépendante, Godunov développait un autre type de méthodes [41] pour résoudre une physique similaire (dynamique des gaz), dites en énergie totale car s’appuyant sur toutes les lois de conservation du système, y compris celle sur l’énergie totale, intégrées sur des volumes de matière. Là encore, le formalisme était lagrangien, même si par la suite ces méthodes sont devenues célèbres dans un contexte eulérien.

Qu’entend-on précisément par formalisme eulérien et lagrangien ? En mécanique des milieux continus ce sont deux façons possibles de représenter la matière. Les mécaniciens des fluides utilisent souvent le jeu de coordonnées dites eulériennes, qui consiste à se donner un repère figé, indépendant du milieu, et à estimer les grandeurs du fluide en tout point de l’espace (par exemple, dans une approche expérimentale, par des capteurs fixes) : à chaque instant, on mesure les grandeurs en un point géométrique, mais entre deux instants distincts la grandeur n’est pas transportée par le même volume de fluide. C’est donc une description de nature géométrique, et les grandeurs physiques s’identifient à des champs. Ainsi si l’on se donne un volume eulérien, il y aura à travers la surface qui le délimite des flux de matière. *A contrario* les mécaniciens des solides emploient plutôt le jeu de coordonnées dites lagrangiennes, qui consiste à associer chaque grandeur au volume de matière qui la transporte ; en général ceci est réalisé en choisissant pour coordonnée la position initiale du matériau (et par exemple en attachant des capteurs à la matière, et non pas à l’espace). C’est bien une description physique, mais en toute rigueur la représentation en coordonnées purement lagrangiennes est fixe : les propriétés physiques d’un volume de matière évoluent au cours du temps, mais la position initiale est inchangée. Il existe également un jeu de coordonnées plus riches, les coordonnées semi-lagrangiennes, qui repèrent la matière par les coordonnées lagrangiennes mais en donnent une représentation à sa position courante, en intégrant temporellement le champ de vitesse ; ce type de représentation est également souvent appelé, quelque peu abusivement, lagrangien, et c’est dans celui-ci que les équations de la physique *paraissent* se simplifier. D. Wagner a montré l’équivalence entre représentation eulérienne et lagrangienne de l’hydrodynamique en une dimension [70].

Numériquement, une méthode eulérienne discrétise donc les équations sur un maillage fixe, alors qu’une méthode lagrangienne identifie chaque maille comme un volume physique

de matière et la déplace selon la dynamique du milieu. Si ces deux approches sont conceptuellement équivalentes, en ce sens que toutes deux donnent une représentation de la même physique, elles partagent toutefois des atouts différents et souvent complémentaires :

- Les méthodes eulériennes sont particulièrement adaptées pour traiter les phénomènes de transfert et d'aérodynamique, qui d'une part ne nécessitent pas d'identification des volumes de fluide, et d'autre part engendrent des flux de matière aux bords du domaine. De plus, travailler sur un maillage fixe non attaché au fluide permet de simuler des écoulements turbulents, ou plus généralement présentant de très larges déformations par rapport à l'état initial.
- Les méthodes lagrangiennes prennent tout leur intérêt dès lors que le domaine matériel est fini et sans transfert de masse avec l'extérieur. Le formalisme permet de prendre en compte les interfaces entre matériaux de différentes natures, et de leur associer des lois d'état spécifiques. Numériquement, il n'y a pas de transfert de masse artificiel entre mailles voisines, ce qui est crucial pour certaines applications. Enfin on peut se restreindre à mailler uniquement le domaine matériel à l'instant initial, et non pas tout l'espace physique qu'il occupera en cours de la simulation, ce qui présente un avantage pratique en terme de coût de calcul. On peut également considérer que le domaine de calcul, qui suit le fluide dans son mouvement, s'adapte automatiquement à la physique au cours du temps, par exemple lors de détente ou de compressions. En revanche, les codes lagrangiens sont connus pour présenter des instabilités, et le croisement des mailles peut conduire à l'arrêt prématuré de la simulation.

Dans sa revue des codes hydrodynamiques [5] datée de 1992, D. J. Benson expliquait que les codes eulériens avaient sans doute, en terme de popularité, une avance de cinq à dix ans sur les codes lagrangiens car ils étaient sujet à de moindre restriction de classification. Toutefois les codes lagrangiens sont peu à peu sortis de leurs applications pour la Défense, une grande application industrielle étant la simulation de crash automobile. Plus généralement, la simulation d'impact et de déformation de produits usinés a pu bénéficier de ces méthodes. Depuis quelques années, les projets expérimentaux de fusion thermonucléaire contrôlée contribuent au renouveau des méthodes de simulation lagrangiennes. Couplée à des processus extrêmement complexes (interaction avec des lasers, écoulement multimatériaux, turbulence, *etc.*), la partie hydrodynamique, en tant que support matériel de la physique, reste encore un enjeu majeur et difficile à maîtriser.

Dans ce contexte, ce travail de thèse étudie sous un jour nouveau une formulation lagrangienne des systèmes de lois de conservation, à la fois du point de vue mathématique et numérique. Le système physique sur lequel nous centrons notre attention est celui de l'hydrodynamique, modélisé par les équations d'Euler. Il est à noter qu'un effort d'écriture du système sous une forme abstraite permet d'étendre les résultats d'une large partie de ce mémoire à une physique plus large que l'hydrodynamique. Par contre la partie numérique, sur laquelle il serait hasardeux de généraliser les développements, y est spécialement consacrée. L'objet de ce mémoire est donc double : d'une part contribuer à l'analyse de la structure mathématique de ces lois, et d'autre part proposer une méthode numérique adaptée à cette structure, pour des applications hydrodynamiques réelles. Un des enjeux est précisément d'appréhender et corriger certains défauts des codes lagrangiens actuels par une meilleure compréhension de la structure du système. La dimension d'espace joue un rôle important dans cette problématique : nous verrons que mathématiquement, la nature du système est différente en dimension un et en multidimension, et par ailleurs les diffi-



cultés numériques apparaissent également en multidimension, lorsque l'on peut imaginer des croisements de maille. Dans ce mémoire, le choix est fait de s'attaquer à la dimension deux, qui est à la fois suffisamment élevée pour étayer notre analyse et suffisamment réduite pour manipuler facilement le système, algébriquement et numériquement. F. Hermeline, du CEA, s'est attelé à construire une extension tridimensionnelle de notre méthode dans [42].

Ce travail a été initié grâce à la contribution de R. Loubère [52], associé à R. Abgrall et J. Ovidia [1], qui ont remis au goût du jour les méthodes lagrangiennes pour l'hydrodynamique et l'interaction laser/plasma. Ces auteurs ont exploité une formulation complètement lagrangienne des équations d'Euler introduite quelques années plus tôt par W. H. Hui, P. Y. Li, Z. W. Li et S. Kudriakov dans [45] et [43]. Nous sommes partis à notre tour de cette formulation, dans une direction toutefois radicalement différente<sup>1</sup>. La manière d'écrire les équations est bien souvent, en mathématique, une clé pour avancer, et dans le cas qui se présente la multiplicité des écritures requiert une attention particulière. La difficulté vient du fait que c'est souvent la formulation semi-lagrangienne qui est employée, écrite formellement en variable eulérienne, à l'instant courant. Autrement dit, dans cette description usuelle, les opérateurs de dérivation spatiale s'appuient sur un jeu de coordonnées mobiles, dont la dynamique est elle-même dépendante des équations physiques, par surcroît de façon non-linéaire : toute étude mathématique (l'hyperbolicité notamment [34], [63]) n'a donc à nos yeux qu'une portée très limitée, et surtout ne permet pas de faire le lien avec les problèmes numériques de nature géométrique.

Pour bien comprendre cet aspect, rappelons dès à présent le lien entre coordonnées eulériennes et lagrangiennes. Etant données, dans un repère cartésien, la position initiale  $\mathbf{X}$  d'une particule de fluide, et sa vitesse  $\mathbf{u}$ , sa trajectoire  $\xi$  est la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \partial_t \xi(t, \mathbf{X}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}), \\ \xi(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}. \end{cases}$$

La correspondance entre les coordonnées eulériennes  $(t, \mathbf{x})$  d'un point matériel et ses coordonnées lagrangiennes  $(t, \mathbf{X})$  s'écrit

$$\xi(t, \mathbf{X}) = \mathbf{x}.$$

Ainsi  $\mathbf{X}$  est la position initiale de la particule de fluide qui est en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ . Nous supposons dans tout ce mémoire que cette correspondance a effectivement un sens, c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre le domaine matériel à l'instant initial et à l'instant courant. Ceci revient à dire que le tenseur gradient de transformation  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ , que nous notons  $\mathbb{F}$ , est toujours inversible :

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{avec} \quad J = \det \mathbb{F} \neq 0.$$

Pour plus de clarté dans les écritures, nous notons  $(T, \mathbf{X})$  les coordonnées lagrangiennes et  $(t, \mathbf{x})$  les coordonnées eulériennes, avec  $T = t$ , de façon à ne pas confondre les opérateurs de dérivation temporelle à  $\mathbf{X}$  ou  $\mathbf{x}$  fixé.

---

<sup>1</sup>Au niveau numérique notamment, [52] a développé une méthode particulière, alors que nous proposons ici une méthode de type Volumes-Finis.

Dans le cas de la dynamique des gaz, le système eulérien bien connu

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}^2 + p \mathbb{I}_d) = \mathbf{0}, \\ \partial_t(\rho e) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) = 0, \end{cases}$$

s'écrit en formulation semi-lagrangienne sous la forme

$$\begin{cases} \rho \partial_T(\rho^{-1}) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho \partial_T \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (p \mathbb{I}_d) = \mathbf{0}, \\ \rho \partial_T e + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (p \mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

Comme suggéré ci-dessus, cette écriture est relativement trompeuse car la coordonnée spatiale  $\mathbf{x}$  n'est pas fixe mais doit être comprise comme la trajectoire  $\xi(t, \mathbf{X})$ . Numériquement, le retour aux trajectoires est alors fait par  $\partial_T \mathbf{x} = \mathbf{u}$ . En toute rigueur, l'écriture en coordonnées lagrangiennes  $(T, \mathbf{X})$  nécessite d'explicitier le changement de variable  $(T, \mathbf{X}) \rightarrow (t, \mathbf{x})$ , qui transforme un système de lois de conservation en un autre système de lois de conservation. Pour la dynamique des gaz, cette manipulation amène à

$$\begin{cases} \partial_T(\rho J) = 0, \\ \partial_T(\rho J \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (p \tilde{\mathbb{F}}) = \mathbf{0}, \\ \partial_T(\rho J e) + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (p \tilde{\mathbb{F}}^T \mathbf{u}) = 0, \end{cases}$$

où  $\tilde{\mathbb{F}}$  représente la comatrice jacobienne (*i.e.* matrice des cofacteurs de  $\mathbb{F}$ ). Ce système constitue la partie *physique* de l'hydrodynamique lagrangienne. Il couple les inconnues physiques à des inconnues géométriques, au travers de  $\mathbb{F}$ . Pour fermer le système, W. H. Hui, P. Y. Li et Z. W. Li [45] ont rajouté l'évolution de  $\mathbb{F}$  au cours du temps :

$$\partial_T \mathbb{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}.$$

Ce deuxième système, dit *géométrique*, vient compléter la formulation complètement lagrangienne de l'hydrodynamique.

Si la partie physique du système est tout à fait classique en mécanique des solides (voir [3] par exemple ; on la trouve même dans un cadre plus général dans [22]), la formulation introduite dans [45] est véritablement novatrice dans l'inclusion de la partie géométrique sous la forme d'un système de lois de conservation. Ainsi l'étude mathématique globale devient-elle possible.

Du point de vue numérique, la première difficulté propre au formalisme lagrangien est le déplacement du maillage : que l'on travaille en formulation semi ou totalement lagrangienne, l'espace discrétisé doit toujours, en fin de compte, être déplacé à la vitesse du fluide. Cette différence essentielle avec les méthodes eulériennes favorise l'apparition d'erreurs géométriques, telles que déformations parasites des mailles, croisement d'arêtes, détente infinie en bord de domaine, *etc.* Pour pallier ces phénomènes, des techniques de décroisement, d'anti-dérive ou de remaillage sont souvent employées ; parallèlement à cela, la phase lagrangienne est souvent suivie, en pratique, d'une phase dite de *projection*, qui consiste à advecter la solution sur une grille régularisée, correspondant soit au maillage initial, soit comme dans le formalisme *Arbitrary Lagrangian Eulerian* à un maillage intermédiaire [62]. Face à la pléthore de ces techniques, notre travail se place dans le cadre d'une méthode *purement lagrangienne*, c'est-à-dire sur maillage mobile déplacé à la vitesse du fluide, dont l'objectif est d'éviter au mieux par elle-même les défauts susmentionnés. Comme on le verra par la suite, le positionnement de degrés de liberté aux nœuds du

maillage, pour en assurer le déplacement, sera un élément clé dans la construction du solveur.

Notons également que depuis les premiers travaux de J. Von Neumann et R. D. Richtmyer, les méthodes lagrangiennes s'attachent à respecter des exigences physiques et géométriques indispensables pour les applications réelles, répertoriées de trois sortes :

- conservation locale de la masse de chaque volume déplacé,
- conservation globale de l'impulsion et de l'énergie totale,
- accroissement de l'entropie aux chocs,
- conservation de symétries géométriques, par exemple dans les écoulements cylindriques.

La contrainte de conservation de la masse est cruciale, surtout en vue du couplage à une physique plus complexe dépendant des grandeurs hydrodynamiques. C'est pourquoi elle est imposée en pratique par toutes les méthodes, grâce à l'expression lagrangienne très simple

$$\rho(T)V(T) = \rho^0 V^0,$$

où  $\rho$  est la densité,  $V(T)$  est la mesure d'un volume de fluide physique à l'instant  $T$ , de mesure  $V^0$  à l'instant initial : dès lors que l'on sait déplacer d'une façon où d'une autre les volumes, on peut mettre à jour la densité en conservant automatiquement la masse. On peut toutefois annoncer dès à présent que cette procédure n'est pas compatible, en toute généralité, avec une discrétisation de type volumes-finis à la *Godunov* de l'équation du volume massique ; nous reviendrons en détail sur ce point dans la construction de notre méthode.

Les autres contraintes ne sont quant à elles pas toujours compatibles, selon le type de schémas traditionnels employés. Ainsi dans la famille de méthodes introduites par J. Von Neumann, R. D. Richtmyer et généralisées par M. Wilkins, l'énergie interne est discrétisée au détriment de l'énergie totale, ce qui ne permet pas de conserver cette dernière ; en revanche, la formulation non conservative du type  $\rho^0 \partial_T \varepsilon = -(p + q)(\partial_x u + \partial_y v)$ , où  $q$  est un terme de pseudo-viscosité positif dans les chocs, permet d'assurer la croissance de l'entropie :  $\rho^0 \mathcal{T} \partial_T \eta = q \geq 0$ . A l'opposé, dans la famille de schémas introduits par S. K. Godunov, c'est la formulation conservative qui est privilégiée ; la définition de flux aux arêtes, avec résolution de problèmes de Riemann, permet de construire un schéma conservatif en impulsion et énergie totale. Ces schémas sont peu précis dans certains écoulements convergents, à cause d'inconsistances géométriques, que nous illustrerons par la suite.

En ce sens, la méthode que nous proposons répond aux questions levées à la fois par J. Von Neumann et S. K. Godunov : c'est une méthode entropique sur maillage mobile, la masse de chaque maille étant constante à la *Von Neumann* et localement conservative à la *Godunov*.

\*\*\*

Ce mémoire s'articule en six chapitres, tous introduits par un résumé. La démarche de notre travail est la suivante :

Le premier chapitre, *Généralités sur la structure des modèles fluides en coordonnées lagrangiennes*, éclaire d'abord ces questions de jeu de coordonnées lagrangiennes, pour des modèles de mécanique des milieux continus. Il donne à toute une classe de modèles la structure des équations en coordonnées semi-lagrangiennes et lagrangiennes, sous une forme que l'on appellera *canonique* ou *symétrisée* :

$$\rho^0 \partial_T(\mathbf{U}) + \partial_X \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^X \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^X \Psi \rangle \end{array} \right) + \partial_Y \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Y \Psi \rangle \end{array} \right) = \mathbf{0},$$

où  $\Psi$  est une fonction de l'inconnue conservative  $\mathbf{U}$  et les matrices  $\mathbb{M}$ , associées au tenseur gradient de transformation, vérifient la contrainte différentielle suivante, présentée comme une généralisation de l'identité de Piola connue en mécanique des solides déformables :

$$\partial_X \mathbb{M}^X + \partial_Y \mathbb{M}^Y = \mathbb{O} \quad (\text{tenseur nul}).$$

Cette structure est le fil conducteur de notre travail.

Le deuxième chapitre, *Symétrisation de l'hydrodynamique lagrangienne multidimensionnelle*, discute de la nature mathématique de ce système. La faible hyperbolicité des équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes, déjà connue depuis [45], est abordée sous un angle neuf, en même temps que l'on démontre la stabilité de la partie physique du système sous la contrainte différentielle ci-dessus. Par ailleurs on montre que la perte de régularité des inconnues géométriques, phénomène typique d'un système faiblement hyperbolique, est caractéristique d'un écoulement particulier, les cisaillements.

Le troisième chapitre, *Approximation numérique*, décrit la mise en œuvre d'un schéma original, qui peut être vu comme une méthode de Volumes-Finis dont les degrés de liberté sont déplacés des faces aux nœuds du maillage. Nous montrons comment la problématique lagrangienne (déplacement du maillage) nécessite l'abandon de solveurs de Riemann unidimensionnels aux faces. La discrétisation s'appuie sur la structure profonde du système, plus que sur la particularité de chaque équation. Les ingrédients sont d'ailleurs physiques avant d'être algorithmiques : respect des principes de conservation, production d'entropie. Ils permettent de prouver un résultat de positivité et de non-croisement sur maillage triangulaire.

Le quatrième chapitre, *Etude théorique de convergence pour les ondes acoustiques*, cherche à valider l'efficacité de cette nouvelle approche en terme de convergence. A cette fin, et pour simplifier l'analyse, nous étudions la convergence du solveur aux nœuds sur la linéarisation des équations d'Euler, en comparaison avec une méthode de Godunov classique. Nous prouvons un taux de convergence d'ordre 1/2 pour les deux schémas, bien que la nouvelle approche nécessite plus de régularité sur la solution.

Le cinquième chapitre, *Résultats numériques*, illustre le comportement du schéma sur quelques problèmes classiques en hydrodynamique lagrangienne. Il détaille notamment l'avantage de la nouvelle approche sur des simulations simplifiées pour la fusion par confinement inertiel. Est également présentée une variante isentropique, qui en s'appuyant toujours sur la structure symétrisée, permet de monter en ordre dans les écoulements réguliers sans rajouter de degré de liberté.

Le sixième et dernier chapitre, *Extension en géométrie axisymétrique*, généralise de façon détaillée le travail précédent (formulation, symétrisation, approximation numérique) pour la formulation en coordonnées cylindriques et à symétrie autour de l'axe de révolution. Cette problématique, intéressante également pour les applications en fusion par confinement inertiel, intègre comme difficulté supplémentaire le poids géométrique de la distance à l'axe ; ceci se traduit numériquement par une perte de symétrie des maillages au voisinage de celui-ci, pouvant faire échouer la simulation. On montre comment le système d'équations, dans ce nouveau jeu de coordonnées, entre dans une formulation symétrisée étendue, et permet de construire une série de schémas numériques sur les mêmes principes directeurs.

# Chapitre 1

## Généralités sur la structure des modèles fluides en coordonnées lagrangiennes

---

L'objet de ce premier chapitre est d'identifier une structure mathématique propre à une certaine classe de systèmes de lois de conservation écrits en coordonnées lagrangiennes. La classe qui nous intéresse est celle des systèmes modélisant des lois de conservation physiques, telles la loi de conservation de la masse ou de l'énergie. De tels systèmes possèdent des propriétés d'invariance, qui nous permettent d'en dégager la structure mathématique sous-jacente. Celle-ci a été mise en évidence par B. Després en 2001 dans [25] pour le cas d'un espace physique à une dimension. La généralisation au cas multidimensionnel peut se démontrer en considérant séparément la structure du système dans chaque direction. La description du milieu physique est semi-lagrangienne, c'est à dire que l'opérateur d'évolution temporelle est lagrangien, mais les coordonnées d'espace restent eulériennes. Pour cette raison nous commençons par une première section d'introduction sur l'écriture de lois de conservation en coordonnées semi-lagrangiennes. La formulation complète en coordonnées lagrangiennes s'obtient par un changement de variables d'espace. Nous présentons cette manipulation, tout à fait générale, dans la quatrième section. A ce stade, la structure mathématique que nous souhaitons mettre en avant sera justifiée. On ferme le système avec de nouvelles inconnues, de nature géométrique, apparues au cours de la discussion. Nous concluons ce chapitre par des remarques sur l'extension de cette structure aux systèmes physiques possédant des contraintes involutives.

---

## 1.1 Coordonnées semi-lagrangiennes pour la mécanique des milieux continus

Cette section introduit la notion de coordonnées semi-lagrangiennes pour des modèles de mécanique des milieux continus, coordonnées auxquelles nous faisons largement appel dans la suite. Il s'agit aussi d'éclaircir les appellations courantes de dérivée particulaire, dérivée matière, lagrangienne, semi-lagrangienne, que l'on trouve dans la littérature.

Repérer une grandeur physique  $\phi$ , d'un milieu continu, en coordonnées eulériennes, revient à la mesurer à un instant et une position fixe  $(t, \mathbf{x})$ . Au contraire, utiliser les coordonnées lagrangiennes  $(T, \mathbf{X})$  revient à la décrire au temps  $T$  en fonction de la position  $\mathbf{X}$  qu'avait le fluide à l'instant initial. *Ce que maintenant nous appelons description semi-lagrangienne est l'utilisation des coordonnées  $(T, \mathbf{x})$ .* Cette description a un côté pratique, à laquelle les physiciens donnent leur préférence : repérer une grandeur en coordonnées semi-lagrangiennes, c'est suivre son évolution au cours du temps en regardant la position du fluide qui la transporte ; c'est bien la description la plus riche.

Si l'on souhaite suivre l'évolution de cette grandeur  $\phi$ , repérée en coordonnées semi-lagrangiennes, au cours du temps, on va simplement dériver  $\phi(T, \mathbf{x})$  par rapport à  $T$ . Le lien avec les dérivées eulériennes usuelles est alors

$$\begin{aligned}\partial_T \phi(T, \mathbf{x}) &= \partial_T \phi(T, \mathbf{x}) + \partial_T \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) \\ &= \partial_t T \times \partial_t \phi(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) \\ &= \partial_t \phi(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}).\end{aligned}$$

Ceci donne, avec les notations de l'introduction, la formule bien connue mais qui parfois porte à confusion

$$(1.1) \quad \partial_T = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}.$$

La notation  $\partial_T$ , dans ce cas, s'appelle dérivée particulaire, ou matière, mais il faut prendre garde au fait qu'elle est définie à  $\mathbf{x}$  fixé.

Regardons maintenant l'allure générale d'un système de lois de conservation en mécanique des milieux continus. Une grandeur liée à la matière joue un rôle particulier : c'est la densité, notée  $\rho$ , qui caractérise justement la « continuité » du milieu. Son équation d'évolution, qui traduit la loi de conservation de la masse, s'écrit en coordonnées eulériennes sous la forme suivante

$$(1.2) \quad \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

de laquelle découle, grâce à (1.1), la forme semi-lagrangienne

$$(1.3) \quad \partial_T \rho + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Cette loi est commune à tous les modèles de mécanique des milieux continus. Bien que certaines variables d'un système de lois de conservation soient *intensives* (c'est-à-dire non proportionnelles à la quantité de matière, comme le champ magnétique dans le système de la magnétohydrodynamique, *cf.* ci-dessous), on est en droit d'écrire le vecteur conservatif sous la forme  $\rho \mathbf{U}$  où  $\mathbf{U}$  est un vecteur de grandeurs *extensives*, quitte à multiplier les quantités initiales par le volume massique  $\tau$ , inverse de la densité. Ainsi un système de lois de conservation en mécanique des milieux continus s'écrit en coordonnées eulériennes sous la forme générale

$$(1.4) \quad \partial_t(\rho \mathbf{U}) + \partial_x \mathbf{f}(\rho \mathbf{U}) + \partial_y \mathbf{g}(\rho \mathbf{U}) + \partial_z \mathbf{h}(\rho \mathbf{U}) = 0.$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse et l'expression de la dérivée particulaire, on trouve son écriture en coordonnées semi-lagrangiennes :

$$(1.5) \quad \rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x (\mathbf{f}(\rho \mathbf{U}) - \rho u \mathbf{U}) + \partial_y (\mathbf{g}(\rho \mathbf{U}) - \rho v \mathbf{U}) + \partial_z (\mathbf{h}(\rho \mathbf{U}) - \rho w \mathbf{U}) = 0.$$

Pour conclure, il s'agit de voir en quoi le flux de ce dernier système est bien une fonction de  $\mathbf{U}$  uniquement. En considérant que le modèle prend en compte une loi sur la quantité de mouvement, alors  $\mathbf{u}$  est une composante de  $\mathbf{U}$ . Il reste à étudier le cas de  $\rho$ . Si l'on identifie la loi de conservation de la masse (1.2) comme une équation du système (1.4), alors la composante correspondante à la densité dans  $\mathbf{U}$  est égale à 1, ce qui ne permet pas de conclure. La manipulation nécessaire est plus subtile. En supposant le milieu *continu*, on peut dériver la fonction indicatrice du milieu, ce qui donne apparemment trivialement

$$(1.6) \quad \partial_t 1 = 0.$$

En introduisant le volume massique  $\tau$  défini par  $\tau \rho = 1$ , il suffit d'appliquer le passage (1.4)-(1.5) à  $\mathbf{U} = \tau$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{h} = 0$  pour trouver l'équation

$$(1.7) \quad \rho \partial_T \tau - \nabla_{\mathbf{x}} u = 0.$$

Ce type de manipulation apparaît dans les travaux de D. H. Wagner [71]. Cette expression montre que c'est la variable  $\tau$  qui doit être choisie comme composante de  $\mathbf{U}$  dans (1.5) pour traduire la conservation de la masse (et on l'appelle souvent équation de continuité). Ainsi  $\rho$ , qui est l'inverse de  $\tau$ , est fonction de  $\mathbf{U}$ . Ceci prouve que le flux de (1.5) est bien une fonction de  $\mathbf{U}$ . On en conclut qu'un système de lois de conservation en mécanique des milieux continus s'écrit en coordonnées semi-lagrangiennes sous la forme générale

$$(1.8) \quad \rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \partial_y \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \partial_z \mathbf{H}(\mathbf{U}) = 0,$$

dans laquelle on trouve l'équation (1.7) et une loi sur la quantité de mouvement. Pour finir, remarquons que cette forme n'est pas conservative à proprement parler, à cause de la densité en facteur de  $\partial_T$ . Dans la littérature on trouve souvent la notion de dérivée *massique*  $\partial_m \equiv \rho^{-1} \partial_x$  qui permet d'écrire le système sous forme conservative, à un changement de coordonnée d'espace près. Nous ne l'utilisons pas dans notre travail.

## 1.2 Structure mathématique dans le cas monodimensionnel

En 2001, B. Després [25] a mis en avant la *forme canonique* de certains systèmes de lois de conservation écrits en variable de Lagrange. L'étude est faite dans le cas monodimensionnel, et le formalisme est plus précisément semi-lagrangien, comme nous venons de le décrire. Cet article met en évidence la structure mathématique commune à beaucoup de systèmes conservatifs venant de la physique, tels que les équations d'Euler, la magnétohydrodynamique, certains modèles de plasma et d'élastoplasticité. Ces modèles sont qualifiés de *fluides*, vocable que nous utilisons à notre tour dans ce travail et que nous allons préciser.

Une particularité d'un modèle fluide réside dans la distinction possible entre les variables d'état, regroupées dans un vecteur d'état noté  $\mathbf{w}$ , et les variables cinétiques<sup>1</sup>, représentées par le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ . Cette distinction joue un rôle dans la notion d'invariance

---

<sup>1</sup>Notons bien que le fait de se placer dans le cas monodimensionnel ne réduit pas, dans le cas général, le vecteur vitesse à un seul champ scalaire : c'est seulement la dépendance en espace qui est monodimensionnelle.

galiléenne. Toutefois, parmi les variables conservatives d'un modèle fluide, une n'est ni une variable d'état ni une variable cinétique : c'est l'énergie totale, quantité scalaire notée  $e$  qui couple les deux types de variables précédemment définis. En physique on définit en effet l'énergie totale comme la somme de l'énergie interne  $\varepsilon$  (variable d'état) et de l'énergie cinétique :

$$(1.9) \quad e = \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2.$$

Ainsi, grâce aux remarques de la section précédente, l'équation d'évolution en coordonnées semi-lagrangiennes unidimensionnelles d'un modèle fluide s'écrit, en toute généralité

$$(1.10) \quad \begin{aligned} & - \rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, e), \\ & - \text{une composante de } \mathbf{w} \text{ est } \tau, \\ & - \rho \partial_T \tau - \partial_x u = 0. \end{aligned}$$

Les modèles fluides sur lesquels nous portons notre attention ont tous en commun quatre propriétés, regroupées dans la suite par la notation  $(\mathcal{P})$ , qui sont à la base de leur écriture canonique :

- ils possèdent une entropie, de flux nul en coordonnées lagrangiennes,
- $(\mathcal{P})$  – ils sont invariants par transformation galiléenne,
- ils sont réversibles pour les solutions régulières,
- toutes les variables conservatives  $\mathbf{U}$  doivent être autorisées.

La première propriété signifie qu'il existe une fonction scalaire de  $\mathbf{U}$ , notée  $\eta$ , strictement concave (c'est-à-dire  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{U}^2} < 0$  au sens des matrices définies négatives), vérifiant l'équation supplémentaire

$$(1.11) \quad \partial_T \eta = 0.$$

Dans le cas de solutions discontinues, l'égalité ci-dessus devient une inégalité à prendre au sens des distributions, c'est-à-dire que pour toute fonction positive  $\varphi$  à support compact,

$$(1.12) \quad \int_0^\infty \int_R \eta(\mathbf{U}) \partial_T \varphi dx dT \leq 0.$$

L'existence d'une entropie n'est pas assurée en toute généralité, mais en pratique elle s'avère vraie pour les systèmes venant de la physique.

La deuxième propriété de  $(\mathcal{P})$  s'applique au champ de la mécanique classique. Un changement de référentiel galiléen consiste à déplacer le référentiel initial par une translation uniforme à la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$ , en prenant comme temps initial  $\bar{T}$ . Les nouvelles coordonnées sont donc

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}T, \quad T' = T - \bar{T}.$$

La vitesse de la matière dans ce nouveau référentiel s'exprime par

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}},$$

alors que les variables d'état restent inchangées :

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}.$$

On peut montrer, comme c'est fait dans [25], que les opérateurs de dérivation semi-lagrangiens restent eux aussi inchangés :

$$\partial_{T'} = \partial_T, \quad \partial_{x'} = \partial_x.$$



Dans ces conditions, dire que le système (1.10) est invariant par transformation galiléenne signifie que  $\mathbf{U}' = (\mathbf{w}, \mathbf{u}', e')$  est solution dès lors que  $\mathbf{U}$  l'est, et ce pour tout couple  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{T})$ .

La troisième propriété de  $(\mathcal{P})$  se réfère à l'inversion de l'écoulement du temps : on regarde les solutions du système en remplaçant  $T$  par  $-T$  et  $\mathbf{u}$  par  $-\mathbf{u}$ . Un modèle est donc réversible pour les solutions régulières si, pour toute solution  $(\mathbf{w}, \mathbf{u}, e)$  de (1.10), alors  $(\mathbf{w}, -\mathbf{u}, e)$  est solution de

$$-\rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0.$$

La quatrième propriété écarte les systèmes possédant des contraintes supplémentaires sur  $\mathbf{U}$ , de type différentielles.

Nous avons là résumé des hypothèses physiques satisfaites par les modèles que nous considérerons tout au long de ce mémoire. Pour conclure le rappel du résultat [25] dans le cas monodimensionnel, il nous reste à introduire les variables intervenant dans la forme canonique du système. Il s'agit des variables dites *entropiques*. Pour cela considérons un système de la forme (1.10), de taille  $m$ . La stricte concavité de  $\eta$  par rapport à  $\mathbf{U}$  permet de définir la variable entropique

$$(1.13) \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}}.$$

En supposant que sa dernière composante de s'annule pas (ce qui est possible quitte à bien ordonner les composantes de  $\mathbf{U}$ ), on définit alors la variable  $\Psi \in \mathbb{R}^{m-1}$  par

$$(1.14) \quad \Psi = \frac{1}{V_m} (V_1, V_2, \dots, V_{m-1}).$$

On introduit au passage la température thermodynamique

$$\mathcal{T} = \frac{1}{V_m} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial e} \right)^{-1}.$$

Nous illustrerons au cours du mémoire cette manipulation abstraite par des exemples concrets. Retenons pour l'instant que la nouvelle variable  $\Psi$  est un vecteur fonction de  $\mathbf{U}$ , de taille  $m - 1$ . Le résultat de B. Després consiste à montrer que le flux  $\mathbf{F}$  est en fait une fonction de  $\Psi$ . Très exactement l'énoncé est le suivant.

**Théorème 1 (Després)** *Tous les systèmes de loi de conservation fluides en une dimension d'espace de la forme (1.10) satisfaisant  $(\mathcal{P})$  possèdent en coordonnées semi-lagrangiennes la structure*

$$(1.15) \quad \rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \left( \begin{array}{c} \mathbb{M} \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M} \Psi \rangle \end{array} \right) = \mathbf{0},$$

où  $\mathbb{M}$  est une matrice constante symétrique.

Le résultat précise en outre que  $\mathbb{M}$  est de la forme

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^t & 0 \end{pmatrix},$$

où  $\mathbb{B}$  est un bloc rectangulaire.

La force de ce résultat est de faire apparaître une structure commune à de nombreux systèmes venant de la physique. En particulier cette forme canonique montre que le flux

$\mathbf{F}$ , généralement non-linéaire en fonction de  $\mathbf{U}$ , ne dépend en fait que linéairement de  $\Psi$  pour les variables d'état et cinétiques, et quadratiquement pour l'énergie totale.

En guise d'illustration, prenons l'exemple de la dynamique des gaz en coordonnées semi-lagrangiennes, qui sera repris également dans la section suivante. Les inconnues sont  $\mathbf{U} = (\tau, u, e)$  et le système s'écrit

$$\rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \begin{pmatrix} -u \\ p \\ pu \end{pmatrix} = 0.$$

On reconnaît bien la forme canonique avec  $\Psi = (p, -u)$  et  $\mathbb{B} \equiv 1$ .

### 1.3 Généralisation au cas multidimensionnel

Il est raisonnable de penser que la structure mathématique (1.15), mise en avant grâce à des critères uniquement physiques, doit pouvoir se généraliser aux dimensions supérieures d'espace. Des manipulations d'écriture sur des problèmes concrets bidimensionnels, comme les équations d'Euler, confortent cette conjecture. Par contre chacun pourra se convaincre que les techniques employées dans [25] sont fortement dépendantes de la dimension un d'espace, et se généralisent difficilement au cas multidimensionnel. Après plusieurs tentatives vaines de démonstration, il nous est apparu que c'était la formulation du problème qui était délicate : une fois que l'on a trouvé le bon angle d'attaque, les techniques de preuve deviennent très élémentaires.

Commençons par résumer la section précédente. Le théorème (1) dit exactement que si un système de lois de conservation (1.10) vérifie ( $\mathcal{P}$ ), alors il existe une matrice constante symétrique  $\mathbb{M}$  tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}\Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}\Psi \rangle \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant un système de lois de conservation en trois dimensions d'espace

$$(1.16) \quad \rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \partial_y \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \partial_z \mathbf{H}(\mathbf{U}) = 0,$$

qui est une généralisation de (1.10) dans le sens où l'on a toujours  $\mathbf{U} = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, e)$ , une composante de  $\mathbf{w}$  est  $\tau$  et l'équation de conservation de la masse incluse dans (1.16) est (1.7). Pour étendre la structure (1.15) à ce système, nous allons procéder en deux temps.

- Dans un premier temps, considérons des solutions unidimensionnelles de ce système, dans successivement les trois directions de l'espace. Commençons par exemple par étudier une solution  $\mathbf{U}$  invariante selon les axes  $y$  et  $z$ . Alors le système (1.16) dégénère vers (1.10). Si de plus la solution vérifie ( $\mathcal{P}$ ), alors d'après le théorème 1 il existe une matrice constante symétrique, que nous notons  $\mathbb{M}^x$ , telle que

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^x \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^x \Psi \rangle \end{pmatrix}.$$

En considérant maintenant, dans une seconde situation, une solution unidimensionnelle selon  $y$ , on déduit qu'il existe une matrice constante symétrique  $\mathbb{M}^y$  telle que

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^y \Psi \rangle \end{pmatrix}.$$

En appliquant enfin cette procédure à la direction  $z$ , il existe une matrice constante symétrique  $\mathbb{M}^z$  telle que

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^z \Psi \rangle \end{pmatrix}.$$

Il faut bien prendre garde au fait qu'*a priori* ces trois égalités ne sont pas satisfaites simultanément. Elles permettent simplement d'introduire les matrices constantes  $\mathbb{M}^x$ ,  $\mathbb{M}^y$  et  $\mathbb{M}^z$ .

- Dans un second temps, replaçons-nous dans le cadre général, avec dépendance en espace vraiment tridimensionnelle. On peut bien introduire trois fonctions  $\tilde{\mathbf{F}}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$  de  $\mathbf{U}$  telles que

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^x \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^x \Psi \rangle \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}),$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^y \Psi \rangle \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{U}),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^z \Psi \rangle \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{U}).$$

Considérons une fonction  $\bar{\mathbf{U}}$  constante en espace et en temps : c'est une solution stationnaire et homogène de (1.16), qui vérifie  $(\mathcal{P})$ . On note  $\bar{\Psi}$  la variable entropique associée. Cette solution  $\bar{\mathbf{U}}$  ne dépend en particulier ni de  $y$  ni de  $z$  ; d'après ce que nous avons dit ci-dessus, on a donc

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}^x \bar{\Psi} \\ -\frac{1}{2} \langle \bar{\Psi}, \mathbb{M}^x \bar{\Psi} \rangle \end{pmatrix},$$

ce qui implique

$$\tilde{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}) = 0.$$

Cette égalité est vraie pour tout  $\bar{\mathbf{U}}$  dans  $\mathbb{R}^m$  et signifie donc que  $\tilde{\mathbf{F}}$  est identiquement nulle. En procédant de la même façon selon les autres axes, on peut conclure que  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$  sont également identiquement nulles.

Cette seconde étape conclut la preuve de l'extension multidimensionnelle souhaitée. Pour résumer, on vient de prouver le résultat suivant.

**Théorème 2** *Tous les systèmes de lois de conservation fluides multidimensionnels (1.16) satisfaisant aux propriétés physiques  $(\mathcal{P})$  possèdent en coordonnées semi-lagrangiennes la structure mathématique commune*

$$(1.17) \quad \rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \begin{pmatrix} \mathbb{M}^x \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^x \Psi \rangle \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \mathbb{M}^y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^y \Psi \rangle \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \mathbb{M}^z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^z \Psi \rangle \end{pmatrix} = 0,$$

où  $\mathbb{M}^x$ ,  $\mathbb{M}^y$  et  $\mathbb{M}^z$  sont des matrices constantes symétriques.

Illustrons à nouveau ce résultat avec la dynamique des gaz, en deux dimensions. L'inconnue est  $\mathbf{U} = (\tau, u, v, e)$  et le système s'écrit

$$\rho \partial_T \mathbf{U} + \partial_x \begin{pmatrix} -u \\ p \\ 0 \\ pu \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ p \\ pv \end{pmatrix} = 0.$$

La forme canonique se retrouve avec  $\Psi = (p, -u, -v)$  et

$$\mathbb{M}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.4 Changement de coordonnées dans les systèmes

Le formalisme de notre étude est purement lagrangien : c'est donc dans ce jeu de coordonnées que nous voulons présenter les résultats de structure mis en avant dans les sections précédentes. Cela peut-être vu comme un *changement de coordonnées* particulier dans un systèmes de lois de conservation. Toutefois effectuer cette manipulation dans un cadre plus général a bien des utilités, ne serait-ce que parce qu'il est souvent plus facile d'écrire des lois physiques dans un repère privilégié, puis de transformer celles-ci dans le repère souhaité. C'est par exemple la technique que nous utiliserons dans le chapitre 6 pour écrire les équations de la dynamique des gaz en coordonnées cylindriques. Dans le même ordre d'idée, on comprend qu'il n'est pas très intuitif, dans un formalisme lagrangien, d'explicitier les forces de pression qui s'exercent sur un volume de fluide à l'instant courant en fonction de la position du volume à l'instant initial : dans ce cas le formalisme eulérien est le plus simple pour traduire mathématiquement les lois physiques. Enfin, la structure mathématique d'un système dans de nouvelles coordonnées n'est souvent pas liée à celle initiale, mais résulte de dérivations plus ou moins ingénieuses. Tout ceci motive l'exposé des règles générales de changement de coordonnées dans un système de lois de conservations.

Notons  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  deux jeux de coordonnées dans  $\mathbb{R}^d$ , en supposant que  $\mathbf{x}_2$  soit défini à partir de  $\mathbf{x}_1$  par un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \phi : \mathbf{x}_1 &\longmapsto \phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de  $\phi$ , notée  $\mathbb{J}$ , est donc inversible :

$$\mathbb{J} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1} \in \mathcal{GL}_d(\mathbb{R}).$$

On suppose également que cette transformation ne change pas l'orientation de l'espace :  $J = \det \mathbb{J} > 0$ .

Dans un système de coordonnées donné - choisissons par exemple  $\mathbf{x}_2$  - un système de lois de conservations de taille  $m$  est donné par un tenseur  $\mathbb{T}$  d'ordre 2 dans  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \\ \mathbb{T} : \mathbf{x}_2 &\longmapsto \mathbb{T}(\mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

et s'écrit sous la forme divergente<sup>2</sup>

$$(1.18) \quad \nabla_{\mathbf{x}_2} \cdot \mathbb{T} = \mathbf{s}.$$

Le terme de droite  $\mathbf{s}$  modélise un éventuel terme source.

La propriété intéressante est que ce système de lois de conservation s'écrit encore sous une forme divergente en les coordonnées  $\mathbf{x}_1$ . Le lemme suivant explicite son écriture.

---

<sup>2</sup>La divergence d'un tenseur est un vecteur dont chaque composante est la divergence des vecteur ligne du tenseur.

**Lemme 1 (Changement de coordonnées)** *Le système de lois de conservation (1.18) formulé en coordonnées  $\mathbf{x}_2$  s'écrit en coordonnées  $\mathbf{x}_1$  sous la forme divergente*

$$(1.19) \quad \nabla_{\mathbf{x}_1} \cdot (\mathbb{T}\tilde{\mathbb{J}}) = J\mathbf{s},$$

où  $J$  est le déterminant de la matrice jacobienne de  $\phi$  et  $\tilde{\mathbb{J}}$  la comatrice jacobienne.

Bien sûr dans l'équation (1.19),  $\mathbb{T}$  et  $\mathbf{s}$  doivent être pris comme des fonctions de  $\mathbf{x}_1$ , mais nous n'écrivons pas la composition avec  $\phi$  pour éviter des notations trop lourdes.

*Preuve.* – On rappelle la preuve, que l'on trouve par exemple dans [22]. La formulation faible de (1.18) est

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{T} \nabla_{\mathbf{x}_2} \phi \, d\mathbf{x}_2 = 0,$$

pour toute fonction test  $\phi$ . On fait alors un changement de variable dans l'intégrale, en se rappelant la formule des dérivées composées  $\nabla_{\mathbf{x}_1} \phi = \mathbb{J}^T \nabla_{\mathbf{x}_2} \phi$ , soit

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{T}(\mathbb{J}^{-1})^T \nabla_{\mathbf{x}_1} \phi) |J| \, d\mathbf{x}_1 = 0,$$

ce qui est la forme faible de (1.19) avec la définition d'une comatrice :

$$(1.20) \quad \tilde{\mathbb{J}}^T = J\mathbb{J}^{-1}.$$

□

Ceci nous fait découvrir dès à présent qu'un changement de coordonnées dans un système ajoute nécessairement de nouvelles inconnues de type *géométriques*, celles de la comatrice jacobienne de la transformation. Nous verrons ultérieurement que, lors du passage eulerien-lagrangien, ces inconnues supplémentaires sont elles aussi solution d'un système de lois de conservation, dit *géométrique*.

Avant d'exploiter ces règles de calcul, concluons cette section par une première conséquence qui s'avérera très utile dans les sections suivantes.

**Lemme 2 (Identité de Piola généralisée)** *Lorsque l'on applique la procédure ci-dessus au tenseur identité de  $\mathbb{R}^d$ , la loi de conservation triviale  $\nabla_{\mathbf{x}_2} \cdot \mathbb{I}_d = 0$  devient*

$$(1.21) \quad \nabla_{\mathbf{x}_1} \cdot \tilde{\mathbb{J}} = 0.$$

Cette égalité est une généralisation de l'identité de Piola que l'on rencontre en mécanique des milieux continus : dans ce cas  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}$  sont les coordonnées liées au solide non déformé (coordonnées lagrangiennes) et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$  celles en configuration déformée (coordonnées eulériennes). Nous notons alors dans ce cas précis la matrice jacobienne  $\mathbb{J}$  par

$$(1.22) \quad \mathbb{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}},$$

c'est le *tenseur gradient de transformation*. Sous ces notations, nous aurons l'occasion de voir le rôle fondamental joué par l'identité de Piola

$$(1.23) \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbb{F}} = 0.$$

## 1.5 Structure mathématique en coordonnées lagrangiennes

L'objectif est d'étendre la structure (1.17) écrite en coordonnées semi-lagrangiennes aux coordonnées lagrangiennes, grâce au lemme 1. La coordonnée temporelle  $T$  ne joue aucun rôle dans cette manipulation ; la transformation à appliquer est uniquement spatiale :

$$(1.24) \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \phi : \mathbf{X} &\longmapsto \mathbf{x} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{x}$  est la position d'une particule qui était en  $\mathbf{X}$  à l'instant initial, telle que nous l'avons définie dans l'introduction :

$$(1.25) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}), \\ \mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}. \end{cases}$$

La matrice jacobienne de transformation se ramène donc au tenseur gradient de transformation

$$\mathbb{J} = \mathbb{F}.$$

Nous notons encore  $J$  le déterminant de cette matrice :

$$(1.26) \quad J = \det(\mathbb{F}).$$

Commençons par présenter un résultat sur ce déterminant.

**Lemme 3** *L'équation d'évolution de  $J$  est donnée par la formule dite d'Euler*

$$(1.27) \quad \partial_T J = J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}.$$

On en déduit l'écriture complètement lagrangienne de la loi de conservation de la masse

$$(1.28) \quad \partial_T(\rho J) = 0.$$

La preuve de (1.27) est un calcul classique de dérivée d'un déterminant, que nous ne présentons pas. Celle de (1.28) s'ensuit facilement grâce à l'équation de conservation de la masse (1.7) déjà connue.

Le lemme 1 permet alors de déduire le résultat suivant.

**Théorème 3** *Tous les systèmes de lois de conservation fluides satisfaisant aux propriétés physiques ( $\mathcal{P}$ ) s'écrivent en coordonnées lagrangiennes sous la forme canonique*

$$(1.29) \quad \rho^0 \partial_T(\mathbf{U}) + \partial_X \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^X \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^X \Psi \rangle \end{array} \right) + \partial_Y \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Y \Psi \rangle \end{array} \right) \\ + \partial_Z \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Z \Psi \rangle \end{array} \right) = \mathbf{0},$$

où  $\mathbb{M}^X$ ,  $\mathbb{M}^Y$  et  $\mathbb{M}^Z$  sont des matrices symétriques. Ces matrices ne sont pas constantes, mais satisfont la contrainte de divergence nulle

$$(1.30) \quad \partial_X \mathbb{M}^X + \partial_Y \mathbb{M}^Y + \partial_Z \mathbb{M}^Z = \mathbb{O}.$$

La grandeur  $\rho^0$  représente la densité à l'instant initial :

$$(1.31) \quad \rho^0 = \rho|_{T=0}.$$

Nous remarquons que cette forme canonique en coordonnées lagrangiennes est formellement très proche de celle exhibée à la section 1.3. Ce sont les matrices de flux qui sont différentes.

*Preuve.* – Il s’agit uniquement d’un calcul. Pour plus de commodité dans les manipulations, écrivons (1.17) avec la notation indicielle

$$\sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \mathbf{F}^{x_i} = -\rho \partial_T \mathbf{U}.$$

Dans notre procédure de changement de coordonnées, le terme de droite est bien assimilable à un terme source car il ne contient pas d’opérateur différentiel en espace. La formule (1.19) implique alors que ce système s’écrit en coordonnées lagrangiennes sous la forme

$$\sum_{i=1}^3 \partial_{X_i} \mathbf{F}^{X_i} = -J \rho \partial_T(\mathbf{U}),$$

où les flux sont calculés par

$$\mathbf{F}^{X_i} = \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbb{F}}_{ji} \mathbf{F}^{x_j}.$$

Comme les flux  $\mathbf{F}^{x_j}$  sont linéaires par rapport aux matrices  $\mathbb{M}^{x_j}$ , on retrouve bien la forme (1.29) avec les matrices  $\mathbb{M}^{X_i}$  égales à

$$(1.32) \quad \mathbb{M}^{X_i} = \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbb{F}}_{ji} \mathbb{M}^{x_j}.$$

Par suite, la symétrie des  $\mathbb{M}^{X_i}$  résulte de celle des  $\mathbb{M}^{x_i}$ . La contrainte de divergence nulle quant à elle, est une conséquence de l’identité de Piola (lemme 2) ; en effet on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \partial_{X_i} \mathbb{M}^{X_i} &= \sum_{i=1}^3 \partial_{X_i} \left( \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbb{F}}_{ji} \mathbb{M}^{x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \partial_{X_i} \tilde{\mathbb{F}}_{ji} \right) \mathbb{M}^{x_j} \\ &= \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \partial_{X_i} \tilde{\mathbb{F}}_{ji} \right) \mathbb{M}^{x_j} \\ &= \mathbb{O}. \end{aligned}$$

Enfin le lemme 3 permet de conclure quant au terme  $\rho J$  : c’est une constante en temps, égale à  $\rho^0$ .  $\square$

Au passage, l’équation (1.32) fournit une méthode concrète pour déterminer les matrices de flux *lagrangiennes* à partir de leurs primitives *semi-lagrangiennes* et du tenseur gradient de transformation.

La structure (1.29) est fondamentale dans notre travail, et nous l’invoquerons à maintes reprises (symétrisation, schémas numériques, formulation axisymétrique, ...). Non seulement elle apporte un formalisme canonique à des systèmes venant de la physique, mais encore elle structure le couplage entre les grandeurs physiques ( $\mathbf{U}, \mathbf{\Psi}$ ) et les déformations géométriques ( $\mathbb{M}^X, \mathbb{M}^Y, \mathbb{M}^Z$ ). Des exemples concrets sont donnés dans les pages suivantes.

## 1.6 Fermeture des systèmes de lois de conservation lagrangiens

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les matrices de flux  $\mathbb{M}^{X_i}$  sont de nouvelles inconnues du système de lois de conservation (1.29). On peut même préciser, par exemple grâce à la preuve du théorème 3, que leurs coefficients sont des fonctions polynomiales en ceux de  $\mathbb{F}$ . Jusqu'à présent, nous avons toujours utilisé la définition explicite de ce tenseur  $\mathbb{F}$ , qui s'écrit comme le gradient de  $\mathbf{x}$  par rapport à  $\mathbf{X}$  à  $T$  fixé. C'est d'après cette définition que l'on a pu déduire, *via* l'identité de Piola, la contrainte différentielle (1.30). Pour bien insister sur ce point, notons que l'identité de Piola est équivalente à la forme rotationnelle

$$(1.33) \quad \nabla_{\mathbf{X}} \wedge \mathbb{F} = \mathbb{O},$$

qui est triviale lorsqu'on se souvient que les colonnes de  $\mathbb{F}$  sont des gradients. Aussi cette contrainte apparaît-elle, pour l'instant, comme une simple conséquence algébrique du théorème de Schwartz (permutation des dérivés croisés de  $\mathbf{x}$  par rapport à  $\mathbf{X}$ ).

Or en réalité  $\mathbf{x}$  n'est pas donné par le système (1.29), si bien que l'on n'est pas assuré de conserver cette contrainte en ne considérant que le système. Il est donc nécessaire d'une part de fermer le système composé de l'inconnue *physique*  $\mathbf{U}$  et de l'inconnue *géométrique*  $\mathbb{F}$ , et d'autre part de vérifier, sans la précédente algèbre différentielle, la contrainte (1.30).

A cette fin, une possibilité est d'écrire une loi d'évolution sur  $\mathbb{F}$ , comme l'ont fait [45]. Compte-tenu de la définition de ce tenseur, on a

$$\partial_T \mathbb{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u},$$

où l'on rappelle que  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse, composante du vecteur inconnu  $\mathbf{U}$ . Désormais, le système d'inconnue  $(\mathbf{U}, \mathbb{F}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est donc

$$(1.34) \quad \rho^0 \partial_T(\mathbf{U}) + \partial_X \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^X \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^X \Psi \rangle \end{array} \right) + \partial_Y \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Y \Psi \rangle \end{array} \right) \\ + \partial_Z \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Z \Psi \rangle \end{array} \right) = 0,$$

$$(1.35) \quad \partial_T \mathbb{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}.$$

C'est bien un système fermé.

**Théorème 4** *La contrainte différentielle (1.30) est une contrainte involutive du système (1.34)-(1.35) : si elle est vérifiée à l'instant initial, alors le système la préserve au cours du temps.*

Remarquons d'abord qu'elle est effectivement vraie à l'instant initial, pour lequel  $\tilde{\mathbb{F}}|_{T=0} = \mathbb{F}|_{T=0} = \mathbb{I}_d$ .

*Preuve.* – Pour démontrer rapidement ce résultat, on peut simplement prendre le rotationnel de l'équation (1.35), ce qui donne

$$\partial_T (\nabla_{\mathbf{X}} \wedge \mathbb{F}) = 0.$$

Comme on l'a fait remarqué,  $\nabla_{\mathbf{X}} \wedge \mathbb{F}$  est nul à l'instant initial et donc l'équation (1.33) est vraie tout le temps. Cette égalité est analogue, une fois développée, à celle de Piola, qui permet d'assurer la contrainte différentielle.  $\square$



Nous pouvons même aller un peu plus loin, en montrant en quoi cette contrainte différentielle est intrinsèque aux systèmes de la forme (1.34). Pour mettre cela en évidence, calculons le flux d'entropie associé au système :

$$\begin{aligned}
\rho^0 \mathcal{T} \partial_T \eta &= \left\langle \mathcal{T} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}}, \rho^0 \partial_T \mathbf{U} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \Psi \\ 1 \end{pmatrix}, \rho^0 \partial_T \mathbf{U} \right\rangle \\
&= - \sum_{i=1}^3 \langle \Psi, \partial_{X_i} (\mathbb{M}^{X_i} \Psi) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_{X_i} \langle \Psi, \mathbb{M}^{X_i} \Psi \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \left\langle \Psi, \left( \sum_{i=1}^3 \partial_{X_i} \mathbb{M}^{X_i} \right) \Psi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Notons que l'on a utilisé la symétrie des matrices  $\mathbb{M}^{X_i}$  pour écrire la dernière ligne.

Ainsi on vient de montrer que

**Théorème 5** *Tout système de lois de conservation de la forme (1.34) possède un flux d'entropie nul dès que les matrices de flux vérifient la contrainte différentielle (1.30).*

Par ce résultat nous montrons que cette contrainte ne traduit pas tant une identité algébrique triviale qu'une propriété physique intrinsèque à la classe de systèmes étudiés. On serait tenté de chercher une parfaite équivalence entre les deux propriétés, c'est-à-dire de penser que si le système est à flux d'entropie nul, alors la contrainte différentielle est satisfaite ; pour cela il faudrait que l'égalité

$$\rho^0 \mathcal{T} \partial_T \eta = 0 = -\frac{1}{2} \left\langle \Psi, \left( \sum_{i=1}^3 \partial_{X_i} \mathbb{M}^{X_i} \right) \Psi \right\rangle$$

soit vraie pour tout  $\Psi$ , ce qui *a priori* n'est pas le cas puisqu'on l'a écrit pour des solutions physiques du système. *A contrario*, on sait que les systèmes de lois de conservation admettent des solutions *chocs* discontinues, pour lesquelles le flux d'entropie n'est plus nul : ceci coïncide avec le fait que la position des particules dans le choc ne dépend plus de façon régulière de la position initiale, et donc la contrainte différentielle n'est pas satisfaite (le théorème de Schwartz sur les dérivées croisées n'est plus applicable).

Dans le chapitre suivant, nous verrons le rôle joué par cette contrainte différentielle dans la nature mathématique du système.

## 1.7 Discussion sur les systèmes conservatifs avec contraintes involutives

Jusqu'à présent nous avons implicitement étudié des systèmes de lois de conservation qui ne présentent pas, dans leur formulation eulérienne, de contraintes supplémentaires sur les inconnues. Cependant on trouve dans la physique un autre type de systèmes, qui possèdent des lois dites *involutives*, c'est-à-dire qui assurent certaines contraintes différentielles supplémentaires sur les inconnues, dès lors que celles-ci sont satisfaites à l'instant initial. Un modèle type de ce genre de système est celui de la magnétohydrodynamique idéale, pour lequel le champ magnétique doit rester à divergence nulle.

Nous n'avons pas réussi à appliquer à ce type de systèmes la preuve du théorème 2, mais nous avons constaté que le résultat est vrai pour certains d'entre eux. La difficulté essentielle consiste à éliminer ces contraintes pour entrer dans le cadre d'un système de lois de conservation classique.

Nous présentons ci-dessous deux exemples, assez complexe dans leur écriture, sans démontrer le passage en structure canonique ; cette manipulation est en revanche explicitée dans le chapitre suivant pour la dynamique des gaz bidimensionnelle, dont l'écriture est plus légère.

### 1.7.1 Magnétohydrodynamique idéale tridimensionnelle

Le système de la magnétohydrodynamique idéale décrit un fluide conducteur en présence d'un champ magnétique [50]. Il représente le couplage entre les équations de la dynamique des gaz et celles de Maxwell. En coordonnées eulériennes (tridimensionnelles) ce système s'écrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{B} \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho e \end{pmatrix} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{B} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p^* \mathbb{I}_3 - \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ (\rho e + p^*) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \frac{\mathbf{B}}{\mu} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

où  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{B}$  le champ magnétique,  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse,  $e$  l'énergie totale définie par

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2\rho\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B},$$

l'énergie interne étant notée  $\varepsilon$ . La pression totale  $p^*$  est reliée à la pression thermodynamique  $p$  par

$$p^* = p + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}.$$

Une loi thermodynamique reliant  $p$  à  $\varepsilon$  et  $\rho$  (par exemple) vient fermer le système. Enfin  $\mu$  représente la perméabilité magnétique du vide.

Ce système possède les trois premières propriétés de  $(\mathcal{P})$ , c'est-à-dire flux d'entropie nul en variable de Lagrange, invariance galiléenne et réversibilité des solutions régulières. La dernière propriété n'est quant à elle pas vérifiée car une composante de la solution (le champ magnétique) doit rester à divergence nulle. Toutefois la structure du théorème 3 est retrouvée et le système ci-dessus s'écrit en coordonnées lagrangiennes sous la forme

$$\rho^0 \partial_T \mathbf{U} + \partial_X \begin{pmatrix} \mathbb{M}^X \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^X \Psi \rangle \end{pmatrix} + \partial_Y \begin{pmatrix} \mathbb{M}^Y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Y \Psi \rangle \end{pmatrix} + \partial_Z \begin{pmatrix} \mathbb{M}^Z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Z \Psi \rangle \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial_X \mathbb{M}^X + \partial_Y \mathbb{M}^Y + \partial_Z \mathbb{M}^Z = \mathbb{O},$$

avec

$$\mathbf{U} = (\tau, \tau \mathbf{B}, \mathbf{u}, e), \quad \Psi = (p^*, -\frac{1}{\mu} \mathbf{B}, -\mathbf{u}),$$

et les matrices de flux suivantes, qui sont symétriques mais non constantes

$$\mathbb{M}^{X_i} = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{c}_i & (\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}_i) \mathbb{I}_{3 \times 3} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad X_i = (X, Y, Z),$$

où  $c_i$  est la colonne  $i$  de la comatrice du tenseur gradient  $\mathbb{F}$  (1.22). Une version simplifiée de ce système en coordonnées semi-lagrangiennes  $(T, x, y, z)$  s'obtient en considérant  $\mathbb{F}$  à l'instant initial (les  $c_i$  deviennent alors simplement les colonnes de la matrice identité). Il est intéressant de noter que la condition de divergence nulle sur les matrices de flux inclut à la fois l'identité de Piola géométrique et la divergence nulle du champ magnétique.

### 1.7.2 Système de Born-Infeld Augmenté

Le système Born-Infeld est une version non linéaire des équations de Maxwell [13]. Y. Brenier a montré dans [14] qu'il pouvait s'écrire comme un système de loi de conservation hyperbolique lorsqu'on lui adjoint une équation sur la densité d'énergie et sur le vecteur de Poynting (d'où la dénomination *d'augmenté*). En coordonnées eulériennes il s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (h\mathbf{v}) = 0, \\ \partial_t h\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}{h}) - \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{h} = 0, \\ \partial_t \mathbf{B} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \frac{\mathbf{D}}{h} = 0, \\ \partial_t \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{D}) - \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \frac{\mathbf{B}}{h} = 0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{D} = 0. \end{cases}$$

Ce système partage formellement beaucoup de points commun avec des modèles hydrodynamiques : Y. Brenier présente  $h$ , qui est l'énergie électromagnétique, comme la densité qu'aurait un fluide virtuel, et  $h\mathbf{v}$ , qui est le vecteur de Poynting  $\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}$ , comme sa quantité de mouvement. Les vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  peuvent être vus comme les extensions non-linéaires des champs magnétique et électrique des équations de Maxwell linéaires.

L'écriture de ce système est déjà complexe en coordonnées eulériennes, aussi mettons-nous en avant sa structure canonique en coordonnées semi-lagrangiennes, ce qui évite l'introduction des inconnues géométriques. En coordonnées  $(T, x, y, z)$  le système ci-dessus s'écrit sous la forme

$$h \partial_T \mathbf{U} + \partial_x (\mathbb{M}^x \mathbf{U}) + \partial_y (\mathbb{M}^y \mathbf{U}) + \partial_z (\mathbb{M}^z \mathbf{U}) = 0, \quad \mathbf{U} = \left( \frac{1}{h}, \mathbf{v}, \frac{\mathbf{B}}{h}, \frac{\mathbf{D}}{h} \right),$$



qui est précisément l'expression démontrée dans [14] pour prouver la symétrisation du système.



## Chapitre 2

# Symétrisation de l'hydrodynamique lagrangienne multidimensionnelle

---

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en avant de façon abstraite la structure mathématique d'un système de lois de conservation dit *fluide*. Maintenant nous appliquons cette démarche au cas concret qui nous intéresse : les équations d'Euler (appelées aussi système de la dynamique des gaz).

Ce système modélise l'évolution d'un milieu continu, compressible, parfait (*i.e.* de viscosité négligeable). Il s'agit donc bien d'un modèle, constituant le noyau de descriptions plus fines. Ce système se compose de trois blocs de lois de conservation, qui traduisent des principes fondamentaux en physique : d'abord la loi scalaire de conservation de la matière, puis la loi vectorielle de conservation de la quantité de mouvement (troisième loi de Newton) et enfin la loi scalaire de conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique).

La propriété frappante est que le système obtenu n'est pas *fortement hyperbolique*, contrairement à sa formulation eulérienne. Se pose alors la question des conséquences de cette perte d'hyperbolicité. Pour aborder ce problème, nous rappelons dès la première section quelques résultats classiques sur l'hyperbolicité, la symétrisation et le caractère bien posé des systèmes. La section suivante présente alors une première formulation lagrangienne des équations d'Euler, exhibée et exploitée depuis 1990 par d'autres auteurs. Dans la troisième section, nous écrivons le système sous sa forme *canonique*, au sens introduit dans le premier chapitre. Nous savons déjà que cette nouvelle formulation met en évidence la structure physique du système, et nous montrons par la suite en quoi elle munit les équations d'Euler lagrangiennes d'une nature mathématique originale. Dans la dernière section nous proposons une classification des systèmes en fonction de leur hyperbolicité.

---

## 2.1 La notion d'hyperbolicité pour les systèmes multidimensionnels

Nous nous intéressons à la stabilité des solutions de systèmes non linéaires en plusieurs dimensions d'espace. Au fil des années, il semble que la notion d'*hyperbolicité* soit devenue prépondérante, alors même que sa définition peut différer légèrement d'un auteur à l'autre (voir par exemple [34], [63], [46]). En fait la question originelle dans les travaux de Kreiss [48]-[49] est de savoir si le problème de Cauchy associé au système est bien posé, le cadre naturel étant  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , voire plus généralement un espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^d)$ . Les techniques employées dans ce cadre consistent alors à utiliser la transformation de Fourier en espace et étudier un système différentiel en temps.

Nous rappelons d'abord quelques définitions et résultats dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants. Puis nous passerons au cas des systèmes non-linéaires.

**Définition 1** Soit  $(\mathbb{A}_i)_{1 \leq i \leq d}$  des matrices constantes de  $M_n(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$  défini sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Le problème de Cauchy

$$(2.1) \quad \partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=1}^d \mathbb{A}_i \partial_{x_i} \mathbf{U} = 0,$$

$$(2.2) \quad \mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}^0(\mathbf{x})$$

est dit bien posé dans  $L^2$  si pour tout  $\mathbf{U}^0$  dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$  il existe une unique solution  $\mathbf{U} \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^d))$  qui satisfait une estimation de la forme

$$(2.3) \quad \forall t > 0, \quad \|\mathbf{U}(t)\|_{L^2} \leq C(t) \|\mathbf{U}^0\|_{H^s},$$

où  $C$  est une fonction positive de  $t$  dont on ne précise pas a priori le comportement. Plus précisément

- si  $s = 0$  on dit que le problème est fortement bien posé,
- si on ne peut obtenir l'estimation (2.3) qu'avec  $s > 0$ , on dit que le problème est faiblement bien posé.

Dans le cas *fortement bien posé* il n'y a donc pas de perte de régularité par rapport à la condition initiale.

**Définition 2** On dit que le système linéaire (2.1) est hyperbolique si et seulement si pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ , les valeurs propres de la matrice symbole  $\mathbb{A}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^d k_i \mathbb{A}_i$  sont réelles. Plus précisément on dit qu'il est fortement hyperbolique si  $\mathbb{A}(\mathbf{k})$  est diagonalisable pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ . Sinon il n'est que faiblement hyperbolique.

Dans cette définition il est important de voir que les propriétés doivent être vérifiées pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ . Ainsi l'hyperbolicité forte est équivalente au fait que  $\exp(-i\mathbb{A}(\mathbf{k}))$  soit bornée pour tout  $\mathbf{k}$ , ce qui est une autre définition possible de l'hyperbolicité [63].

Une autre condition suffisante pour assurer l'hyperbolicité forte est de supposer les valeurs propres continues en fonction de  $\mathbf{k}$  et ordonnées, ce qui rend le système *strictement hyperbolique* :



**Définition 3** On dit que le système linéaire (2.1) est strictement hyperbolique si  $\mathbb{A}(\mathbf{k})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , de valeurs propres  $\mathbf{k} \rightarrow \lambda_i(\mathbf{k})$  continues sur  $\mathbb{R}^d - \{0\}$  avec

$$\lambda_1(\mathbf{k}) < \lambda_2(\mathbf{k}) < \dots < \lambda_r(\mathbf{k}).$$

La dernière notion que nous rappelons est celle de système *hyperbolique symétrisable*, sur laquelle nous articulerons plus loin notre discours dans le cas de l'hydrodynamique lagrangienne.

**Définition 4** On dit que le système (2.1) est hyperbolique symétrisable s'il existe une matrice  $\mathbb{S}$  symétrique définie positive telle que chaque matrice  $\mathbb{S}\mathbb{A}_i$  soit symétrique.

Dans le cas linéaire, les résultats théoriques autour de l'étude du problème de Cauchy (2.1-2.2) peuvent alors se résumer par le schéma suivant.

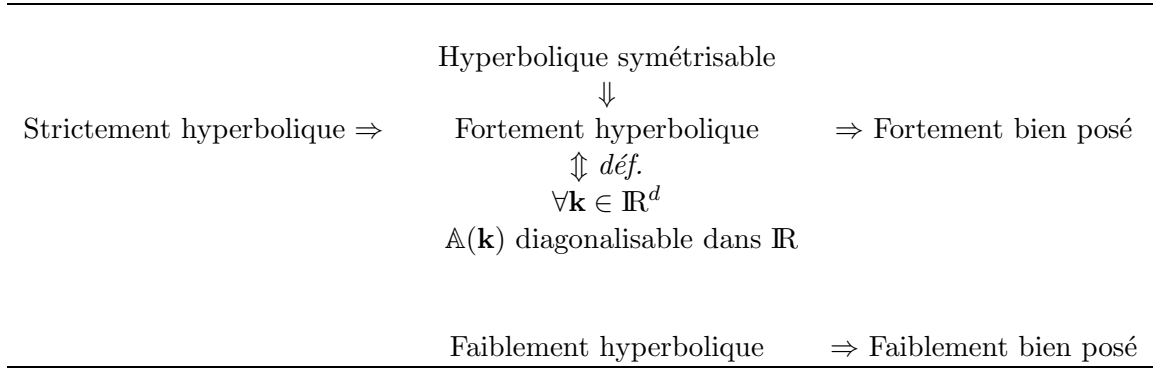


FIG. 2.1 – Résultats connus sur les systèmes linéaires

Dans le cas non-linéaire, un système de lois de conservation s'écrit soit sous sa forme conservative

$$(2.4) \quad \partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{U}) = 0,$$

soit, de façon équivalente pour une solution régulière, sous la forme quasi-linéaire

$$(2.5) \quad \partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=1}^d \mathbb{A}_i(\mathbf{U}) \partial_{x_i} \mathbf{U} = 0,$$

où les matrices  $\mathbb{A}_i(\mathbf{U})$  sont les gradients de  $\mathbf{f}_i$  par rapport à  $\mathbf{U}$ . Cette dernière écriture permet d'introduire à nouveau, par analogie avec le cas précédent, la notion d'hyperbolicité :

**Définition 5** Le système quasi-linéaire (2.5) est dit hyperbolique si pour tout  $\bar{\mathbf{U}}$  le système linéaire

$$\partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=1}^d \mathbb{A}_i(\bar{\mathbf{U}}) \partial_{x_i} \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

est hyperbolique.

Le caractère hyperbolique d'un système quasi-linéaire a en réalité une portée très limitée, car il ne suffit pas à impliquer un résultat de stabilité. La notion la plus puissante dans l'étude des systèmes de lois de conservation (et particulièrement ceux d'origine physique) est l'entropie :

**Définition 6** *Supposons que la solution  $\mathbf{U}$  de (2.4) soit à valeur dans un domaine convexe  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'une fonction strictement concave  $\eta : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est une entropie du système s'il existe une application  $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , appelée flux d'entropie, telle que toute solution de (2.4) satisfasse la loi de conservation supplémentaire*

$$\partial_t \eta(\mathbf{U}) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} F_i(\mathbf{U}) = 0.$$

Dans cette définition nous avons choisi la propriété de stricte concavité (employée usuellement dans un contexte physique) plutôt que convexité (contexte mathématique) pour rester cohérent avec l'entropie physique du chapitre précédent. La plupart des systèmes venant de la mécanique sont munis d'une telle entropie, ce qui nous a amené précédemment à postuler l'existence d'une entropie dans les *modèles fluides*.

L'existence d'une entropie est équivalente à la symétrisation du système (au sens de la définition 4 étendue, c'est-à-dire qu'il existe une matrice symétrique définie positive  $\mathbb{S}(\mathbf{U})$  telle que chaque matrice  $\mathbb{S}(\mathbf{U})\mathbb{A}_i(\mathbf{U})$  soit symétrique). Cette dernière propriété est une hypothèse centrale du théorème de Garding-Leray, qui est l'un des rares résultats sur le problème de Cauchy d'un système quasi-linéaire multidimensionnel :

**Théorème 6 (Garding-Leray)** *Soit  $s$  un nombre réel  $> \frac{d}{2} + 1$ ,  $\mathcal{U}_1$  un ouvert relativement compact dans  $\mathcal{U}$  et  $\mathbf{U}_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$  à valeur dans  $\mathcal{U}_1$ . Alors il existe un temps  $T > 0$  tel que le système symétrisable*

$$\mathbb{S}(\mathbf{U})\partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=0}^d \mathbb{S}_i(\mathbf{U})\partial_{x_i} \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

*ait une unique solution  $\mathbf{U} \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$  satisfaisant  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$ .*

Ainsi, dans le cas non-linéaire, on peut résumer les résultats par le schéma

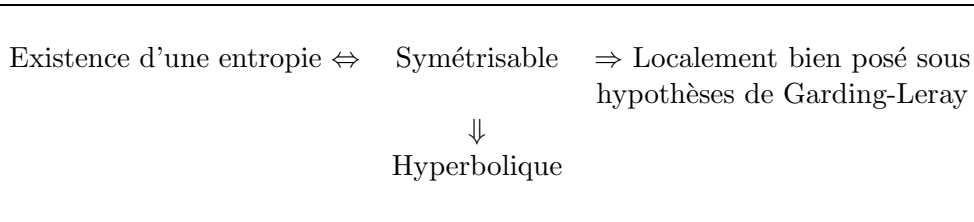


FIG. 2.2 – Résultats connus sur les systèmes non-linéaires

La propriété de symétrisation apparaît donc, dans le cas linéaire comme non linéaire, comme cruciale. Celle d'hyperbolicité est nécessaire mais non suffisante.

## 2.2 Formulation lagrangienne de l'hydrodynamique multidimensionnelle

Les grandeurs physiques qui interviennent dans ce modèle sont la densité de la matière, notée  $\rho$ , les composantes de la vitesse, notée  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , l'énergie spécifique totale, notée  $e$  et enfin la pression, notée  $p$ . Pour relier entre elles les grandeurs thermodynamiques et

fermer le système, composé de six inconnues et cinq équations, il est courant d'introduire l'énergie interne spécifique, notée  $\varepsilon$ ; cette grandeur ne constitue pas véritablement une inconnue supplémentaire, car si on lui ajoute l'énergie cinétique, on retrouve l'énergie totale, *cf.* équation (1.9). Dans le cas d'un gaz polytropique, la pression est une fonction de l'énergie interne et de la densité, ce qui ferme le système. D'autres grandeurs, telles que la vitesse du son notée  $c$  ou la température notée  $\mathcal{T}$ , interviendront au cours de notre exposé, mais n'apparaissent pas explicitement dans le système. Le volume massique est noté  $\tau$ , c'est l'inverse de la densité :  $\tau = \rho^{-1}$ .

La notion d'entropie, dont nous avons parlé dans le précédent chapitre, est essentielle dans le cas de la dynamique des gaz. Dans la suite nous notons  $\eta$  l'entropie spécifique. Cette grandeur est fondamentale aussi bien du point de vue du physicien que du mathématicien et du numéricien : en physique, cette grandeur caractérise le *désordre* d'un système, et ne peut que croître au cours du temps ; en mathématique, elle permet de s'assurer du caractère bien-posé d'un système ; sur le plan numérique, elle fournit un critère de stabilité des méthodes d'approximation. La relation pratique qui lie l'entropie, quantité non-mesurable, aux autres grandeurs est donnée par la relation de Gibbs

$$(2.6) \quad \mathcal{T} d\eta = d\varepsilon + p d\tau.$$

Dans notre façon de présenter les équations, la loi de croissance de l'entropie au cours du temps (second principe de la thermodynamique) fera partie intégrante du système de la dynamique des gaz.

L'écriture explicite des équations d'Euler, dont nous avons brièvement énoncé les principes, est aisée lorsque le référentiel d'étude est fixe : il s'agit de faire des bilans de conservation sur des domaines figés. Par contre son écriture est moins intuitive dans un formalisme lagrangien, dans lequel les grandeurs doivent être exprimées à l'instant courant en fonction de la position du fluide à l'instant initial. C'est pourquoi nous rappelons dès à présent, sans le démontrer, le système de la dynamique des gaz en coordonnées eulériennes. Sous les notations précédentes il s'écrit

$$(2.7) \quad \partial_t(\rho \mathbf{U}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{G}(\rho \mathbf{U}) = \mathbf{0},$$

$$(2.8) \quad \partial_t(\rho \eta) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \eta \mathbf{u}) \geq 0,$$

avec

$$(2.9) \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \\ e \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{G}(\rho \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u}^T \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbb{I}_d \\ (\rho e + p) \mathbf{u}^T \end{pmatrix}.$$

C'est en utilisant la procédure de changement de coordonnées que nous allons écrire ce système en coordonnées lagrangiennes. Afin de ne pas alourdir inutilement notre exposé, mais de prendre tout de même en compte l'aspect multidimensionnel, nous nous plaçons en deux dimensions d'espace. Soit l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \\ \phi : (T, \mathbf{X}) &\longmapsto (t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

où  $t = T$  et  $\mathbf{x}$  est la trajectoire associée à  $\mathbf{X}$ , cf. équation (1.25). La matrice jacobienne de cette transformation est

$$\mathbb{J} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{u} & \mathbb{F} \end{array} \right),$$

où l'on rappelle que  $\mathbb{F}$  est le tenseur gradient de transformation. Dans la suite, lorsqu'on voudra expliciter certains calculs, on utilisera la notation introduite par [45] et conservée par [52]

$$(2.10) \quad \mathbb{F} \equiv \begin{pmatrix} A & L \\ B & M \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} M & -B \\ -L & A \end{pmatrix}.$$

On note  $J$  le déterminant de la matrice jacobienne :

$$J = \det \mathbb{J} = \det \mathbb{F}.$$

Un petit calcul montre que la comatrice de  $\mathbb{J}$  est

$$\tilde{\mathbb{J}} = \left( \begin{array}{c|c} J & -\mathbf{u}^T \tilde{\mathbb{F}} \\ \hline \mathbf{0} & \tilde{\mathbb{F}} \end{array} \right).$$

Le lemme suivant explicite le passage eulérien-lagrangien pour un système de lois de conservation quelconque.

**Lemme 4** *Un système de loi de conservation en coordonnées eulériennes*

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

*s'écrit en coordonnées lagrangiennes sous la forme*

$$\partial_T (J\mathbf{U}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((\mathbb{G}(\mathbf{U}) - \mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) \tilde{\mathbb{F}}) = 0.$$

*Preuve.* – La preuve est une application directe du lemme 1. Pour cela on écrit le système eulérien sous la forme divergente

$$\nabla_{\mathbf{x},t} \cdot (\mathbb{T}) = 0, \quad \mathbb{T} = (\mathbf{U}, \mathbb{G}).$$

Il s'écrit alors dans le référentiel lagrangien

$$\nabla_{\mathbf{x},T} \cdot (\mathbb{T}\tilde{\mathbb{J}}) = 0.$$

Un calcul rapide donne

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\tilde{\mathbb{J}} &= \left( J\mathbf{U}, -\mathbf{U} \otimes (\tilde{\mathbb{F}}^T \mathbf{u}) + \mathbb{G}\tilde{\mathbb{F}} \right) \\ &= \left( J\mathbf{U}, -(\mathbf{U} \otimes \mathbf{u})\tilde{\mathbb{F}} + \mathbb{G}\tilde{\mathbb{F}} \right), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

En revenant aux équations de la dynamique des gaz (2.7-2.9), on trouve

$$\mathbb{G}(\rho\mathbf{U}) - \rho\mathbf{U} \otimes \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ p\mathbb{I}_2 \\ p\mathbf{u}^T \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier à droite par la comatrice pour obtenir la formulation lagrangienne. La fermeture du système s'obtient, comme en [45], par l'ajout de la loi de conservation sur le tenseur gradient de transformation. Nous résumons ceci dans le théorème ci-dessous.

**Théorème 7** *Les équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes s'écrivent sous la forme du système de lois de conservation*

$$(2.11) \quad \begin{cases} \partial_T(\rho J) = 0, \\ \partial_T(\rho J \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (p \tilde{\mathbb{F}}) = \mathbf{0}, \\ \partial_T(\rho J e) + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (p \tilde{\mathbb{F}}^T \mathbf{u}) = 0, \end{cases}$$

avec

$$(2.12) \quad \partial_T \mathbb{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u},$$

et

$$(2.13) \quad J = \det \mathbb{F}.$$

La formulation globale (2.11-2.13) fait donc intervenir deux systèmes, le premier (2.11) étant dit *physique* et le second (2.12) *géométrique*. Remarquons aussi que la définition algébrique (2.13) est nécessaire à la fermeture du système, compte tenu de la présence de  $J$  dans l'inconnue conservative. Enfin notons bien que  $\tilde{\mathbb{F}}$  est aussi une fonction de  $\mathbb{F}$ , linéaire dans ce cas bidimensionnel, cf. équation (2.10), quadratique en dimension trois.

C'est très exactement sous cette forme (2.11-2.13) que le système a été présenté, étudié et exploité numériquement dans [45] puis dans [52] et [1]. Pour être précis, on retrouve déjà la formulation (2.11) avant 1990 chez d'autres auteurs, par exemple [22], dans le contexte de l'élasticité, mais la force du travail de [45] est de compléter systématiquement le système physique par la partie géométrique (2.12) pour écrire globalement la dynamique des gaz lagrangienne comme un système de lois de conservation.

Le résultat mathématique crucial, que les auteurs ci-dessus ont démontré, est que ce système n'est que *faiblement hyperbolique*, contrairement à sa formulation eulérienne qui est connue pour être *hyperbolique*. Ceci signifie que la matrice jacobienne associée au système (2.11-2.12) a toutes ses valeurs propres réelles mais n'est pas diagonalisable : il manque des vecteurs propres.

Comme on l'a vu, la faible hyperbolicité d'un système pose le problème de la stabilité de ses solutions. Les précédents auteurs se sont affranchi de cette conséquence en développant des techniques numériques ne nécessitant pas la connaissance d'une base complète de vecteurs propres. Nous verrons toutefois plus loin le lien entre faible hyperbolicité et stabilité.

Les causes de cette perte d'hyperbolicité n'ont pas davantage été étudiées, à notre sens, jusqu'à présent. Le rôle de la dimension d'espace a certes été suggéré par R. Loubere [52], qui met en avant l'hyperbolicité stricte du système lagrangien en dimension un. Mais dans

cette situation précise, l'écriture du système se simplifie, si bien que cette conclusion nous paraît hâtive; nous reviendrons sur ce cas plus loin en présentant des systèmes faiblement hyperboliques unidimensionnel.

Par ailleurs le calcul des éléments propres dépend insidieusement de la prise en compte ou non de la contrainte différentielle (1.30) dans la forme quasi-linéaire du système. Cette contrainte n'apparaît d'ailleurs jamais explicitement dans les travaux de [45][52] et dans la formulation (2.11-2.13), mais a pourtant été exploitée, à tort selon nous, dans certains calculs. Pour la démonstration, nous renvoyons donc le lecteur à [52], avec qui nous partageons le résultat final (perte d'hyperbolicité) mais pas le détail des calculs (notamment nombre de vecteurs propres manquants). Par contre dans la section suivante nous démontrons à notre tour le résultat de perte d'hyperbolicité *via* notre formulation *canonique*, qui, tout en aboutissant bien sûr à la même conclusion, permet de pointer très précisément les conséquences de la contrainte différentielle.

## 2.3 Formulation lagrangienne canonique

La formulation (2.11-2.13) précédente, tout à fait juste du point de vue mathématique et physique, ne met pas en avant la structure interne du système de la dynamique des gaz. Or ce système partage l'ensemble des propriétés d'invariance des modèles fluides énoncé au chapitre 1 : c'est même l'archétype de tels modèles. Une identification rapide de (2.11) avec la structure générale (1.29) prouve le résultat suivant.

**Théorème 8** *Le système des équations d'Euler s'écrit en coordonnées lagrangiennes sous la forme canonique*

$$(2.14) \quad \rho^0 \partial_T \mathbf{U} + \partial_X \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^X \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^X \Psi) \end{array} \right) + \partial_Y \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Y \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^Y \Psi) \end{array} \right) = \mathbf{0},$$

$$(2.15) \quad \partial_T \mathbb{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u},$$

où  $\mathbf{U} = (\tau, \mathbf{u}, e)^T$ ,  $\Psi = (p, -\mathbf{u})^T$  et  $\mathbb{M}^X, \mathbb{M}^Y$  sont les matrices symétriques définies par

$$(2.16) \quad \mathbb{M}^X = \begin{pmatrix} 0 & M & -L \\ M & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{M}^Y = \begin{pmatrix} 0 & -B & A \\ -B & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices non constantes satisfont la contrainte de divergence nulle

$$(2.17) \quad \partial_X \mathbb{M}^X + \partial_Y \mathbb{M}^Y = \mathbb{O}.$$

Ce résultat n'est qu'une illustration de la structure présentée dans le chapitre précédent, pour le cas particulier des équations d'Euler. Pour rester rigoureux montrons tout de même en quoi la variable  $\Psi$  est bien définie à partir de (1.13-1.14). La relation de Gibbs (2.6) s'écrit

$$\mathcal{T} d\eta = de - \mathbf{u} d\mathbf{u} - p d\tau,$$

d'où découle immédiatement

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} p \\ -\mathbf{u} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que la définition (1.14) donne bien  $\Psi = (p, -\mathbf{u})^T$ .

Par ailleurs, on sait aussi d'après le théorème 5 que la loi sur l'entropie s'écrit

$$(2.18) \quad \rho^0 \partial_T \eta = 0.$$

Nous observons que les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie totale s'écrivent de la même manière que dans la formulation initiale (2.11-2.13), au facteur  $\rho^0 = \rho J$  près. Regardons alors de plus près les différences.

- Premièrement, la loi de conservation de la masse s'exprime sous une autre forme. Il y a en effet deux façon de traduire cette loi en coordonnées lagrangiennes, soit en écrivant que la quantité  $(\rho J)$  est constante en temps, soit en écrivant la loi d'évolution du volume massique  $\tau$ . Nous avons vu dans le chapitre 1 que c'est précisément cette variable  $\tau$  qui permet d'inclure la loi de conservation de la masse sous une forme canonique.
- Deuxièmement l'équation algébrique (2.13) ne fait plus partie intégrante du nouveau système; elle devient en effet inutile puisque le jacobien  $J$  n'est plus une inconnue du système.
- Par contre la contrainte différentielle (2.17) est désormais une équation explicite de la formulation.

On peut remarquer que, grâce à cette contrainte, la définition géométrique du jacobien (2.13) est équivalente à celle physique  $\rho J = \rho^0$  :

**Corollaire 1** *Considérons le système (2.14-2.17), incluant la contrainte différentielle. Alors on a l'équivalence*

$$(2.19) \quad J = \frac{\rho^0}{\rho} \iff J = AM - BL.$$

*Preuve.* – En effet on a

$$\begin{aligned} \rho J = \rho^0 &\iff \partial_T \left( \frac{\rho J - \rho^0}{\rho} \right) = 0 \\ &\iff \partial_T J = \rho^0 \partial_T \tau \\ &\iff \partial_T J = \partial_X(uM - vL) + \partial_Y(-uB + vA) \\ &\iff \partial_T J = M \partial_X u - L \partial_X v - B \partial_Y u + A \partial_Y v \\ &\iff \partial_T J = M \partial_T A - L \partial_T B - B \partial_T L + A \partial_T M \\ &\iff \partial_T J = \partial_T(AM - BL) \\ &\iff J = AM - BL. \end{aligned}$$

C'est pour obtenir la quatrième équivalence que la contrainte différentielle est cruciale.  $\square$

Nous allons maintenant étudier l'hyperbolicité du système. A cette fin écrivons le système global sous la notation

$$\mathbb{A}^0 \partial_T \mathbf{V} + \partial_X \mathbf{f}(\mathbf{V}) + \partial_Y \mathbf{g}(\mathbf{V}) = \mathbf{0},$$

où  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^8$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^8$  et  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^8$  sont définis par

$$\begin{cases} \mathbb{A}^0 = \text{diag}(\rho^0, \rho^0, \rho^0, \rho^0, 1, 1, 1, 1), \\ \mathbf{V} = (\tau, u, v, \eta, A, B, L, M)^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{V}) = (-uM + vL, pM, -pL, 0, -u, -v, 0, 0)^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{V}) = (uB - vA, -pB, pA, 0, 0, 0, -u, -v)^T. \end{cases}$$

Dans cette écriture on a échangé la loi sur l'énergie totale par celle sur l'entropie (2.18). Par ailleurs, pour simplifier encore les développements à venir, on remplace les premières composantes de  $\mathbf{V}$  par  $\Psi$ , en effectuant le changement de variable

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^8 &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ \mathbf{V} &\longmapsto \mathbf{W} = (p, -u, -v, \eta, A, B, L, M)^T. \end{aligned}$$

Cela nous conduit finalement à la forme quasilinéaire

$$\mathbb{A}^0 \overline{\mathbb{A}} \partial_T \mathbf{W} + \overline{\mathbb{B}} \partial_X \mathbf{W} + \overline{\mathbb{C}} \partial_Y \mathbf{W} = 0,$$

où

$$\overline{\mathbb{A}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}}, \quad \overline{\mathbb{B}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{W}}, \quad \overline{\mathbb{C}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{W}}.$$

On dit que le système est hyperbolique<sup>1</sup> si et seulement si, pour tout vecteur  $\mathbf{k} = (\alpha, \beta)$  appartenant à la sphère unité de  $\mathbb{R}^2$ , les deux propriétés suivantes sont vérifiées

- toutes les solutions  $\lambda$  de  $\det(\lambda \mathbb{A}^0 \overline{\mathbb{A}} - \alpha \overline{\mathbb{B}} - \beta \overline{\mathbb{C}}) = 0$  sont réelles,
- il existe un jeu complet de huit vecteurs propres linéairement indépendants associés à ces valeurs propres.

Lorsque seule la première condition est satisfaite, on dit que le système est *faiblement* hyperbolique. Comme nous l'avons dit dans la section précédente, c'est le cas du système des équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes :

**Théorème 9** *Supposons que  $\rho^0$ ,  $\rho$  et  $p$  ne s'annulent pas. Sous ces conditions, on suppose que la vitesse du son, définie par  $c = \tau \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial \tau \eta}}$ , ne s'annule pas non plus. Choisissons, dans (2.19), l'une ou l'autre définition de  $J$ . Alors le système (2.14- 2.15) est faiblement hyperbolique. Toutes les valeurs propres sont réelles :*

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \text{ordre six de multiplicité} \\ \lambda_{\pm} = \pm c \frac{\rho}{\rho^0} \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{\alpha} = -\alpha M + \beta B, \\ \tilde{\beta} = \alpha L - \beta A. \end{cases}$$

*Mais il manque deux (respectivement trois) vecteurs propres si  $\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v \neq 0$  (respectivement si  $\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v = 0$ ).*

*Preuve.* - Montrons tout d'abord que les deux valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  de l'énoncé sont bien différentes de  $\lambda_0$ . Comme  $\rho > 0$ ,  $c > 0$ , si  $\lambda_{\pm}$  s'annulaient on aurait alors  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$ , soit

$$\begin{cases} \alpha M = \beta B, \\ \alpha L = \beta A, \end{cases}$$

qui impliquerait  $(\alpha^2 + \beta^2)(AM - BL) = 0$ . D'après le corollaire 1, cela entraînerait  $\rho^0 = 0$ , ce qui est impossible par hypothèse.

Considérons maintenant la matrice symbole

$$\mathbb{M}(\lambda) = \lambda \mathbb{A}^0 \overline{\mathbb{A}} - \alpha \overline{\mathbb{B}} - \beta \overline{\mathbb{C}}.$$

---

<sup>1</sup>Hyperbolique ou *fortement* hyperbolique



La définition de la vitesse du son permet d'écrire  $\frac{\partial p}{\partial \tau_{1s}} = -\frac{c^2}{\tau^2}$ , d'où l'on déduit que  $\overline{\mathbb{A}} = \text{diag}(-\frac{\tau^2}{c^2}, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Le calcul de  $\overline{\mathbb{B}}$  et  $\overline{\mathbb{C}}$  est très élémentaire et l'on trouve

$$\mathbb{M}(\lambda) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} -\lambda\rho^0\frac{\tau^2}{c^2} & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & 0 & \beta v & -\beta u & -\alpha v & \alpha u \\ \tilde{\alpha} & -\lambda\rho^0 & 0 & 0 & 0 & \beta p & 0 & -\alpha p \\ \tilde{\beta} & 0 & -\lambda\rho^0 & 0 & -\beta p & 0 & \alpha p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\rho^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\alpha & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right).$$

Le déterminant est plus délicat à calculer. Un logiciel de calcul formel nous vient en aide et donne

$$(2.20) \quad \det(\mathbb{M}(\lambda)) = (\rho^0)^4 \lambda^6 \left( \lambda^2 - c^2 \frac{\rho^2}{\rho^2} (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2) \right),$$

ce qui prouve à la fois les expressions et les ordres de multiplicité des valeurs propres.

Intéressons nous maintenant aux sous-espaces propres. Nous cherchons dans un premier temps  $\mathbf{x}_{\pm} \in \mathbb{R}^8$  tel que  $\mathbb{M}(\lambda_{\pm})\mathbf{x}_{\pm} = \mathbf{0}$ . Ceci revient à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_{\pm}\rho^0\frac{\tau^2}{c^2}x_1 + \tilde{\alpha}x_2 + \tilde{\beta}x_3 + \beta vx_5 - \beta ux_6 - \alpha vx_7 + \alpha ux_8 = 0, \\ \tilde{\alpha}x_1 - \lambda_{\pm}\rho^0x_2 + \beta px_6 - \alpha px_8 = 0, \\ \tilde{\beta}x_1 - \lambda_{\pm}\rho^0x_3 - \beta px_5 + \alpha px_7 = 0, \\ \lambda_{\pm}\rho^0x_4 = 0, \\ -\alpha x_2 + \lambda_{\pm}x_5 = 0, \\ -\alpha x_3 + \lambda_{\pm}x_6 = 0, \\ -\beta x_2 + \lambda_{\pm}x_7 = 0, \\ -\beta x_3 + \lambda_{\pm}x_8 = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda_{\pm}\rho^0}x_1, \\ x_3 = \frac{\tilde{\beta}}{\lambda_{\pm}\rho^0}x_1, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = \frac{\alpha}{\lambda_{\pm}}x_2, \\ x_6 = \frac{\alpha}{\lambda_{\pm}}x_3, \\ x_7 = \frac{\beta}{\lambda_{\pm}}x_2, \\ x_8 = \frac{\beta}{\lambda_{\pm}}x_3. \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons montré,  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  ne peuvent s'annuler simultanément, ce qui prouve que le sous-espace propre associé à  $\lambda_{\pm}$  est de dimension un ; il est donc égal à l'ordre de multiplicité de  $\lambda_{\pm}$ .

Cherchons enfin le sous-espace propre associé à  $\lambda_0$ , en résolvant le système  $\mathbb{M}(\lambda_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Celui-ci s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}x_2 + \tilde{\beta}x_3 + \beta vx_5 - \beta ux_6 - \alpha vx_7 + \alpha ux_8 = 0, \\ \tilde{\alpha}x_1 + \beta px_6 - \alpha px_8 = 0, \\ \tilde{\beta}x_1 - \beta px_5 + \alpha px_7 = 0, \\ -\alpha x_2 = 0, \\ -\alpha x_3 = 0, \\ -\beta x_2 = 0, \\ -\beta x_3 = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ (\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v)x_1 = 0, \\ \tilde{\alpha}x_1 + \beta px_6 - \alpha px_8 = 0, \\ \tilde{\beta}x_1 - \beta px_5 + \alpha px_7 = 0. \end{array} \right.$$

L'équivalence vient du fait que  $p$  ne s'annule pas et que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Deux situations se présentent alors :

- si  $\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v \neq 0$ , le système est équivalent à

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \beta x_6 = \alpha x_8, \quad \beta x_5 = \alpha x_7.$$

En raisonnant par disjonction de cas selon que  $\alpha$  ou  $\beta$  s'annule, on voit que, dans tous les cas, le sous-espace propre associé à  $\lambda_0$  est de dimension trois : il manque donc trois vecteurs propres.

– si  $\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v = 0$ , on a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{p}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2} \left( \tilde{\alpha}(\alpha x_8 - \beta x_6) + \tilde{\beta}(\beta x_5 - \alpha x_7) \right), \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ \tilde{\beta}(\alpha x_8 - \beta x_6) = \tilde{\alpha}(\beta x_5 - \alpha x_7). \end{cases}$$

En raisonnant encore pas disjonction de cas selon que  $\tilde{\alpha}$  ou  $\tilde{\beta}$  s'annule, on trouve cette fois-ci que le sous-espace propre associé à  $\lambda_0$  est de dimension quatre : il manque donc deux vecteurs propres.

Ceci achève la démonstration du théorème.  $\square$

Insistons bien sur le fait que la contrainte différentielle (2.17) n'est jamais exploitée dans ce calcul d'hyperbolicité, même si l'on sait qu'elle est équivalente à la loi sur l'entropie (2.18), qui elle est utilisée. Nous avons choisi de procéder ainsi car à notre connaissance la notion d'hyperbolicité n'est traditionnellement pas couplée avec la notion de contrainte supplémentaire (on ne parle pas d'*hyperbolicité sous contrainte*). Toutefois on peut penser que la prise en compte de celle-ci change la nature du système : c'est par exemple le cas du système de la magnétohydrodynamique, qui sous quelques manipulations utilisant la divergence nulle du champ magnétique peut être vu comme fortement hyperbolique. Nous reviendrons sur cette analogie dans la dernière section, ici nous allons présenter en guise de remarque ce qu'apporterait la prise en compte de la contrainte (2.17) dans l'hyperbolicité du système, *via* notre formulation canonique.

**Théorème 10** *En considérant la contrainte différentielle (2.17), le système des équations d'Euler (2.14) isentropique s'écrit sous la forme quasi-linéaire*

$$(2.21) \quad \begin{cases} \rho^0 \mathbb{A} \partial_T \Psi + \mathbb{M}^X \partial_X \Psi + \mathbb{M}^Y \partial_Y \Psi = \mathbf{0}, \\ \rho^0 \partial_T \eta = 0, \end{cases}$$

avec

$$(2.22) \quad \partial_T \mathbb{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u},$$

où

$$\mathbb{A} = \text{diag}\left(-\frac{\tau^2}{c^2}, -1, -1\right).$$

Ce système est faiblement hyperbolique. Les valeurs propres sont celles du théorème 9, mais il ne manque plus qu'un seul vecteur propre associé à  $\lambda_0$ .

Ce théorème prouve donc que la prise en compte de la contrainte différentielle rajoute des vecteurs propres, mais pas assez pour rendre le système fortement hyperbolique. Nous analyserons cette caractéristique du système dans la section suivante.

*Preuve.* – Le passage de (2.14) à (2.21) est élémentaire : la divergence nulle sur  $\mathbb{M}^X$  et  $\mathbb{M}^Y$  permet de sortir ces deux matrices des opérateurs de dérivation, et on introduit ensuite  $\mathbb{A} = \frac{\partial(\tau, u, v)}{\partial \Psi|_{\eta}}$ . Le système s'écrit donc sous la forme quasi-linéaire globale suivante, à comparer avec celle du précédent théorème

$$\mathbb{A}^0 \check{\mathbb{A}} \partial_T \mathbf{W} + \check{\mathbb{B}} \partial_X \mathbf{W} + \check{\mathbb{C}} \partial_Y \mathbf{W} = \mathbf{0}.$$

Le vecteur  $\mathbf{W}$  est celui introduit plus haut, ainsi que la matrice  $\mathbb{A}^0$ ; ce sont  $\check{\mathbb{A}}$ ,  $\check{\mathbb{B}}$  et  $\check{\mathbb{C}}$  qui changent. Le fait d'avoir sorti les inconnues géométriques du flux découple, pour les

quatre premières équations, la partie physique et géométrique. Ceci se répercute de façon particulièrement claire sur la nouvelle matrice symbole  $\check{\mathbb{M}}(\lambda) = \lambda \check{\mathbb{A}}^0 \check{\mathbb{A}} - \alpha \check{\mathbb{B}} - \beta \check{\mathbb{C}}$ , qui présente désormais un bloc nul :

$$\check{\mathbb{M}}(\lambda) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} -\lambda \rho^0 \frac{\tau^2}{c^2} & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\alpha} & -\lambda \rho^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\beta} & 0 & -\lambda \rho^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \rho^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\alpha & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right).$$

Contrairement à la situation précédente, le calcul du déterminant peut se faire ici très simplement *à la main*. On retrouve la même expression (2.20), d'où les mêmes valeurs propres et ordres de multiplicité. La détermination du sous-espace propre associé à  $\lambda_{\pm}$  se fait comme dans la preuve ci-dessus : il est toujours de dimension un. Par contre le sous-espace propre associé à  $\lambda_0$  est modifié ; par lecture directe, la matrice  $\check{\mathbb{M}}(\lambda_0)$  est de rang trois, d'où un sous-espace propre de dimension cinq. Il ne manque donc plus qu'un vecteur propre.  $\square$

## 2.4 Faible hyperbolicité dans les systèmes

L'objectif de cette section est d'une part de comprendre d'où vient la perte d'hyperbolicité forte du système, et d'autre part d'entrevoir qu'elles en sont les conséquences. Nous allons commencer par rappeler le cas du système en une dimension d'espace, qui est alors connu pour être hyperbolique. Nous montrerons ensuite sur un exemple très simple la perte d'hyperbolicité pour un problème mono-dimensionnel.

**Exemple 1** *Le système des équations d'Euler en une dimension d'espace s'écrit en coordonnées lagrangiennes sous la forme*

$$(2.23) \quad \rho^0 \partial_T \mathbf{U} + \partial_X \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^X \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^X \Psi) \end{array} \right) = \mathbf{0},$$

$$(2.24) \quad \partial_T A = \partial_X u,$$

où la matrice  $\mathbb{M}^X$  satisfait la contrainte

$$(2.25) \quad \partial_X \mathbb{M}^X = 0.$$

Pour les écoulements réguliers, ce système écrit en variable  $(\tau, u, s, A)$  est strictement hyperbolique. Les valeurs propres sont  $\lambda_0 = 0$  (ordre deux) et  $\lambda_{\pm} = \pm \frac{cu}{\rho_0}$ , associées respectivement aux sous-espaces propres  $\mathcal{V}_0 = \text{Vect}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial s}, 0, -\frac{\partial p}{\partial \tau}, 0\right), (0, 0, 0, 1)\right\}$  et  $\mathcal{V}_{\pm} = \text{Vect}\left\{\left(\tau, \pm c, 0, \frac{\tau}{\rho_0}\right)\right\}$ .

Nous avons volontairement écrit le système comme une dégénérescence monodimensionnelle de (2.14), notamment pour la contrainte différentielle, même si on connaît bien sûr une écriture plus simple. En particulier l'équation sur le tenseur gradient de transformation, qui se résume au scalaire  $A = \frac{\partial x}{\partial X}$ , est inutile puisque le système physique ne

dépend pas de cette inconnue géométrique. Cette propriété vient justement du fait qu'en dimension un, la contrainte différentielle implique que  $\mathbb{M}^X$  soit constante. C'est à ce point précis que la dimension un joue un rôle : la contrainte, qui revient à dire que  $\mathbb{M}^X$  est constante, est automatiquement vérifiée. La partie physique est donc découplée de la partie géométrique (ce découplage est d'ailleurs évident). L'hyperbolicité en découle.

Étudions maintenant le cas d'une équation scalaire :

$$(2.26) \quad \partial_t \alpha + \partial_x f(\alpha) = 0,$$

où l'on suppose  $f$  et  $\alpha^0(x) = \alpha(0, x)$  régulières. En posant  $u = f'$ , on introduit comme jusqu'à présent la transformation entre coordonnées eulériennes et lagrangiennes par

$$\partial_T x = u, \quad x(0, X) = X.$$

On peut voir aussi cela comme la méthode des caractéristiques. On a alors le résultat suivant.

**Exemple 2** *L'équation scalaire (2.26) s'écrit en coordonnées lagrangiennes sous la forme*

$$(2.27) \quad \begin{cases} \partial_T \alpha = 0, \\ \partial_T A - \partial_X u(\alpha) = 0. \end{cases}$$

*Ce système est faiblement hyperbolique.*

Le passage de (2.26) à (2.27) introduit à nouveau le tenseur gradient de transformation  $A = \frac{\partial x}{\partial X}$ . La matrice jacobienne associée au système est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f''(\alpha(X)) & 0 \end{pmatrix}$$

et n'est pas diagonalisable (c'est un bloc de Jordan), ce qui rend en effet le système faiblement hyperbolique. Toutefois, on connaît la solution exacte, et unique, du problème de Cauchy :

$$\alpha(t, X) = \alpha_0(X) \quad \text{et} \quad A(t, X) = A_0 + t f''(\alpha_0(X)) \partial_X \alpha_0(X).$$

Bien qu'étant définie pour tout temps, cette solution vérifie l'estimation

$$\|(\alpha, A)(T)\|_{H^s} \leq C(T) \|(\alpha_0, A_0, \partial_X \alpha_0)\|_{H^s},$$

qui montre une perte de régularité par rapport à la condition initiale, typique des systèmes faiblement hyperboliques. Sous sa version lagrangienne l'équation scalaire non-linéaire (2.26) est donc mal posée.

Ces deux exemples très simples suggèrent que ce n'est pas, fondamentalement, la dimension d'espace qui gouverne la faible hyperbolicité d'un système.

Revenons au système de la dynamique des gaz en dimension deux. La faible hyperbolicité s'illustre à partir d'un écoulement physique de base : le cisaillement (glissement relatif de deux volumes de fluides l'un sur l'autre).

**Exemple 3** *Considérons le système de la dynamique des gaz dans sa formulation lagrangienne (2.14-2.17). Un cisaillement, par exemple selon l'axe des  $X$ , est une solution de ce système définie par*

$$u(t, X, Y) = u_0(Y), \quad v(t, X, Y) = 0, \quad p(t, X, Y) = p_0.$$

Les valeurs analytiques des inconnues géométriques sont alors

$$A = 1, \quad B = 0, \quad L = t\partial_Y u_0(Y), \quad M = 1.$$

Comme dans l'exemple précédent, il y a une perte de régularité de la solution par rapport aux conditions initiales.

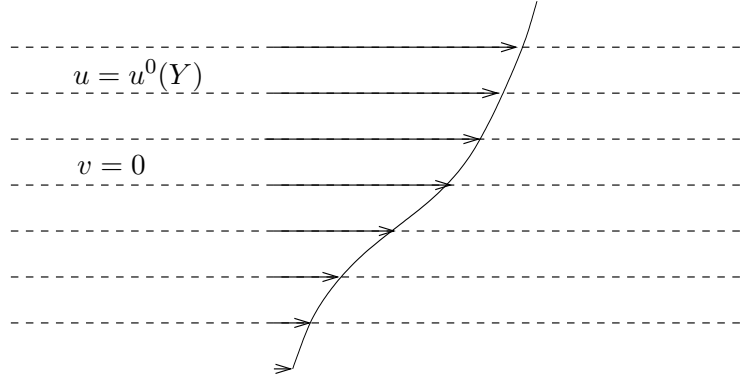


FIG. 2.3 – Cisaillement selon l'axe  $X$

Remarquons que la contrainte différentielle (2.17) est trivialement satisfaite. Par ailleurs si la condition initiale est très peu régulière, par exemple seulement dans  $L^2$  (on peut imaginer une couche de fluide qui glisse uniformément sur une couche au repos), alors la variable géométrique  $L$  n'est dans aucun espace de Sobolev, pour tout temps strictement positif (ce serait une mesure de Dirac placée sur la discontinuité).

Cet écoulement suffit à illustrer la conséquence de la perte d'hyperbolicité. Concrètement, il permet de formaliser le caractère mal-posé de l'hydrodynamique lagrangienne par la proposition suivante.

**Proposition 1** *Il existe des données initiales régulières du système de la dynamique des gaz lagrangienne (2.14-2.17) telles que pour tout temps  $T > 0$  et  $s \in \mathbb{N}$ , il existe des constantes  $C_1^s$  et  $C_2^s$  avec l'estimation*

$$\begin{aligned} C_1^s (\|(A, B, L, M)(0)\|_{H^s} + \|\nabla_{X,Y} u_0, \nabla_{X,Y} v_0\|_{H^s}) &\leq \|(A, B, L, M)(T)\|_{H^s} \\ &\leq C_2^s (\|(A, B, L, M)(0)\|_{H^s} + \|\nabla_{X,Y} u_0, \nabla_{X,Y} v_0\|_{H^s}). \end{aligned}$$

La section suivante s'intéresse à la partie *physique* du système, qui comme on le voit dans les exemples ci-dessus, semble rester bien posée.

## 2.5 Symétrisation des lois de conservation en coordonnées lagrangiennes

La faible hyperbolicité des équations de la dynamique des gaz peut paraître surprenante, en comparaison à la version eulérienne de ce système. Nous venons de voir qu'elle s'illustre notamment dans les écoulements de cisaillement, en impliquant une perte de régularité sur les inconnues géométriques. Toutefois, l'intuition nous fait penser que la partie *physique* du système ne devrait pas voir ses propriétés mathématiques se dégrader en fonction d'un jeu de coordonnées, qui n'est qu'une représentation différente de la même physique. C'est effectivement ce que démontre le résultat ci-dessous, dans lequel la contrainte différentielle (2.17) joue un rôle remarquable.

**Proposition 2** *Considérons la partie physique du système de la dynamique des gaz en coordonnées lagrangiennes*

$$(2.28) \quad \rho^0 \partial_T \mathbf{U} + \partial_X \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^X \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^X \Psi) \end{array} \right) + \partial_Y \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Y \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^Y \Psi) \end{array} \right) = \mathbf{0}.$$

*Supposons que, quelle que soit la définition exacte des matrices symétriques  $\mathbb{M}^X$  et  $\mathbb{M}^Y$ , la contrainte différentielle suivante soit satisfaite*

$$(2.29) \quad \partial_X \mathbb{M}^X + \partial_Y \mathbb{M}^Y = \mathbb{O}.$$

*Supposons de plus que la loi de pression soit thermodynamiquement correcte, c'est-à-dire que  $\frac{\partial \tau}{\partial p}|_\eta < 0$ . Alors (2.28) est hyperbolique symétrisable.*

*Preuve.* – La démonstration est triviale avec l'écriture du système sous forme canonique, ce qui au passage est une façon supplémentaire de justifier son intérêt. Tout d'abord le théorème 5 du premier chapitre implique que le flux d'entropie est nul ; alors les solutions régulières de (2.28) sont aussi solution de

$$\rho^0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi}|_\eta \partial_T \Psi + \mathbb{M}^X \partial_X \Psi + \mathbb{M}^Y \partial_Y \Psi = 0, \quad \partial_T \eta = 0,$$

où  $\tilde{\mathbf{U}} = (\tau, \mathbf{u})$ . Puisque  $\mathbb{M}^X$  et  $\mathbb{M}^Y$  sont symétriques, il est suffisant de prouver que la matrice  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi}|_\eta$  est symétrique définie négative. Cette propriété peut se démontrer grâce à un formalisme thermodynamique abstrait (dans l'esprit de celui de l'annexe A), mais pour le cas de la dynamique des gaz un calcul direct montre que

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi}|_\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial p}|_\eta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi sous l'hypothèse d'une loi de pression thermodynamiquement correcte, cette matrice est symétrique définie négative.  $\square$

Une autre façon d'apprécier la stabilité de la partie physique passe par la linéarisation du système et la recherche d'estimations d'énergie permettant de contrôler le linéarisé. Une telle approche a été récemment employée avec succès dans l'analyse de stabilité des modèles PML [46], qui de part leur faible hyperbolicité posent des questions analogues.

**Théorème 11** *Considérons la linéarisation du système de la dynamique des gaz dans sa formulation lagrangienne (2.14-2.17) autour d'un état physique constant. Notons la solution de ce système linéarisé  $(\mathbf{U}_1, A_1, B_1, L_1, M_1)$  et  $\mathbf{x}_1$  celle de (1.25). Supposons que la contrainte différentielle soit satisfaite, et que  $\rho^0$  soit uniformément minorée par une constante positive. Alors pour tout temps  $T > 0$  et  $s \in \mathbb{N}$ , il existe  $C^s > 0$  tel que*

$$\|(\mathbf{U}_1, \mathbf{x}_1)(t)\|_{H^s} \leq C^s \|(\mathbf{U}_1, \mathbf{x}_1)(0)\|_{H^s}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Preuve.* – Décomposons toutes les inconnues du système (2.14-2.17) et (1.25), notées sous forme générique  $z_\epsilon$ , en un état de base  $z_0$  et un premier linéarisé  $z_1$  :

$$z_\epsilon = z_0 + \epsilon z_1 + o(\epsilon).$$

En substituant une telle décomposition dans le système, et en ne conservant que les termes du premier ordre, nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho_1^0 \partial_T \mathbf{U}_0 + \rho_0^0 \partial_T \mathbf{U}_1 + \partial_X \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}_1^X \Psi_0 + \mathbb{M}_0^X \Psi_1 \\ -\frac{1}{2}(\Psi_0, \mathbb{M}_1^X \Psi_0) - (\Psi_0, \mathbb{M}_0^X \Psi_1) \end{array} \right) \\ + \partial_Y \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}_1^Y \Psi_0 + \mathbb{M}_0^Y \Psi_1 \\ -\frac{1}{2}(\Psi_0, \mathbb{M}_1^Y \Psi_0) - (\Psi_0, \mathbb{M}_0^Y \Psi_1) \end{array} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

et

$$\partial_T \mathbf{x}_1 = \mathbf{u}_1.$$

Or l'état de base est constant en temps et en espace, et par ailleurs la contrainte différentielle au premier ordre donne  $\partial_X \mathbb{M}_1^X + \partial_Y \mathbb{M}_1^Y = 0$ , d'où l'on tire

$$\rho_0^0 \partial_T \mathbf{U}_1 + \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}_0^X \partial_X \Psi_1 \\ -(\Psi_0, \mathbb{M}_0^X \partial_X \Psi_1) \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}_0^Y \partial_Y \Psi_1 \\ -(\Psi_0, \mathbb{M}_0^Y \partial_Y \Psi_1) \end{array} \right) = \mathbf{0}.$$

Par ailleurs, sous les mêmes notations que la preuve précédente, la relation de Gibbs ( 2.6) au premier ordre donne  $T_0 \partial_T \eta_1 = (\Psi_0, \partial_T \tilde{\mathbf{U}}_1) + \partial_T e_1$ . On obtient alors

$$\partial_T \eta_1 = 0,$$

ce qui montre trivialement que  $\eta_1$  est stable dans  $L^2$ . On a de plus

$$\rho_0^0 \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta} \right)_0 \partial_T \Psi_1 + \mathbb{M}_0^X \partial_X \Psi_1 + \mathbb{M}_0^Y \partial_Y \Psi_1 = \mathbf{0},$$

qui implique

$$\partial_T \left( \rho_0^0 \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta} \right)_0 \Psi_1, \Psi_1 \right) + \partial_X (\mathbb{M}_0^X \Psi_1, \Psi_1) + \partial_Y (\mathbb{M}_0^Y \Psi_1, \Psi_1) = \mathbf{0}.$$

Ainsi l'énergie  $\mathcal{E}(t)$  suivante est-elle bornée dans  $L^2$ , au terme de bord près en domaine fini :

$$\mathcal{E}(t) = \int \left( \rho_0^0 \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta} \right)_0 \Psi_1, \Psi_1 \right) dX dY.$$

Comme on l'a vu dans la preuve précédente, la matrice  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta}$  est définie négative, ce qui permet d'obtenir la stabilité de  $\Psi_1$  dans  $L^2$ . Le champ de vitesse  $\mathbf{u}_1$  étant une composant de  $\Psi_1$ , le vecteur position  $\mathbf{x}_1$  est lui aussi borné dans  $L^2$ . Avec cette énergie, on peut contrôler toutes les dérivées de  $(\Psi_1, \eta_1, \mathbf{x}_1)$ . L'étape finale de cette démonstration consiste à montrer que le contrôle de  $(p_1, \mathbf{u}_1, \eta_1)$  est équivalent au contrôle de  $\mathbf{U}_1 = (\tau_1, \mathbf{u}_1, e_1)$ . La linéarisation de  $e = \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$  donne  $e_1 = \varepsilon_1 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1$ , donc il est suffisant de montrer que le contrôle de  $(p_1, \eta_1)$  est équivalent à celui de  $(\tau_1, \varepsilon_1)$ . Pour des équations d'état thermodynamiquement consistantes on a

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{T_0} (\varepsilon_1 + p_0 \tau_1), \\ p_1 = \left( \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_0 \varepsilon_1 + \left( \frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_0 \tau_1. \end{cases}$$

Ce système est inversible car son déterminant vaut

$$\frac{1}{T_0} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_0 - p_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_0 \right) = \frac{1}{T_0} \left( \frac{\partial p}{\partial \tau|_\eta} \right)_0,$$

et comme on l'a dit précédemment cette quantité est strictement négative pour une loi de pression thermodynamiquement admissible. Ceci conclut la preuve.  $\square$

Il est remarquable de constater que cette approche linéarisée permet de contrôler  $\mathbf{x}_1$  dans  $L^2$  mais pas, comme on l'a vu dans la section précédente, ses dérivées partielles  $(A_1, B_1, L_1, M_1)$ . C'est à nouveau la contrainte différentielle qui permet de supprimer ces termes dans le contrôle des quantités physiques : on a montré dans [30] que si on l'oublie, alors l'estimation d'énergie devient

$$\begin{aligned} \partial_T \left( \rho_0^0 \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta} \right)_0 \Psi_1, \Psi_1 \right) + \partial_X (\mathbb{M}_0^X \Psi_1, \Psi_1) + \partial_Y (\mathbb{M}_0^Y \Psi_1, \Psi_1) \\ = 2p_0 u_1 (\partial_X M_1 - \partial_Y B_1) + 2p_0 v_1 (\partial_X A_1 - \partial_Y L_1). \end{aligned}$$

Si l'on reprend l'exemple d'un cisaillement discontinu, alors la quantité  $L_1$  est une masse de Dirac, et le terme de droite n'a mathématiquement plus de sens.

## 2.6 Classification des systèmes

En conclusion de ce chapitre, nous pouvons affirmer que l'hydrodynamique lagrangienne se range dans une classe de systèmes tout à fait originale. Non seulement le système n'est que faiblement hyperbolique, mais en plus la contrainte supplémentaire qui donne à une sous-partie du système son caractère bien posé n'est pas suffisante pour le symétriser dans sa totalité ; ceci est inhérent à certains écoulements, les cisaillements, qui rendent le problème de Cauchy faiblement bien posé.

	Euler en coordonnées eulériennes	MHD en coordonnées eulériennes	Euler en coordonnées lagrangiennes
Hyperbolicité	Hyperbolicité forte	Hyperbolicité faible	Hyperbolicité faible
Contraintes supplémentaires	$\emptyset$	$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \mathbb{O}$
Gain des contraintes	$\emptyset$	Hyperbolique	Gain d'un vecteur propre
Symétrisation	Symétrisable	Symétrisable sous contrainte	Pas symétrisable

FIG. 2.4 – Classification des systèmes selon leur hyperbolicité.

L'hydrodynamique lagrangienne se distingue donc des lois de conservation avec contraintes involutives qui symétrisent le système (en version eulérienne), telles la MHD idéale. En effet il est connu que ce système, sous sa forme brute, est faiblement hyperbolique. Par contre la prise en compte de la nullité de la divergence du champ magnétique, par exemple par ajout d'un terme source artificiel [56], redonne l'hyperbolicité forte. On retrouve ceci



à la lumière de notre formulation canonique du chapitre 1 : la contrainte différentielle sur les matrices de flux traduit la divergence nulle du champ magnétique, et entraîne la même conclusion que la proposition 2 (*via* une démonstration analogue), mais pour *l'ensemble* du système, en eulérien.

Une autre façon d'exprimer cette particularité est de dire que l'hydrodynamique lagrangienne, incluant variables physiques et géométriques, ne possède pas d'entropie globale. Le schéma 2.4 résume cette situation de façon concrète, avec pour chaque type de système de lois de conservation un exemple physique.



## Chapitre 3

# Approximation numérique

---

Dans ce chapitre nous montrons en quoi la structure du système mise en avant dans la section précédente est pertinente en vue de construire une nouvelle classe de schémas numériques pour la dynamique des gaz. Cette classe peut être vue comme la généralisation de celle déjà introduite par B. Després dans le cas unidimensionnel [25], l'extension multidimensionnelle du solveur, couplée aux grandeurs géométriques, étant toutefois non triviale.

Les premières sections de ce chapitre sont consacrées à la semi-discrétisation en espace du système. La dimension spatiale s'avère être en effet la plus subtile à traiter dans les couplages entre inconnues physiques et géométriques, ces dernières étant par définition homogènes à des grandeurs d'espace. On parlera par exemple de *compatibilité de discrétisation* de certains opérateurs de dérivation spatiale. Cette semi-discrétisation a par ailleurs l'avantage de simplifier le système d'équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires, ce qui nous permet de prouver analytiquement quelques propriétés du solveur : positivité des grandeurs physiques, non croisement des arêtes pour les maillages triangulaires.

La première section discrétise les inconnues géométriques de façon à respecter la contrainte de Piola. Il s'avère que celle-ci devient triviale à connectivité fixe, si on la traite sur les arêtes des mailles. Dans la seconde section on introduit la problématique de résoudre le système par une méthode Volumes-Finis, qui par nature place des degrés de liberté sur les arêtes (des flux), alors que le déplacement du maillage nécessite des vitesses aux nœuds. L'abandon de la méthode usuelle, avec solveur de Riemann aux arêtes, nous amène à proposer un solveur aux nœuds construit sur des principes physiques : conservation stricte de la masse lagrangienne, de l'impulsion, de l'énergie totale, et production d'entropie.

Les deux dernières sections achèvent la construction du solveur en présentant le traitement des conditions aux limites et une discrétisation temporelle. Celle-ci s'appuie sur le critère de production d'entropie et impose un contrôle dynamique du pas de temps.

---

### 3.1 Discrétisation spatiale du système de lois de conservation géométrique

Avant toute chose introduisons quelques notations employées dans l'approximation numérique. La formulation de notre étude étant purement lagrangienne, on considère un maillage (structuré ou non) du domaine physique à *l'instant initial*. Il est bien important de comprendre que c'est sur ce maillage, fixe, que l'on discrétise les équations. Ceci étant, la méthode numérique devra le déplacer selon le champ de vitesse, et donc il faudra être capable de *réinterpréter* la discrétisation sur maillage mobile. Lors de ce déplacement, on suppose la connectivité des mailles fixes, comme sur la figure 3.1.

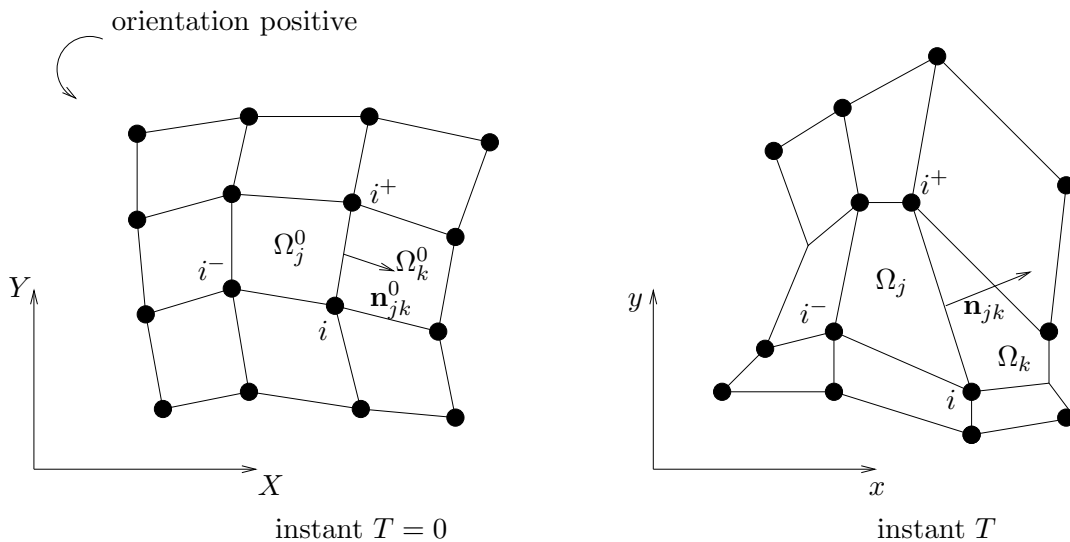


FIG. 3.1 – Notations générales sur le maillage, à l'instant initial (gauche) et après déplacement (droite).

#### Notations (sur maillage initial / mobile) :

- $j, k$  : indice générique des mailles  $\Omega_j^0 / \Omega_j$ ,  $\Omega_k^0 / \Omega_k$
- $\Gamma_{jk}^0 / \Gamma_{jk}$  : arête commune à  $\Omega_j^0$  et  $\Omega_k^0$  /  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$
- $i$  : indice générique des nœuds
- $i, i^+$  : nœuds extrémités de  $\Gamma_{jk}$ , dans le plan orienté
- $\mathbf{n}_{jk}^0 = (n_{jk}^X, n_{jk}^Y)$  : normale unitaire de  $\Gamma_{jk}^0$ , orientée de  $\Omega_j^0$  vers  $\Omega_k^0$
- $\mathbf{n}_{jk} = (n_{jk}^x, n_{jk}^y)$  : normale unitaire de  $\Gamma_{jk}$ , orientée de  $\Omega_j$  vers  $\Omega_k$
- $l_{jk}^0 / l_{jk}$  : longueur de  $\Gamma_{jk}^0 / \Gamma_{jk}$
- $s_j^0 / s_j$  : surface de la maille  $\Omega_j$
- $\mathcal{A}(j)$  : ensemble des arêtes de  $\Omega_j$
- $\mathcal{N}(j)$  : ensemble des nœuds de  $\Omega_j$
- $\mathcal{M}(i)$  : ensemble des mailles autour du nœud  $i$

Nous discrétisons le système de lois de conservation géométrique (2.15) en prenant bien en compte la contrainte différentielle (2.17). La faible hyperbolicité du système complet et la perte de régularité des inconnues géométriques nous incite à ne pas discrétiser ces dernières dans un contexte de lois de conservation classiques. C'est là un point essentiel de notre procédure, qui se distingue des travaux de [45] et [1] dans lesquels les inconnues géométriques sont constantes par mailles.

L'intégration de la contrainte différentielle sur une maille  $\Omega_j^0$  s'écrit, *via* la formule de Green, par

$$\int_{\Omega_j^0} (\partial_X \mathbb{M}^X + \partial_Y \mathbb{M}^Y) \, dX \, dY = \int_{\partial\Omega_j^0} (n^X \mathbb{M}^X + n^Y \mathbb{M}^Y) \, d\gamma = 0 \quad \forall j.$$

Ceci amène à introduire la matrice symbole  $\mathbb{M}$  par

$$\mathbb{M} = n^X \mathbb{M}^X + n^Y \mathbb{M}^Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma & \mu \\ \sigma & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où par définition les deux composantes  $\sigma$  et  $\mu$  sont reliées aux inconnues géométriques par

$$(3.1) \quad \begin{cases} \sigma = n^X M - n^Y B, \\ \mu = -n^X L + n^Y A. \end{cases}$$

Ainsi en définissant  $\sigma_{jk}$  et  $\mu_{jk}$  comme la trace de  $\sigma$  et  $\mu$  sur le bord  $\Gamma_{jk}^0$ , la contrainte différentielle se traduit au niveau discret sous la forme

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \sigma_{jk}(t) = 0, \\ \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \mu_{jk}(t) = 0. \end{cases} \quad \forall t \geq 0, \quad \forall j.$$

Compte tenu de la définition de la matrice  $\mathbb{M}$ , ceci revient à approcher les inconnues géométriques ( $A, B, L, M$ ) par leur trace ( $A_{jk}, B_{jk}, L_{jk}, M_{jk}$ ) sur l'ensemble des arêtes  $\Gamma_{jk}^0$  du maillage.

Il apparaît alors que les deux grandeurs géométrique scalaires désormais utiles au niveau discret sont les coefficients  $\sigma_{jk}$  et  $\mu_{jk}$ , les autres inconnues ne devenant que des intermédiaires de calcul ; ceci sera particulièrement clair ci-après lorsque l'on discrétisera le système de lois de conservation physique. La loi d'évolution de  $\sigma$  et  $\mu$  se déduit du système de loi de conservation géométrique (2.15) de la façon suivante, en gardant à l'esprit que la normale  $\mathbf{n}^0 = (n^X, n^Y)$  est constante en temps :

$$\begin{aligned} \partial_T \sigma &= n^X \partial_T M - n^Y \partial_T B \\ &= n^X \partial_Y v - n^Y \partial_X v \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} v \cdot \mathbf{t}^0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^0. \end{aligned}$$

De même, on trouve que

$$\partial_T \mu = -\nabla_{\mathbf{X}} u \cdot \mathbf{t}^0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^0.$$

Pour discrétiser ces dérivées tangentielles le long de  $\partial\Omega_j^0$ , nous introduisons des vitesses

aux nœuds  $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$ . On a en effet

$$\begin{aligned}\partial_T \sigma_{jk} &= \frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} \partial_T \sigma \, d\gamma \\ &= \frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} \nabla_{\mathbf{X}} v \cdot \mathbf{t}_{jk}^0 \, d\gamma \\ &= \frac{v_{i^+} - v_i}{l_{jk}^0},\end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $i$  et  $i^+$  sont les nœuds extrémités de  $\Gamma_{jk}^0$ , orientés dans le sens de  $\mathbf{t}_{jk}^0$ . Le calcul est analogue pour  $\mu_{jk}$ , si bien que la discrétisation que nous proposons est finalement

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_T \sigma_{jk} = \frac{v_{i^+} - v_i}{l_{jk}^0} & \text{et } \sigma_{jk}(0) = n_{jk}^X, \\ \partial_T \mu_{jk} = -\frac{u_{i^+} - u_i}{l_{jk}^0} & \text{et } \mu_{jk}(0) = n_{jk}^Y. \end{cases}$$

Les conditions initiales sont cohérentes avec la définition (3.1) explicitée à  $t = 0$ . Il nous faut à présent vérifier que cette discrétisation assure bien la contrainte différentielle (3.2).

**Proposition 3** *Quelques soient les vitesses aux nœuds  $\mathbf{u}_i$ , le système (3.3) conserve la contrainte différentielle (3.2) pour tout temps.*

*Preuve.* – Tout d'abord la contrainte est satisfaite à l'instant initial, car les contours  $\partial\Omega_j^0$  étant fermés on a

$$\sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 n_{jk}^X = \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 n_{jk}^Y = 0 \quad \forall j.$$

Puis en dérivant par rapport au temps on trouve

$$\begin{aligned}\partial_T \left( \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \sigma_{jk}(t) \right) &= \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \partial_T (l_{jk}^0 \sigma_{jk}(t)) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} (v_{i^+} - v_i) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Le calcul est encore analogue pour la composante  $\mu_{jk}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

A ce stade la discrétisation spatiale des inconnues géométriques est achevée, dans le référentiel lagrangien initial. Toutefois pour être exploitée, la méthode doit aussi se décrire sur maillage mobile. Grâce aux vitesses aux nœuds précédemment introduites, nous définissons de façon naturelle le déplacement du maillage par

$$(3.4) \quad \partial_T \mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{X}_i.$$

Ceci permet en outre, par intégration directe du système différentiel (3.3), de donner une interprétation géométrique à  $\sigma$  et  $\mu$  :

**Proposition 4** *Sur le maillage mobile, les coefficients  $\sigma_{jk}$  et  $\mu_{jk}$  s'interprètent simplement comme*

$$(3.5) \quad l_{jk}^0 \begin{pmatrix} \sigma_{jk} \\ \mu_{jk} \end{pmatrix} = l_{jk}(t) \mathbf{n}_{jk}(t).$$

On remarque que sous cette forme, la réalisation discrète (3.2) de la contrainte différentielle est triviale : elle traduit le fait que le contour  $\partial\Omega_j(t)$  reste fermé au cours du temps.

**Résumé de la méthode** - Pour conclure la section nous résumons ci dessous l'ensemble de cette procédure, ce qui donne par ailleurs une idée de l'implémentation possible de la partie géométrique de l'algorithme semi-discret.

- ★ On se donne un maillage initial constitué de points aux coordonnées  $\mathbf{X}_i$ .
- ★ La connectivité du maillage reste constante au cours du temps.
- ★ Les inconnues géométriques sont approchées sur les arêtes des mailles.
- ★ Deux grandeurs utiles  $\sigma$  et  $\mu$  sont définies *via* (3.1) à partir des inconnues de départ.
- ★ On suppose données à chaque temps  $t$  des vitesses aux nœuds  $\mathbf{u}_i$ .
- ★ Ces vitesses définissent le déplacement du maillage par (3.4).
- ★ Les inconnues  $\sigma$  et  $\mu$  sont discrétisées aux arêtes par (3.5).
- ★ La contrainte différentielle discrète (3.2) est satisfaite pour tout temps.

Cette partie géométrique va être complétée par la partie physique.

## 3.2 Discrétisation spatiale du système de lois de conservation physique

Nous avons démontré dans le chapitre 2 que le système de lois de conservation physique retrouve des propriétés mathématiques classiques (symétrisation, stabilité du linéarisé) sous la contrainte différentielle de Piola. Grâce à la discrétisation des inconnues géométriques compatible avec cette contrainte, il devient donc à présent possible de résoudre numériquement le système physique comme un système de lois de conservation classique. Dans cette perspective, la méthode des Volumes-Finis semble particulièrement adaptée car elle respecte intrinséquement les exigences de conservation évoquées en introduction (masse, impulsion, énergie totale), et permet en outre de traiter les chocs.

Le principe de cette méthode est d'intégrer les équations sur des volumes de contrôle : les grandeurs conservatives sont moyennées dans chaque volume, tandis que des *flux* sont définis sur les frontières pour intégrer l'opérateur de dérivation spatiale, de type divergence. Nous choisissons dans ce travail d'identifier les volumes de contrôle avec les mailles elles-mêmes, ce qui signifie que l'on dispose de grandeurs  $\mathbf{U}_j$  constantes par mailles. Insistons à nouveau bien sur le fait que le domaine d'intégration est décrit par le maillage *initial*, puisque notre formulation est complètement lagrangienne. Ainsi en posant

$$\mathbf{U}_j = \frac{1}{s_j^0} \int_{\Omega_j^0} \mathbf{U} dX dY, \quad \Psi_{jk} = \frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} \Psi d\gamma,$$

on obtient par intégration de (2.14) la formulation Volumes-Finis usuelle

$$(3.6) \quad s_j^0 \rho_j^0 \mathbf{U}_j'(t) + \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{jk} \Psi_{jk} \\ -\frac{1}{2} < \Psi_{jk}, \mathbb{M}_{jk} \Psi_{jk} > \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}_j(0) = \mathbf{U}_j^0.$$

La matrice  $\mathbb{M}_{jk}$  est bien celle introduite dans la section précédente, de coefficient<sup>1</sup>  $\sigma_{jk}$  et  $\mu_{jk}$ , et de divergence nulle :

$$(3.7) \quad \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \mathbb{M}_{jk} = \mathbb{O}.$$

La construction finale du schéma repose donc entièrement sur le choix à chaque arête du flux  $\Psi_{jk} = (p_{jk}, -u_{jk}, -v_{jk})$ , encore indéterminé. Plus exactement, si l'on développe (3.6) et que l'on utilise l'interprétation (3.5), on peut montrer que les inconnues à déterminer sont  $(p_{jk}, \mathbf{u}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk})$ , c'est-à-dire pressions et vitesses normales aux arêtes du maillage mobile.

Dans les approches usuelles, ces flux sont déterminés par la résolution d'un problème de Riemann purement unidimensionnel dans la direction normale à l'arête, défini par les états  $\mathbf{U}_j$  et  $\mathbf{U}_k$  de part et d'autre de  $\Gamma_{jk}$ . L'avantage de cette démarche, outre sa simplicité puisqu'elle est unidimensionnelle, est de rendre la méthode Volumes-Finis conservative, grâce au fait que sur chaque arêtes  $\mathbf{n}_{jk} = -\mathbf{n}_{kj}$ . Cependant, dans un formalisme lagrangien, des vitesses aux nœuds sont nécessaires pour déplacer le maillage. Le point dur vient alors de l'impossibilité, en toute généralité, de construire une vitesse aux nœuds dont la projection sur les normales voisines serait égales aux vitesses normales données par le solveur de Riemann : nous sommes en présence d'un problème mal posé, avec deux inconnues (composantes de la vitesse aux nœuds) et un nombre d'équations égal aux nombre d'arêtes autour du nœuds (par exemple quatre pour des maillages structurés, voir figure 3.2).

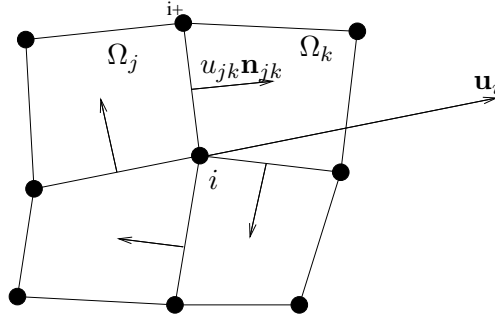


FIG. 3.2 – Problématique solveur aux arêtes / vitesse aux nœuds.

Ainsi dans les méthodes lagrangiennes de type Volumes-Finis usuelles [5], on résoud au mieux ce problème en minimisant l'écart entre projection de la vitesse aux nœuds et vitesses aux interfaces, la norme mesurant cet écart étant quelque peu arbitraire (un exemple sera donné au chapitre 5, équation (5.1)).

Mais à nos yeux le plus grand désavantage de cette procédure est de passer sous silence le problème de compatibilité entre vitesses aux nœuds et aux arêtes quant à la conservation de la masse. C'est ce que nous expliquons maintenant.

### 3.2.1 Compatibilité entre vitesses aux arêtes et aux nœuds

Une façon d'imposer la conservation locale de la masse consiste à mettre à jour la densité par la relation

$$(3.8) \quad \rho_j(t) s_j(t) = \rho_j^0 s_j^0,$$

<sup>1</sup>C'est notamment ici que l'on voit apparaître l'intérêt de ces deux grandeurs géométriques, au détriment de  $(A_{jk}, B_{jk}, L_{jk}, M_{jk})$ .



où  $s_j(t)$  est la surface de la maille  $\Omega_j$  à l'instant  $t$ , déplacée par les vitesses  $\mathbf{u}_i$ . Cette procédure calcule donc la densité à partir des vitesses aux nœuds.

Or le système de lois de conservation physique (3.6) inclut lui aussi une équation sur la densité, ou plus précisément sur le volume massique :

$$s_j^0 \rho_j^0 \partial_T \tau_j - \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 (\sigma_{jk} u_{jk} + \mu_{jk} v_{jk}) = 0,$$

que l'on peut écrire grâce à (3.5) sous la forme

$$(3.9) \quad s_j^0 \rho_j^0 \partial_T \left( \frac{1}{\rho_j} \right) - \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk} \mathbf{n}_{jk}(t) \cdot \mathbf{u}_{jk} = 0.$$

Cette fois-ci, la densité est donc évaluée à partir des vitesses de Riemann normales aux arêtes. La problématique entre les équations (3.8) et (3.9) est donc la suivante : comment rendre compatible la formulation Volumes-Finis et le déplacement du maillage pour conserver la masse ? La proposition suivante donne une condition suffisante pour répondre à cette question.

**Proposition 5** *Si les vitesses aux arêtes et aux nœuds sont reliées sur chaque interface  $\Gamma_{jk}$  par*

$$(3.10) \quad \mathbf{u}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+}) \cdot \mathbf{n}_{jk}(t),$$

alors la méthode Volumes-Finis (3.3)-(3.6) sur maillage mobile (3.4) conserve la masse, dans le sens où (3.8) est satisfaite pour tout temps.

Cette relation paraît assez simple, mais on verra dans le chapitre 6, en coordonnées cylindriques, qu'elle peut être beaucoup plus complexe.

*Preuve.* – La preuve est essentiellement de nature géométrique. On utilise notamment l'expression du calcul d'une surface donné par le lemme 5 ci-après. L'idée est d'obtenir l'égalité

$$(3.11) \quad \rho_j^0 s_j^0 \partial_T \tau_j(t) = \partial_T s_j(t),$$

de façon à avoir  $\partial_T \left( \tau_j(t) \left( \rho_j^0 s_j^0 - s_j(t) \rho_j(t) \right) \right) = 0$ , ce qui implique alors (3.8). Calculons pour cela la variation du volume au cours du temps. D'après le lemme 5, on a

$$\begin{aligned} \partial_T s_j &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left| \begin{array}{cc} u_i & x_{i+} \\ v_i & y_{i+} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_i & u_{i+} \\ y_i & v_{i+} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left| \begin{array}{cc} u_i + u_{i+} & x_{i+} - x_i \\ v_i + v_{i+} & y_{i+} - y_i \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+}) \cdot l_{jk} \mathbf{n}_{jk}. \end{aligned}$$

En identifiant ce résultat avec la formulation Volumes-Finis (3.9), on conclut que le choix (3.10) est bien une condition suffisante pour obtenir l'égalité (3.11).  $\square$

**Lemme 5** La surface  $s_j$  d'une maille polygonale  $\Omega_j$  de sommets  $(x_r, y_r)_r$  est égale à

$$s_j = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \begin{vmatrix} x_i & x_{i^+} \\ y_i & y_{i^+} \end{vmatrix}.$$

*Preuve.* – Considérons dans un premier temps une maille triangulaire de sommets  $(i, i^+, i^-)$ . Sa surface est

$$\begin{aligned} s_j &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{i^+} - x_i & x_{i^-} - x_i \\ y_{i^+} - y_i & y_{i^-} - y_i \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{vmatrix} x_i & x_{i^+} \\ y_i & y_{i^+} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{i^+} & x_{i^-} \\ y_{i^+} & y_{i^-} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{i^-} & x_i \\ y_{i^-} & y_i \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Maintenant considérons un polygone quelconque, décomposable en triangles. En appliquant la formule à chacun d'eux et en sommant les surfaces, les termes venant des arêtes intérieures s'annulent deux à deux et nous retrouvons la formule appliquée au polygone tout entier .  $\square$

En guise de remarque, on peut éclairer ce résultat de compatibilité sous un autre angle, davantage géométrique que physique. En effet l'équation (3.11), que nous avons cherché à satisfaire pour assurer la conservation de la masse, traduit

$$\partial_T J(t) = \partial_x u + \partial_y v.$$

Aussi le choix des vitesses aux arêtes (3.10) donne-t-il une *discrétisation de l'opérateur de divergence compatible avec la variation du volume* [62].

Pour conclure ce paragraphe, nous montrons que cette compatibilité entre vitesses permet d'interpréter entièrement la méthode lagrangienne sur maillage mobile, comme si l'on était parti d'un formalisme semi-lagrangien.

**Proposition 6** Si la relation de compatibilité (3.10) est assurée, alors la méthode intégrée dans la plan lagrangien est rigoureusement identique à celle qui serait obtenue par *Volumes-Finis* en intégrant la formulation semi-lagrangienne sur maillage mobile.

*Preuve.* – Cette vérification est élémentaire dans le principe, mais les notations peuvent être lourdes si l'on garde les écritures canoniques lagrangiennes et semi-lagrangiennes vectorielles en variable entropique. C'est pourquoi nous allons montrer le résultat avec le détail des équations scalaires. La méthode présentée ci-dessus s'écrit explicitement

$$\begin{cases} s_j^0 \rho_j^0 \partial_T \tau_j - \sum_k l_{jk}^0 (\sigma_{jk} u_{jk} + \mu_{jk} v_{jk}) = 0, \\ s_j^0 \rho_j^0 \partial_T u_j + \sum_k l_{jk}^0 \sigma_{jk} p_{jk} = 0, \\ s_j^0 \rho_j^0 \partial_T v_j + \sum_k l_{jk}^0 \mu_{jk} p_{jk} = 0, \\ s_j^0 \rho_j^0 \partial_T e_j + \sum_k l_{jk}^0 p_{jk} (\sigma_{jk} u_{jk} + \mu_{jk} v_{jk}) = 0. \end{cases}$$

On exploite maintenant le fait que, grâce à la relation (3.10),  $s_j^0 \rho_j^0 = s_j(t) \rho_j(t)$ , ainsi que

l'interprétation géométrique (3.5) sur  $\sigma$  et  $\tau$ . Le schéma s'écrit alors

$$(3.12) \quad \begin{cases} s_j \rho_j \partial_T \tau_j - \sum_k l_{jk} \mathbf{n}_{jk}(t) \cdot \mathbf{u}_{jk} = 0, \\ s_j \rho_j \partial_T u_j + \sum_k l_{jk} n_{jk}^x p_{jk} = 0, \\ s_j \rho_j \partial_T v_j + \sum_k l_{jk} n_{jk}^y p_{jk} = 0, \\ s_j \rho_j \partial_T e_j + \sum_k l_{jk} p_{jk} \mathbf{n}_{jk} \cdot \mathbf{u}_{jk} = 0. \end{cases}$$

Ceci correspond bien à l'intégration de type Volumes-Finis sur une maille  $\Omega_j(t)$  des équations d'Euler en coordonnées semi-lagrangiennes. Si l'on veut raisonner en toute généralité avec la forme canonique, il faut utiliser les relations entre flux lagrangiens et semi-lagrangiens explicités dans la preuve du théorème 3, chapitre 1.  $\square$

### 3.2.2 Formulation aux nœuds

L'intérêt de l'équation de compatibilité (3.10), si tant est qu'elle soit réalisable, est de nous placer dans le cadre d'une méthode de Volumes-Finis tout en conservant la masse lagrangienne et en déplaçant le maillage. Cependant, pour les mêmes raisons que nous avons évoquées précédemment, il est impossible d'inverser cette équation pour calculer des vitesses aux nœuds à partir des vitesses aux arêtes : le nombre d'équations et d'inconnues ne coïncident pas. Autrement dit, il est impossible de satisfaire l'équation (3.10) en gardant l'approche usuelle des solveurs de Riemann unidimensionnels aux arêtes.

La solution que nous proposons consiste alors à regarder le problème dans l'autre sens : si l'on arrive à construire un *solveur aux nœuds* qui fournisse des vitesses  $\mathbf{u}_i$ , il devient immédiat de satisfaire l'équation (3.10) en déterminant  $\mathbf{u}_{jk}$  comme une simple moyenne des vitesses aux extrémités de l'arête :

$$u_{jk} = \frac{1}{2} (u_i + u_{i+}), \quad v_{jk} = \frac{1}{2} (v_i + v_{i+}).$$

En vue de bâtir cette méthode locale aux nœuds, l'idée est d'abandonner les solveurs de Riemann usuels et de basculer la formulation Volumes-Finis (3.6) aux arêtes en une nouvelle formulation, équivalente, aux nœuds. Afin de conserver la structure canonique du système, nous définissons un degré de liberté à la variable  $\Psi$  aux nœuds par

$$(3.13) \quad \Psi_{jk} = \frac{1}{2} (\Psi_{ji} + \Psi_{ji+}),$$

où  $\Psi_{ji} = (p_{ji}, -u_i, -v_i)$ . A ce stade il est donc important de noter que nous introduisons des pressions aux nœuds  $p_{ji}$ , ou plus exactement autant de pressions à un nœud qu'il y a de mailles autour de lui : chaque maille apporte sa propre pression au nœud. La raison pour laquelle nous ne positionnons pas une unique pression par nœud est de nature algébrique pour écrire le solveur, comme on le verra plus tard. Par contre, pour la raison évidente du déplacement du maillage, chaque nœud possède une unique vitesse  $\mathbf{u}_i$ . Notons enfin que la relation (3.13), choisie pour assurer la relation de compatibilité des vitesses (3.10), paraît arbitraire quant à la pression, si ce n'est qu'elle permet de garder une écriture canonique du flux en variable  $\Psi$ .

Désormais, dans les premières composantes du flux de (3.6), les sommes sur les arêtes se remplacent donc en sommes sur les nœuds :

$$\sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \mathbb{M}_{jk} \Psi_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \mathbb{M}_{jk} (\Psi_{ji} + \Psi_{ji+}) = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji},$$

où la matrice aux nœuds  $\mathbb{N}_{ji}$  est simplement définie par

$$\mathbb{N}_{ji} = \frac{1}{2} \left( l_{jk}^0 \mathbb{M}_{jk} + l_{jk^-}^0 \mathbb{M}_{jk^-} \right).$$

Afin d'obtenir une formulation complètement localisée, il est nécessaire de faire une approximation sur le flux d'énergie, quadratique en la variable  $\Psi$  :

$$\langle \Psi_{jk}, \mathbb{M}_{jk} \Psi_{jk} \rangle \approx \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \mathbb{M}_{jk} \Psi_{ji} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji^+}, \mathbb{M}_{jk} \Psi_{ji^+} \rangle.$$

Grâce à cette approximation, la méthode *Volumes-Finis formulée aux nœuds* s'écrit en fin de compte

$$(3.14) \quad s_j^0 \rho_j^0 \partial_T \mathbf{U}_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( -\frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} \rangle \right) = \mathbf{0}.$$

Formellement, ce schéma est strictement analogue à celui de départ (3.6), mais désormais quel que soit  $\Psi_{ji}$ , il conserve par construction la masse de chaque maille. Pour mieux appréhender la signification géométrique de la nouvelle matrice  $\mathbb{N}_{ji}$  définie ci-dessus, écrivons-la en exploitant l'interprétation (3.5) de  $\mathbb{M}_{jk}$ . On a

$$(3.15) \quad \mathbb{N}_{ji} = l_{ji} \begin{pmatrix} 0 & n_{ji}^x & n_{ji}^y \\ n_{ji}^x & 0 & 0 \\ n_{ji}^y & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad l_{ji} \mathbf{n}_{ji} = \frac{1}{2} (l_{jk} \mathbf{n}_{jk} + l_{jk^-} \mathbf{n}_{jk^-}).$$

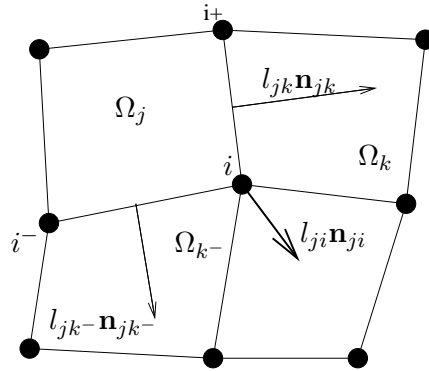


FIG. 3.3 – Définition des normales aux nœuds  $l_{ji} \mathbf{n}_{ji}$ .

On voit bien ici que l'on a échangé le rôle des faces et des nœuds, en remplaçant les normales aux faces en « normales aux nœuds ». Remarquons que comme pour les pressions, nous avons autant de normales à un nœud qu'il y a de mailles autour de celui-ci. Géométriquement ces nouvelles normales sont simplement définies comme la moyenne des deux normales aux faces autour du nœud, cf équation (3.15) et figure 3.3.

Pour compléter l'analogie de structure entre (3.6) et (3.14), la contrainte différentielle vérifiée par la discrétisation de  $\mathbb{M}_{jk}$  a son équivalent sur  $\mathbb{N}_{ji}$  :

**Proposition 7** *Pour chaque maille  $\Omega_j$  on a*

$$(3.16) \quad \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathbb{N}_{ji} = \mathbb{O}.$$

Autour de chaque nœud  $i$  on a

$$(3.17) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \mathbb{N}_{ji} = \mathbb{O}.$$

*Preuve.* – L'équation (3.16) est une conséquence de (3.2), tandis que (3.17) vient simplement du fait que  $\mathbf{n}_{jk} = -\mathbf{n}_{kj}$  sur chaque arête  $\Gamma_{jk}$ .  $\square$

A présent, nous disposons d'une nouvelle formulation Volumes-Finis *aux nœuds*, mais les quantités  $\Psi_{ji}$  sont toujours inconnues. Pour les déterminer, il n'est plus question de raisonner avec des solveurs de Riemann unidimensionnels - même dans la nouvelle direction privilégiée  $\mathbf{n}_{ji}$  - car il y a autour d'un nœud autant d'états que de mailles. Pour progresser, nous allons plutôt chercher à satisfaire les exigences de croissance de l'entropie et conservation de l'impulsion et de l'énergie, qui imposent des contraintes constructives.

### 3.2.3 Critère de croissance de l'entropie

Pour s'assurer de la bonne capture des solutions discontinues, il est nécessaire de disposer d'une méthode entropique, c'est-à-dire qui vérifie, dans notre approximation centrée, l'inégalité

$$(3.18) \quad s_j^0 \rho_j^0 \partial_T \eta_j \geq 0.$$

Le formalisme canonique en variable  $\Psi$  employé jusqu'à présent est particulièrement adapté pour manipuler et estimer la variation d'entropie. Ainsi en se rappelant que par définition

$$\mathcal{T} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \Psi \\ 1 \end{pmatrix},$$

on montre que

**Lemme 6** *Le bilan d'entropie de la méthode Volumes-Finis aux nœuds (3.14) sur une maille  $\Omega_j$  est égal à*

$$(3.19) \quad s_j^0 \rho_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle (\Psi_{ji} - \Psi_j), \mathbb{N}_{ji} (\Psi_{ji} - \Psi_j) \rangle.$$

*Preuve.* – Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} s_j^0 \rho_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j &= s_j^0 \rho_j^0 \left\langle \begin{pmatrix} \Psi_j \\ 1 \end{pmatrix}, \partial_T \mathbf{U}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( - \langle \Psi_j, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} \rangle \right) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{1}{2} \langle \Psi_j, \mathbb{N}_{ji} \Psi_j \rangle - \langle \Psi_j, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle (\Psi_{ji} - \Psi_j), \mathbb{N}_{ji} (\Psi_{ji} - \Psi_j) \rangle. \end{aligned}$$

Le terme ajouté dans la troisième égalité est bien nul compte tenu de la contrainte (3.16).  $\square$

Les matrices  $\mathbb{N}_{ji}$  n'étant pas définies positives, on devine à la vue du bilan (3.19) que n'importe quel choix de  $\Psi_{ji}$  ne peut pas impliquer l'inégalité (3.18). En une dimension d'espace, B. Després a montré que l'on peut construire de façon abstraite toute une classe de schémas entropiques, en décentrant la variable  $\Psi$  au bord des mailles selon, *grosso modo*, le signe de la matrice de flux  $\mathbb{N}$  [25]. Cette méthode s'appuie notamment sur la décomposition de  $\mathbb{N}$  en la somme d'une matrice positive et d'une matrice négative. La difficulté en deux dimensions d'espace vient du fait qu'il n'existe pas intrinséquement d'état amont et aval autour d'un nœud pour décentrer les flux. Dans [29] nous avons toutefois exploité cette technique en identifiant l'état amont par  $\mathbf{U}_j$  et l'état aval comme un état fictif, à déterminer, dépendant des états  $\mathbf{U}_k$  des autres mailles  $\Omega_k$  autour du nœud. Nous ne reproduisons pas ici cette procédure générale, et proposons une démarche plus rapide. En effet dans le cas de la dynamique des gaz, on a

$$\langle \Psi, \mathbb{N}_{ji} \Psi \rangle = -2p l_{jr} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u},$$

si bien que le bilan entropique (3.19) s'exprime tout simplement par

$$s_j^0 \rho_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j = - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (p_{ji} - p_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j).$$

Un choix simple pour rendre le second membre positif consiste à imposer

$$(3.20) \quad p_{ji} = p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i),$$

où  $\alpha_{ji}$  est un coefficient positif. Par analogie avec les invariants de Riemann dans la direction  $\mathbf{n}_{jr}$ , on devine que  $\alpha$  prend la dimension de  $\rho c$ ,  $c$  étant la vitesse du son locale.

En guise de remarque, précisons que ce choix de pression aux nœuds (3.20) est strictement identique à celui que nous obtenons avec la décomposition de matrice  $\mathbb{N}_{ji}$  particulier de [29].

A présent, les vitesses aux nœuds  $\mathbf{u}_i$  restent les dernières inconnues de la méthode. La contrainte de schéma conservatif va permettre de les déterminer de façon unique.

### 3.2.4 Critère de conservation de l'impulsion et de l'énergie totale

La méthode Volumes-Finis usuelle est conservative par nature, car les flux aux arêtes  $\Gamma_{jk}$  sont identiques pour les mailles  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$ . Ainsi ils se compensent de part et d'autre de chaque arête, ce qui permet de conserver globalement la grandeur  $\mathbf{U}_j$  sur tout le domaine, aux termes de bord près :

$$\partial_T \left( \sum_{\forall j} s_j^0 \rho_j^0 \mathbf{U}_j \right) = \mathbf{0}.$$

Cet équilibre est détruit dans notre formulation aux nœuds, si bien que la conservation de  $\mathbf{U}$  sur tout le domaine n'est pas automatiquement satisfaite pour tout flux. A l'instar de la méthode Volumes-Finis classique, nous imposons une condition locale de conservation, qui d'une part entraîne la conservation globale, et d'autre part impose des contraintes locales constructives.

Une condition locale suffisante de conservation, toujours aux termes de bord près, est

$$\sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \langle \Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} \rangle = 0 \quad \forall i.$$

Dans ce cas on a bien

$$\begin{aligned}
\partial_T \left( \sum_{\forall j} s_j^0 \rho_j^0 \mathbf{U}_j \right) &= - \sum_{\forall j} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( -\frac{1}{2} < \mathbf{\Psi}_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{\Psi}_{ji} > \right) \right) \\
&= - \sum_{\forall i} \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \left( -\frac{1}{2} < \mathbf{\Psi}_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{\Psi}_{ji} > \right) \right) \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Explicitons cette condition suffisante dans le cas des équations d'Euler. Elle s'écrit

$$(3.21a) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_i = 0,$$

$$(3.21b) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji} p_{ji} \mathbf{n}_{ji} = \mathbf{0},$$

$$(3.21c) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji} p_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_i = 0.$$

En sortant  $\mathbf{u}_i$  de la somme sur  $j$ , on se rend compte que (3.21a) est toujours satisfaite grâce à la contrainte (3.17). Ceci est parfaitement cohérent, car la méthode conservant par construction la masse de chaque maille, elle conserve la masse de toute sous partie du domaine. Par la même manipulation, (3.21c) est vérifiée dès lors que (3.21b) l'est, ce qui fait de cette dernière équation l'unique contrainte de conservation.

Au bout du compte, l'équation (3.21b) permet, avec (3.20) de déterminer de façon unique les vitesses aux nœuds, comme l'exprime la proposition suivante.

**Proposition 8** *Couplée à la contrainte de croissance de l'entropie (3.20), la contrainte de conservation de l'impulsion et de l'énergie totale (3.21b) est équivalente à la résolution, au niveau de chaque nœud  $i$ , du système linéaire  $2 \times 2$  d'inconnue  $\mathbf{u}_i$*

$$(3.22) \quad \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji}.$$

*De plus si à tout instant le maillage est triangulaire non dégénéré, alors ce système est inversible pour chaque nœud à l'intérieur du domaine.*

Avant de démontrer ce résultat, précisons que par maillage triangulaire *non dégénéré* nous entendons maillage orienté formé de surfaces triangulaires *strictement positives*. Comme on le précise en fin de preuve, l'inversibilité est encore vrai pour des maillages quelconques dont les arêtes ne se sont pas croisées; toutefois dans ce cas le signe de la surface des cellules ne suffit pas à caractériser les croisements éventuels.

*Preuve.* – L'écriture du système (3.22) est immédiate, il suffit d'injecter (3.20) dans (3.21b) et de regrouper convenablement les termes. Afin de démontrer l'inversibilité du système, il est nécessaire de prouver que le déterminant de

$$\mathbb{A}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji}$$

ne s'annule jamais. Pour cela on remarque que pour tout vecteur  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^2$  la quantité

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}_i \mathbf{x} \rangle = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_{ji})^2$$

est nulle si et seulement si, pour tout  $j$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_{ji} = 0$ . On en déduit que la matrice  $\mathbb{A}_i$  est définie positive (donc de déterminant non nul) dès lors que les normales  $\mathbf{n}_{ji}$  n'appartiennent pas toutes à un même hyperplan de  $\mathbb{R}^2$ . Nous allons raisonner par l'absurde, en supposant justement que ces normales sont toutes colinéaires, c'est-à-dire

$$l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \wedge l_{ki} \mathbf{n}_{ki} = 0 \quad \forall (j, k) \in \mathcal{M}(i) \times \mathcal{M}(i).$$

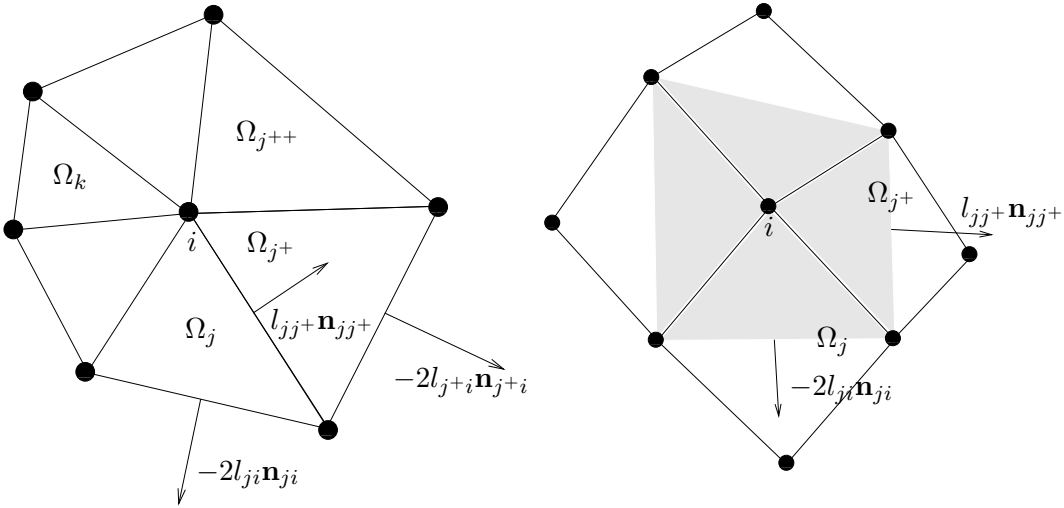


FIG. 3.4 – Inversibilité du solveur aux nœuds sur maillage triangulaire (gauche) et quelconque (droite).

Calculons maintenant la surface de  $\Omega_j$ . Pour une cellule triangulaire, compte tenu de la définition (3.15),  $l_{ji} \mathbf{n}_{ji}$  n'est rien d'autre que la moitié de la normale entrante à  $\Omega_j$ , opposé au nœud  $i$  (cf figure 3.4). Ainsi on peut évaluer  $s_j$  par

$$\begin{aligned} s_j &= -l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \wedge l_{jj+} \mathbf{n}_{jj+} \\ &= -l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \wedge (-2l_{j+i} \mathbf{n}_{j+i} + l_{j+j++} \mathbf{n}_{j+j++}) \\ &= -l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \wedge l_{j+j++} \mathbf{n}_{j+j++} \end{aligned}$$

La deuxième égalité vient de la définition de  $l_{j+i} \mathbf{n}_{j+i}$  et la troisième de la colinéarité de toutes les normales aux nœuds. Ce jeu de permutation peut s'effectuer sur toutes les mailles  $\mathcal{M}(r)$ , ce qui montre que

$$s_j = -l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \wedge l_{j_0 j_0^+} \mathbf{n}_{j_0 j_0^+} \quad \forall j_0 \in \mathcal{M}(i).$$

Enfin sommions toutes ces surfaces :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} s_j &= - \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \right) \wedge l_{j_0 j_0^+} \mathbf{n}_{j_0 j_0^+} \\ &= 0 \end{aligned}$$



en vertu de la contrainte (3.17). Or cette conclusion est absurde car nous avons initialement supposé toutes les surfaces strictement positives. Ainsi, les normales  $l_{ji}\mathbf{n}_{ji}$  ne sont pas toutes colinéaires, ce qui achève la preuve de la proposition.

Dans le cas d'un maillage non triangulaire, on peut s'inspirer de la démonstration ci-dessus en considérant les coins triangulaires des mailles au voisinage du nœud  $i$ , cf. parties grisées de la figure 3.4, à droite. Si les arêtes des mailles autour du nœud ne se sont pas croisées, alors elles définissent bien des triangles de surfaces strictement positives, et on se ramène au cas précédent pour conclure quant à l'inversibilité du système.  $\square$

**Résumé de la méthode** - La construction du solveur aux nœuds est achevée. Nous pouvons résumer l'algorithme semi-discret comme suit :

- \* On suppose donné un maillage non dégénéré à l'instant  $t$ .
- \* Celui-ci permet de calculer les normales  $\mathbf{n}_{ji}$  aux nœuds par (3.15).
- \* On calcule les vitesses aux nœuds  $\mathbf{u}_i$  en résolvant le système linéaire (3.22).
- \* Les pressions aux nœuds sont alors déterminées par (3.20).
- \* On intègre le système différentiel en temps (3.14).
- \* La méthode est entropique, conservative et préserve la masse de chaque cellule au cours du temps.

Pour conclure la section, nous présentons dans le théorème ci-dessous un résultat qui stipule que sur maillage triangulaire, la densité et l'énergie interne restent positives au cours du temps, ainsi que les volumes des cellules (c'est-à-dire que les cellules triangulaires ne se croisent jamais). Pour des raisons techniques nous nous restreignons à une solution et un domaine périodique en espace, ce qui élude la question des conditions aux limites. Toutefois à notre connaissance il s'agit du premier résultat de non-croisement de maille pour un schéma lagrangien multidimensionnel.

**Théorème 12** *Considérons le schéma continu en temps (3.14-3.15)-(3.20)-(3.22) sur maillage mobile (3.4). On étudie l'écoulement d'un gaz parfait de coefficient monoatomique  $\gamma$ , ce qui permet d'écrire explicitement l'entropie comme*

$$\eta(\tau, \varepsilon) = \ln(\tau \varepsilon^{\gamma-1}).$$

*Nous partons d'une condition initiale satisfaisant  $\tau_j^0 > 0$  et  $\varepsilon_j^0 > 0$ , sur un maillage initial triangulaire et non dégénéré, c'est-à-dire dont chaque volume  $s_j^0$  est strictement positif. On suppose enfin la condition initiale et le domaine de calcul périodiques sur  $\mathbb{R}^2$ .*

*Alors pour tout temps, la densité et l'énergie interne restent positives, et les mailles triangulaires ne se croisent pas, i.e.  $s_j(t) > 0$ .*

*Preuve.* - La démonstration repose d'une part sur l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz au système différentiel ordinaire définissant le schéma continu en temps, et d'autre part sur les trois propriétés essentielles de l'approximation qui nous ont guidé jusqu'à présent, à savoir la conservation des quantités physiques, le critère d'entropie, et l'interprétation sur maillage mobile. Dans un premier temps nous montrons que le système différentiel admet une unique solution maximale, satisfaisant les propriétés énoncées, sur un intervalle  $[0, T)$ , puis nous montrons que  $T = +\infty$ .

Partons du système différentiel ordinaire complet définissant à la fois les inconnues physiques et géométriques, cf. équations (3.4) et (3.14). La périodicité de la condition initiale et du domaine de calcul permet de considérer un nombre fini de cellules et de nœuds, notés respectivement  $N_c$  et  $N_n$ , qui tous peuvent être vus comme à l'intérieur du

domaine. Ainsi le système s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_i(t) = \mathbf{u}_i(t) & 1 \leq i \leq N_n, \\ \mathbf{U}'_j(t) = -\frac{1}{s_j^0 \rho_j^0} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( -\frac{1}{2} < \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji} > \right) & 1 \leq j \leq N_c, \\ \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0 & 1 \leq i \leq N_n, \\ \mathbf{U}_j(0) = \mathbf{U}_j^0 & 1 \leq j \leq N_c. \end{cases}$$

Pour plus de légèreté dans les écritures nous introduisons le vecteur inconnu global

$$\mathbf{z} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_n}, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{N_c}) \in \mathbb{R}^{2N_n+4N_c},$$

ce qui permet de résumer le système ci-dessus sous la forme compacte

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)), \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0. \end{cases}$$

Par identification, la fonction  $\mathbf{f}$  est donc non-linéaire et à valeur dans  $\mathbb{R}^{2N_n+4N_c}$ .

Puis on définit l'espace des phases  $E$  comme

$$E = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N_n+4N_c}, \quad \tau_j > 0, \quad \varepsilon_j > 0, \quad s_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_n}) > 0, \quad 1 \leq j \leq N_c \}.$$

A connectivité du maillage fixée, les volumes  $s_j$  sont bien des fonctions de tous les  $\mathbf{x}_j$ , très exactement polynômiales. Il en est de même de l'énergie interne  $\varepsilon_j$  en fonction de  $e_j$  et  $\mathbf{u}_j$ . Ainsi  $E$  est l'image réciproque de l'ouvert  $(\mathbb{R}^{+*})^{3N_c}$  par l'application régulière - puisque polynômiale - qui a  $\mathbf{z}$  associée  $(\tau_1, \dots, \tau_{N_c}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N_c}, s_1, \dots, s_{N_c})$ . C'est donc un ouvert de  $\mathbb{R}^{2N_n+4N_c}$ .

Pour achever de présenter le cadre de travail nous prouvons maintenant que  $\mathbf{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans l'espace des phases  $E$ . D'après la définition (3.15),  $\mathbb{N}_{ji}$  est une fonction affine des  $(\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq \mathcal{N}(j)}$ , ce qui montre que  $\mathbf{f}$  est une fonction régulière de tous les  $\mathbf{x}_i$  et  $(\Psi_{ji})$ . Il nous faut donc étudier la régularité de  $\Psi_{ji}$  en fonction de  $\mathbf{z}$ . D'une part, les pressions aux nœuds  $p_{ji}$  définies par (3.20), sont des fonctions régulières de  $\mathbf{z}$  et des vitesses aux nœuds  $\mathbf{u}_i$  - on se rappelle en particulier que les coefficients  $\alpha_{ji}$  dans (3.20) sont proportionnels à la vitesse du son, régulière en fonction de  $\varepsilon_j$  et  $\tau_j$  dans  $E$ . D'autre part, les vitesses aux nœuds  $\mathbf{u}_i$  sont solutions du système linéaire (3.22), dont les coefficients dépendent régulièrement de  $\mathbf{z}$ ; on notera ici que l'hypothèse de périodicité est très pratique pour avoir une dépendance seulement en  $\mathbf{U}_j$ , et non en quantités physiques extérieures. Comme ce système linéaire est inversible sur maillage triangulaire non dégénéré, sa solution est de classe  $\mathcal{C}^1$  en fonction de  $\mathbf{z}$ . Finalement nous obtenons bien que  $\mathbf{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $E$ . On voit au passage la nécessité d'inclure  $E$  dans un espace dont les maillages soient non dégénérés.

Ainsi le système différentiel ordinaire vérifie-t-il toutes les hypothèses requises par le théorème de Cauchy-Lipschitz, duquel découle la conclusion : il existe un interval maximal  $[0, T)$ ,  $0 \leq T \leq +\infty$ , sur lequel le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution  $t \rightarrow \mathbf{z}(t) \in \mathcal{C}^1(E)$ .

Maintenant nous allons montrer que  $T = +\infty$  par un argument classique dans la théorie des systèmes dynamiques. Pour cela notons  $(T, \bar{\mathbf{z}})$  l'extrémité droite de la solution  $([0, T), \mathbf{z})$ , *i.e.* notons  $\bar{\mathbf{z}}$  un point d'accumulation de  $t \rightarrow \mathbf{z}(t)$  en  $T$ ; en toute généralité cette extrémité peut se réduire à l'ensemble vide. Alors sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz il est connu que  $(T, \bar{\mathbf{z}}) \cap (\mathbb{R}^+ \times E) = \emptyset$ . Nous voulons donc montrer que  $\bar{\mathbf{z}}$  existe et réside dans un ensemble compact de  $E$ , ce qui impliquera que  $T = +\infty$ .

A cette fin nous allons utiliser les estimations *a posteriori* suivantes. D'abord la loi de conservation sur le volume massique implique

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq j \leq N_c} s_j^0 \rho_j^0 \tau_j(t) &= \sum_{1 \leq j \leq N_c} s_j^0 + \int_0^t \sum_{1 \leq j \leq N_c} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} l_{ji}(s) \mathbf{u}_i(s) \cdot \mathbf{n}_{ji}(s) ds \\
&= |\Omega^0| + \int_0^t \sum_{1 \leq i \leq N_n} \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji}(s) \mathbf{n}_{ji}(s) \right) \cdot \mathbf{u}_i(s) ds \\
&= |\Omega^0|,
\end{aligned}$$

qui est le volume initial du domaine de calcul. Pour éliminer le terme d'intégration en temps nous avons utilisé la propriété de conservation locale (3.21a), qui elle-même découle simplement de la contrainte (3.17) sur  $\mathbb{N}_{jr}$  à chaque instant. Comme  $s_j^0 \tau_j^0$  et  $\tau_j(t)$  sont strictement positif, d'après respectivement l'hypothèse de départ et ce que nous avons montré précédemment, on en déduit la première estimation

$$\tau_j(t) \leq \frac{|\Omega^0|}{s_j^0 \rho_j^0} \quad 1 \leq j \leq N_c.$$

Puis le critère de croissance d'entropie, pour une loi d'état de gaz parfait, apporte une deuxième estimation :

$$\varepsilon_j(t) \geq \varepsilon_j^0 \left( \frac{\tau_j^0}{\tau_j(t)} \right)^{\gamma-1} \geq \varepsilon_j^0 \left( \frac{s_j^0}{|\Omega^0|} \right)^{\gamma-1} \quad 1 \leq j \leq N_c.$$

Considérons maintenant l'équation sur l'énergie totale. Son intégration en temps donne

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq j \leq N_c} s_j^0 \rho_j^0 e_j(t) &= \sum_{1 \leq j \leq N_c} s_j^0 \rho_j^0 e_j^0 + \int_0^t \sum_{1 \leq j \leq N_c} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} l_{ji}(s) p_{ji}(s) \mathbf{u}_i(s) \cdot \mathbf{n}_{ji}(s) ds \\
&= E^0 + \int_0^t \sum_{1 \leq i \leq N_n} \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji}(s) p_{ji}(s) \mathbf{u}_i(s) \cdot \mathbf{n}_{ji}(s) ds \\
&= E^0,
\end{aligned}$$

où  $E^0 = \sum_{1 \leq j \leq N_c} s_j^0 \rho_j^0 e_j(t)$  est l'énergie totale initiale du domaine physique. Nous avons une fois de plus exploité le caractère localement conservatif du schéma. Ceci montre que l'énergie totale de chaque cellule est bornée, et comme  $\varepsilon_j \leq e_j$ , nous obtenons la troisième estimation

$$\varepsilon_j(t) \leq \frac{E^0}{s_j^0 \rho_j^0} \quad 1 \leq j \leq N_c.$$

Puis le critère de croissance de l'entropie apporte l'estimation par dessous suivante

$$\tau_j(t) \geq \left( \frac{\varepsilon_j^0}{\varepsilon_j(t)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tau_j^0 \geq \left( \frac{\varepsilon_j^0 s_j^0 \rho_j^0}{E^0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tau_j^0 \quad 1 \leq j \leq N_c.$$

Finalement la propriété de conservation de la masse  $s_j(t) = s_j^0 \rho_j^0 \tau_j(t)$  donne un encadrement des volumes :

$$s_j^0 \left( \frac{\varepsilon_j^0 s_j^0 \rho_j^0}{E^0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \leq s_j(t) \leq |\Omega^0| \quad 1 \leq j \leq N_c.$$

A ce stade nous avons donc montré que le vecteur  $(\tau_1, \dots, \tau_{N_c}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N_c}, s_1, \dots, s_{N_c})$  est inclu dans un compact de  $(\mathbb{R}^{+*})^{3N_c}$ . Or l'application qui à  $\mathbf{z}$  associe ce vecteur est *polynômiale* - et pas seulement régulière - ce qui implique que  $\mathbf{z}$  vit dans un compact de  $E$ . Donc  $\bar{\mathbf{z}}$  existe et réside dans  $E$ , et nécessairement  $T = +\infty$ . La preuve est complète.  $\square$

### 3.3 Traitement des conditions aux limites

Jusqu'à présent nous avons construit un solveur aux nœuds qui détermine des « flux » à travers chaque nœuds intérieur au domaine. Nous voulons ici étendre cette construction aux nœuds en bord de domaine de façon consistante avec l'analyse précédente, c'est-à-dire toujours à partir des critères d'entropie et de conservation locale. Notre objectif est simplement de montrer que le nouveau formalisme de solveur aux nœuds trouve une adaptation simple pour quelques conditions aux limites typiques des simulations lagrangiennes.

**Condition de type « fluide »** - On entend par là que la pression est prescrite sur la frontière :

$$p|_{\partial\Omega} = p_{ext},$$

où  $p_{ext}$  dépend éventuellement du temps et de l'espace. Considérons donc un nœud  $i$  sur  $\partial\Omega$  et notons toujours  $\mathcal{M}(i)$  les indices des mailles autour de celui-ci. On introduit une maille fictive  $\Omega_*$  s'appuyant sur les deux arêtes de  $\partial\Omega$  autour de  $i$ ; la forme exacte de cette cellule n'a pas besoin d'être spécifiée, cf. figure 3.5. Grâce à cette méthode, tout se passe comme si le nœud  $i$  était à l'intérieur du domaine, et le solveur originel peut s'appliquer. Le point crucial consiste à imposer  $p_{*i}$  (c'est-à-dire la pression au nœud  $i$  vue depuis la maille  $\Omega_*$ ) égale à la pression extérieure.

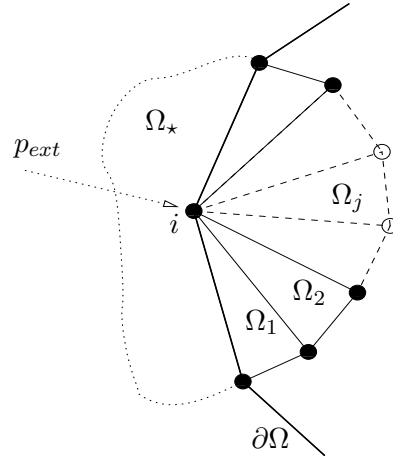


FIG. 3.5 – Condition aux limites de type fluide.

Le solveur aux nœuds (3.20)-(3.22) s'écrit alors, en distinguant  $j \in \mathcal{M}(i)$  et  $j = \star$  :

$$p_{ji} = p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \quad \forall j \in \mathcal{M}(i),$$

$$p_{*i} = p_{ext} = p_* + \alpha_{*i} \mathbf{n}_{*i} \cdot (\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_i),$$

$$\left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji} \right) \mathbf{u}_i + \alpha_{\star i} l_{\star i} (\mathbf{n}_{\star i} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{n}_{\star i} = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} + (p_{\star} + \alpha_{\star i} \mathbf{n}_{\star i} \cdot \mathbf{u}_{\star}) l_{\star i} \mathbf{n}_{\star i}.$$

La seconde équations permet d'écrire, en exploitant le fait que  $l_{\star i} \mathbf{n}_{\star i} = -\sum_j l_{ji} \mathbf{n}_{ji}$ , le système final

$$\mathbb{A}_i \mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j - p_{ext} + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}_i = \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji} \right).$$

Au déclage en pression près dans le membre de droite<sup>2</sup>, on doit donc inverser le même système que précédemment en  $\mathbf{u}_i$ , mise à part que cette fois-ci les normales  $\mathbf{n}_{ji}$  pour  $j \in \mathcal{M}(i)$  ne définissent plus un contour fermé. Le système est une fois de plus inversible si elles ne sont pas toutes colinéaires, ce qui n'est désormais pas forcément vérifié, même pour un maillage non dégénéré. Nous n'avons pas rencontré cette difficulté dans l'ensemble des cas-tests qui nous ont été proposés, cf. section numérique, mais si cette pathologie devait apparaître (par exemple trivialement avec une unique maille au niveau du nœud frontière), il serait possible de rendre le système inversible en divisant une maille de bord.

**Condition de type « mur plat »** - Ici on considère une frontière rectiligne, dans le sens où trois nœuds de bord sont alignés, contre laquelle le fluide ne peut se déplacer que tangentiellement. En toute généralité ce mur peut se déplacer (cas d'un piston) à une vitesse notée  $\mathbf{u}_{ext}$ , et la contrainte de glissement selon sa direction normale  $\mathbf{n}_{ext}$  s'écrit

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}_{ext} = \mathbf{u}_{ext} \cdot \mathbf{n}_{ext}.$$

A nouveau on introduit une maille fictive indicée  $\star$ , de forme quelconque, et on déroule la même algèbre. Le mur étant plat, on peut choisir comme direction  $\mathbf{n}_{ext} = -l_{\star i} \mathbf{n}_{\star i} = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji} \mathbf{n}_{ji}$ . La différence avec le cas précédent est que  $p_{\star i}$  est désormais inconnue, mais la contrainte de glissement apporte une troisième équation ; le système d'inconnues  $(\mathbf{u}_i, p_{\star i})$  s'écrit

$$\begin{cases} \mathbb{A}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{n}_{ext} p_{\star i} = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji}, \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ext} = \mathbf{u}_{ext} \cdot \mathbf{n}_{ext}. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut  $\langle \mathbf{n}_{ext}^\perp, \mathbb{A}_i \mathbf{n}_{ext}^\perp \rangle$  et ne s'annule pas sur maillage non-dégénéré. En effet

$$\langle \mathbf{n}_{ext}^\perp, \mathbb{A}_i \mathbf{n}_{ext}^\perp \rangle = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \langle \mathbf{n}_{ext}^\perp \cdot \mathbf{n}_{ji} \rangle^2 = \sum_{j \in \{\mathcal{M}(i), \star\}} \alpha_{ji} l_{ji} \langle \mathbf{n}_{ext}^\perp \cdot \mathbf{n}_{ji} \rangle^2,$$

et le contour définie par les normales  $\mathbf{n}_{ji}$  pour  $j \in \{\mathcal{M}(i), \star\}$  est fermé ; on est donc dans le cas de la preuve de la proposition 8.

**Condition de type « mur-mur »** - Ce cas est une généralisation de la condition précédente, pour lequel deux parois non alignées de direction  $\mathbf{n}_{ext1}$  et  $\mathbf{n}_{ext2}$  forment un

---

<sup>2</sup>Si  $p_{ext}$  est uniforme, ceci est cohérent avec le fait que les équations d'Euler soient définies à une pression constante près.

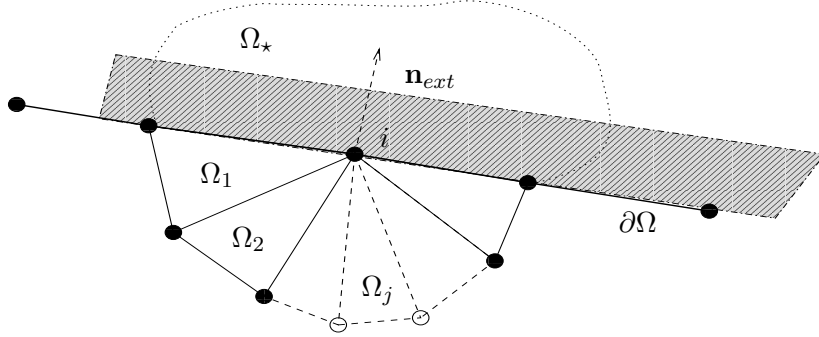


FIG. 3.6 – Condition aux limites de type mur.

coin. Alors les deux conditions de glissement<sup>3</sup> suffisent à définir complètement la vitesse du nœud  $i$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ext_1} = \mathbf{u}_{ext_1} \cdot \mathbf{n}_{ext_1}, \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ext_2} = \mathbf{u}_{ext_2} \cdot \mathbf{n}_{ext_2}, \end{cases} \quad \text{avec } \mathbf{n}_{ext_1} \wedge \mathbf{n}_{ext_2} \neq 0.$$

Puis les pressions  $p_{ji}$  aux nœuds sont déterminées par (3.20). On n'a donc pas besoin d'une relation de type (3.22), mais elle serait satisfaite en introduisant deux mailles fictives  $\Omega_\star$  et  $\Omega_\diamond$  dont les pressions aux nœuds  $p_{\star i}$ ,  $p_{\diamond i}$  seraient solutions de

$$\mathbf{n}_{\star i} p_{\star i} + \mathbf{n}_{\diamond i} p_{\diamond i} = \mathbb{A}_i \mathbf{u}_i - \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji},$$

système toujours inversible quitte à bien choisir la délimitation arbitraire entre  $\Omega_\star$  et  $\Omega_\diamond$ .

### 3.4 Discrétisation en temps

Dans cette dernière section nous étudions la discrétisation en temps du schéma semi-continu. Les deux principales propriétés sur lesquelles nous nous sommes focalisées jusqu'à présent, à savoir la réinterprétation sur maillage mobile avec masse constante et l'inégalité entropique, paraissent difficiles à maintenir simultanément au niveau discret en temps, pour de simples raisons algébriques. Une façon de les combiner serait d'employer un schéma implicite en temps, que l'on ne juge pas nécessaire de présenter ici (et qui n'est pas utilisé dans les exemples numériques du chapitre 5). Ci-dessous nous détaillons plutôt une version complètement explicite, de type schéma d'Euler, qui permet d'assurer la production d'entropie sous condition CFL :

$$(3.23) \quad s_j^0 \rho_j^0 (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) + \Delta t^n \sum_i \left( \begin{array}{c} \mathbb{N}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \\ -\frac{1}{2} (\Psi_{ji}^n)^t \mathbb{N}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \end{array} \right) = \mathbf{0}.$$

<sup>3</sup>Evidemment, s'il y a un mouvement relatif entre un mur et l'autre, il ne peut se faire que selon la tangente de l'autre.

Le déplacement du maillage s'effectue par :

$$(3.24) \quad \mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i + \Delta t^n \mathbf{u}_i^n,$$

où dans ces systèmes les grandeurs aux nœuds sont calculées par le solveur (3.20)-(3.22) à l'instant  $n$ .

Après cette étape, il faut donc mettre à jour la densité par  $\rho_j^{n+1} = \rho_j^n s_j^n / s_j^{n+1}$ .

**Proposition 9 (Stabilité)** *Soit  $\alpha_{ji}^n$  un paramètre libre mais strictement positif pour tout  $(j, i, n)$  et définissons les deux quantités*

$$\sigma_j^{(1)} = (\rho_j^n c_j^n)^2 \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{l_{ji}^n}{2\alpha_{ji}^n},$$

$$\sigma_j^{(2)} = \frac{\sum_i l_{ji}^n \alpha_{ji}^n + \sqrt{(\sum_i l_{ji}^n \alpha_{ji}^n)^2 - 4(\sum_i (\lambda_{ji}^n)^2 \sum_i (\mu_{ji}^n)^2 - (\sum_i \lambda_{ji}^n \mu_{ji}^n)^2)}}{4},$$

où  $\lambda_{ji}^n = \sqrt{l_{ji}^n \alpha_{ji}^n} (n_{ji}^x)^n$ ,  $\mu_{ji}^n = \sqrt{l_{ji}^n \alpha_{ji}^n} (n_{ji}^y)^n$ . Posons enfin  $\sigma_j^n = \max(\sigma_j^{(1)}, \sigma_j^{(2)})$ .

Si pour tout  $j$  le pas de temps  $\Delta t^n$  est contrôlé par

$$(3.25) \quad \sigma_j^n \frac{\Delta t^n}{\rho_j^0 s_j^0} \leq \frac{\mathcal{T}_j^{n+1}}{\mathcal{T}_j^n},$$

alors le schéma (3.23) est entropique au troisième ordre dans le sens où il existe un nombre positif  $C_j^n$  et une forme quadratique positive  $Q$  tels que

$$(3.26) \quad \eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) = \eta(\mathbf{U}_j^n) + C_j^n + Q(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) + \mathcal{O}(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n)^3.$$

*Preuve.* – Cette démonstration reprend les grandes lignes celle de [25] dans le cas monodimensionnel, et peut donc se voir comme sa généralisation au cas des solveurs aux nœuds bidimensionnels introduits ici.

Définissons pour  $t \in [0, 1]$  la fonction d'interpolation linéaire  $\mathbf{U}$  entre les itérations  $n$  et  $n+1$  par

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_j^n + t(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n).$$

Alors  $\eta(\mathbf{U}(0)) = \eta(\mathbf{U}_j^n)$  et  $\eta(\mathbf{U}(1)) = \eta(\mathbf{U}_j^{n+1})$ . Le développement de Taylor de la fonction  $t \rightarrow \eta(\mathbf{U}(t))$  au point  $t = 1$  s'écrit

$$(3.27) \quad \exists c \in [0, 1] \text{ tel que } \eta(\mathbf{U}(1)) - \eta(\mathbf{U}(0)) = d_t \eta(\mathbf{U}(1)) - \frac{1}{2} d_t^2 \eta(\mathbf{U}(1)) + \frac{1}{6} d_t^3 \eta(\mathbf{U}(c)).$$

D'une part nous avons

$$d_t \eta(\mathbf{U}(t)) = \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}}, \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \right\rangle = \left\langle \mathbf{V}(\mathbf{U}(t)), \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \right\rangle,$$

et d'autre part

$$d_t^2 \eta(\mathbf{U}(t)) = \left\langle \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{U}^2} (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) \right\rangle,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} d_t^2 \eta(\mathbf{U}(1)) &= \left\langle \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{U}^2} \Big|_{\mathbf{U}_j^{n+1}} (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) \right\rangle, \\ &= \left\langle \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{U}^2} \Big|_{\mathbf{U}_j^n} (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) \right\rangle + \mathcal{O}(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n)^3. \end{aligned}$$

Le développement de Taylor (3.27) s'explique donc par

$$(3.28) \quad \eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) - \eta(\mathbf{U}_j^n) = \left\langle \mathbf{V}_j^{n+1}, \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{U}^2} \Big|_{\mathbf{U}_j^n} (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) \right\rangle + \mathcal{O}(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n)^3.$$

Le reste de la preuve consiste à montrer comment la somme des deux premier termes de droite peut être rendue positive. Par définition du schéma on a

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{V}_j^{n+1}, \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \right\rangle &= -\frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \left\langle \mathbf{V}_j^{n+1}, \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( -\frac{1}{2} (\Psi_{ji}^n)^t \mathbb{N}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \right) \right\rangle \\ &= -\frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{\mathcal{T}_j^{n+1}} \left( \left\langle \Psi_j^{n+1}, \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathbb{N}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \right\rangle - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}^n, \mathbb{N}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \rangle \right) \end{aligned}$$

Grâce à la contrainte (3.16) sur les matrices  $\mathbb{N}_{ji}$ , nous pouvons rajouter dans la parenthèse ci-dessus le terme nul

$$-\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle \Psi_j^{n+1}, \mathbb{N}_{ji}^n \Psi_j^{n+1} \right\rangle.$$

Alors notre manipulation désormais classique (*cf.* preuve du lemme 6 par exemple) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{V}_j^{n+1}, \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \right\rangle &= +\frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{\mathcal{T}_j^{n+1}} \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle \Psi_{ji}^n - \Psi_j^{n+1}, \mathbb{N}_{ji}^n (\Psi_{ji}^n - \Psi_j^{n+1}) \right\rangle \\ &= -\frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{\mathcal{T}_j^{n+1}} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (p_{ji}^n - p_j^{n+1}) l_{ji}^n \mathbf{n}_{ji}^n \cdot (\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^{n+1}). \end{aligned}$$

L'idée est à présent de décomposer le terme ci-dessus (qui est une forme quadratique en la variable  $\Psi_{ji}^n - \Psi_j^{n+1}$ ) en la somme d'une forme quadratique positive et d'une forme quadratique négative. Avec la façon de mener les calculs choisie ici, ce résultat se trouve de façon calculatoire, mais nous avons démontré dans [29] que cette décomposition s'applique de façon systématique aux systèmes canonique de la forme (2.14) - on utilise notamment la symétrie des matrices  $\mathbb{N}_{ji}$ , qui permet de les décomposer en une matrice positive et une matrice négative. Définissons donc la forme quadratique *positive*  $Q_1$  (dont on prendra l'opposé) par

$$Q_1(\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n) = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} \left( -(p_j^{n+1} - p_j^n) - \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji}^n \cdot (\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n) \right)^2,$$

ainsi qu'un terme positif<sup>4</sup>  $Q_2$  par

$$Q_2(\Psi_j^n, \Psi_j^{n+1}, \Psi_{ji}^n) = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} \left( (p_j^{n+1} - p_{ji}^n) + (p_j^n - p_{ji}^n) - \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji}^n \cdot (\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n) \right)^2.$$

On se convaincra, par le calcul ou en se référant à [29], que  $Q_1$  est bien positive, associée à la matrice

$$(3.29) \quad \mathcal{M}_{Q_1} = \frac{l_{ji}}{2} \left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{\alpha_{ji}^n} & -(\mathbf{n}_{ji}^n)^t \\ \hline -\mathbf{n}_{ji}^n & \alpha_{ji}^n \mathbf{n}_{ji}^n \otimes \mathbf{n}_{ji}^n \end{array} \right).$$

<sup>4</sup>Ce terme, dans la forme générale démontrée dans [29], est une forme quadratique.



La décomposition s'écrit alors

$$(\mathbf{V}_j^{n+1})^t (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) = -\frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{2T_j^{n+1}} Q_1(\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n) + \frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{2T_j^{n+1}} Q_2(\Psi_j^n, \Psi_j^{n+1}, \Psi_{ji}^n).$$

Il est difficile de maîtriser davantage le terme  $Q_2$  (car il implique au travers de  $\Psi_{ji}$  l'ensemble des états autour du nœud  $i$ , et pas seulement  $\mathbf{U}_j$ ), mais sa positivité est suffisante pour démontrer le résultat voulu. En fait, si l'on n'était pas obligé d'introduire dans les calculs des approximations en  $\mathcal{O}(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n)^3$ , ce terme positif permettrait d'écrire l'équation (3.26) avec une inégalité supérieure au lieu d'une égalité ; ce n'est pas le cas, et ceci explique le nombre positif  $C_j^n$  dans cette équation.

Occupons-nous maintenant de l'avant-dernier terme de l'équation (3.28). Il s'exprime avec la variable  $\mathbf{U}$ , alors que l'on cherche plutôt une dépendance en  $\Psi$ , de façon à le comparer aux écritures ci-dessus. A cette fin on introduit l'inconnue  $\mathbf{W}$  par

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \eta \end{pmatrix},$$

qui peut être vue comme une fonction de  $\mathbf{U}$ , et on utilise le fait que le changement de variable  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{W}(\mathbf{U})$  soit un difféomorphisme (cette propriété est démontrée dans [25], lemme 5). Alors on a

$$\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n = \left\langle \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{W}_j^n}, \mathbf{W}_j^{n+1} - \mathbf{W}_j^n \right\rangle + \mathcal{O}(\mathbf{W}_j^{n+1} - \mathbf{W}_j^n)^2,$$

puis en utilisant la notation générale  $\delta\phi = \phi^{n+1} - \phi^n$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \delta \mathbf{U}_j, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{U}^2} \Big|_{\mathbf{U}_j^n} \delta \mathbf{U}_j \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{W}_j^n} \delta \mathbf{W}_j, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}_j^n} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{W}_j^n} \delta \mathbf{W}_j \right\rangle + \mathcal{O}(\delta \mathbf{W}_j)^3 \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{W}_j^n} \delta \mathbf{W}_j, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{W}_j^n} \delta \mathbf{W}_j \right\rangle + \mathcal{O}(\delta \mathbf{U}_j)^3. \end{aligned}$$

Les relations thermodynamiques qui lient les variables  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  permettent d'explicitier la matrice  $\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}}\right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}}$ . Dans l'annexe A il est en effet montré que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}}\right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2} \Big|_{\eta} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^t & \left\langle \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} \Big|_{\Psi}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} \Big|_{\Psi} \right\rangle \end{array} \right),$$

où  $H$  est l'enthalpie du système, définie par  $H = \langle (\Psi, 1), \mathbf{U} \rangle$ . Dans le cas particulier de la dynamique des gaz, on peut partir de la relation  $dH = T d\eta + \tau dp - \mathbf{u} d\mathbf{u}$  et de la définition de la vitesse du son  $\frac{\partial \tau}{\partial p} \Big|_{\eta} = \frac{-1}{(\rho c)^2}$  pour obtenir

$$(3.30) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2} \Big|_{\eta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\rho c)^2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De plus, les relations de bijectivité entre  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  prouvent que la matrice  $\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}}\right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}}$  est régulière, et donc que son dernier terme diagonal est non-nul : [25] prouve même qu'il est négatif, ce qui nous montre que la matrice est négative.

Au bout du compte, en associant à cette matrice la forme quadratique  $Q_3$  *positive* suivante

$$(3.31) \quad Q_3(\mathbf{X}) = -\mathcal{T}_j^n \left\langle \mathbf{X}, \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{w}_j^n} \right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{w}_j^n} X \right\rangle,$$

nous arrivons à

$$\begin{aligned} \eta_j^{n+1} - \eta_j^n &= -\frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{2\mathcal{T}_j^{n+1}} Q_1(\delta \Psi_j) + \frac{1}{2\mathcal{T}_j^n} Q_3(\delta \mathbf{W}_j) \\ &\quad + \frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{2\mathcal{T}_j^{n+1}} Q_2(\Psi_j^n, \Psi_j^{n+1}, \Psi_{ji}^n) + \mathcal{O}(\delta \mathbf{U}_j)^3. \end{aligned}$$

La fin de la démonstration consiste à contraindre le pas de temps de façon à faire se combiner  $(-Q_1)$  et  $(+Q_3)$  en la forme quadratique positive  $Q$  annoncée dans l'estimation (3.26). Comme cette contrainte doit être satisfaite quel que soit l'état  $\delta \mathbf{W}_j$ , que par définition nous ne connaissons pas à l'instant  $n$ , nous introduisons le paramètre

$$(3.32) \quad \sigma_j^n = \sup_{\delta \mathbf{W} \neq 0} \frac{Q_1(\delta \Psi)}{Q_3(\delta \mathbf{W})}, \quad \delta \mathbf{W} = (\delta \Psi, \delta \eta)^t \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

Alors la condition

$$\sigma_j^n \frac{\Delta t^n}{\rho_j^0 s_j^0} \leq \frac{\mathcal{T}_j^{n+1}}{\mathcal{T}_j^n}$$

nous assure que le schéma est bien entropique, au sens défini dans l'énoncé. Le maximum de (3.32) est atteint pour un état  $\delta \mathbf{W}$  tel que

$$\sigma_j^n \frac{\partial Q_3}{\partial \mathbf{W}}(\delta \Psi) = \frac{\partial Q_1}{\partial \mathbf{W}}(\delta \Psi),$$

soit, avec les formes de  $Q_1$  et  $Q_3$  détaillées ci-dessus

$$\begin{cases} \sigma_j^n \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2} \Big|_{\eta} \delta \Psi = \mathcal{M}_{Q_1} \delta \Psi, \\ \delta \eta = 0. \end{cases}$$

Autrement dit la dépendance n'est qu'en  $\delta \Psi$ , et  $\sigma_j^n$  peut se redéfinir par

$$(3.33) \quad \sigma_j^n = \sup_{\delta \Psi \neq 0} \frac{\langle \delta \Psi, \mathcal{M}_{Q_1} \delta \Psi \rangle}{\langle \delta \Psi, \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2} \Big|_{\eta} \delta \Psi \rangle}.$$

Nous cherchons donc la borne supérieure d'un quotient de formes quadratiques positives, ce qui se résoud en calculant les éléments propres de  $\left( \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2} \Big|_{\eta} \right)^{-1} \mathcal{M}_{Q_1}$ . Cette matrice admet trois valeurs propres, dont les deux plus grandes sont  $\sigma_j^{(1)}$  et  $\sigma_j^{(2)}$  donnés dans l'énoncé. Ceci achève la démonstration.  $\square$

Sans prétendre avoir trouver un résultat optimal, nous avons donc au moins mis en avant une estimation du pas de temps qui permet au schéma de produire de l'entropie. On voit bien dans la démonstration le rôle joué par la structure canonique du système; d'ailleurs on aurait même pu étendre ce résultat à tous les systèmes de la classe  $(\mathcal{P})$  (*cf.* [25] pour les relations thermodynamiques abstraites et [29] pour le décentrage des flux en structure canonique.) Le fait que la condition *CFL* fasse intervenir la température à

l'instant  $n + 1$  est *a priori* décevant, car irréalisable en pratique. Toutefois, dans les essais numériques, on peut espérer avoir d'une itération à l'autre  $\mathcal{T}_j^{n+1} \approx \mathcal{T}_j^n$ , de sorte à retomber sur une condition plus classique (avec une constante à droite de l'inégalité). Les exemples numériques du chapitre 5 fonctionnent avec une telle estimation (et le corollaire ci-dessous). Remarquons que nous aurions pû éliminer ce ratio des températures si  $Q_3$  avait été estimée à l'instant  $n + 1$ , chose possible sans modification de la démonstration, cf. équation (3.28) et dérivations qui précèdent. Mais alors c'est le terme  $(\rho c)^2$  qui aurait été exprimé en  $n + 1$ , dans  $Q_3$  et  $\sigma_j^{(1)}$ , ce qui n'est pas plus intéressant.

Ci-dessous on affine la condition *CFL*, en cherchant à maximiser le pas de temps en fonction du paramètre  $\alpha_{ji}^n$ . Cela permet par ailleurs d'interpréter géométriquement le paramètre  $\sigma_j^n$  sur différents types de maillage.

**Corollaire 2 (Optimisation de la condition *CFL*)** *Supposons que le paramètre  $\alpha_{ji}^n$  soit constant par maille, c'est-à-dire que  $\alpha_{ji}^n \equiv \alpha_j^n$ . Alors le problème d'optimisation*

$$(3.34) \quad \sigma_j^n = \min_{\alpha_j^n} \max(\sigma_j^{(1)}, \sigma_j^{(2)})$$

*admet l'unique solution*

$$(3.35) \quad \begin{cases} \sigma_j^n = \rho_j^n c_j^n \sqrt{\mathcal{P}_j^n \mathcal{Q}_j^n}, \\ \alpha_j^n = \rho_j^n c_j^n \sqrt{\frac{\mathcal{P}_j^n}{\mathcal{Q}_j^n}}, \end{cases}$$

où  $\mathcal{P}_j^n$  et  $\mathcal{Q}_j^n$  sont deux facteurs géométriques caractéristiques de la maille

$$\begin{cases} \mathcal{P}_j^n = \frac{1}{2} \sum_i l_{ji}^n, \\ \mathcal{Q}_j^n = \frac{\sum_i l_{ji}^n + \sqrt{(\sum_i l_{ji}^n)^2 - 4(\sum_i \check{\lambda}_{ji}^n)^2 \sum_i (\check{\mu}_{ji}^n)^2 - (\sum_i \check{\lambda}_{ji}^n \check{\mu}_{ji}^n)^2}}{4}, \end{cases}$$

avec  $\check{\lambda}_{ji}^n = \sqrt{l_{ji}^n} (n_{ji}^x)^n$ ,  $\check{\mu}_{ji}^n = \sqrt{l_{ji}^n} (n_{ji}^y)^n$ . Plus précisément :

- si  $\Omega_j^n$  est une maille triangulaire de périmètre  $|\partial\Omega_j^n|$  et de ratio  $r_j^n$  entre les rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit, alors

$$\begin{cases} \mathcal{P}_j^n = \frac{1}{2} |\partial\Omega_j^n|, \\ \mathcal{Q}_j^n = \frac{1}{4} |\partial\Omega_j^n| \left(1 + \sqrt{1 - 2r_j^n}\right), \end{cases}$$

- si  $\Omega_j^n$  est une maille quadrangulaire, de longueur de plus grande diagonale  $d_j^n$ , de ratio entre la plus petite et la plus grande diagonale  $r_j^n$ , et d'angle entre elles  $\theta_j^n$ , alors

$$\begin{cases} \mathcal{P}_j^n = d_j^n (r_j^n + 1), \\ \mathcal{Q}_j^n = \frac{d_j^n}{2} \left(r_j^n + 1 + \sqrt{r_j^n + 1 + 2r_j^n \cos 2\theta_j^n}\right) \end{cases}$$

*Preuve.* – Définissons  $\beta_j^n$  par  $\alpha_j^n = \rho_j^n c_j^n \beta_j^n$ . Avec les définitions de la proposition 9, le problème (3.34) s'écrit

$$\sigma_j^n = (\rho_j^n c_j^n) \min_{\beta_j^n} \max \left( \frac{\mathcal{P}_j^n}{\beta_j}, \beta_j \mathcal{Q}_j^n \right),$$

dont la solution est  $\beta_j = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_j^n}{\mathcal{Q}_j^n}}$ . Les interprétations géométriques de  $\mathcal{P}_j^n$  et  $\mathcal{Q}_j^n$ , selon la forme des mailles, ont été rédigées dans [42].  $\square$

## Chapitre 4

# Etude théorique de convergence pour les ondes acoustiques

---

La méthode que nous avons introduite sort du cadre standard des schémas Volumes-Finis, dans le sens où un solveur aux nœuds remplace le calcul usuel des flux aux arêtes. Il est par conséquent nécessaire d'étendre les résultats de convergence des méthodes Volumes-Finis à cette nouvelle classe de schéma.

A ce jour, il existe dans la théorie des Volumes-Finis appliqués aux systèmes hyperboliques un certain nombre de résultats de convergence dans le cadre linéaire, dont on peut citer [21] [32] [69] et [18] (cette dernière référence traitant également le cas non-linéaire mais scalaire). Ces différents travaux prouvent, pour résumer au maximum, que ces schémas Volumes-Finis convergent avec une erreur d'ordre  $1/2$  par rapport à la taille du maillage.

Dans ce chapitre nous étudions à notre tour la convergence du nouvel algorithme avec solveur au nœud, pour le système des équations d'Euler linéarisé. Cette simplification, nécessaire pour des raisons techniques, nous place dans un cadre qui garde tout son intérêt pratique puisqu'il s'agit des équations de l'acoustique. D'un point de vue physique, cela consiste à modéliser les petites fluctuations autour d'un état d'équilibre constant. L'intérêt numérique de ce type d'estimation d'erreur est réel pour la méthode non-linéaire, afin de contrôler la bonne propagation des ondes acoustiques. Au niveau du formalisme, nous verrons que ce système conserve la même structure canonique que précédemment, ce qui permet d'appliquer, et donc d'étudier, la méthode construite sur les équations non-linéaires.

Afin de pointer très précisément l'originalité de notre méthode et les nouvelles difficultés qu'elle induit, nous présentons également une preuve de convergence de la méthode Volumes-Finis usuelles pour les équations de l'acoustique, avec solveur de type Godunov. Ceci constitue par ailleurs un résultat original, jamais publié à notre connaissance. La technique employée est issue de [26], qui met en œuvre des idées et des outils différents des références ci-dessus.

Dans ce travail nous avons choisi pour domaine  $\Omega$  l'espace  $\mathbb{R}^2$  tout entier. Physiquement et numériquement, comme on ne peut travailler qu'en domaine borné, cela signifie que l'on étudie la propagation des ondes tant qu'elles n'ont pas encore interagi avec le bord. Ceci permet de concentrer notre attention sur le cœur de la méthode à l'intérieur du domaine et d'éclipser le traitement, toujours délicat, des conditions aux limites.

---

## 4.1 Système linéarisé et méthodes d'approximation

Il existe différents points de vue qui permettent d'aboutir aux équations de l'acoustique. Pour notre part, nous restons fidèle à la formulation mise en avant dans le premier chapitre et partons de l'écriture symétrisée (2.21) des équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes :

$$\rho^0 \mathbb{A} \partial_T(\Psi) + \mathbb{M}^X \partial_X \Psi + \mathbb{M}^Y \partial_Y \Psi = \mathbf{0},$$

où l'on rappelle que

$$\mathbb{A} = \text{diag}\left(-\frac{\tau^2}{c^2}, -1, -1\right) \quad \text{et} \quad \Psi = (p, -\mathbf{u})^T.$$

Le principe de toute linéarisation consiste à décomposer chaque grandeur physique  $\phi$  en un état de base  $\phi_0$ , uniforme en temps et espace, et une fluctuation  $\epsilon\phi_1$  autour de cet état, avec  $\epsilon \ll 1$ . Ici on va donc écrire

$$\begin{cases} \Psi = \Psi_0 + \epsilon\Psi_1, \\ \mathbb{M}^X = \mathbb{M}_0^X + \epsilon\mathbb{M}_1^X \quad \text{et} \quad \mathbb{M}^Y = \mathbb{M}_0^Y + \epsilon\mathbb{M}_1^Y, \\ \mathbb{A} = \mathbb{A}_0 + \epsilon\mathbb{A}_1, \\ \rho^0 = \rho_0^0 + \epsilon\rho_1^0. \end{cases}$$

En injectant cette décomposition dans le système et en ne retenant que le terme d'ordre un en  $\epsilon$ , on arrive aux équations du linéarisé

$$\rho_0^0 \mathbb{A}_0 \partial_T(\Psi_1) + \mathbb{M}_0^X \partial_X \Psi_1 + \mathbb{M}_0^Y \partial_Y \Psi_1,$$

où l'état de base des matrices  $\mathbb{M}^X$  et  $\mathbb{M}^Y$  n'est rien d'autre que leur valeur initiale, uniforme en espace, *i.e.* est égal à leur analogue en formalisme eulérien :

$$\mathbb{M}_0^X = \mathbb{M}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_0^Y = \mathbb{M}^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est bien celui des ondes acoustiques en coordonnées lagrangiennes (également très proche de la symétrisation de Friedrichs). Nous pourrions en rester à cette expression, mais dans le but d'étudier notre méthode numérique sur un maillage fixe, nous allons maintenant montrer que l'écriture lagrangienne ci-dessus est exactement identique, à l'ordre  $\epsilon$  près, à sa formulation eulérienne. Pour cela on écrit d'une part que

$$\partial_T \Psi_1 = \partial_t \Psi_1 + (u_0 + \epsilon u_1) \partial_x \Psi_1 + (v_0 + \epsilon v_1) \partial_y \Psi_1,$$

et d'autre part que

$$\mathbb{J} = \mathbb{I} + \epsilon \mathbb{J}_1,$$

ce qui a pour conséquence, après injection dans le système ci-dessus et sélection du terme d'ordre zéro :

$$\rho_0^0 \mathbb{A}_0 (\partial_t \Psi_1 + u_0 \partial_x \Psi_1 + v_0 \partial_y \Psi_1) + \mathbb{M}^x \partial_x \Psi_1 + \mathbb{M}^y \partial_y \Psi_1 = \mathbf{0}.$$

Quitte à changer de repère galiléen, on arrive finalement au système suivant, qui comparé au précédent montre que la linéarisation revient à confondre coordonnées eulériennes et lagrangiennes :

$$\rho_0^0 \mathbb{A}_0 \partial_t \Psi_1 + \mathbb{M}^x \partial_x \Psi_1 + \mathbb{M}^y \partial_y \Psi_1 = \mathbf{0}.$$

Dans la suite, et dans le seul but de simplifier les écritures, nous normalisons la densité et la vitesse du son de l'état de base, et introduisons le vecteur solution  $\mathbf{V}$  par

$$\mathbf{V} \equiv \begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Le système linéaire qu'il s'agit d'approcher numériquement s'écrit alors

$$(4.1) \quad \partial_t \mathbf{V} + \partial_x (\mathbb{M}^x \mathbf{V}) + \partial_y (\mathbb{M}^y \mathbf{V}) = 0.$$

Ce système est bien fermé, et l'on voit ici disparaître l'équation sur l'énergie. Toutefois pour rester consistant avec le cas non-linéaire, on peut toujours rajouter l'équation suivante sur l'énergie totale<sup>1</sup>

$$(4.2) \quad \partial_t e + \partial_x \left( -\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbb{M}^x \mathbf{V} \rangle \right) + \partial_y \left( -\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbb{M}^y \mathbf{V} \rangle \right) = 0.$$

Bien sûr cette équation paraît inutile pour le cas linéaire, mais tout l'intérêt de l'introduction de l'énergie totale est d'amener naturellement la définition de l'entropie du système :

$$\eta = -\frac{\mathbf{V}^2}{2} - e.$$

Il faut garder à l'esprit que la notion d'entropie est importante dans cette étude car notre objectif est d'appliquer notre méthode d'approximation, entropique par construction. On retrouve alors bien la structure canonique en variable entropique, *cf.* définition (1.13) :

$$\mathbf{V} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial e} \right)^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{V}}.$$

On vérifie aisément que le flux associé à cette entropie est nul :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta &= -\langle \mathbf{V}, \partial_t \mathbf{V} \rangle - \partial_t e \\ &= \langle \mathbf{V}, \mathbb{M}^x \partial_x \mathbf{V} \rangle + \langle \mathbf{V}, \mathbb{M}^y \partial_y \mathbf{V} \rangle - \frac{1}{2} \partial_x \langle \mathbf{V}, \mathbb{M}^x \mathbf{V} \rangle - \frac{1}{2} \partial_y \langle \mathbf{V}, \mathbb{M}^y \mathbf{V} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Au final, la structure du système (4.1-4.2) est strictement analogue à celle du système non-linéaire. Nous pouvons donc appliquer point par point notre méthode d'approximation, à la seule différence que les vitesses aux nœuds ne serviront pas à déplacer le maillage.

Rappelons enfin que dans le cas linéaire, et en domaine non borné, les normes dans les espaces de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^2)$  de la solution exacte sont conservées au cours du temps :

$$(4.3) \quad \|\mathbf{V}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} = \|\mathbf{V}^0\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall s \in \mathbb{N},$$

ce qui sera utile dans les estimations à venir.

**Rappel du solveur aux nœuds** - Le schéma d'approximation de (4.1) s'écrit sous la forme du système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$(4.4) \quad s_j \mathbf{V}'_j(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathbb{N}_{ji} \mathbf{V}_{ji} = \mathbf{0},$$

---

<sup>1</sup>Sous cette forme, à cause des changements de signe entre  $\mathbf{V}$  et  $\Psi$ , l'énergie totale est l'opposée de celle définie dans le cas non-linéaire.

$$(4.5) \quad s_j e_j'(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} -\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{V}_{ji} \rangle = \mathbf{0},$$

dans lequel les pressions et vitesses aux nœuds  $p_{ji}$  et  $\mathbf{u}_{ji}$  sont évaluées comme dans le cas non linéaire (avec toujours  $\alpha_{ji} \geq 0$ ), par

$$p_{ji} = p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i),$$

et

$$\left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji}.$$

On rappelle que la matrice  $\mathbb{N}_{ji}$  définit une direction “normale” aux nœuds, désormais constante en temps :

$$\mathbb{N}_{ji} = l_{ji} \begin{pmatrix} 0 & n_{ji}^x & n_{ji}^y \\ n_{ji}^x & 0 & 0 \\ n_{ji}^y & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad l_{ji} \mathbf{n}_{ji} = \frac{1}{2} (l_{jk} \mathbf{n}_{jk} + l_{jk-} \mathbf{n}_{jk-}).$$

Le bilan d’entropie se calcule comme dans le chapitre précédent, avec formellement une température constante unitaire :

$$s_j \eta_j'(t) = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (p_{ji} - p_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \geq 0.$$

D’après la définition des pressions aux nœuds, ce bilan peut aussi s’écrire sous la forme suivante, que l’on exploitera ultérieurement

$$(4.6) \quad s_j \eta_j'(t) = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} (p_{ji} - p_j)^2 + \frac{l_{ji} \alpha_{ji}}{2} (\mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i))^2.$$

**Rappel du schéma Volumes-Finis standard** - Cette méthode s’écrit, comme en (3.6), sous la forme

$$(4.7) \quad s_j \mathbf{V}_j'(t) + \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \mathbf{V}_{jk} = \mathbf{0},$$

$$(4.8) \quad s_j e_j'(t) + \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} -\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}_{jk}, l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \mathbf{V}_{jk} \rangle = \mathbf{0}.$$

Dans cette étude nous considérons un solveur approché de Godunov, dit *acoustique* [41], qui détermine les flux aux arêtes de la façon suivante

$$(4.9) \quad \begin{cases} p_{jk} = \frac{1}{2}(p_j + p_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_{jk}, \\ \mathbf{u}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_{jk} + \frac{1}{2}(p_j - p_k). \end{cases}$$

Remarquons très rapidement que ce solveur est entropique. Le bilan d’entropie se calcule exactement comme ci-dessus - formellement on remplace dans les notations les nœuds par les arêtes :

$$s_j \eta_j'(t) = \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} (p_{jk} - p_j) l_{jk} \mathbf{n}_{jk} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{jk}).$$



Or le solveur acoustique vérifie

$$p_{jk} = p_j + (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{jk}) \cdot \mathbf{n}_{jk},$$

ce qui montre que le bilan d'entropie ci-dessus est bien positif. Enfin, on bénéficie d'une expression de ce bilan analogue à (4.6), et qui sera elle aussi utile dans les estimations à venir

$$(4.10) \quad s_j \eta_j'(t) = \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \frac{l_{jk}}{2} (p_{jk} - p_j)^2 + \frac{l_{jk}}{2} (\mathbf{n}_{jk} \cdot (\mathbf{u}_{jk} - \mathbf{u}_j))^2.$$

On le voit, à la terminologie nœuds/arêtes près, les écritures de ces deux méthodes sont analogues. Dans les deux sections suivantes nous profitons de ce parallèle en employant, pour l'étude de convergence, une méthodologie commune. Toutefois dans le détail de ces calculs nous allons voir apparaître une différence essentielle, que l'on peut d'ors et déjà dévoiler : la définition ponctuelle d'une fonction aux nœuds demande *a priori* plus de régularité que la simple définition de sa trace sur des arêtes.

## 4.2 Estimation d'erreur de la méthode Volumes-Finis standard

Commençons par quelques notations générales qui seront encore valables pour l'étude de convergence du solveur aux nœuds. En ce qui concerne la discrétisation du domaine de calcul, on suppose donné un maillage de  $\Omega$  de taille  $h$  dont chaque élément a un rapport de forme borné. Autrement dit, on suppose qu'il existe une constante  $C$  positive telle que :

$$(4.11) \quad \max_{i, i' \in \mathcal{N}(j)} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}| \leq h \quad \text{et} \quad h^2 \leq C s_j \quad \forall j.$$

Ce type de condition est tout à fait classique dans la théorie des Eléments-Finis et des Volumes Finis [32]. Dans le cas d'une triangulation, on peut prendre comme constante  $C$  le double du rapport d'aspect des triangles, *i.e.* du rapport entre le diamètre et la plus petite hauteur des triangles.

Sur ce maillage nous appelons  $\mathbf{V}_h$  la solution numérique approchée, constante par mailles :

$$\mathbf{V}_h(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_j(t) \quad \text{pour} \quad \mathbf{x} \in \Omega_j.$$

On rappelle que la condition initiale discrète est choisie comme la moyenne de la condition initiale continue

$$\mathbf{V}_j(0) = \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{V}^0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Pour tout temps, nous introduisons une estimation de l'erreur de la méthode comme la différence entre cette approximation et la solution exacte  $\mathbf{V}$  au sens  $L^2$  :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{V}_h(t) - \mathbf{V}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Nous énonçons maintenant le résultat de convergence souhaité, dont la preuve est l'objet du reste de cette section.

**Théorème 13** *Sur maillage non structuré (4.11) de taille  $h$ , la méthode Volumes-Finis standard (4.7-4.9) appliquée aux équations de l'acoustique (4.1) converge en  $h^{1/2}$  pour une donnée initiale dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$  : il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|\mathbf{V}_h(t) - \mathbf{V}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \sqrt{1+t} \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} h^{1/2}.$$

*Preuve.* – L'idée de la démonstration consiste à estimer non pas directement  $\mathcal{E}$  mais sa dérivée, qui elle, fait apparaître de façon naturelle le système d'équations ordinaires (4.7). Nous menons le calcul avec la décomposition ci-dessous.

$$\mathcal{E}'(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{V}_h^2)' \, d\mathbf{x}}_{\mathcal{D}_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{V}^2)' \, d\mathbf{x}}_{\mathcal{D}_2(t)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} -\langle \mathbf{V}'_h, \mathbf{V} \rangle \, d\mathbf{x}}_{\mathcal{D}_3(t)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} -\langle \mathbf{V}_h, \mathbf{V}' \rangle \, d\mathbf{x}}_{\mathcal{D}_4(t)}.$$

Dans ce qui suit nous estimons séparément chacune de ces contributions au travers des équations (4.12-4.15), puis les rassemblons pour conclure. Comme d'habitude, les constantes apparaissant dans ces calculs seront notées  $C$ , et changeront éventuellement d'une ligne à l'autre.

**Estimation de  $\mathcal{D}_1$**  - Pour étudier ce terme nous utilisons la définition de l'entropie du système, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} (-\eta_h - e_h)' \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\forall j} s_j (-\eta'_j(t) - e'_j(t)). \end{aligned}$$

L'énergie totale étant conservée sur tout l'espace, on peut donc écrire

$$(4.12) \quad \mathcal{D}_1(t) = - \sum_{\forall j} s_j \eta'_j(t),$$

qui est une contribution négative compte tenu du caractère entropique (4.10) de la méthode.

**Estimation de  $\mathcal{D}_2$**  - Comme on l'a dit en (4.3), l'énergie du système est conservée sur  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire

$$(4.13) \quad \mathcal{D}_2(t) = 0.$$

**Estimation de  $\mathcal{D}_3$**  - C'est ici que l'on voit apparaître la définition du schéma, comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3(t) &= - \sum_{\forall j} \left\langle \mathbf{v}'_j, \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right\rangle \\ &= \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \mathbf{v}_{jk}, \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right\rangle \\ &= \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} (\mathbf{v}_{jk} - \mathbf{v}_j), \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right\rangle. \end{aligned}$$

La troisième égalité vient simplement du fait que  $\mathbf{n}_{jk} = -\mathbf{n}_{kj}$  pour chaque arête  $\Gamma_{jk}$ . Nous modifions maintenant cette écriture de façon à faire apparaître un terme qui s'avérera compenser  $\mathcal{D}_4$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3(t) &= \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} (\mathbf{v}_{jk} - \mathbf{v}_j), \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{v} \, d\gamma \right\rangle \\ &\quad + \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} (\mathbf{v}_{jk} - \mathbf{v}_j), \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{v} \, d\gamma \right\rangle. \end{aligned}$$

Tout d'abord on peut simplifier le second terme de cette somme car

$$\sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \mathbf{V}_{jk}, \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{V} d\gamma \right\rangle = 0,$$

dû au simple fait que dans une méthode de Volumes-Finis les flux entre deux mailles adjacentes s'annulent mutuellement.

On étudie ensuite le premier terme de l'estimation ci-dessus. Afin d'alléger les notations nous notons  $\delta p_{jk}$  et  $\delta \mathbf{u}_{jk}$  la différence entre valeur moyenne sur la maille et valeur moyenne sur le bord  $\Gamma_{jk}$  de la pression et de la vitesse :

$$\begin{pmatrix} \delta p_{jk} \\ \delta \mathbf{u}_{jk} \end{pmatrix} = \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{V} dx dy - \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{V} d\gamma.$$

Notons que ces grandeurs sont relatives à la solution exacte. Un calcul, suivi de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} (\mathbf{V}_{jk} - \mathbf{V}_j), \begin{pmatrix} \delta p_{jk} \\ \delta \mathbf{u}_{jk} \end{pmatrix} \right\rangle &= l_{jk} \mathbf{n}_{jk} \cdot (\mathbf{u}_{jk} - \mathbf{u}_j) \delta p_{jk} + l_{jk} (p_{jk} - p_j) \mathbf{n}_{jk} \cdot \delta \mathbf{u}_{jk} \\ &\leq \frac{l_{jk}}{2} (\delta p_{jk})^2 + \frac{l_{jk}}{2} (\delta \mathbf{u}_{jk})^2 \\ &\quad + \frac{l_{jk}}{2} (p_{jk} - p_j)^2 + \frac{l_{jk}}{2} (\mathbf{n}_{jk} \cdot (\mathbf{u}_{jk} - \mathbf{u}_j))^2. \end{aligned}$$

En sommant cette inégalité sur les arêtes et les cellules, on reconnaît la production d'entropie (4.10) dans les deux derniers termes de l'expression ci-dessus. Au final on obtient donc

$$(4.14) \quad \mathcal{D}_3(t) \leq \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left( \frac{l_{jk}}{2} (\delta p_{jk})^2 + \frac{l_{jk}}{2} (\delta \mathbf{u}_{jk})^2 \right) + \sum_{\forall j} s_j \eta'_j(t) - \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \mathbf{V}_j, \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{V} d\gamma \right\rangle.$$

**Estimation de  $\mathcal{D}_4$**  - Ce dernier calcul porte sur la solution exacte du système de l'acoustique :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_4(t) &= - \sum_{\forall j} \left\langle \mathbf{V}_j, \int_{\Omega_j} \mathbf{V}' dx \right\rangle \\ &= \sum_{\forall j} \left\langle \mathbf{V}_j, \int_{\partial\Omega_j} \mathbb{M} \mathbf{V} d\gamma \right\rangle \\ &= \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle \mathbf{V}_j, \mathbb{M}_{jk} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{V} d\gamma \right\rangle. \end{aligned}$$

Compte tenu de la symétrie de  $\mathbb{M}_{jk}$  on peut donc écrire

$$(4.15) \quad \mathcal{D}_4(t) = \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \mathbf{V}_j, \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{V} d\gamma \right\rangle.$$

**Estimation de  $\mathcal{E}$**  - Il ne reste plus qu'à rassembler ces différentes contributions, ce qui donne

$$\mathcal{E}'(t) \leq \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left( \frac{l_{jk}}{2} (\delta p_{jk})^2 + \frac{l_{jk}}{2} (\delta \mathbf{u}_{jk})^2 \right).$$

Or on sait, par des résultats classiques d'approximation [1], que

$$|\delta p_{jk}| \leq C \|\nabla p\|_{L^2(\Omega_j)}, \quad |\delta \mathbf{u}_{jk}| \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_j)},$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{E}'(t) \leq Ch \|\nabla \mathbf{V}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = Ch \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Par ailleurs, toujours selon les mêmes références, il est connu que l'erreur initiale satisfait

$$\mathcal{E}(0) \leq C'h \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

ce qui permet *in fine* d'obtenir l'estimation souhaitée et achève la preuve.  $\square$

### 4.3 Estimation d'erreur du solveur aux nœuds

Le résultat de convergence que nous arrivons actuellement à démontrer est plus faible que le précédent, dans le sens où on demande plus de régularité à la solution pour obtenir une même erreur en  $h^{1/2}$ .

**Théorème 14** *Sur maillage non structuré (4.11) de taille  $h$ , le solveur aux nœuds (4.4) appliquée aux équations de l'acoustique (4.1) converge en  $h^{1/2}$  pour une donnée initiale dans  $H^3(\mathbb{R}^2)$  : il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|\mathbf{V}_h(t) - \mathbf{V}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \sqrt{\left(1 + t \left(\frac{1}{\alpha_{min}} + \alpha_{max}\right)\right) \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + t \|\mathbf{V}^0\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^2} h^{1/2},$$

où  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur du paramètre  $\alpha_{ji}$  sur tout le domaine.

On a donc gardé l'influence de  $\alpha_{jr}$  dans cette formulation. Toutefois remarquons que le choix (3.35) donne des valeurs bornées : par exemple sur des triangles  $\alpha_{ji}$  est compris entre 1 et  $\sqrt{2}$ .

*Preuve.* - Nous reprenons la même méthodologie, avec la même décomposition de  $\mathcal{E}'(t)$  que ci-dessus. Nous insistons lorsque nécessaire sur les points de différence avec la méthode Volumes-Finis standard.

**Estimation de  $\mathcal{D}_1$**  - La propriétés de conservation de l'énergie totale est encore satisfaite, ce qui nous place dans une situation identique à la précédente :

$$(4.16) \quad \mathcal{D}_1(t) = - \sum_{\forall j} s_j \eta_j'(t),$$

qui est encore une contribution négative.

**Estimation de  $\mathcal{D}_2$**  - A nouveau on a

$$(4.17) \quad \mathcal{D}_2(t) = 0.$$

**Estimation de  $\mathcal{D}_3$**  - Dans un premier temps on répète la même procédure que précédemment, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3(t) &= -\sum_{\forall j} \left\langle \mathbf{v}'_j, \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, dx \, dy \right\rangle \\ &= \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle \mathbb{N}_{ji} \mathbf{v}_{ji}, \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, dx \right\rangle \\ &= \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle \mathbb{N}_{ji} (\mathbf{v}_{ji} - \mathbf{v}_j), \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, dx \right\rangle.\end{aligned}$$

On a utilisé la contrainte (3.16) sur les matrices  $\mathbb{N}_{jr}$  pour obtenir la dernière égalité. A nouveau on cherche à modifier cette écriture pour faire apparaître un terme qui compensera  $\mathcal{D}_4$ . La difficulté est que  $\mathcal{D}_4$  s'exprime en fonction de grandeurs aux arêtes, indépendamment du schéma, cf. calculs précédents. Il y aura donc une manipulation à opérer pour déplacer certaines estimations des arêtes vers les nœuds. Ici on propose l'écriture suivante, dont l'intérêt apparaîtra bientôt :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3(t) &= \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle \mathbb{N}_{ji} (\mathbf{v}_{ji} - \mathbf{v}_j), \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, dx - \mathbf{v}(i) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbb{N}_{ji} (\mathbf{v}_{ji} - \mathbf{v}_j), \mathbf{v}(i) \rangle.\end{aligned}$$

Une fois de plus on peut simplifier le second terme de cette somme car

$$\sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbf{v}_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{v}(i) \rangle = \sum_{\forall i} \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \langle \mathbb{N}_{ji} \mathbf{v}_{ji}, \mathbf{v}(i) \rangle = 0,$$

en vertu du critère local de conservation autour de chaque nœud.

En ce qui concerne le premier terme, nous introduisons, dans le même but de simplification des notations que précédemment, les grandeurs  $\delta p_{ji}$  et  $\delta \mathbf{u}_{ji}$  relatives à la solution exacte par

$$\begin{pmatrix} \delta p_{ji} \\ \delta \mathbf{u}_{ji} \end{pmatrix} = \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, dx - \mathbf{v}(i).$$

D'une part on a, sous ces notations

$$\left\langle \mathbb{N}_{ji} (\mathbf{v}_{ji} - \mathbf{v}_j), \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, dx - \mathbf{v}(i) \right\rangle = l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \delta p_{ji} + l_{ji} (p_{ji} - p_j) \mathbf{n}_{ji} \cdot \delta \mathbf{u}_{ji}.$$

Puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz permet d'obtenir, pour tout  $\alpha_{ji}$  strictement positif, l'estimation

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbb{N}_{ji} (\mathbf{v}_{ji} - \mathbf{v}_j), \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{v} \, dx - \mathbf{v}(i) \right\rangle &\leq \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} (\delta p_{ji})^2 + \frac{l_{ji}\alpha_{ji}}{2} (\delta \mathbf{u}_{ji})^2 \\ &\quad + \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} (p_{ji} - p_j)^2 + \frac{l_{ji}\alpha_{ji}}{2} (\mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j))^2.\end{aligned}$$

Par sommation de cette inégalité sur les nœuds et cellules, on met à nouveau en évidence le terme de production d'entropie (4.6) et finalement on peut écrire

$$(4.18) \quad \mathcal{D}_3(t) \leq \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} (\delta p_{ji})^2 + \frac{l_{ji}\alpha_{ji}}{2} (\delta \mathbf{u}_{ji})^2 \right) + \sum_{\forall j} s_j \eta'_j(t) - \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbb{N}_{ji} \mathbf{V}_j, \mathbf{V}(i) \rangle.$$

**Estimation de  $\mathcal{D}_4$**  - Ce terme ne dépendant pas du schéma d'approximation, on a toujours

$$\mathcal{D}_4(t) = \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle \mathbf{V}_j, \mathbb{M}_{jk} \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{V} d\gamma \right\rangle.$$

Dans l'idée de basculer cette estimation aux nœuds de façon à équilibrer  $\mathcal{D}_3$ , nous l'écrivons sous la forme

$$\mathcal{D}_4(t) = \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle \mathbf{V}_j, l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \frac{\mathbf{V}(i^+) + \mathbf{V}(i)}{2} \right\rangle + \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle \mathbb{M}_{jk} \mathbf{V}_j, \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{V} d\gamma - l_{jk} \frac{\mathbf{V}(i^+) + \mathbf{V}(i)}{2} \right\rangle.$$

Dans le premier terme, on recombine les sommes sur les arêtes en sommes sur les nœuds, de sorte à faire apparaître les matrices  $\mathbb{N}_{ji}$  :

$$\sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left\langle \mathbf{V}_j, l_{jk} \mathbb{M}_{jk} \frac{\mathbf{V}(i^+) + \mathbf{V}(i)}{2} \right\rangle = \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbb{N}_{ji} \mathbf{V}_j, \mathbf{V}(i) \rangle.$$

Si  $\mathcal{D}_4$  ne se résumait qu'à ce terme, nous pourrions conclure, à la vue de (4.18), exactement de la même manière que dans la section précédente. Mais le travail supplémentaire consiste à contrôler le second terme. Pour cela nous utilisons le lemme suivant.

**Lemme 7** *Soit  $f \in H^2(]0, h[)$ , alors on a l'estimation*

$$\left| \int_0^h f(s) ds - h \frac{f(0) + f(h)}{2} \right| \leq \frac{h^{5/2}}{2\sqrt{30}} \|f''\|_{L^2(]0, h[)}.$$

*Preuve.* - En effet on peut caractériser  $H^1(]0, h[)$  comme l'ensemble des fonctions absolument continues admettant une dérivée presque partout dans  $L^2(]0, h[)$ , et réitérer sur  $H^2(]0, h[)$ . D'après la formule de Taylor avec reste intégral on a

$$\begin{cases} f(s) = f(0) + s f'(0) + \int_0^s (s-t) f''(t) dt, \\ f(h) = f(0) + h f'(0) + \int_0^h (h-t) f''(t) dt, \end{cases}$$

ce qui implique

$$f(s) - \frac{f(0) + f(h)}{2} = (s - \frac{h}{2}) f'(0) + \int_0^s (s-t) f''(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^h (h-t) f''(t) dt.$$

On intègre maintenant par rapport à  $s$  sur  $[0, h]$ , en remarquant que la fonction affine est d'intégrale nulle sur ce segment :

$$\begin{aligned} \int_0^h f(s) ds - h \frac{f(0) + f(h)}{2} &= \int_{s=0}^{s=h} \int_{t=0}^{t=s} (s-t) f''(t) dt ds - \frac{h}{2} \int_{t=0}^{t=h} (h-t) f'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{t=h} \int_{s=t}^{s=h} (s-t) f''(t) ds dt - \frac{h}{2} \int_{t=0}^{t=h} (h-t) f''(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{t=h} \frac{t}{2} (t-h) f''(t) dt. \end{aligned}$$

D'où par l'inégalité de Hölder

$$\left| \int_0^h f(s) ds - h \frac{f(0) + f(h)}{2} \right| \leq \sqrt{\int_0^h \left( \frac{t}{2} (t-h) \right)^2 dt} \|f''\|_{L^2([0, h])},$$

ce qui correspond après calcul à l'estimation souhaitée.  $\square$

En appliquant ce lemme à chaque arête  $\Gamma_{jk}$  dans l'estimation précédente, on arrive finalement à obtenir l'estimation ci-dessous.

$$(4.19) \quad \mathcal{D}_4(t) \leq \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbf{V}_j, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{V}(i) \rangle + C \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^{\frac{5}{2}} |\mathbf{V}_j| \|\nabla^2 \mathbf{V}\|_{L^2(\Gamma_{jk})}$$

On peut exiger par exemple que  $\mathbf{V}$  soit dans  $H^3(\Omega)$ , car dans ce cas on a

$$\|\nabla^2 \mathbf{V}\|_{L^2(\Gamma_{jk})} \leq C \|\mathbf{V}\|_{H^3(\Omega_j)}.$$

Il est à noter qu'un calcul d'erreur plus faible que celui proposé dans le lemme 7, ne demandant par exemple qu'une fonction dans  $H^1(\Gamma_{jk})$ , ne pourrait donner un ordre d'erreur en  $h^{5/2}$ , qui comme on va le voir est le minimum requis pour contrôler ce terme excédentaire.

**Estimation de  $\mathcal{E}$**  - Désormais il suffit d'additionner les quatre estimations (4.16-4.19) pour trouver

$$\mathcal{E}'(t) \leq \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} (\delta p_{ji})^2 + \frac{l_{ji} \alpha_{ji}}{2} (\delta \mathbf{u}_{ji})^2 \right) + C \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^{\frac{5}{2}} |\mathbf{V}_j| \|\nabla^2 \mathbf{V}\|_{L^2(\Gamma_{jk})}.$$

Commençons à estimer le premier terme, ce qui demande d'évaluer  $\delta p_{ji}$  et  $\delta \mathbf{u}_{ji}$ . On décompose  $\delta p_{ji}$  en introduisant le terme  $\delta p_{jk}$  introduit dans la section précédente :

$$\delta p_{ji} = \delta p_{jk} + \left( \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} p d\gamma - p(i) \right),$$

où l'on rappelle que  $i$  est le premier nœud extrémité de l'arête  $\Gamma_{jk}$ , orientée positivement. D'une part, on utilise à nouveau l'estimation

$$|\delta p_{jk}| \leq C \|\nabla p\|_{L^2(\Omega_j)},$$

et d'autre part un calcul très simple montre que

$$\left| \frac{1}{l_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} p d\gamma - p(i) \right| \leq l_{jk}^{1/2} \|\nabla p\|_{L^2(\Gamma_{jk})} \leq Ch^{1/2} \|\nabla p\|_{H^1(\Omega_j)}.$$

Ceci prouve que pour  $h$  borné

$$|\delta p_{ji}| \leq C \|\nabla p\|_{H^1(\Omega_j)}.$$

Une estimation analogue sur  $\delta \mathbf{u}_{ji}$  permet d'obtenir finalement

$$(4.20) \quad \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{l_{ji}}{2\alpha_{ji}} (\delta p_{ji})^2 + \frac{l_{ji}\alpha_{ji}}{2} (\delta \mathbf{u}_{ji})^2 \right) \leq Ch \left( \frac{1}{\alpha_{min}} + \alpha_{max} \right) \|\nabla \mathbf{V}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2,$$

où  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de  $\alpha_{ji}$  sur tout le domaine. Nous gardons l'influence de ces deux grandeurs dans l'estimation car en toute généralité elles représentent un degré de liberté de la méthode qui n'est pas forcément contrôlé.

Etudions enfin le second terme. On déroule le calcul comme suit.

$$\begin{aligned} \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^{\frac{5}{2}} |\mathbf{V}_j| \|\nabla^2 \mathbf{V}\|_{L^2(\Gamma_{jk})} &\leq \frac{1}{2} \sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \left( l_{jk}^3 |\mathbf{V}_j|^2 + l_{jk} C^2 \|\nabla^2 \mathbf{V}\|_{H^3(\Omega_j)}^2 \right). \\ &\leq C_1 h \sum_{\forall j} s_j |\mathbf{V}_j|^2 + C_2 h \|\nabla \mathbf{V}\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq C_1 h \|\mathbf{V}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C_2 h \|\nabla \mathbf{V}\|_{H^3(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que le schéma, en produisant de l'entropie, est dissipatif - estimation (4.16) :

$$\|\mathbf{V}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\mathbf{V}_h^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

On obtient donc

$$\sum_{\forall j} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^{\frac{5}{2}} |\mathbf{V}_j| \|\nabla^2 \mathbf{V}\|_{L^2(\Gamma_{jk})} \leq Ch \|\mathbf{V}^0\|_{H^3(\Omega)}^2.$$

Au final, l'estimation sur  $\mathcal{E}'(t)$  s'écrit

$$(4.21) \quad \mathcal{E}'(t) \leq Ch \left( \frac{1}{\alpha_{min}} + \alpha_{max} \right) \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + C' h \|\mathbf{V}^0\|_{H^3(\Omega)}^2.$$

L'intégration en temps de cette inégalité achève la preuve.  $\square$

## 4.4 Estimation d'erreur des méthodes discrètes en temps

Nous proposons maintenant d'étendre les résultats précédents aux méthodes discrétisées en temps. Le résultat que nous allons démontrer stipule qu'il existe une discrétisation temporelle explicite du système semi-discrétisé en espace qui converge à la même vitesse et sous les mêmes hypothèses que la méthode continue. La démonstration requiert les résultats de la section précédente car nous allons chercher à estimer uniquement la différence entre les variantes discrètes et continues en temps des algorithmes.

Les analogies formelles entre le schéma Volumes-Finis standard et le solveur aux nœuds nous permettent de synthétiser les deux méthodes semi-discrètes (4.4) et (4.7) sous la forme abstraite ci-dessous, qui nous servira d'équation modèle :

$$\mathbf{V}'_h(t) = \mathcal{A}_h \mathbf{V}_h,$$

où par abus de notation nous notons de la même façon  $\mathbf{V}_h$  la suite d'éléments  $(\mathbf{V}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  et la fonction continue par morceaux qui vaut  $\mathbf{V}_j$  sur la maille  $\Omega_j$ . C'est bien la dépendance



linéaire des flux, aux arêtes ou aux nœuds, en fonction des grandeurs centrées voisines, qui justifie cette forme, cf. équations (3.20), (3.22) et (4.9). Comme on travaille en domaine d'espace infini, il faut voir  $\mathcal{A}_h$  comme un endomorphisme de l'ensemble des suites réelles (ou plus exactement de l'ensemble des suites de triplets réels, puisque  $\mathbf{V}_j$  a trois composantes).

Nous choisissons de discrétiser ce système par le schéma d'Euler explicite, en cohérence avec ce que nous avons proposé dans le cas non-linéaire<sup>2</sup> :

$$(4.22) \quad \mathbf{W}_h^{n+1} = (\mathcal{I} + \Delta t^n \mathcal{A}_h) \mathbf{W}_h^n.$$

Nous notons donc  $\mathbf{W}_h^n = \left( \mathbf{W}_j^n \right)_{j \in \mathbb{N}}$  la solution numérique au temps  $t^n = \sum_0^{n-1} \Delta t^k$ , en partant de la condition initiale

$$\mathbf{W}_h^0 = \mathbf{V}_h(0).$$

En ce qui concerne la discrétisation en temps de l'équation de l'énergie totale, nous employons également un schéma d'Euler explicite qui s'écrit, par exemple pour le solveur aux nœuds

$$(4.23) \quad e_j^{n+1} = e_j^n + \frac{\Delta t^n}{s_j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{1}{2} \langle \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{W}_{ji}^n \rangle.$$

L'écriture est analogue pour le schéma Volumes-Finis standard, et il suffit de retenir de cette discrétisation qu'elle assure encore, comme au niveau continu, la conservation de l'énergie totale sur tout le domaine.

Avant de nous lancer dans l'étude de convergence de cet algorithme, la première étape est de s'assurer de sa stabilité. L'espace naturel de contrôle est celui des énergies finies sur tout le domaine :

$$l_h^2 = \left\{ \mathbf{W} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} s_j \mathbf{W}_j^2 < +\infty \right\}.$$

Il est facile de montrer que la condition de stabilité classique  $\|\mathcal{I} + \Delta t \mathcal{A}_h\|_{\mathcal{L}(l_h^2)} \leq 1$  est assurée dès lors que le schéma est entropique, condition intrinsèque à nos méthodes continues en temps. Pour imposer encore cette propriété au niveau discret en temps, un contrôle sur le pas de temps est nécessaire, de type condition *Courant-Friedrichs-Lewy*. Nous résumons ces idées dans le lemme suivant.

**Lemme 8** *Si le schéma discret en temps (4.22-4.23) est entropique, dans le sens où il vérifie*

$$(4.24) \quad s_j \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t^n} \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*alors il est  $l_h^2$ -stable, c'est-à-dire  $\|\mathbf{W}_h^{n+1}\|_{l_h^2} \leq \|\mathbf{W}_h^n\|_{l_h^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . De plus cette condition est équivalente à la contrainte suivante sur le pas de temps*

$$(4.25) \quad \Delta t^n \left[ (\mathcal{A}_h \mathbf{W}_h^n)_j \right]^2 \leq 2s_j \eta_j'(t^n) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*qui est toujours réalisable.*

---

<sup>2</sup>Remarquons que la discussion sur la semi-implication pour assurer la conservation de la masse n'a plus lieu d'être, vu que le maillage reste fixe dans cette approche linéarisée.

La condition ci-dessus est en effet toujours réalisable car la variante continue exposée précédemment est entropique, ce qui rend le second membre de l'inégalité toujours strictement positif ou nul. Dans ce second cas critique, il est clair au vu des bilans d'entropie (4.6)-(4.10) que l'on a alors  $(\mathcal{A}_h \mathbf{W}_h^n)_j = 0$ , ce qui rend l'inégalité vraie quel que soit le pas de temps. Par ailleurs des calculs analogues à ceux de la proposition 9, mais simplifiés puisque d'après des équations linéarisées, montrent bien que la condition CFL implique un pas de temps  $\Delta t^n$  en  $O(h)$  (voir par exemple l'équation (3.25) avec une température, une densité et une vitesse du son unitaires).

*Preuve.* – En partant d'une part de la définition de l'entropie

$$s_j^n = -\frac{(\mathbf{W}_j^n)^2}{2} - e_j^n,$$

et en exploitant d'autre part la conservation de l'énergie totale, on arrive à l'égalité

$$\|\mathbf{W}_h^{n+1}\|_{l_h^2}^2 - \|\mathbf{W}_h^n\|_{l_h^2}^2 = -\sum_{j \in \mathbb{N}} s_j (\eta_j^{n+1} - \eta_j^n).$$

Donc si le schéma est entropique au sens de (4.24), il est bien  $l_h^2$ -stable.

Ensuite on calcule le bilan d'entropie discret comme suit, avec par exemple les notations du solveur aux nœuds

$$\begin{aligned} s_j \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t^n} &= -s_j \left( \frac{(\mathbf{W}_j^{n+1})^2 - (\mathbf{W}_j^n)^2}{2\Delta t^n} + \frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\Delta t^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathbb{N}_{ji} \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{W}_j^{n+1} + \mathbf{W}_j^n \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{W}_{ji}^n \rangle \\ &= -\frac{\Delta t^n}{2} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathbb{N}_{ji} \mathbf{W}_{ji}^n \right)^2 + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbb{N}_{ji} \mathbf{W}_{ji}^n, \mathbf{W}_j^n - \frac{1}{2} \mathbf{W}_{ji}^n \rangle \\ &= -\frac{\Delta t^n}{2} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathbb{N}_{ji} \mathbf{W}_{ji}^n \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathbf{W}_{ji}^n - \mathbf{W}_j^n, \mathbb{N}_{ji} \mathbf{W}_{ji}^n - \mathbf{W}_j^n \rangle. \end{aligned}$$

On reconnaît alors le terme de flux  $(\mathcal{A}_h \mathbf{W}_h^n)_j$  et le bilan d'entropie du schéma continu en temps :

$$s_j \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t^n} = -\frac{1}{2} \Delta t^n \left[ (\mathcal{A}_h \mathbf{W}_h^n)_j \right]^2 + s_j \eta_j'(t^n),$$

ce qui aboutit au résultat voulu.  $\square$

Nous nous intéressons maintenant à la convergence de l'algorithme (4.22-4.23). Le résultat d'estimation d'erreur ci-dessous, entre cette méthode complètement discrétisée et la version continue en temps, permet de conclure, avec les théorèmes 13 et 14, quant à sa convergence.

**Théorème 15** *Soit  $\tau_h$  le pas de temps maximal donné par la condition CFL (4.25) et  $\Delta t$  un pas de temps constant tel que  $\nu_h = \frac{\Delta t}{\tau_h} \in ]0, 1[$ . Alors la différence entre l'algorithme (4.22-4.23) et sa variante continue en temps (4.4-4.5) ou (4.7-4.8) est d'ordre  $h^{1/2}$ , sur maillage régulier (4.11) : il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|\mathbf{W}_h^n - \mathbf{V}_h(n\Delta t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{\sqrt{1-\nu_h}} \sqrt{T} \sqrt{\tau_h} \quad \text{pour } 0 \leq n\Delta t \leq T.$$

La démonstration utilise l'inégalité ci-dessous, qui sera démontrée en fin de chapitre.

**Lemme 9**

$$\forall \nu \in ]0, 1[, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \nu^{E(\nu(q+1))} (1 - \nu)^{q - E(\nu(q+1))} C_q^{E(\nu(q+1))} \leq \frac{2}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{1}{\sqrt{q+1}},$$

où  $C_q^n$  est le coefficient binomial  $\frac{q!}{(q-n)!n!}$  et  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x \in \mathbb{R}$ .

*Preuve du théorème 15.* – Le choix d'un pas de temps constant est seulement motivé pour des détails techniques, et la preuve s'en trouve grandement simplifiée. Nous étudions la différence entre  $\mathbf{V}_h(n\Delta t)$  et  $\mathbf{W}_h^n$ , que l'on note  $\mathbf{E}_h^n$  :

$$\mathbf{E}_h^n = \mathbf{V}_h(n\Delta t) - \mathbf{W}_h^n.$$

Il est aisé de montrer que cette erreur vérifie le système

$$\begin{cases} \mathbf{E}_h^{n+1} = (\mathcal{I} + \Delta t \mathcal{A}_h) \mathbf{E}_h^n + \Delta t \mathbf{S}_h^n, & n \in \mathbb{N}, \\ \mathbf{E}_h^0 = 0, \end{cases}$$

où  $\mathbf{S}_h^n$ , qui est l'erreur de troncature, devra avoir une forme adéquate pour compenser les accumulations d'erreurs successives au cours des itérations. On a très exactement

$$\mathbf{E}_h^n = \Delta t \sum_{p=0}^{n-1} (\mathcal{I} + \Delta t \mathcal{A}_h)^{n-1-p} \mathbf{S}_h^p.$$

Si l'erreur de troncature était d'un ordre  $\mathcal{O}(h^s)$ ,  $s > 0$ , l'équation ci-dessus prouverait immédiatement une erreur du même ordre (grâce à la stabilité - on serait alors dans le cadre du théorème de Lax). Or la caractéristique des schémas Volumes-Finis sur maillage non structuré est de ne pas être consistant, au sens classique, c'est-à-dire que l'erreur de consistance est d'ordre un, uniformément en  $h$  [26]. Dans notre cas on peut évaluer  $\mathbf{S}_h^n$ , en fonction de  $\mathbf{V}'_h$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_h^n &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}_h((n+1)\Delta t) - \mathbf{V}_h(n\Delta t)) - \mathcal{A}_h \mathbf{V}_h(n\Delta t), \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathcal{A}_h \mathbf{V}_h(t) dt - \mathcal{A}_h \mathbf{V}_h(n\Delta t) \\ &= \frac{\mathcal{A}_h}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{n\Delta t}^t \mathbf{V}'_h(s) ds dt, \end{aligned}$$

que l'on écrit ensuite sous la forme

$$\mathbf{S}_h^n = \tau_h \mathcal{A}_h \mathbf{Z}_h^n,$$

où l'on note  $\tau_h$  le pas de temps maximal donné par la condition CFL (4.25) et on définit  $\mathbf{Z}_h^n$  par

$$\mathbf{Z}_h^n = \frac{1}{\tau_h \Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{n\Delta t}^t \mathbf{V}'_h(s) ds dt.$$

Montrons tout d'abord que  $\mathbf{Z}_h^n$  est borné. Pour cela on applique le schéma  $\mathcal{A}_h$  à  $(\mathcal{A}_h \mathbf{V}_h)$  :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_h \mathbf{V}_h)' = \mathcal{A}_h (\mathcal{A}_h \mathbf{V}_h), \\ (\mathcal{A}_h \mathbf{V}_h)(0) = \mathcal{A}_h \mathbf{V}_h^0, \end{cases}$$

et sa stabilité, ainsi que la conservation de l'énergie totale, amène (comme dans l'estimation de  $\mathcal{D}_1$  précédemment) à

$$\|\mathcal{A}_h \mathbf{V}_h(t)\|_{l_h^2} \leq \|\mathcal{A}_h \mathbf{V}_h^0\|_{l_h^2} \leq C \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

D'où l'on déduit que

$$(4.26) \quad \|\mathbf{Z}_h^n\| \leq \frac{\Delta t}{\tau_h} C \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Afin de mettre en évidence le phénomène de compensation d'erreur, nous introduisons l'opérateur

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{I} + \tau_h \mathcal{A}_h,$$

qui d'une part est borné par définition de la condition CFL, et d'autre part permet d'écrire

$$\mathcal{I} + \Delta t \mathcal{A}_h = (1 - \nu_h) \mathcal{I} + \nu_h \mathcal{T}_h, \quad \nu_h = \frac{\Delta t}{\tau_h}.$$

Au passage on en déduit que l'opérateur  $\tau_h \mathcal{A}_h$  est borné par  $1 + \|\mathcal{T}_h\|_{\mathcal{L}(l_h^2)}$ , et donc, d'après (4.26), que  $\mathbf{S}_h^n$  est borné par une estimation en  $O(1)$ , et *a priori* pas mieux.

Le terme d'erreur s'écrit désormais sous la forme

$$(4.27) \quad \mathbf{E}_h^n = \Delta t \sum_{p=0}^{n-1} ((1 - \nu_h) \mathcal{I} + \nu_h \mathcal{T}_h)^{n-1-p} (\mathcal{T}_h - \mathcal{I}) \mathbf{Z}_h^p.$$

Tout le travail qu'il reste à faire est de montrer comment la multiplication du polynôme  $((1 - \nu_h) \mathcal{I} + \nu_h \mathcal{T}_h)^q$ , qui a des coefficients positifs, par  $(\mathcal{T}_h - \mathcal{I})$ , occasionne une interaction destructive de coefficients. Cette idée a été développée pour la première fois par B. Després dans [26]. Cette référence présente une démonstration complète mais assez complexe dans le cas général d'un pas de temps variable (autrement dit  $\nu_h$  variable d'un pas de temps à un autre). Ici nous allons démontrer un résultat intermédiaire, et intéressant en pratique, avec  $\nu_h$  fixé mais quelconque entre 0 et 1 (strictement), grâce au lemme 9.

Soit donc  $\nu_h \in ]0, 1[$ , il faut étudier le terme suivant (avec la notation  $q = n - 1 - p$  et la convention sur les coefficients du binôme de Newton  $C_q^{-1} = C_q^{q+1} = 0$ ) :

$$\begin{aligned} ((1 - \nu_h) \mathcal{I} + \nu_h \mathcal{T}_h)^q (\mathcal{T}_h - \mathcal{I}) &= \sum_{j=0}^q C_q^j \nu_h^j (1 - \nu_h)^{q-j} (\mathcal{T}_h^{j+1} - \mathcal{T}_h^j) \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} \left( C_q^{j-1} \nu_h^{j-1} (1 - \nu_h)^{q-j+1} - C_q^j \nu_h^j (1 - \nu_h)^{q-j} \right) \mathcal{T}_h^j \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} \nu_h^{j-1} (1 - \nu_h)^{q-j} \left( (1 - \nu_h) C_q^{j-1} - \nu_h C_q^j \right) \mathcal{T}_h^j \\ &\leq \sum_{j=0}^{q+1} \nu_h^{j-1} (1 - \nu_h)^{q-j} |(1 - \nu_h) C_q^{j-1} - \nu_h C_q^j|. \end{aligned}$$

L'inégalité vient de la stabilité de la méthode. On peut enlever la valeur absolue selon la position de  $\nu_h$  par rapport à  $\frac{1}{2}$ . En effet, supposons d'abord que  $\nu_h < \frac{1}{2}$ . Alors on a

$$\nu_h < \frac{q}{q+1} \quad \text{pour } q \geq 1,$$

donc il existe  $j_0 \in ]0, q] \cap \mathbb{N}$  tel que

$$\frac{j_0 - 1}{q + 1} \leq \nu_h < \frac{j_0}{q + 1}.$$

Très exactement  $j_0 = E(\nu_h(q + 1)) + 1$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi on a

$$\frac{q - j_0 + 1}{j_0} < \frac{1 - \nu_h}{\nu_h} \leq \frac{q - j_0 + 2}{j_0 - 1},$$

soit

$$\frac{C_q^{j_0}}{C_q^{j_0-1}} < \frac{1 - \nu_h}{\nu_h} \leq \frac{C_q^{j_0-1}}{C_q^{j_0-2}}.$$

Comme la suite  $\left(\frac{C_q^j}{C_q^{j-1}}\right)_j$  est décroissante<sup>3</sup>, on vient de montrer que

$$\begin{cases} (1 - \nu_h)C_q^{j-1} - \nu_h C_q^j > 0 & \forall j \geq j_0, \\ (1 - \nu_h)C_q^{j-1} - \nu_h C_q^j \leq 0 & \forall j < j_0. \end{cases}$$

Donc dans le cas  $\nu_h < \frac{1}{2}$  on peut écrire

$$\begin{aligned} ((1 - \nu_h)\mathcal{I} + \nu_h\mathcal{T}_h)^q (\mathcal{T}_h - \mathcal{I}) &\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} \left( \nu_h^j (1 - \nu_h)^{q-j} C_q^j - \nu_h^{j-1} (1 - \nu_h)^{q-j+1} C_q^{j-1} \right) \\ &\quad + \sum_{j=j_0}^{q+1} \left( \nu_h^{j-1} (1 - \nu_h)^{q-j+1} C_q^{j-1} - \nu_h^j (1 - \nu_h)^{q-j} C_q^j \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} \left( \nu_h^j (1 - \nu_h)^{q-j} C_q^j - \nu_h^{j-1} (1 - \nu_h)^{q-j+1} C_q^{j-1} \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{q-j_0+1} \left( \nu_h^{q-j} (1 - \nu_h)^j C_q^j - \nu_h^{q-j+1} (1 - \nu_h)^{j-1} C_q^{j-1} \right) \\ &\leq 2\nu_h^{E(\nu_h(q+1))} (1 - \nu_h)^{q-E(\nu_h(q+1))} C_q^{E(\nu_h(q+1))}. \end{aligned}$$

Le cas  $\nu_h > \frac{1}{2}$  amène à la même inégalité, par symétrie du problème autour de  $\frac{1}{2}$  (on pose  $\mu_h = 1 - \nu_h < \frac{1}{2}$  et on développe la formule du binôme en portant les puissances en  $j$  sur  $\mu_h$  et celles en  $q - j$  sur  $1 - \mu_h$ ).

Le cas particulier  $\nu_h = \frac{1}{2}$  est le plus simple : on utilise la croissance (non stricte) de la suite  $\left(C_q^j\right)_j$  de  $j = -1$  à  $E((q + 1)/2)$ , puis sa décroissance de  $E((q + 1)/2) + 1$  à  $q + 1$ , pour arriver exactement à l'inégalité ci-dessus avec  $\nu_h = \frac{1}{2}$ .

Finalement, le lemme 9 montre que le majorant de droite constitue le terme général

---

<sup>3</sup>En effet  $\frac{C_q^{j+1}}{C_q^j} = \frac{1}{j+1} \left( j \frac{C_q^j}{C_q^{j-1}} - 1 \right)$ .

d'une série convergente, ce qui permet de contrôler l'erreur (4.27) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_h^n &\leq C\Delta t \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{\sqrt{\nu_h(1-\nu_h)}} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-p}} \\
&\leq C\Delta t \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{\sqrt{\nu_h(1-\nu_h)}} \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
&\leq C\Delta t \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{\sqrt{\nu_h(1-\nu_h)}} \sqrt{n} \\
&\leq C \|\nabla \mathbf{V}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{\sqrt{1-\nu_h}} \sqrt{(n\Delta t)\sqrt{\tau_h}}.
\end{aligned}$$

□

*Preuve du lemme 9.* – Il faut d'abord distinguer les cas particuliers pour lesquels les paramètres du coefficient binomial sont nuls ou égaux entre eux :

- si  $q = 0$ , alors  $E(\nu(q+1)) = 0$  et l'inégalité se majore simplement par 1, donc par  $\frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{2}{\sqrt{1+0}}$ .
- si  $\nu \leq \frac{1}{2}$ , lorsque  $E(\nu(q+1)) = 0$ , l'inégalité se majore par  $(1-\nu)^q$ , et il est assez simple de montrer que

$$\begin{aligned}
(1-\nu)^q &\leq \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \sqrt{\frac{-\nu(1-\nu)}{2e \ln(1-\nu)}} \frac{1}{\sqrt{q}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{1}{\sqrt{2e}} \frac{1}{\sqrt{q}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{q+1}} \quad \text{pour } q \geq 1.
\end{aligned}$$

- si  $\nu \geq \frac{1}{2}$ , lorsque  $E(\nu(q+1)) = q$ , l'inégalité se majore par  $\nu^q$ , et par symétrie (on peut à nouveau poser  $\mu = 1-\nu$ ) on retrouve la même majoration :

$$\nu^q \leq \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{q+1}} \quad \text{pour } q \geq 1.$$

Dans les autres cas, c'est-à-dire lorsque  $0 < E(\nu(q+1)) < q$ , on exploite la formule de Stirling *exacte* (due notamment à Robbins [60]) :

$$\forall N > 0, \quad \exists \lambda_N \quad \text{avec} \quad \frac{1}{12N+1} < \lambda_N < \frac{1}{12N} \quad \text{tel que} \quad N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\lambda_N}.$$

Celle-ci nous apporte, en notant  $E = E(\nu(q+1))$  pour alléger les écritures :

$$\nu^E (1-\nu)^{q-E} C_q^E \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \left(\frac{\nu q}{E}\right)^{E+\frac{1}{2}} \left(\frac{q(1-\nu)}{q-E}\right)^{q-E+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{q}}, \quad 0 < E < q.$$

A un coefficient près on retrouve le terme général  $\frac{1}{\sqrt{q+1}}$ , il faut donc montrer que le facteur  $\left(\frac{\nu q}{E}\right)^{E+\frac{1}{2}} \left(\frac{q(1-\nu)}{q-E}\right)^{q-E+\frac{1}{2}}$  est borné. Dans celui-ci, la puissance  $\frac{1}{2}$  joue un rôle différent que  $E$  et  $q-E$ . Tout d'abord, une étude rapide de la fonction  $f : x \mapsto (1-x)^{(1-a)} x^a$  sur

$]0, 1[$  pour  $a \in ]0, 1[$  montre que  $f(x) \leq f(a)$ , ce qui donne, appliqué à  $a = \frac{E}{q}$  et  $x = \nu$  puis élevé à la puissance  $q$  :

$$\left(\frac{\nu q}{E}\right)^E \left(\frac{q(1-\nu)}{q-E}\right)^{q-E} \leq 1.$$

Ensuite, on cherche à montrer que

$$\nu(1-\nu) \leq 2\frac{E}{q} \frac{(q-E)}{q},$$

où l'on rappelle que l'on est dans la situation où

$$\frac{E}{q+1} \leq \nu < \frac{E+1}{q+1} \quad \text{et} \quad 1 \leq E < q.$$

Comme la fonction  $x \mapsto (1-x)x$  est croissante sur  $]0, \frac{1}{2}[$  puis décroissante sur  $]\frac{1}{2}, 1[$ , trois cas se présentent :

– si  $\frac{E+1}{q+1} \leq \frac{1}{2}$ , alors

$$\nu(1-\nu) \leq \frac{E+1}{q+1} \left(1 - \frac{E+1}{q+1}\right) \leq 2\frac{E}{q} \frac{(q-E)}{q}.$$

– si  $\frac{E}{q+1} \leq \frac{1}{2} < \frac{E+1}{q+1}$ , alors

$$\nu(1-\nu) \leq \frac{1}{4} \leq 2\frac{E}{q} \left(1 - \frac{E}{q}\right) \quad \text{pour } q > 1 \quad (\text{ce qui est le cas car } 1 \leq E < q).$$

– si  $\frac{1}{2} \leq \frac{E}{q+1}$ , par symétrie on retrouve le premier cas.

Ceci prouve donc l'inégalité voulue, et on en déduit que

$$\left(\frac{\nu q}{E}\right)^{E+\frac{1}{2}} \left(\frac{q(1-\nu)}{q-E}\right)^{q-E+\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}.$$

On vient donc de montrer

$$\nu^E (1-\nu)^{q-E} C_q^E \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{1}{\sqrt{q+1}} \quad \text{pour } 1 \leq E < q.$$

L'inégalité du lemme est donc vraie pour tout entier  $q$ , ce qui achève la preuve.  $\square$





## Chapitre 5

# Résultats numériques

---

L'objet de ce chapitre est d'illustrer la théorie précédente sur quelques exemples typiques de l'hydrodynamique lagrangienne. Certains d'entre eux modélisent une physique représentative, même si simplifiée, des applications en fusion par confinement inertiel (d'autres cas-tests ont également été menés dans [33]). L'intérêt et la difficulté de chaque problème numérique sont présentés au cas par cas, la qualité de l'approximation numérique se mesurant bien évidemment toujours par sa convergence et sa stabilité, mais aussi par sa faculté à préserver certaines quantités ou certaines symétries quelle que soit la précision atteinte. Pour chacune de ces simulations, on compare le nouveau schéma aux nœuds avec une méthode de Godunov multidimensionnelle classique [5], référée dans la suite comme *méthode usuelle*. Ici il faut bien comprendre que nous cherchons à comparer deux approches plutôt que deux schémas numériques précis : il existe toujours maintes variantes palliant certains défauts ou augmentant la précision de la méthode (par des techniques de montée en ordre par exemple), qui sont ou seraient applicables aussi bien à l'une qu'à l'autre approche. Dans la dernière partie nous nous permettrons simplement de présenter rapidement une version isentropique de notre schéma car elle s'insère exactement dans notre formalisme symétrisé et illustre la potentialité de la nouvelle approche ; elle permet de gagner en précision sans rajouter de degré de liberté, mais en imposant un critère physique supplémentaire.

---

## 5.1 Rappel de l'approche Volumes-Finis usuelle

Rappelons brièvement les principes de la *méthode usuelle*. Il s'agit d'un schéma Volumes-Finis centré, sur maillage mobile structuré ou non, et construit par intégration directe sur chaque maille mobile du système de lois de conservation

$$\begin{cases} \rho \partial_T \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (p \mathbb{I}_d) = \mathbf{0}, \\ \rho \partial_T e + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (p \mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

Concrètement il a donc l'allure de (3.12), auquel il faut retrancher l'équation de conservation de la masse. Le flux à travers chaque cellule est calculé en résolvant de façon exacte ou approché un problème de Riemann unidimensionnel dans la direction normale à l'arrêt. Dans les exemples numériques suivant, notre choix s'est porté sur le solveur acoustique de Godunov : ceci est cohérent avec notre procédure de comparaison, puisque nous avons interprété le nouveau schéma comme un solveur acoustique aux nœuds - et non pas aux faces - qui par ailleurs dégènerè vers le solveur acoustique classique dans les écoulements monodimensionnels. Le flux sur une arêtes  $\Gamma_{jk}$  est donc calculé par

$$\begin{cases} p_{jk} = \frac{\rho_j c_j p_j + \rho_k c_k p_k}{\rho_j c_j + \rho_k c_k} + \frac{\rho_j c_j \rho_k c_k}{\rho_j c_j + \rho_k c_k} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_{jk}, \\ \mathbf{u}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk} = \frac{\rho_j c_j \mathbf{u}_j + \rho_k c_k \mathbf{u}_k}{\rho_j c_j + \rho_k c_k} \cdot \mathbf{n}_{jk} + \frac{1}{\rho_j c_j + \rho_k c_k} (p_j - p_k). \end{cases}$$

Afin de définir les vitesses aux nœuds indispensables au déplacement du maillage, nous employons l'algorithme du code CAVEAT, développé au Los Alamos National Laboratory [5]. Le principe de ce code - mais c'est aussi celui de bien d'autres méthodes Volumes-Finis lagrangiennes [19] - est de minimiser l'erreur entre les vitesses normales aux arêtes et la projection selon ces mêmes normales de la vitesse aux nœuds, au sens des moindres carrés :

$$(5.1) \quad \mathbf{u}_i^{\text{CAVEAT}} = \operatorname{argmin} \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} w_{jk} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{jk} - \mathbf{u}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk})^2,$$

où  $w_{jk}$  est un poids, égal à la somme des densités de part et d'autre de l'arête en question ; à vrai dire, la justification de ce poids n'est pas des plus claires, sinon que des essais numériques variés nous dissuadent vite de nous en éloigner. Enfin, comme nous l'avons déjà mis en avant, il faut imposer la conservation de la masse après déplacement du maillage. Ceci signifie que l'équation

$$\rho^0 \partial_t \tau - \partial_X (uM - vL) - \partial_Y (vA - uB) = 0$$

n'est pas discrétisée dans le formalisme Volumes-Finis usuel, dont pourtant la méthode se revendique. C'est une différence fondamentale avec notre approche qui rend rigoureusement équivalente le déplacement du maillage avec la discrétisation de l'équation ci-dessus.

Dans la présentation des résultats numériques qui suit, nous complétons toujours le tracé des solutions physiques par celui du maillage, ce qui peut paraître exotique à la communauté des « numériciens eulériens ». C'est qu'en lagrangien le maillage mobile contient une information tout aussi utile que les grandeurs physiques elles-mêmes, puisqu'il traduit le champ des vitesses *aux nœuds*, partant toute la physique autour de chacun d'eux. Précisons également que les grandeurs physiques sont visualisées en fonction de leur position sur le maillage *mobile* (c'est-à-dire en fonction de  $(x, y)$  et non  $(X, Y)$ ), ce qui est de loin le plus intéressant et permettra par exemple à chacun de comparer les résultats avec un code eulérien. Ces graphes, qu'ils soient unidimensionnels (selon une coupe) ou bidimensionnels, présentent donc la plupart du temps des données discontinues constantes par maille.

## 5.2 Tube à choc de Sod

Le problème du tube à choc de Sod [65] teste la capacité d'un schéma à capturer, en terme de chronométrie et de plateau, un choc, une discontinuité de contact et une détente, suite à la mise en contact immédiate de deux gaz initialement séparés dans des états thermodynamiques distincts. Il s'agit d'un problème unidimensionnel que nous traitons sur un maillage bidimensionnel mais invariant selon la normale à l'écoulement, et qui permet donc de vérifier la bonne dégénérescence de la méthode pour les écoulements unidimensionnels.

Considérons un tube de longueur unité  $\Omega = [0 ; 1] \times [0 ; 1]$  rempli d'un gaz parfait (de ratio des chaleurs spécifiques  $\gamma = 1,4$ ) dont les états initiaux de gauche et de droite sont respectivement définis par  $\rho_G = 1$ ,  $p_G = 1$ ,  $\mathbf{u}_G = 0$  et  $\rho_D = 0,125$ ,  $p_D = 0,1$  et  $\mathbf{u}_D = 0$ . La frontière de  $\Omega$  est un mur mais nous arrêtons la simulation au temps  $t = 0,14$  avant que les ondes ne l'atteignent. Le maillage du domaine initial est composé de  $3 \times 100$  rectangles réguliers, voir figure 5.1.

Comme attendu sur un tel maillage symétrique, le schéma préserve le caractère unidimensionnel de l'écoulement (figure 5.1). On observe de plus sur la figure 5.2 qu'il dégénère exactement vers la méthode usuelle (elle-même se résumant à un solveur acoustique unidimensionnel, cf équation (5.1) dans une symétrie unidimensionnelle). La figure 5.3 montre la solution quasi-convergée obtenue avec  $3 \times 1000$  mailles. On observe entre autre l'accroissement de l'entropie au passage du choc. On retrouve donc les forces et faiblesses de la méthode Volumes-Finis unidimensionnelle : bonne capture du choc, des paliers, mais pied de la détente très étalée, et phénomène du « wall heating » au niveau de la discontinuité de contact (pic en énergie interne, chute de la densité, voir les remarques du cas-test de Noh ci-après et [54]).

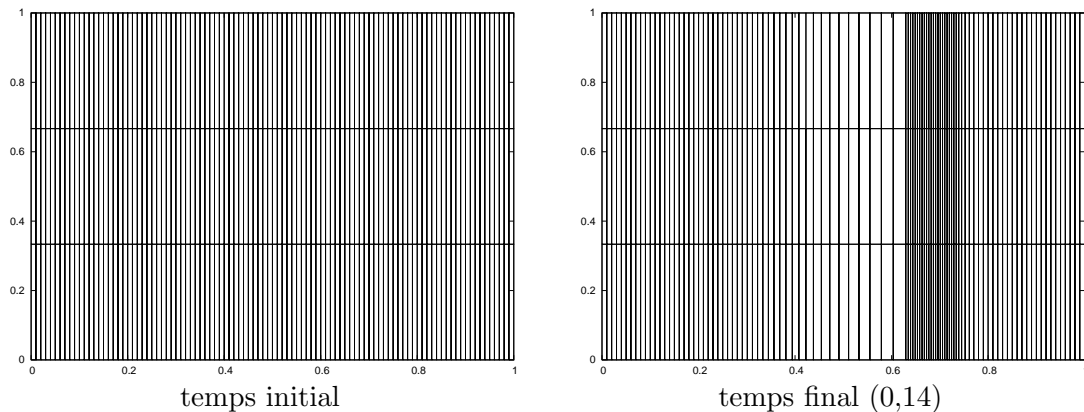


FIG. 5.1 – Tube à choc de Sod - Maillage lagrangien

## 5.3 Problème de Saltzman

L'idée du problème de Saltzman [31] est de résoudre un écoulement unidimensionnel - génération et propagation d'un choc dans un tube - sur un maillage bidimensionnel non-aligné avec cette physique. Il a donc été conçu pour mettre en avant les erreurs et instabilités purement géométriques générées par les codes lagrangiens.

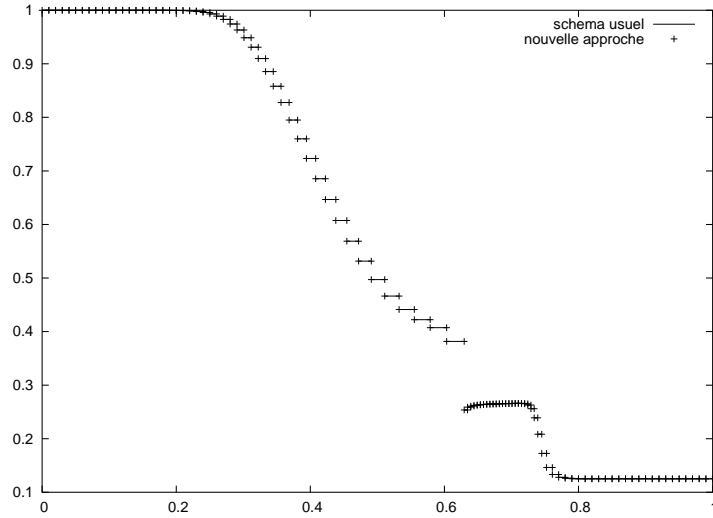


FIG. 5.2 – Tube à choc de Sod au temps  $t = 0,14$  - Densité selon une couche calculée par la méthode usuelle (lignes) et le nouveau solveur multidimensionnel (+). Les deux solutions sont superposées.

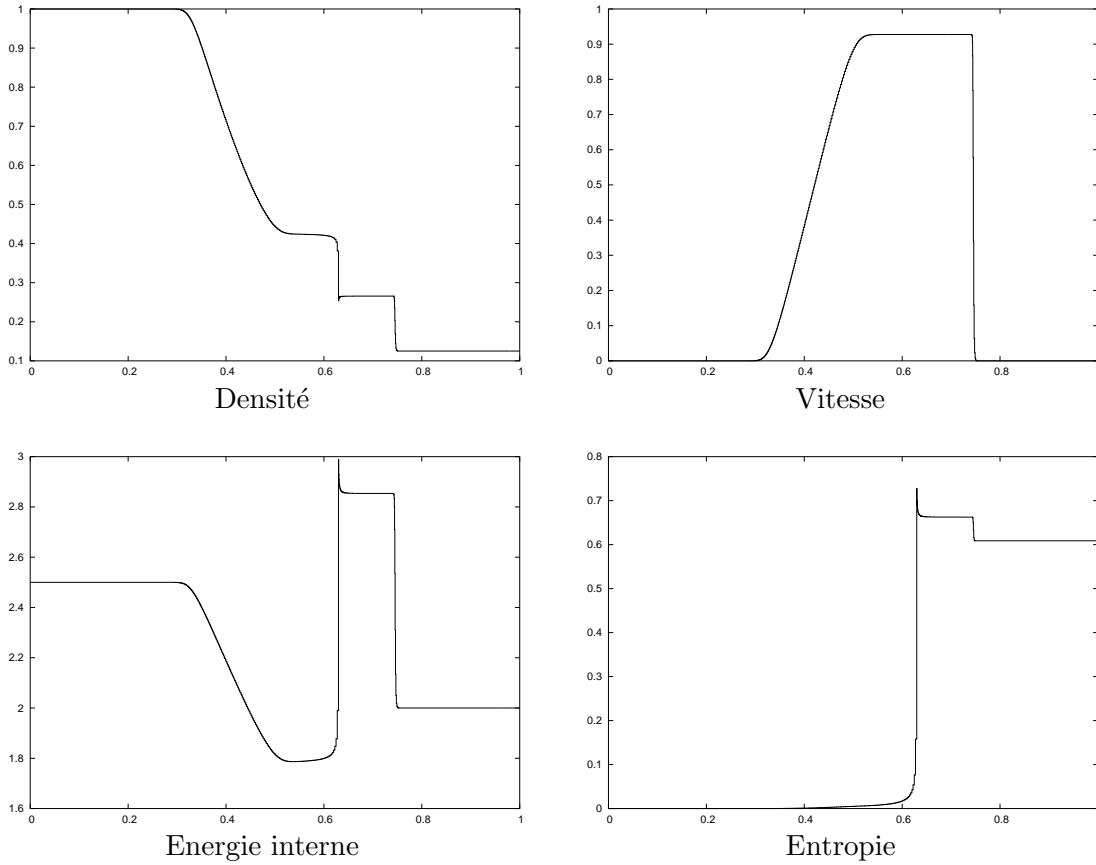


FIG. 5.3 – Tube à choc de Sod au temps  $t = 0,14$  - Solution quasi-convergée selon une couche avec la nouvelle approche.

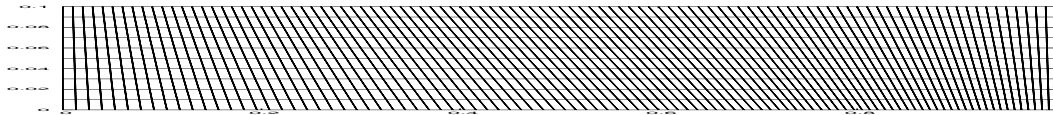


FIG. 5.4 – Problème de Saltzman - Maillage initial, avec même échelle pour les deux axes.

La simulation s’applique sur un domaine initial rectangulaire  $[0; 1] \times [0; 0,1]$  dont le bord gauche est un piston actionné vers la droite à une vitesse constante de 1, alors que toutes les autres frontières sont des murs fixes. Initialement, le tube est rempli d’un gaz parfait ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ), stationnaire, de densité  $\rho^0(X, Y) = 1$  et d’énergie interne très faible  $\varepsilon^0(X, Y) = 10^{-4}$ . Sous de telles conditions, un premier choc se propage vers la droite à une vitesse à peu près égale<sup>1</sup> à  $\frac{4}{3}$ ; il laisse derrière lui un état défini par une densité d’environ 4, une pression d’environ  $\frac{4}{3}$  et une vitesse d’environ 1. Par la suite le gaz connaît de plus en plus de réflexions sur le mur de droite et le piston (série d’aller-retours de chocs). Le piston a théoriquement comprimé le gaz d’un facteur infini lorsqu’il arrive au temps 1 à l’extrémité droite du tube.

Numériquement, la symétrie unidimensionnelle du problème est brisée par un maillage initial composé de  $100 \times 10$  mailles quadrangulaires non-uniformes, dont les sommets sont définies par

$$\begin{cases} x_{ij} = i dx + (10 - j) dy \sin \frac{i\pi}{100}, \\ y_{ij} = j dy \end{cases}$$

pour  $i = 0, 1, \dots, 100$ ,  $j = 0, 1, \dots, 10$  et  $dx = dy = 0,01$ , cf. maillage initial sur la figure 5.4.

La figure 5.5 présente le maillage lagrangien simulé par les deux méthodes au temps  $t = 0,5$ . On observe que la méthode Volumes-Finis usuelle conduit à des déformations excessives (certaines couches se pliant quasiment à l’horizontale), alors que la nouvelle approche préserve notablement mieux la symétrie de l’écoulement. On peut même noter un redressement des mailles au passage du choc. Ainsi la méthode usuelle échoue-t-elle au temps 0,6 suite à des croisement de mailles qui induisent des surfaces négatives. D’autres codes, toujours basés sur une approche Volumes-Finis classique, itèrent un peu plus longtemps, mais il est connu qu’aucun n’arrive à dépasser 80% de la compression [31]. La nouvelle approche permet de mener la simulation après trois réflexions jusqu’au temps  $t = 0,96$ , cf. figure 5.8.

L’examen des simulations au temps  $t = 0,5$  montre bien l’incapacité du code CAVEAT à établir clairement une densité post-choc, voir figure 5.6. Bien qu’imparfait, le plateau post-choc autour de la valeur 4 est mieux affirmé avec le nouveau solveur (figure 5.7).

En conclusion, nous retenons que la nouvelle approche aux nœuds est plus stable que son équivalente aux faces, pour le problème de Saltzman.

## 5.4 Effondrement d’une couronne dans le vide

Ce problème a été mis au point au CEA (et publié dans la thèse de R. Loubere [52]) afin de simuler l’effondrement sur elle-même d’une couronne de métal fondu placée dans le vide. La géométrie cylindrique du problème couplée à une énergie interne extrême, explique, comme on l’analysera plus loin, la difficulté d’une telle simulation, qui est connue pour disqualifier les méthodes bidimensionnelles de type Godunov en coordonnées planes.

<sup>1</sup>Ces valeurs théoriques correspondent à la solution exacte pour une énergie interne initialement nulle, ce dont on s’approche sans pouvoir l’imposer.

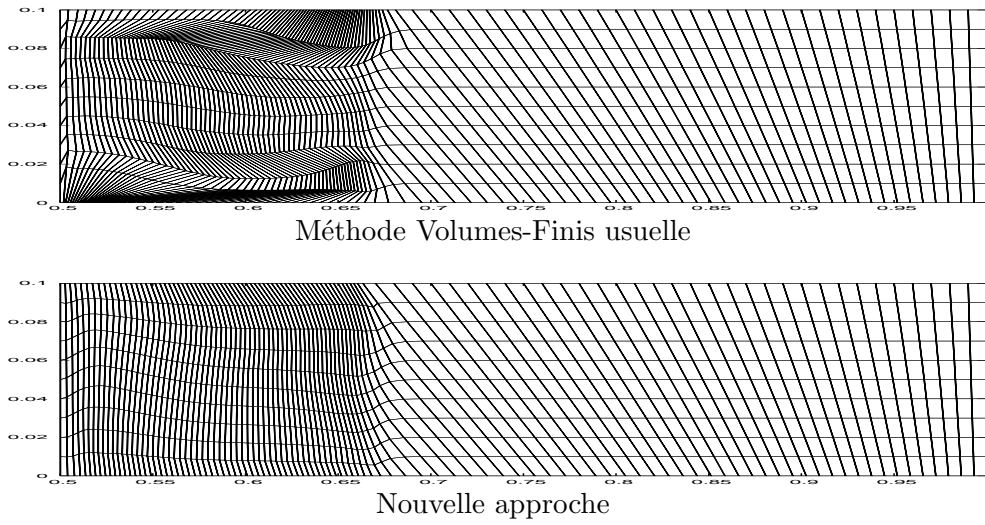


FIG. 5.5 – Problème de Saltzman - Maillage lagrangien au temps  $t = 0,5$ , avec même échelle pour les deux axes.

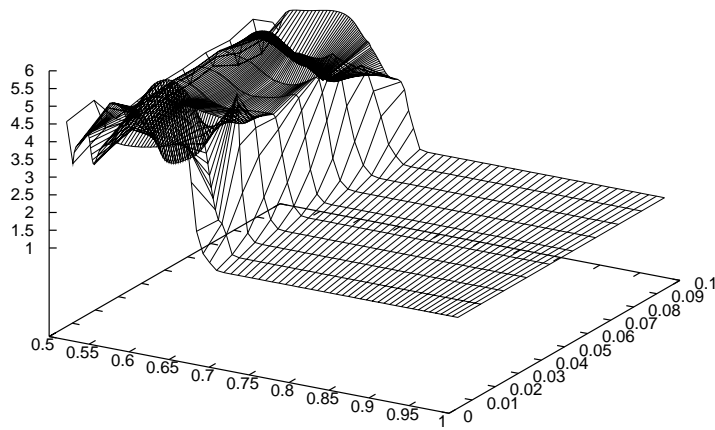


FIG. 5.6 – Problème de Saltzman - Densité au temps  $t = 0,5$  avec le schéma usuel.

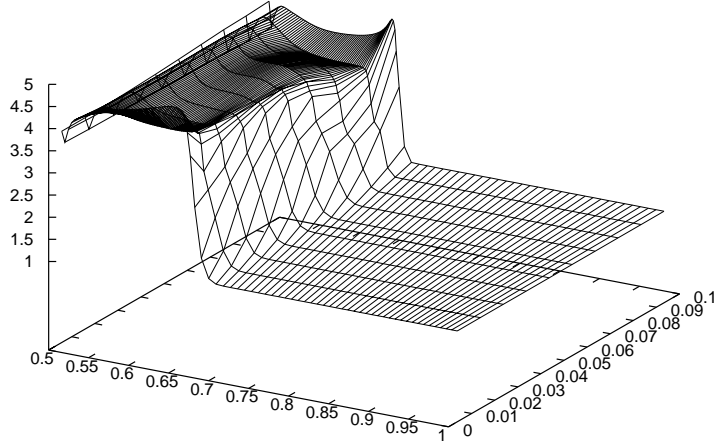


FIG. 5.7 – Problème de Saltzman - Densité au temps  $t = 0,5$  avec la nouvelle approche.

A ce jour, avec une approche Volumes-Finis, seuls des codes en coordonnées curvilignes spécialement développés pour l'occasion ont permis de restituer correctement la physique mise en jeu.

Nous considérons un disque  $\Omega$  délimité initialement par deux cercles concentriques de rayon  $R^+ = 10$  et  $R^- = 9,5$ , et rempli d'un matériau gouverné par une loi d'état de type *gaz raidi*

$$(5.2) \quad p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon - \gamma\pi,$$

où  $\gamma$  et  $\pi$  sont des constantes caractéristiques du matériau. Une telle loi permet de modéliser des fluides et des solides pour des fortes valeurs de  $\pi$ , ainsi qu'un gaz comme l'air lorsque cette constante s'annule. Le problème qui nous intéresse ici spécifie  $\gamma = 3,5$  et  $\pi = 350 \cdot 10^9$ . La couronne est placée dans le vide (ce qui impose des conditions aux limites de type  $p|_{\partial\Omega} = 0$ ) et son état initial est défini par  $\rho^0 = 7,82$ ,  $p^0 = 0$  et  $\mathbf{u}^0(\mathbf{r}) = -2 \cdot 10^5 R^+ \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2}$ . Une telle vitesse est choisie à divergence nulle de façon à minimiser les ondes acoustiques. Sous cet état initial, la couronne va s'effondrer sur elle-même selon deux phases :

- une première période dite de « vol balistique » caractérisée par un épaississement de la couronne qui compense la compression cylindrique et assure une densité quasi-constante,
- une seconde phase de forte compression par l'effet de cylindricité devenu prédominant.

La simulation s'effectue sur un maillage quadrangulaire régulier formé de *secteurs angulaires* et de *couches radiales*, dans un premier temps au nombre respectivement de 45 et 20. Les résultats numériques du maillage lagrangien au temps  $37 \cdot 10^{-6}$  sont présentés sur la figure 5.9. Si les deux méthodes préservent bien la cylindricité du problème<sup>2</sup>, il n'y a par contre aucune comparaison dans le déplacement de la couronne. Nous traçons sur la figure 5.10 la densité selon un secteur, pour le même temps final, complétée par la solution de référence obtenue avec un code cylindrique monodimensionnel convergé. La différence entre

<sup>2</sup>Cette propriété se démontre algébriquement, sur un tel type de maillage et de symétrie, pour chacune des méthodes; voir l'annexe B pour le solveur aux nœuds.

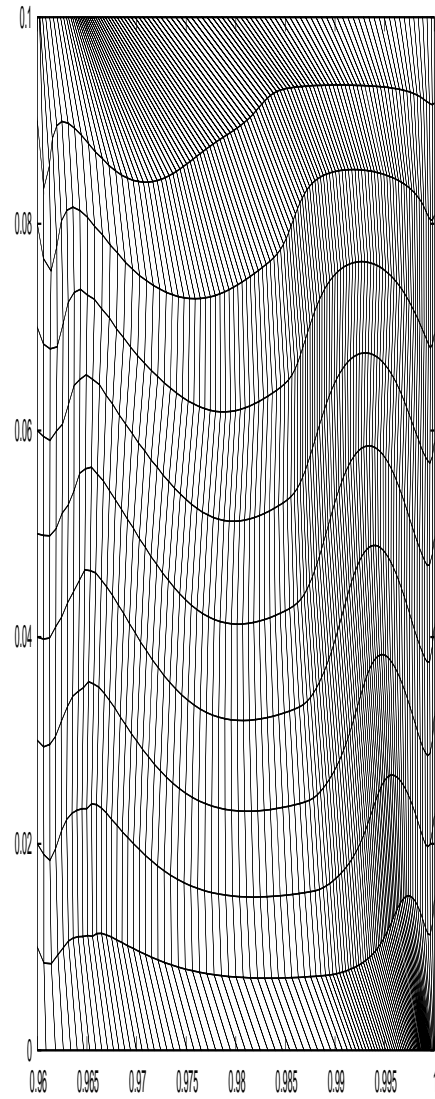


FIG. 5.8 – Problème de Saltzman - Maillage lagrangien au temps  $t = 0,96$  avec le nouveau schéma. Même échelle selon les deux axes.



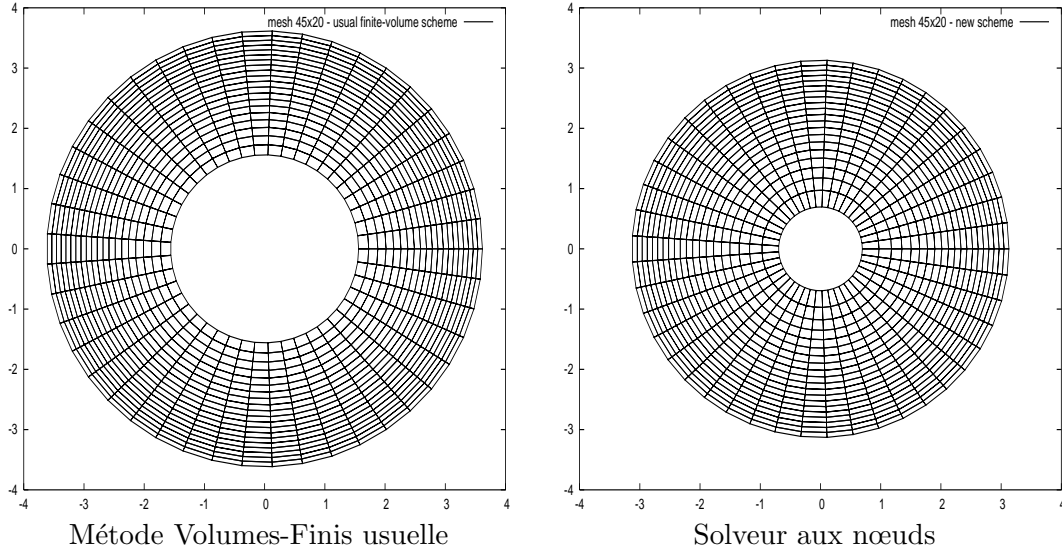


FIG. 5.9 – Effondrement d’une couronne dans le vide - Maillages lagrangiens au temps  $t = 37.10^{-6}$  avec  $45 \times 20$  cellules.

les deux méthodes est frappante : la méthode usuelle fait avancer le matériau beaucoup trop lentement et ne le comprime pas assez (sous-estimation d’environ 15%), contrairement au nouveau solveur qui présente la chronométrie et le taux de compression attendus.

Que se passe-t-il en raffinant le maillage ? Nous multiplions le nombre de secteurs et de couches par deux, quatre et huit (voir figure 5.10) et observons que la méthode classique ne progresse que très lentement vers la solution exacte. Avec une telle vitesse de convergence, on peut estimer que la méthode usuelle nécessiterait plus d’une centaine de fois plus de mailles que la nouvelle approche, pour un résultat comparable ; même si nous ne plaçons pas vraiment notre travail sous ce point de vue, c’est un aspect crucial à prendre en compte du point de vue pratique pour les questions de temps de calcul et d’espace mémoire. Au bout du compte, la bonne capture de la solution avec un maillage grossier illustre bien la consistance du nouveau solveur.

Il paraît opportun de chercher à comprendre d’où viennent ces si grandes différences entre les deux approches. Cette question est d’autant plus intéressante qu’une variante du nouveau solveur [2] retombe dans les travers de l’approche Volumes-Finis aux faces, pour ce type de géométrie cylindrique<sup>3</sup>. Le point d’attaque consiste à estimer les pressions latérales  $\bar{P}$  qui s’appliquent sur les faces latérales des mailles, *cf.* figure 5.12, durant la première phase de vol.

La symétrie cylindrique voudrait que cette pression latérale soit égale à la pression des mailles de la couche concernée, soit  $p_1$  sur la couche inférieure, mais un terme de sur-pression, de nature géométrique, vient s’y ajouter (c’est précisément le terme visqueux qui rend le schéma stable). Pour chacune des méthodes, on peut estimer cette pression en déroulant *à la main* l’algorithme sur la géométrie de la figure 5.12. Pour la méthode

<sup>3</sup>Pour résumer au maximum, cette variante reprend tous les ingrédients du solveurs aux nœuds mais ajoute des degrés de liberté supplémentaires (quatre pressions aux faces au lieu d’une dans la construction du solveur). Pour les écoulements cylindriques, [2] montre que cette version dégénère vers le solveur acoustique classique, ce qui n’est pas avantageux dans le cas présent.

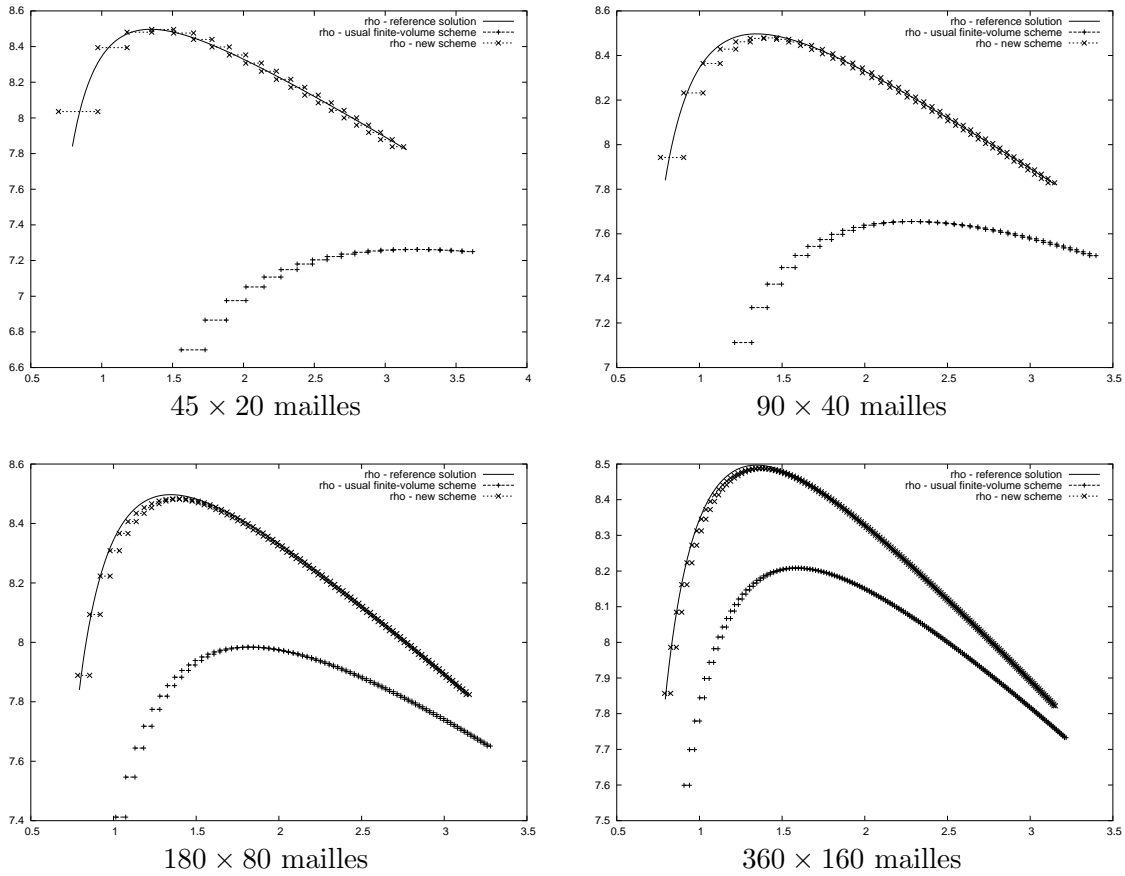


FIG. 5.10 – Effondrement d’une couronne dans le vide - Densité selon un secteur à  $t = 37 \cdot 10^{-6}$  avec le schéma Volumes-Finis usuel (+) et la nouvelle approche (x). La courbe continue représente la solution de référence obtenue par un code 1D cylindrique convergé.

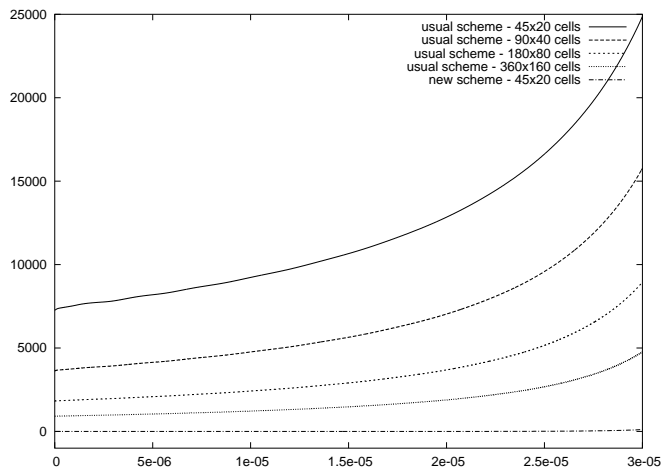


FIG. 5.11 – Effondrement d’une couronne dans le vide - Production d’entropie :  $t \rightarrow \|\frac{\partial S}{\partial t}\|_{L^\infty(\Omega)}(t)$  pour la méthode usuelle (quatre courbes supérieures avec quatre maillages de plus en plus raffinés) et la nouvelle approche (courbe du bas).



ce module (voir annexe B pour la résolution du solveur aux nœud sur maillage polaire équisecteur) :

$$U_i = -\frac{(p_1 + \rho_1 c_1 K_1 \mathbf{n}_{1i} \cdot \mathbf{u}_1) l_{1i} n_{1i}^x + (p_2 + \rho_2 c_2 K_2 \mathbf{n}_{2i} \cdot \mathbf{u}_2) l_{2i} n_{2i}^x}{\rho_1 c_1 K_1 l_{1i} (n_{1i}^x)^2 + \rho_2 c_2 K_2 l_{2i} (n_{2i}^x)^2}.$$

Dans cette expression on va étudier uniquement les termes contenant la vitesse du son, qui pour les raisons citées ci-dessus sont largement prédominants. Un calcul géométrique amène à

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{1i} \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{U_1}{2l_{1i}}(r_0 + r_1) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \\ \mathbf{n}_{2i} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{U_2}{2l_{2i}}(r_1 + r_2) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right). \end{cases}$$

Puis on exploite l'hypothèse d'incompressibilité durant la phase de vol, qui implique une vitesse à divergence nulle : il existe une constante  $C$  telle que  $\mathbf{u}(r) = -C \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2}$ , ce qui amène à

$$\frac{r_1 + r_2}{2} U_2 = \frac{r_0 + r_1}{2} U_1.$$

Enfin, comme cette géométrie vérifie  $l_{2i} n_{2i}^x = -l_{1i} n_{1i}^x$ , on arrive à

$$\begin{aligned} -\frac{(\rho_1 c_1 K_1 \mathbf{n}_{1i} \cdot \mathbf{u}_1) l_{1i} n_{1i}^x + (\rho_2 c_2 K_2 \mathbf{n}_{2i} \cdot \mathbf{u}_2) l_{2i} n_{2i}^x}{\rho_1 c_1 K_1 l_{1i} (n_{1i}^x)^2 + \rho_2 c_2 K_2 l_{2i} (n_{2i}^x)^2} &= U_1 \frac{r_0 + r_1}{2} \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \frac{1}{l_{1i} n_{1i}^x} \\ &= U_1 \frac{r_0 + r_1}{2} \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \frac{2}{r_1 \sin(d\theta)}. \end{aligned}$$

Ainsi, réinjecté dans l'expression de  $p_{1i}$  initiale, on constate que la vitesse au nœud  $\mathbf{u}_i$  élimine exactement le terme de sur-pression en facteur de  $\rho_1 c_1 U_1$ .

Il apparaît ainsi que la sur-pression de la nouvelle méthode est nulle, comparée à celle de la méthode usuelle. On comprends alors, du point de vue mécanique, que la maille, en forme de tronc conique et vouée à glisser dans un secteur angulaire, va être freinée si l'on applique des pressions latérales trop importantes. C'est bien ce que l'on observe sur les figures de résultat, et cela explique également pourquoi diminuer les secteurs angulaires d'un facteur deux, quatre ou huit ne produit que peu d'effet sur la méthode usuelle. De fait, si l'on supprime, en dur, le terme de sur-pression dans la méthode usuelle, on retrouve immédiatement la bonne solution.

Un autre point de vue, qui débouche sur la même conclusion, consiste à étudier l'entropie. La production d'entropie peut en effet s'estimer en fonction des pressions par

$$s_j^0 \rho_j^0 T_j \partial_T \eta_j = \sum_i \frac{l_{ji}}{\alpha_{ji}} (p_j - p_{ji})^2,$$

et on a une écriture analogue pour la méthode usuelle. On voit donc qu'une surestimation des pressions aux nœuds ou aux faces par rapport à  $p_j$  entraîne un accroissement de l'entropie. Numériquement, nous observons en effet que le schéma usuel produit excessivement de l'entropie (figure 5.11). Cela implique un surplus d'énergie interne et donc, à énergie totale constante, une dissipation numérique de l'énergie cinétique.

## 5.5 Problème de Noh

Il s'agit de l'implosion d'un cylindre rempli d'un gaz parfait, créant un choc centrifuge de force dite « infinie », car faisant passer la pression initiale théoriquement nulle à une

valeur strictement positive [54]. La difficulté consiste à retrouver la bonne chronométrie du choc et les paliers en densité et pression. Initialement, le cylindre est de rayon unité, le ratio des chaleurs spécifiques est  $\gamma = 5/3$ , la densité vaut uniformément 1, la vitesse est radiale de module 1 (sauf au centre, maintenu fixe). La pression, que l'on ne peut pas imposer nulle pour un gaz parfait, est approchée à  $10^{-6}$ ; c'est également la valeur imposée sur la face externe, tout au long du calcul. Sous ces conditions, le domaine se comprime et un choc cylindrique de vitesse  $1/3$  se crée au centre, laissant derrière lui un état stationnaire caractérisé par

$$\rho = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right)^2 = 16, \quad p = \frac{16}{3}, \quad \mathbf{u} = 0.$$

On mène le calcul sur le maillage polaire<sup>4</sup> d'une portion angulaire cylindrique de  $60^\circ$ , limitée sur ses faces latérales par des conditions de type mur, jusqu'au temps  $t = 0,6$ .

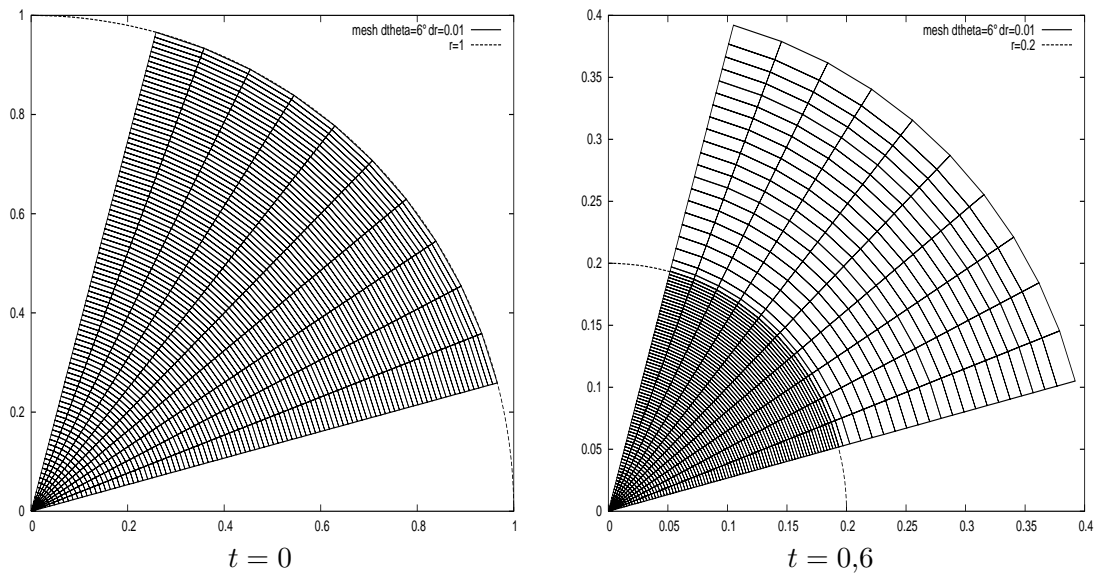


FIG. 5.13 – Problème de Noh - Maillage lagrangien à l'instant initial et à  $t = 0,6$  avec 100 couches et 10 secteurs.

Le solveur respecte bien la symétrie cylindrique du problème, et la chronométrie est parfaitement retrouvée, avec une interface du choc positionnée en  $r = 0,2$  pour  $t = 0,6$ , *cf.* figures 5.13 et 5.14. Les profils radiaux de densité et pression sont capturés avec une précision légèrement moindre, puisque l'on observe une sous estimation des valeurs du palier gauche - ce qui est aussi une caractéristique du solveur classique, *cf.* figure 5.15. Un raffinement de maillage permet de converger vers les paliers exacts (voir les trois profils sur la figure 5.14). Au centre du cylindre, notre méthode n'échappe pas au phénomène connu dit du *wall heating*, mis en avant précisément par W. F. Noh [54] et caractérisé par une forte chute de la densité (et accroissement de la température).

Sur ce problème, on atteint donc bien la convergence avec un raffinement radial. Par contre une instabilité apparaît lorsqu'on raffine le maillage dans le sens transverse à l'écoulement, *i.e.* pour des secteurs angulaires trop petits. Avec 200 couches et un pas angulaire

<sup>4</sup>La première couche au centre est maillée en triangles.

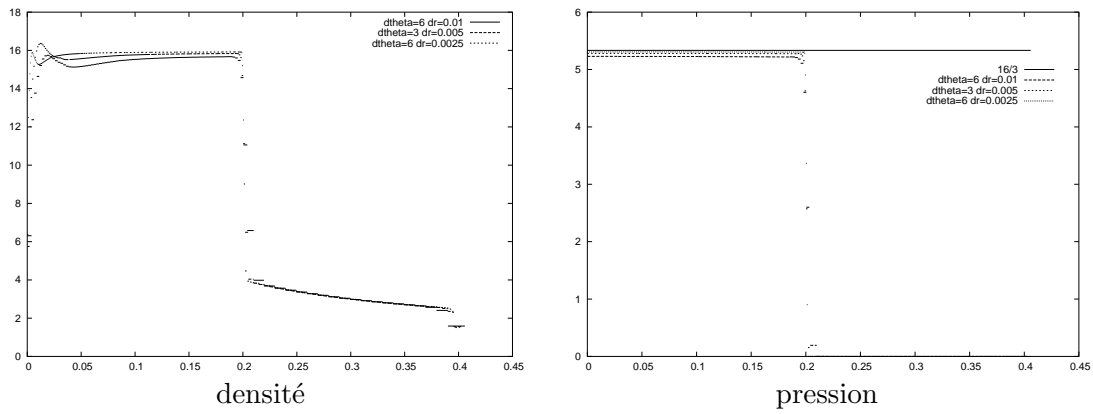


FIG. 5.14 – Problème de Noh - Profils de la solution à  $t = 0,6$  pour 100 couches  $\times$  10 secteurs (trait continu, palier inférieur à gauche), 200 $\times$ 20 (tirets, palier intermédiaire) et 400 $\times$ 10 (poitillés, palier supérieur).

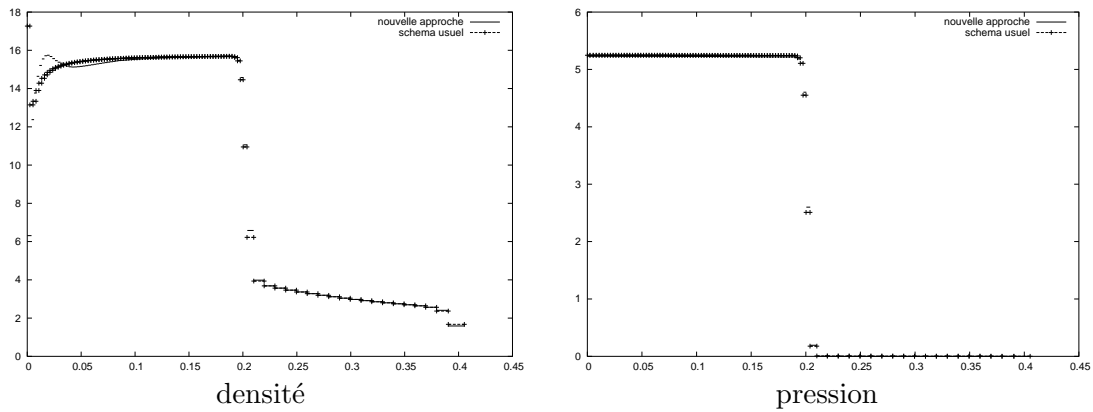


FIG. 5.15 – Problème de Noh - Comparaison entre la nouvelle approche et le solveur de Godunov usuel, à  $t = 0,6$  pour 100 couches  $\times$  10 secteurs.

de  $2,5^\circ$ , les mailles quadrilatérales proches du centre se déforment en chevrons, tout en restant alignées dans le sens de l'écoulement, *cf.* figure 5.16 (pour cette simulation l'ouverture angulaire du domaine est réduite de façon à conserver le même nombre de maille et gagner en temps de calcul). Cette difficulté est bien connue en hydrodynamique lagrangienne (voir par exemple [62] pour une explication géométrique du phénomène) et se résoud traditionnellement par des méthodes dites *d'anti-dérivées*, que nous n'aborderons pas dans ce travail. Dans le cas présent, la déformation en chevron croît avec le temps jusqu'à ce que les arêtes transversales des mailles se croisent. Par contre, chose tout à fait surprenante, les quantités physiques sont comparables à celles obtenues sur un maillage stable. Ceci est possible car les surfaces<sup>5</sup> des mailles restent positives. Le glissement parasite des nœuds est donc admissible avec la physique : d'une certaine façon ce résultat numérique corrobore le résultat théorique de stabilité de la partie physique, mais non géométrique, du système de la dynamique des gaz lagrangienne. S'il serait bien sûr indispensable de trouver un palliatif à ce croisement, il n'en reste pas moins remarquable que la simulation puisse se dérouler jusqu'au bout.

## 5.6 Compression isentropique de Kidder

Ce cas-test consiste en la compression d'un volume infini à géométrie plane, cylindrique ou sphérique, de manière isentropique [47]. Ici nous nous intéressons à la compression d'un cylindre de gaz, représenté par une coquille bidimensionnelle. Le gaz est supposé parfait de coefficient  $\gamma = 2$ , ce qui permet d'écrire analytiquement la solution autosemblable, en partant des conditions initiales

$$\begin{cases} \rho^0(R) = \left( \rho_2^{\gamma-1} \frac{R^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \rho_1^{\gamma-1} \frac{R_2^2 - R^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ \mathbf{u}^0(R) = 0, \\ \varepsilon^0(R) = (\rho^0(R))^{\gamma-1}, \\ p^0(R) = (\gamma - 1) (\rho^0(R))^\gamma, \end{cases} \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

où  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont respectivement les rayons et densités de l'interface interne et externe à l'instant initial. Le caractère isentropique est obtenu en imposant au bord la pression exacte, donnée ci-après. Le temps de focalisation de la coquille est

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2\gamma} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}.$$

Un volume de fluide initialement à la position  $R$  aura convergé à l'instant  $t$  à la position  $r(t, R) = h(t)R$  où

$$h(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}.$$

---

<sup>5</sup>si tant est que l'on puisse parler de surface pour un polygone croisé, mais on emploie la formule du lemme 5, générique dans un espace orienté.

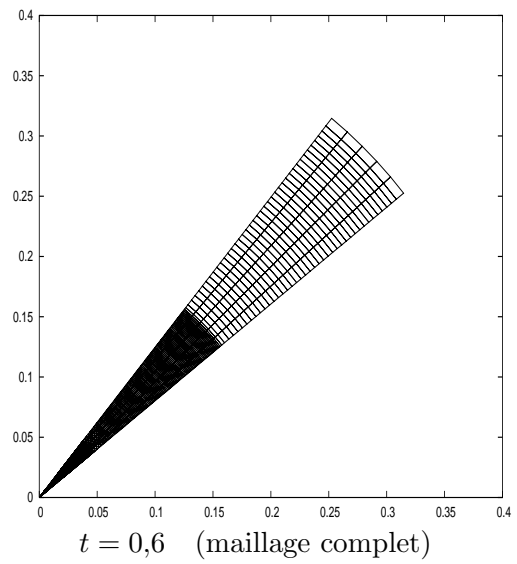
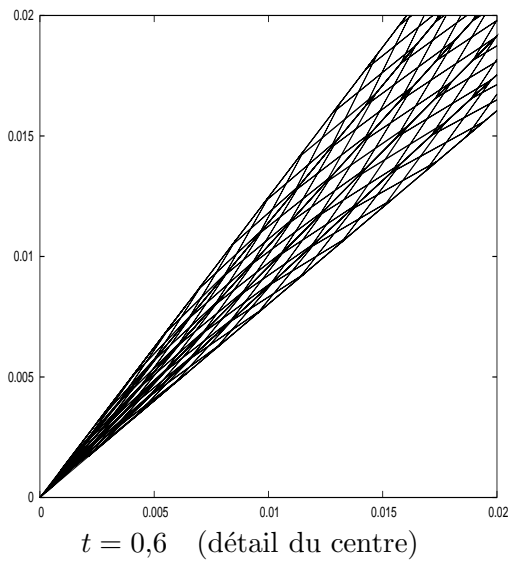
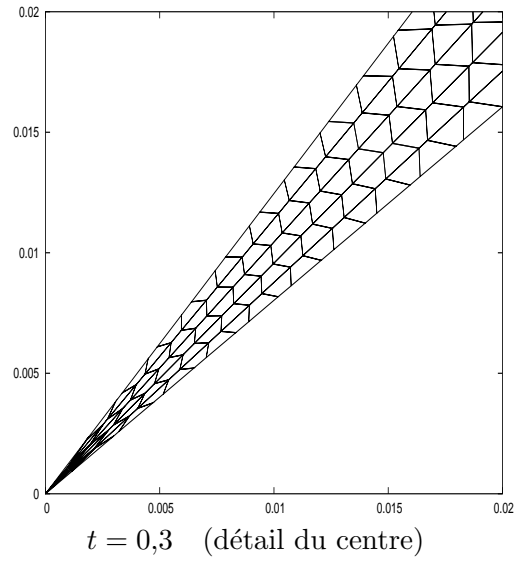
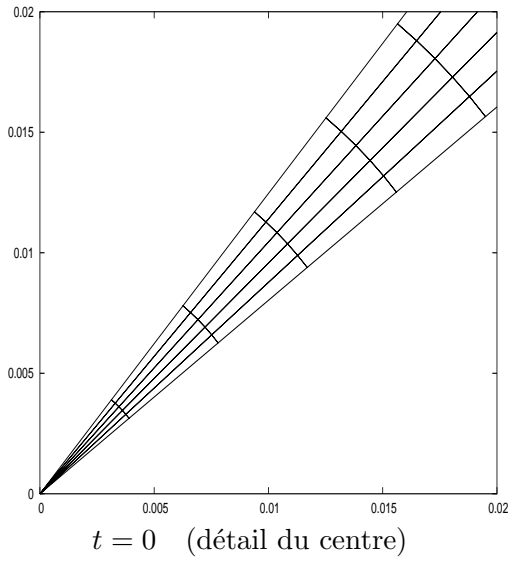


FIG. 5.16 – Problème de Noh - Déformation parasite du maillage lagrangien ( $d\theta = 2,5^\circ$ ).



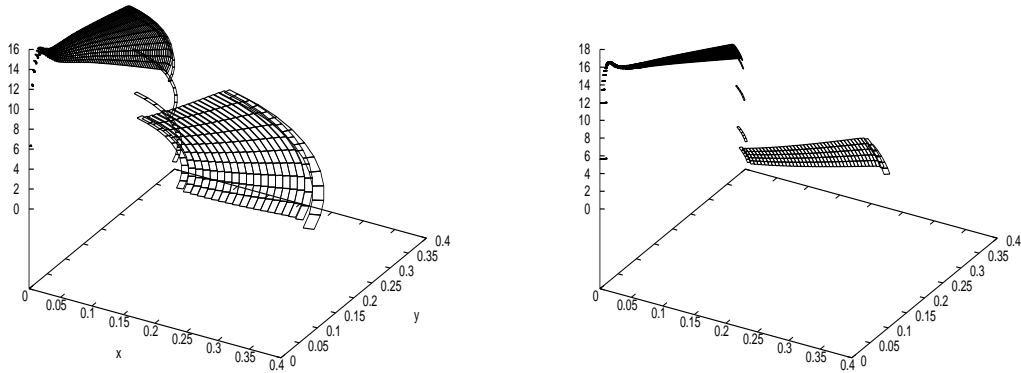


FIG. 5.17 – Problème de Noh - Densité à  $t = 0,6$  avec 100 couches et des secteurs de  $6^\circ$  (gauche) et de  $2.5^\circ$  (droite, sur une aiguille plus réduite).

La solution analytique pour temps  $t < \tau$  est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t, r(t, R)) = \frac{\rho^0(R)}{h(t)^2}, \\ u(t, r(t, R)) = -\frac{R}{h(t)\tau} \frac{t}{\tau}, \\ \varepsilon(t, r(t, R)) = \frac{\varepsilon^0(R)}{h(t)^{2(\gamma-1)}}, \\ p(t, r(t, R)) = \frac{p^0(R)}{h(t)^{2\gamma}}. \end{array} \right.$$

Nous paramétrons ce test avec  $R_1 = 0.5$ ,  $R_2 = 1$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 2$ . La simulation est conduite sur le maillage polaire d'une coquille complète, jusqu'au temps  $t = 0,42$  correspondant à 97% du temps de focalisation (compression d'un facteur 17 environ). La figure 5.18 présente les profils de densité, pression, vitesse radiale et entropie à cet instant final, sur trois maillages de plus en plus raffinés, mais relativement grossiers : un premier de 45 secteurs et 20 couches (soit initialement  $dR = 0.025$  et  $d\theta = 8^\circ$ ), puis un second de 90 secteurs et 40 couches, et le dernier de 180 secteurs et 80 couches. Ce raffinement permet de converger vers la solution exacte. Toutefois sur maillage grossier la position de l'interface interne est mal capturée, contrairement à la couche externe, parfaitement positionnée. Les valeurs de pression et vitesse radiale sont en accord avec la solution analytique quel que soit le maillage, malgré la position des couches. L'erreur sur la densité est la plus importante, notamment sur la face externe. Au vu de la production excessive d'entropie, qui devrait rester nulle au cours de la compression, il est fortement probable que ces défauts s'expliquent par un surplus de diffusion numérique (qui décroît environ dans un même rapport que le raffinement, soit ici d'un facteur deux d'un maillage à l'autre).

A titre de comparaison on représente sur la figure 5.19 le résultat obtenu par le solveur Volumes-Finis classique. Il donne un meilleur résultat sur la position de l'interface interne,

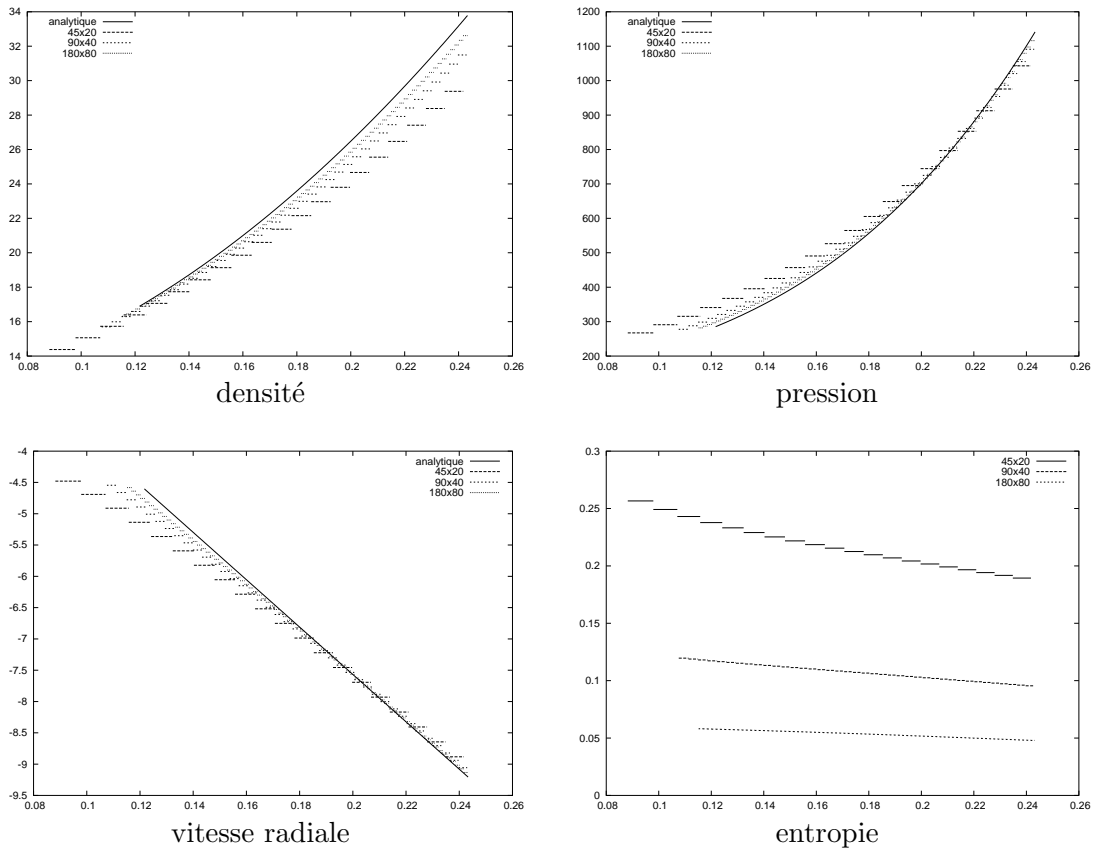


FIG. 5.18 – Compression de Kidder à 97% de la focalisation - Solutions numériques et exacte, selon un secteur, sur trois maillages.

mais pas sur l'interface externe. Le profil de densité est un peu moins bien retrouvé qu'avec le solveur aux nœuds, à l'inverse de la pression mieux retranscrite vers l'interface interne. Sur ce cas-test, on peut donc considérer que les deux approches sont équivalentes.

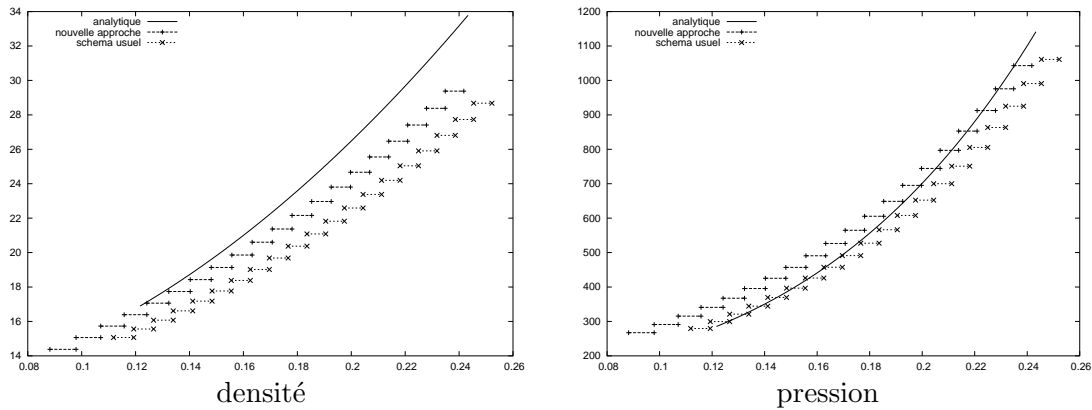


FIG. 5.19 – Compression de Kidder à 97% de la focalisation - Schéma usuel (×) et nouvelle approche (+) sur un maillage 45×20.

## 5.7 Montée en ordre *via* une variante isentropique

Le schéma d'approximation introduit dans ce travail et testé ci-dessus se présente, dans sa construction, comme une méthode d'ordre un en espace et en temps. Cette notion d'ordre n'est pas des plus adaptée en multidimension, mais le système d'équations aux dérivées partielles est de fait discrétisé à l'ordre un - ceci est notamment clair pour les écoulements monodimensionnels, dans lequel la méthode dégénère vers un schéma de Godunov d'ordre un. Cette faible précision dans les écoulements réguliers (voir par exemple le pied de la détente dans le problème de Sod, figure 5.2) est la contrepartie du caractère entropique de la méthode : en cherchant à produire de l'entropie *partout* pour capturer les solutions choc, on induit une diffusion excessive dans les zones régulières.

Nous nous posons la question d'augmenter la précision de la méthode dans les écoulements réguliers sous deux principes directeurs :

- en se plaçant dans le même formalisme symétrisé,
- en conservant une approximation constante par maille.

La mise en œuvre d'une variante selon les mêmes critères que la méthode initiale renforce une fois de plus l'intérêt pratique du formalisme canonique. Le point de départ consiste à nouveau à respecter au niveau discret un principe physique, plutôt que de s'engager dans une voie purement algorithmique (par exemple par une meilleure interpolation polynomiale de la solution, *etc.*). L'idée est de dire que si la solution est régulière, alors l'entropie est conservée au cours du temps

$$\partial_T \eta(X, T) = 0,$$

et réciproquement, si numériquement on arrive à imposer cette nouvelle loi de conservation, alors la solution sera mieux « retranscrite », dans le sens où la solution numérique respectera un nouveau principe physique, en plus de ceux inhérents à la méthode.

La conservation locale de la masse est acquise par la construction du solveur aux nœuds du maillage. Comme on l'a vu précédemment, la conservation globale de l'impulsion et de l'énergie est réalisée si les pressions aux nœuds  $p_{ji}$  vérifient l'équation vectorielle

$$(5.3) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} l_{ji} p_{ji} \mathbf{n}_{ji} = \mathbf{0}.$$

On rappelle enfin que le bilan d'entropie d'une maille  $\Omega_j$  est

$$s_j^0 \rho_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j = - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (p_{ji} - p_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j).$$

Plaçons-nous dans un sous-domaine de  $\Omega$  dont chaque maille est d'entropie constante (la question des régions frontières entre solveur entropique et solveur isentropique sera traitée plus loin). Alors il est suffisant d'annuler la contribution de toutes les mailles  $\Omega_j$  autour des nœud  $r$  pour obtenir, localement à chaque maille, un bilan entropique nul. Autrement dit le solveur entropique aux nœuds résoud, pour chaque nœud  $i$ , le système de  $j(i)$  équations non-linéaires

$$(p_{ji} - p_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) = 0 \quad \forall j \in \mathcal{M}(i).$$

Il y a, dans ce système,  $j(i) + 2$  inconnues : autant de pressions que de mailles, et un vecteur vitesse à deux composantes. Une façon simple de le résoudre consiste à considérer deux mailles *adjacentes*  $\Omega_J$  et  $\Omega_{J^+}$  et à imposer

$$(5.4) \quad \begin{cases} p_{ji} = p_j & \forall j \neq J, J^+, \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{Ji} = \mathbf{u}_J \cdot \mathbf{n}_{Ji}, \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{J^+i} = \mathbf{u}_{J^+} \cdot \mathbf{n}_{J^+i}, \end{cases}$$

qui est un système linéaire de  $j(i)$  équations. Le principe de conservativité (5.3) rajoute deux équations linéaires sur les inconnues restantes  $p_{Ji}$  et  $p_{J^+i}$  :

$$(5.5) \quad l_{Ji} p_{Ji} \mathbf{n}_{Ji} + l_{J^+i} p_{J^+i} \mathbf{n}_{J^+i} = - \sum_{j \in \mathcal{M}(i), j \neq J, J^+} l_{ji} p_{ji} \mathbf{n}_{ji}.$$

Cette solution découple les champs de pression et de vitesse : les pressions  $p_{ji}$  ne dépendent que des pressions  $p_j$  environnantes, et la vitesse  $\mathbf{u}_i$  que des vitesses  $\mathbf{u}_J$  et  $\mathbf{u}_{J^+}$  (et de la géométrie). De plus les systèmes linéaires sur pressions et vitesse aux nœuds sont simultanément inversibles si et seulement si les normales  $\mathbf{n}_{Ji}$  et  $\mathbf{n}_{J^+i}$  ne sont pas colinéaires. Pour donner à l'algorithme un caractère symétrique, on répète cette procédure sur tous les couples de mailles  $(\Omega_J, \Omega_{J^+})$  autour du nœud courant. La proposition ci-dessous résume l'implémentation de ce solveur isentropique, son domaine d'application, et ses propriétés.

**Proposition 10** *Soit un maillage non-dégénéré, c'est-à-dire dont les arêtes des cellules ne se sont pas croisées. Alors il existe autour de chaque nœud  $i$  un ensemble de  $M_i$  mailles adjacentes  $\{\Omega_J, \Omega_{J^+}\}$  telles que  $\mathbf{n}_{Ji}$  et  $\mathbf{n}_{J^+i}$  ne soient pas colinéaires. Notons  $\Psi_{ji}^{(J)} = (p_{ji}^{(J)}, -\mathbf{u}_i^{(J)})$  la solution de (5.4-5.5), pour un tel couple  $\{J, J^+\}$ . Définissons un flux moyen autour du nœud  $i$  par*

$$\overline{\Psi}_{ji} = \frac{1}{M_i} \sum_{J=1}^{M_i} \Psi_{ji}^{(J)} \quad \text{et} \quad \overline{(\Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji})} = \frac{1}{M_i} \sum_{J=1}^{M_i} (\Psi_{ji}^{(J)}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji}^{(J)}).$$

Alors le schéma défini par

$$s_j^0 \rho_j^0 \partial_T \mathbf{U}_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{\mathbb{N}_{ji} \overline{\Psi}_{ji}}{-\frac{1}{2}(\Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji})} \right) = \mathbf{0}$$

est isentropique, c'est-à-dire qu'il vérifie  $\partial_T \eta_j = 0$ , en plus d'être conservatif en masse, impulsion et énergie totale.

Ici on a donc profité de la linéarité du flux en variable  $\Psi$ , sur la conservation de la masse et de l'impulsion, pour construire une moyenne arithmétique  $\overline{\Psi}_{ji}$  qui respecte une contribution symétrique de chaque maille autour des nœuds. Par contre le flux quadratique en  $\Psi$  sur l'énergie totale oblige à calculer  $\overline{p_{ji} \mathbf{u}_i}$  comme la moyenne des produits et non pas comme le produit des moyennes.

Notons que cette variante isentropique implique le même résultat de non croisement de mailles triangulaires que la méthode entropique, cf. théorème 12. Ceci est possible car, quelques soient les détails algorithmiques, le résultats de conservation de l'entropie est tout aussi suffisant pour écrire les estimations *a posteriori* de la démonstration.

*Preuve.* – Il faut bien noter que  $J$  est défini à  $i$  donné ; comme la grandeur utile que l'on manipule est  $\Psi_{ji}^{(J)}$ , qui inclut déjà dans sa notation une dépendance en  $i$ , il ne doit pas y avoir d'ambiguïté.

Sur maillage non dégénéré, on a vu dans la preuve de la proposition 8 que les normales  $\mathbf{n}_{ji}$  autour d'un nœud  $i$  ne sont pas toutes colinéaires. Par transitivité, on en déduit qu'il y en a au moins deux,  $\mathbf{n}_{J_i}$  et  $\mathbf{n}_{J^+}$ , issues de mailles adjacentes  $\{\Omega_J, \Omega_{J^+}\}$ , qui ne sont pas colinéaires. Ainsi les deux systèmes linéaires (5.4) et (5.5), de déterminant  $\mathbf{n}_{J_i} \wedge \mathbf{n}_{J^+}$ , sont-ils simultanément inversibles. La résolution de ces systèmes apporte la vitesse  $\mathbf{u}_i^{(J)}$  et les pressions  $p_{ji}^{(J)}$  pour  $j \in \mathcal{M}(i)$ .

Raisonnons dans un premier temps avec un unique couple  $\{J, J^+\}$  pour chaque nœud. Alors par construction on a, pour tous les nœuds  $i$

$$(p_{ji}^{(J)} - p_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i^{(J)} - \mathbf{u}_j) = 0 \quad \forall j \in \mathcal{M}(i).$$

Comme ceci est vrai pour chaque nœud, on en déduit que le schéma

$$s_j^0 \rho_j^0 \partial_T \mathbf{U}_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{\mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji}^{(J)}}{-\frac{1}{2}(\Psi_{ji}^{(J)}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji}^{(J)})} \right) = \mathbf{0}$$

est isentropique en vertu de

$$s_j^0 \rho_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j = - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (p_{ji}^{(J)} - p_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i^{(J)} - \mathbf{u}_j).$$

Puis appliquons ce procédé, nœud par nœud, aux  $M_i$  couples possibles  $\{J, J^+\}$ . Ceci permet de définir  $\overline{\Psi}_{ji}$  et  $(\overline{\Psi}_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \overline{\Psi}_{ji})$  comme dans l'énoncé de la proposition. Alors l'en-

tropie associée au schéma global de l'énoncé vérifie, comme on l'a vu dans le lemme 6

$$\begin{aligned}
s_j^0 \rho_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j &= s_j^0 \rho_j^0 \left( \left( \begin{array}{c} \Psi_j \\ 1 \end{array} \right), \partial_T \mathbf{U}_j \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( -(\Psi_j, \mathbb{N}_{ji} \overline{\Psi_{ji}}) + \frac{1}{2} \overline{(\Psi_{ji}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji})} \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \sum_J \left( \frac{1}{2} (\Psi_j, \mathbb{N}_{ji} \Psi_j) - (\Psi_j, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji}^{(J)}) + \frac{1}{2} (\Psi_{ji}^{(J)}, \mathbb{N}_{ji} \Psi_{ji}^{(J)}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \sum_J \left( (\Psi_{ji}^{(J)} - \Psi_j), \mathbb{N}_{ji} (\Psi_{ji}^{(J)} - \Psi_j) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. Au passage on voit que l'on n'a utilisé uniquement des procédés linéaires pour contrôler l'entropie qui est une grandeur non-linéaire de  $\mathbf{U}$ . Ceci rend la mise en œuvre très simple.  $\square$

Remarquons qu'il existe des configurations géométriques de mailles non dégénérés dont certaines normales adjacentes sont colinéaires, ce qui signifie que le flux moyen n'est pas toujours calculé sur l'ensemble des mailles  $\mathcal{M}(i)$ .

Afin de mieux faire comprendre le fonctionnement de ce solveur, nous allons expliciter la procédure dans le cas mono-dimensionnel.

**Exemple 4** *Considérons un maillage cartésien, de pas  $\Delta x_j$  selon l'axe de l'écoulement et de pas  $\Delta y$  fixe selon la direction orthogonale, sur lequel on traite une physique unidimensionnelle. Alors le solveur isentropique décrit ci-dessus dégénère vers le schéma*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^0 \partial_T \tau_j - \left[ \left( \omega_{j+\frac{1}{2}} u_j + (1 - \omega_{j+\frac{1}{2}}) u_{j+1} \right) - \left( \omega_{j-\frac{1}{2}} u_{j-1} + (1 - \omega_{j-\frac{1}{2}}) u_j \right) \right], \\ \rho_j^0 \partial_T u_j + \left[ \left( \omega_{j+\frac{1}{2}} p_j + (1 - \omega_{j+\frac{1}{2}}) p_{j+1} \right) - \left( \omega_{j-\frac{1}{2}} p_{j-1} + (1 - \omega_{j-\frac{1}{2}}) p_j \right) \right], \\ \rho_j^0 \partial_T e_j + \left[ \left( \omega_{j+\frac{1}{2}} p_j u_{j+1} + (1 - \omega_{j+\frac{1}{2}}) p_{j+1} u_j \right) - \left( \omega_{j-\frac{1}{2}} p_{j-1} u_j + (1 - \omega_{j-\frac{1}{2}}) p_j u_{j-1} \right) \right], \end{array} \right.$$

avec  $\omega_{j+\frac{1}{2}} = \frac{3\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{4(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})}$ . Sur un maillage fixe de pas constant  $\Delta x$ , il s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^0 \partial_T \tau_j - \left( \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{u_{j-1} + u_j}{2} \right), \\ \rho_j^0 \partial_T u_j + \left( \frac{p_j + p_{j+1}}{2} - \frac{p_{j-1} + p_j}{2} \right), \\ \rho_j^0 \partial_T e_j + \left( \frac{p_j u_{j+1} + p_{j+1} u_j}{2} - \frac{p_{j-1} u_j + p_j u_{j-1}}{2} \right). \end{array} \right.$$

Il nous reste à discuter de l'activation de ce solveur au cours d'une simulation. Nous reprenons l'idée employée dans les codes avec viscosité artificielle, consistant à débrancher cette dernière dans les détentes, caractérisées par une divergence positive du champ de vitesse [62] :

- si  $[\text{div } \mathbf{u}]_j < 0$  alors on emploie le solveur entropique,
- si  $[\text{div } \mathbf{u}]_j \geq 0$  alors on emploie la variante isentropique.

En pratique, la divergence du champ de vitesse n'étant pas connue à l'avance, on peut, quitte à alourdir le temps de calcul, lancer le solveur entropique partout, puis revenir *a posteriori* vers la variante isentropique pour les mailles dont le volume a augmenté. Toutefois le solveur entropique garde la priorité pour les nœuds communs à une maille en

détente et une maille en compression ; il y a donc, entre une zone en détente et une zone en compression, une couche intermédiaire de mailles dont le flux d'entropie n'est pas nul mais limité, *cf.* figure 5.20. Le choix de ce senseur est bien sûr discutable puisque le critère de

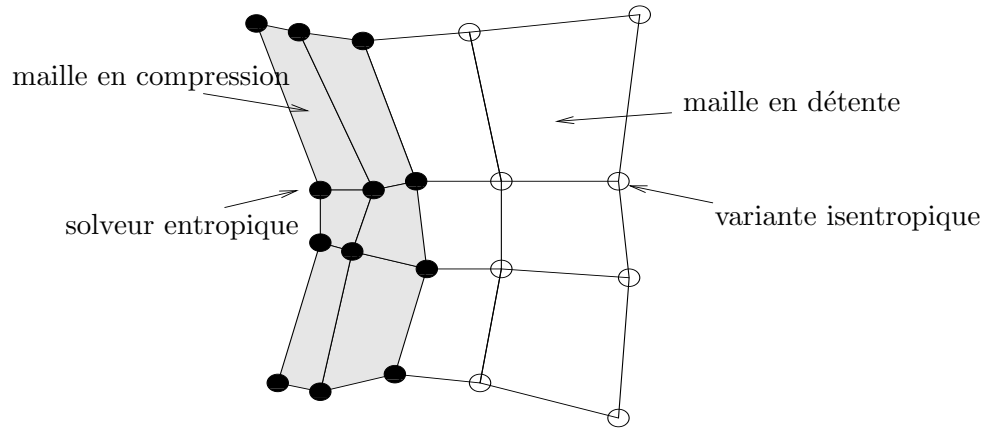


FIG. 5.20 – Activation de la variante isentropique.

détente est suffisant mais non nécessaire pour caractériser les écoulements réguliers. Par exemple les compressions isentropiques (type cas-test de Kidder) n'activeraient jamais la variante isentropique implémentée telle quelle.

Nous illustrons maintenant cette méthode sur deux exemples vus précédemment : le tube à choce de Sod et la compression isentropique de Kidder. Ici nous ne détaillons pas la discrétisation temporelle, qui fait perdre la stricte conservation de l'entropie, de même qu'elle avait imposé une condition CFL pour le solveur entropique. Pour plus de simplicité on s'autorise à appliquer momentanément le solveur entropique dans le but de contre-balancer une entropie qui deviendrait négative (situation qui apparaît dans le second exemple).

Pour le cas-test de Sod unidimensionnel, la variante entropique s'active naturellement dans la zone de détente, et le pied de celle-ci s'en trouve considérablement mieux capturé, *cf.* figure 5.21 ; l'énergie interne, grandeur délicate sur laquelle les codes ont en général du mal à converger, est retranscrite quasi-exactement, avec seulement 100 mailles dans la direction de l'écoulement.

La compression de Kidder nous oblige à forcer artificiellement l'activation de la variante isentropique, puisque le champ de vitesse est à divergence négative. On trace à nouveau sur la figure 5.22 les profils à un temps proche de la focalisation (97%). Désormais la position du domaine est presque parfaite, avec seulement 45 secteurs et 20 couches sur une coquille complète. Le profil des quantités physiques est bien aligné sur la solution exacte. Par contre on observe sur la densité une oscillation au niveau de la deuxième maille centrale ; de même l'entropie, qui est bien en deçà de celle produite par le solveur entropique, présente des oscillations près du bord, qui sont peut-être la manifestation d'un schéma d'ordre deux. Quoiqu'il en soit, l'écart avec la solution exacte est aussi faible que celui du solveur entropique sur un maillage de 180 secteurs et 80 couches, c'est à dire avec 16 fois plus de cellules.

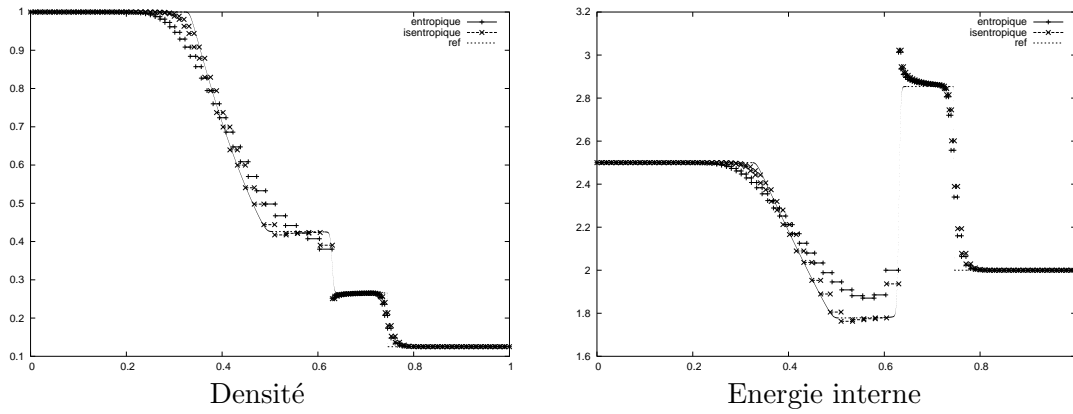


FIG. 5.21 – Tube à choc de Sod au temps  $t = 0,14$  - Solution de référence convergée (trait continu) et numérique avec solveur entropique (+) et variante isentropique (x) sur 100 mailles.

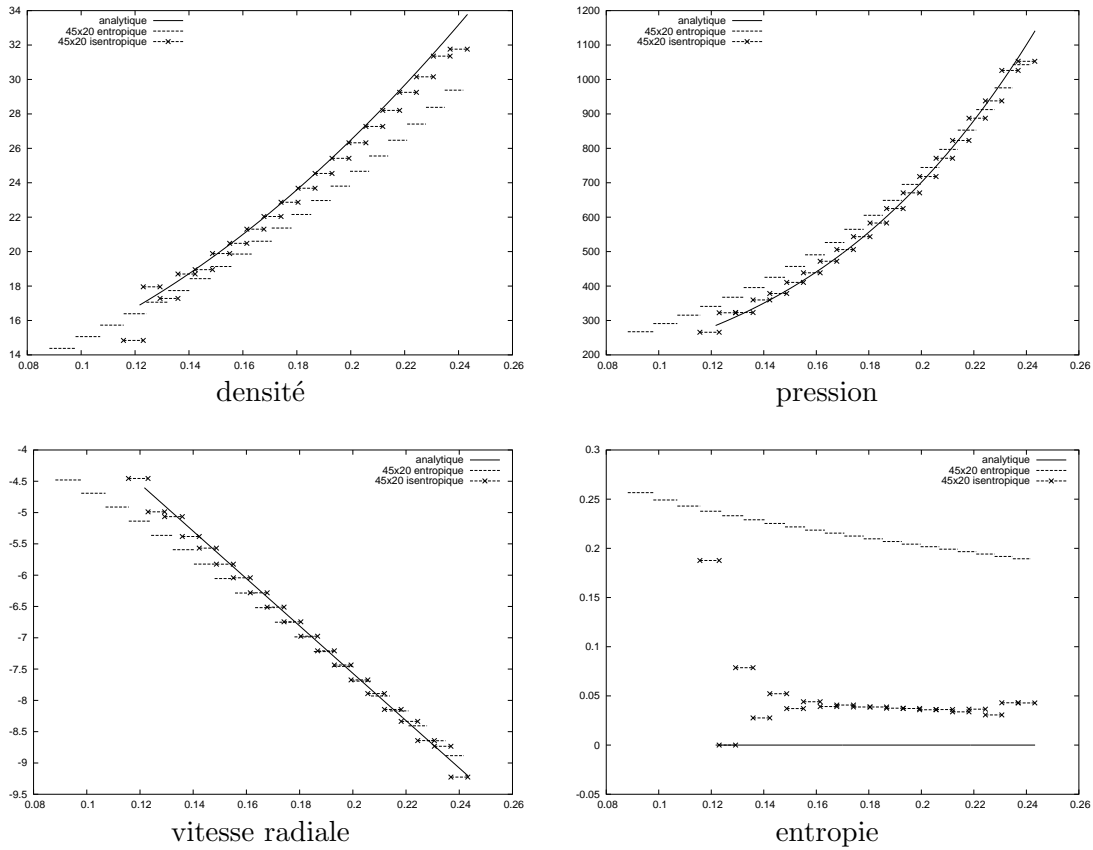


FIG. 5.22 – Compression de Kidder à 97% de la focalisation - Solution exacte et numérique, avec solveur entropique (pointillés) et isentropique (croix), selon un secteur.



## Chapitre 6

# Extension en géométrie axisymétrique

---

L'extension du travail accompli jusqu'à présent au cas axisymétrique est attrayante à plus d'un titre. Tout d'abord, dans l'industrie, un certain nombre d'installations sont en effet de révolution autour de l'axe "Z", notamment dans le domaine de l'énergie. Ensuite cette extension a un réel intérêt numérique, car exploiter la symétrie axiale d'un écoulement permet de s'approcher d'une physique tridimensionnelle avec seulement deux coordonnées d'espace. Mettre en œuvre des méthodes axisymétriques est donc un vrai enjeu dès lors que l'on est exigeant sur les coûts de simulation. D'autre part se pose la question de savoir quelle est la formulation la mieux adaptée à un tel jeu de coordonnées. En particulier la structure mathématique mise en avant dans le premier chapitre pour le cas cartésien se généralise-t-elle aux coordonnées cylindriques? De même, peut-on exploiter le type de méthodes numériques précédemment exposées? Nous allons voir que les réponses à ces questions sont non seulement positives mais aussi multiples : ces systèmes en coordonnées lagrangiennes axisymétriques se révèlent très riches.

Dans un premier temps nous dérivons de façon abstraite la structure du système en coordonnées cylindriques, pour un système général de la forme ( $\mathcal{P}$ ) introduite au chapitre 1. On montre en quoi le théorème 1 ne s'applique pas exactement à cette formulation. Puis on s'intéresse au cas particulier de la géométrie axisymétrique, en faisant l'analogie avec le cas plan. Le reste de ce chapitre est consacré à l'écriture de schémas numériques; nous présentons trois méthodes présentant des avantages différents, dont une qui répond à une attente actuelle pour la fusion par confinement inertiel : conservation de l'énergie totale et symétrie sphérique sur maillage polaire.

Notons que la présentation de ce chapitre pourra paraître non intuitive dans un premier temps. L'avantage est qu'elle met en avant la compatibilité de structures mathématiques.

---

## 6.1 Formulation symétrisée en coordonnées lagrangiennes cylindriques

L'écriture du système en géométrie axisymétrique demande dans un premier temps de détailler le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques. C'est ensuite que la symétrie autour de l'axe de révolution permet de s'affranchir de la coordonnée angulaire pour aboutir à un repérage à deux dimensions. Dans ce jeu de coordonnées, nous calquons les notations eulériennes et lagrangiennes sur le cas cartésien, c'est-à-dire que les coordonnées cylindriques lagrangiennes sont notées  $(T, Z, R, \Theta)$  et leur équivalent eulérien  $(t, z, r, \theta)$ . Elles sont reliées algébriquement<sup>1</sup> à leur équivalent cartésien par

$$(6.1) \quad \begin{cases} X = R \cos \Theta, \\ Y = R \sin \Theta, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Comme dans le cas cartésien, on abrégera ces coordonnées spatiales par respectivement  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{z}$ . L'agencement des coordonnées est choisi en anticipant sur ce qui va suivre, en référence à l'usage courant " $(z, r)$ " en géométrie axymétrique ; par ailleurs il donne bien une base locale  $(e_z, e_r, e_\theta)$  orientée dans le sens direct. A ce sujet il faut noter ici que deux bases coexistent : celle en référence à la position initiale, que l'on notera  $(e_Z, e_R, e_\Theta)$ , et celle en référence à la position courante,  $(e_z, e_r, e_\theta)$ . Contrairement au cas cartésien, elles diffèrent désormais (*cf.* figure 6.1), ce qui rajoutera quelques subtilités par rapport aux sections précédentes.

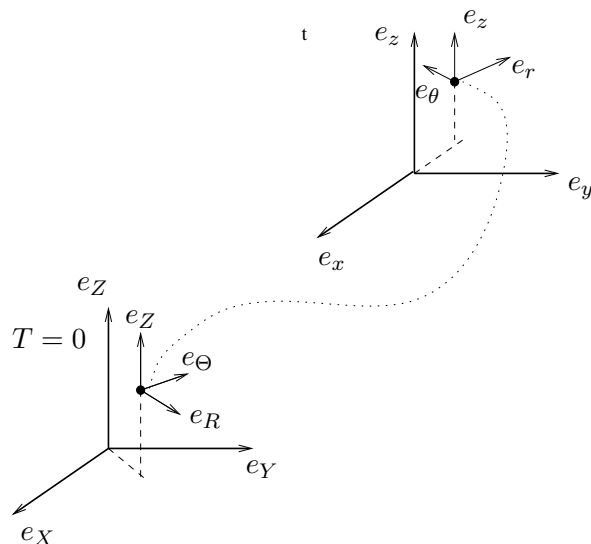


FIG. 6.1 – Bases curvilignes à l'instant initial (*lagrangienne*) et à l'instant courant (*eulérienne*).

Il existe plusieurs façon d'aboutir à l'écriture du système en coordonnées cylindriques  $(Z, R, \Theta)$ , selon le jeu de coordonnées dont on part. Le schéma 6.2 résume cette situation. Les différentes fonctions  $\phi_i$  sont des difféomorphismes, comme en (1.24) du chapitre 1, et on prendra soin de bien distinguer leur indice qui seront conservés par la suite ;  $\phi$  est bien

<sup>1</sup>Nous pourrions aussi relier les coordonnées  $(z, r, \theta)$  à leur état initial  $(Z, R, \Theta)$  par le système différentiel  $\partial_T \mathbf{z} = (u^z, u^r, \frac{u^\theta}{r})$ , comme nous l'avions fait avec les coordonnées planes, mais il apparaît que ce n'est pas utile à notre discussion.

la même fonction qu'en (1.24). On voit ainsi que l'on peut partir de l'écriture classique en  $(t, x, y, z)$  et appliquer la transformation  $\phi \circ \phi_1$ , ou bien directement  $\phi_4$ , etc.

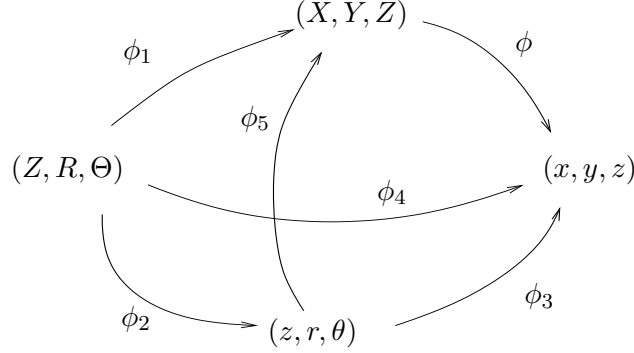


FIG. 6.2 – Ensemble des changements de variables possibles, selon les deux coordonnées cartésiennes et cylindriques, et les deux formalismes eulérien et lagrangien.

Pour obtenir une structure autant que faire se peut analogue à (1.29), on souhaite introduire le tenseur gradient de transformation  $\mathbb{F}_2$

$$(6.2) \quad \mathbb{F}_2 = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{Z}},$$

qui est l'équivalent cylindrique de (1.22) cartésien. On évitera donc de partir de  $(X, Y, Z)$  et d'employer l'application  $\phi_1$ , qui conserve le tenseur  $\mathbb{F}$ . Pour espérer trouver une formulation symétrisée, le plus direct semble de considérer  $\phi_4$ , et d'appliquer le lemme 1 de la même façon qu'on l'a fait au chapitre 1, théorème 3. Ainsi un système général de la forme (1.17) s'écrit-il en coordonnées cylindriques lagrangiennes

$$(6.3) \quad \rho J_4 \partial_{T|\mathbf{z}} \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{z}} \cdot (\mathbb{T}(\mathbf{U}) \widetilde{\mathbb{F}}_4) = \mathbf{0},$$

où  $T(\mathbf{U})$  est précisément le flux de la formulation semi-lagrangienne cartésienne (1.17) :

$$(6.4) \quad \mathbb{T}(\mathbf{U}) = \left( \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^x \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^x \Psi \rangle \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^y \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^y \Psi \rangle \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^z \Psi \rangle \end{array} \right) \right).$$

Cette manipulation est strictement analogue à celle du théorème 3, mise à part que l'on a considéré  $\phi_4$  au lieu de  $\phi$ . En particulier, nous obtenons à nouveau une formulation canonique en variable  $\Psi$  : il existe des matrices  $\mathbb{M}^Z$ ,  $\mathbb{M}^R$ ,  $\mathbb{M}^\Theta$  telles que le système en coordonnées cylindriques s'écrive

$$(6.5) \quad \rho J_4 \partial_T \mathbf{U} + \partial_Z \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Z \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^Z \Psi \rangle \end{array} \right) + \partial_R \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^R \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^R \Psi \rangle \end{array} \right) + \partial_\Theta \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^\Theta \Psi \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi, \mathbb{M}^\Theta \Psi \rangle \end{array} \right) = \mathbf{0}.$$

Les matrices  $\mathbb{M}^Z$ ,  $\mathbb{M}^R$  et  $\mathbb{M}^\Theta$  sont reliées aux matrices constantes de la formulation semi-lagrangienne  $\mathbb{M}^x$ ,  $\mathbb{M}^y$ ,  $\mathbb{M}^z$  comme précédemment, cf. relation (1.32), mise à part qu'elles sont associées au tenseur  $\widetilde{\mathbb{F}}_4$ . Le sens de  $\mathbb{F}_4$  n'est pas immédiatement explicite, puisque c'est le gradient des coordonnées cartésiennes eulériennes par rapport aux coordonnées cylindriques lagrangiennes. Par contre la décomposition  $\phi_4 = \phi_3 \circ \phi_2$  amène à

$$(6.6) \quad \widetilde{\mathbb{F}}_4 = \widetilde{\mathbb{F}}_3 \widetilde{\mathbb{F}}_2 \quad \text{et} \quad J_4 = J_3 J_2,$$

qui introduit d'une part le tenseur  $\mathbb{F}_2$  attendu, et d'autre part  $\mathbb{F}_3$  dont le calcul est trivial :

$$(6.7) \quad \mathbb{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & r \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_3 = r.$$

Continuons à faire émerger une structure identique à (1.29) en étudiant à présent le terme de masse en facteur de l'inconnue conservative. Une façon simple de montrer que  $\partial_T(\rho J_4) = 0$  consiste à reprendre le lemme 4, en remplaçant une fois de plus  $\mathbb{F}$  par  $\mathbb{F}_4$ . Nous avons donc

$$(\rho J_4)(T) = (\rho J_4)(T=0) = (\rho r J_2)(T=0) = \rho^0 R.$$

Enfin, qu'en est-il de la contrainte différentielle sur les matrices  $\mathbb{M}^Z$ ,  $\mathbb{M}^R$  et  $\mathbb{M}^\Theta$ ? Bien sûr, l'identité de Piola généralisée (1.23) appliquée à  $\phi_4$  donne

$$\nabla_{\mathbf{z}} \cdot \widetilde{\mathbb{F}}_4 = 0,$$

d'où l'on obtient, par la même algèbre qu'au chapitre 1, que

$$(6.8) \quad \partial_Z \mathbb{M}^Z + \partial_R \mathbb{M}^R + \partial_\Theta \mathbb{M}^\Theta = \mathbb{O}.$$

A ce stade, nous avons donc exhibé une première formulation lagrangienne cylindrique (6.5)-(6.8), dont on remarquera bien qu'elle est complètement conservative. Cette particularité peut paraître troublante au premier abord, puisque chacun sait que l'écriture d'équations en coordonnées cylindriques (disons eulériennes) induit par rapport à leur version cartésienne des termes « sources » liés précisément à l'effet de cylindricité. C'est que le travail n'est pas tout à fait achevé. Il reste en effet à compléter ce changement de *coordonnées* par un changement de *base*, opérations usuellement menées simultanément, afin de décomposer les quantités vectorielles de  $\mathbf{U}$  dans la base cylindrique. Cette dernière opérations est nécessaire<sup>2</sup> en vue d'exploiter certaines symétries, comme l'invariance par rotation autour de l'axe  $z$ ; dans un tel cas, le vecteur vitesse se décomposera uniquement en deux coordonnées  $(u^z, u^r)$ . Se pose alors la question du choix de la nouvelle base, eulérienne ou lagrangienne, qui comme on l'a dit plus haut diffèrent. La décomposition selon la base eulérienne courante  $(e_z, e_r, e_\theta)$  est certainement la plus appropriée pour décrire de façon utile le champ de vitesse. Notons  $\check{\mathbf{U}} = (\tau, \check{\mathbf{u}}, e)$  la solution dans la nouvelle base cylindrique, reliée à  $\mathbf{U}$  par

$$\check{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\theta & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{R}_\theta \end{pmatrix},$$

où  $\mathcal{R}_\theta$  est la matrice de rotation qui transforme  $(e_x, e_y, e_z)$  en  $(e_z, e_r, e_\theta)$ . On choisit une telle écriture de la matrice de passage pour mettre de côté l'équation sur l'énergie totale, dont le flux n'est pas linéaire en  $\Psi$ . On a donc, avec les mêmes notations,

$$\check{\Psi} = \mathcal{P}_\theta \Psi.$$

Alors  $\check{\mathbf{U}}$  est solution de

$$\rho^0 R \partial_t \check{\mathbf{U}} + \partial_Z \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\theta \mathbb{M}^Z \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^Z \Psi) \end{pmatrix} + \partial_R \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\theta \mathbb{M}^R \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^R \Psi) \end{pmatrix} + \partial_\Theta \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\theta \mathbb{M}^\Theta \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^\Theta \Psi) \end{pmatrix} = \mathbf{Q},$$

---

<sup>2</sup>Notons toutefois qu'en toute généralité on pourrait en rester à (6.5)-(6.8), et qu'une telle formulation cylindrique conservative ne serait peut-être pas dénuée d'intérêt.

où le terme source  $\mathbf{Q}$  a pour premières composantes

$$\mathbf{Q}_{|1,\dots,4} = \rho^0 R (\partial_T \mathcal{P}_\theta) \mathbf{U}_{|1,\dots,4} + (\partial_Z \mathcal{P}_\theta) \mathbb{M}^Z \Psi + (\partial_R \mathcal{P}_\theta) \mathbb{M}^R \Psi + (\partial_\Theta \mathcal{P}_\theta) \mathbb{M}^\Theta \Psi,$$

la dernière sur l'énergie interne étant nulle :

$$Q_5 = 0.$$

Pour l'instant, nous n'allons pas expliciter ce terme, mais une petite astuce<sup>3</sup> de calcul utilisant le fait que la première ligne de  $\mathcal{P}_\theta$  est constante permet de l'écrire en fonction uniquement de  $\Psi$ , et donc de  $\check{\Psi}$  :

$$(6.9) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \check{\mathbb{M}}^0 \check{\Psi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$(6.10) \quad \check{\mathbb{M}}^0 = -\rho^0 R (\partial_T \mathcal{P}_\theta) \mathcal{P}_\theta^\top + (\partial_Z \mathcal{P}_\theta) \mathbb{M}^Z \mathcal{P}_\theta^\top + (\partial_R \mathcal{P}_\theta) \mathbb{M}^R \mathcal{P}_\theta^\top + (\partial_\Theta \mathcal{P}_\theta) \mathbb{M}^\Theta \mathcal{P}_\theta^\top.$$

Afin d'introduire  $\check{\Psi}$  dans le système, on va utiliser une dernière notation en introduisant les matrices de flux *cylindriques*

$$(6.11) \quad \check{\mathbb{M}}^Z = \mathcal{P}_\theta \mathbb{M}^Z \mathcal{P}_\theta^\top, \quad \check{\mathbb{M}}^R = \mathcal{P}_\theta \mathbb{M}^R \mathcal{P}_\theta^\top, \quad \text{et} \quad \check{\mathbb{M}}^\Theta = \mathcal{P}_\theta \mathbb{M}^\Theta \mathcal{P}_\theta^\top.$$

Ces matrices sont bien symétriques. Le système se réécrit alors, du fait que  $\mathcal{P}_\theta$  est une matrice de rotation, sous la forme

$$(6.12) \quad \rho^0 R \partial_t \check{\mathbf{U}} + \partial_Z \begin{pmatrix} \check{\mathbb{M}}^Z \check{\Psi} \\ -\frac{1}{2}(\check{\Psi}, \check{\mathbb{M}}^Z \check{\Psi}) \end{pmatrix} + \partial_R \begin{pmatrix} \check{\mathbb{M}}^R \check{\Psi} \\ -\frac{1}{2}(\check{\Psi}, \check{\mathbb{M}}^R \check{\Psi}) \end{pmatrix} + \partial_\Theta \begin{pmatrix} \check{\mathbb{M}}^\Theta \check{\Psi} \\ -\frac{1}{2}(\check{\Psi}, \check{\mathbb{M}}^\Theta \check{\Psi}) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}.$$

Ceci est l'écriture aboutie du système en coordonnées cylindriques, dans la base cylindrique. On le voit bien, la seule raison pour laquelle le terme  $\mathbf{Q}$  apparaît est due au passage en repère curviligne. Le théorème 1 ne s'applique pas à cause de la non-invariance galiléenne du système dans la base cylindrique, et, de fait, la structure (1.29) n'est pas retrouvée telle quelle. Toutefois, le système considéré est toujours à flux d'entropie nul, et l'on est en droit de se demander comment cette propriété est reliée à la divergence sur les nouvelles matrices de flux. Autrement dit, pour faire le parallèle avec le théorème 5 du premier chapitre, comment relier la divergence sur les matrices, le flux d'entropie...et le terme source ?

**Proposition 11** *Les matrices de flux cylindriques  $\check{\mathbb{M}}^Z$ ,  $\check{\mathbb{M}}^R$ ,  $\check{\mathbb{M}}^\Theta$  du système (6.12) sont reliées à la matrice de terme source  $\check{\mathbb{M}}^0$  (6.9) par la contrainte différentielle*

$$(6.13) \quad \partial_Z \check{\mathbb{M}}^Z + \partial_R \check{\mathbb{M}}^R + \partial_\Theta \check{\mathbb{M}}^\Theta = \check{\mathbb{M}}^0 + \check{\mathbb{M}}^{0\top}.$$

---

<sup>3</sup>Ci-dessous on verra qu'il ne s'agit pas d'une astuce, mais d'une propriété inhérente à la structure du système. On remarque d'ailleurs qu'elle s'applique à toute la classe des systèmes considérée dans ce mémoire, dont par définition la première équation porte toujours su  $\tau$ , d'où une première ligne de  $\mathcal{P}_\theta$  toujours de cette forme.

*Preuve.* – Une partie de cette égalité est triviale lorsque l'on identifie dans  $\check{\mathbb{M}}^0$  - cf. équation (6.10) - les termes relatifs à  $\mathbb{M}^Z$ ,  $\mathbb{M}^R$ ,  $\mathbb{M}^\Theta$  et que l'on utilise la divergence nulle (6.8) et la symétrie des matrices. La partie plus troublante au premier abord vient de la contribution  $-\rho^0 R (\partial_T \mathcal{P}_\theta) \mathcal{P}_\theta^\top$ . Or  $\mathcal{P}_\theta$  étant une matrice de rotation, on a

$$\partial_T \left( \mathcal{P}_\theta \mathcal{P}_\theta^\top \right) = 0 = (\partial_T \mathcal{P}_\theta) \mathcal{P}_\theta^\top + \left( (\partial_T \mathcal{P}_\theta) \mathcal{P}_\theta^\top \right)^\top.$$

Aussi cette contribution disparaît-elle lorsqu'on lui ajoute sa transposée, ce qui démontre la relation ci-dessus.  $\square$

Cette structure nous paraît très jolie : de même que le système n'est plus, formellement, conservatif à cause de l'apparition d'un terme source, de même la divergence des matrices de flux n'est plus nulle, et les deux se complètent harmonieusement. Pour mettre cela bien en avant, calculons le flux d'entropie comme nous l'avions fait dans la première section en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \rho^0 R T \partial_T \eta &= \rho^0 R \left\langle \mathcal{T} \frac{\partial \eta}{\partial \check{\mathbf{U}}}, \partial_T \check{\mathbf{U}} \right\rangle \\ &= \rho^0 R \left\langle \begin{pmatrix} \check{\Psi} \\ 1 \end{pmatrix}, \partial_T \check{\mathbf{U}} \right\rangle \\ &= \left\langle \check{\Psi}, \check{\mathbb{M}}^0 \check{\Psi} \right\rangle - \sum_{i=1}^3 \left\langle \check{\Psi}, \partial_{Z_i} \left( \check{\mathbb{M}}^{Z_i} \check{\Psi} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_{Z_i} \left\langle \check{\Psi}, \check{\mathbb{M}}^{Z_i} \check{\Psi} \right\rangle \\ &= \left\langle \check{\Psi}, \check{\mathbb{M}}^0 \check{\Psi} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \check{\Psi}, \left( \sum_{i=1}^3 \partial_{Z_i} \check{\mathbb{M}}^{Z_i} \right) \check{\Psi} \right\rangle \\ &= \left\langle \check{\Psi}, \check{\mathbb{M}}^0 \check{\Psi} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \check{\Psi}, \left( \check{\mathbb{M}}^0 + \check{\mathbb{M}}^{0^\top} \right) \check{\Psi} \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le déroulement de ce calcul est différent de celui du cas plan, tout en aboutissant au même résultat, et aura à nouveau un analogue au niveau discret.

## 6.2 Les équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes axi-symétriques

A présent nous allons nous restreindre aux écoulements invariants par rotation autour de l'axe  $e_z$ . Vue sous l'angle des coordonnées eulériennes, cette contrainte s'écrit

$$(6.14) \quad \begin{cases} z(T, Z, R, \Theta) \equiv z(T, Z, R), \\ r(T, Z, R, \Theta) \equiv r(T, Z, R), \\ \theta(T, Z, R, \Theta) \equiv \Theta. \end{cases}$$

Les deux bases curvilignes eulériennes et lagrangiennes sont donc désormais identiques, et la vitesse radiale  $u^\theta$  est nulle.

Ainsi, nous nous trouvons dans le plan  $(Z, R)$ , qui, formellement, est identique au plan  $(X, Y)$ . Ceci nous amène à oublier en partie quelques notations de la section précédente et appliquer celles du cas cartésien, de façon à bien comparer les deux situations. Par exemple nous détaillons le tenseur gradient  $\mathbb{F}_2$  par

$$(6.15) \quad \mathbb{F}_2 = \begin{pmatrix} A & L & 0 \\ B & M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et nous notons à nouveau par  $J$  son déterminant :

$$(6.16) \quad J = AM - BL.$$

Nous supprimons également les brèves sur les vecteurs d'état :

$$(6.17) \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \tau \\ u^z \\ u^r \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} p \\ -u^z \\ -u^r \end{pmatrix}.$$

Une façon rapide de faire dégénérer le système (6.12)-(6.13) au cas axisymétrique consiste, formellement, à prendre  $\theta = 0$  et  $\partial_{\Theta}\theta = 1$ . De plus les matrices de flux peuvent se restreindre au seul bloc  $3 \times 3$  utile car l'équation sur  $u^\theta$  devient caduque. Tout calcul fait, le système s'écrit

$$(6.18) \quad \rho^0 R \partial_t \mathbf{U} + \partial_Z \begin{pmatrix} \check{M}^Z \mathbf{\Psi} \\ -\frac{1}{2}(\mathbf{\Psi}, \check{M}^Z \mathbf{\Psi}) \end{pmatrix} + \partial_R \begin{pmatrix} \check{M}^R \mathbf{\Psi} \\ -\frac{1}{2}(\mathbf{\Psi}, \check{M}^R \mathbf{\Psi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{M}^0 \mathbf{\Psi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$(6.19) \quad \check{M}^Z = r \begin{pmatrix} 0 & M & -L \\ M & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{M}^R = r \begin{pmatrix} 0 & -B & A \\ -B & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{M}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le terme source s'explique donc simplement comme  $\mathbf{Q} = (0, 0, Jp, 0)$ .

La contrainte différentielle sur les matrices de flux s'exprime, d'après le théorème ci-dessus, par

$$(6.20) \quad \partial_Z \check{M}^Z + \partial_R \check{M}^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par définition les équations d'évolution des inconnues géométriques restent inchangées

$$(6.21) \quad \begin{cases} \partial_t A = \partial_Z u^z, \\ \partial_t B = \partial_Z u^r, \\ \partial_t L = \partial_R u^z, \\ \partial_t M = \partial_R u^r. \end{cases}$$

Comparons d'un point de vue pratique la structure (6.18-6.20) à son analogue cartésienne (2.14-2.17) :

- un poids géométrique  $R$  ou  $r$ , qui représente la distance à l'axe des abscisses  $Z$ , vient se greffer à la fois dans le terme de masse et dans les matrices de flux,
- en conséquence la divergence sur ces matrices n'est plus nulle (elle est homogène à une surface),
- un terme source apparaît sur l'équation de l'impulsion selon l'axe  $R$ .

Malgré ces différences, tout l'enjeu des sections suivantes est de montrer comment cette structure canonique (modifiée) permet encore de construire le même type de solveur. En outre, nous montrerons que plusieurs écritures du systèmes sont possibles, ce qui se traduit par une plus grande richesse des méthodes numériques.

## 6.3 Discrétisation en formulation entièrement axisymétrique

Les ingrédients de cette section sont, dans l'esprit, en tout point similaires à ceux du chapitre 3 : discrétisation du système géométrique, discrétisation du système physique, introduction du solveur aux nœuds pour assurer un déplacement du maillage compatible avec la loi de conservation de la masse, critère d'entropie. On rappelle ci-dessous les notations, adaptées au repère  $(Z, R)$ .

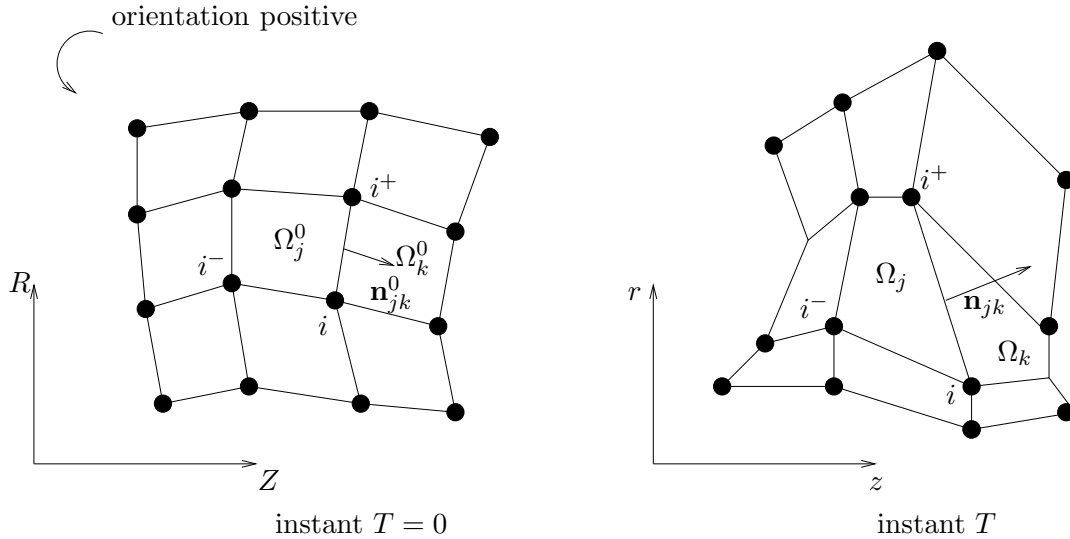


FIG. 6.3 – Notations générales sur le maillage pour la discrétisation axisymétrique, à l'instant initial (gauche) et après déplacement (droite).

### Notations (sur maillage initial / mobile) :

- $j, k$  : indice générique des mailles  $\Omega_j^0 / \Omega_j, \Omega_k^0 / \Omega_k$
- $\Gamma_{jk}^0 / \Gamma_{jk}$  : arête commune à  $\Omega_j^0$  et  $\Omega_k^0$  /  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$
- $i$  : indice générique des nœuds
- $i, i^+$  : nœuds extrémités de  $\Gamma_{jk}$ , dans le plan orienté
- $\mathbf{n}_{jk}^0 = (n_{jk}^Z, n_{jk}^R)$  : normale unitaire de  $\Gamma_{jk}^0$ , orientée de  $\Omega_j^0$  vers  $\Omega_k^0$
- $\mathbf{n}_{jk} = (n_{jk}^z, n_{jk}^r)$  : normale unitaire de  $\Gamma_{jk}$ , orientée de  $\Omega_j$  vers  $\Omega_k$
- $l_{jk}^0 / l_{jk}$  : longueur de  $\Gamma_{jk}^0 / \Gamma_{jk}$
- $s_j^0 / s_j$  : surface de la maille  $\Omega_j$
- $\mathcal{A}(j)$  : ensemble des arêtes de  $\Omega_j$
- $\mathcal{N}(j)$  : ensemble des nœuds de  $\Omega_j$
- $\mathcal{M}(i)$  : ensemble des mailles autour du nœud  $i$

### 6.3.1 Discrétisation du système géométrique

Comme nous l'avons vu, il y a en coordonnées axisymétriques deux contraintes différentielles : une première venant directement de la définition des inconnues géométriques,



analogue à celle du cas plan bidimensionnel

$$(6.22) \quad \begin{cases} \partial_Z M - \partial_R B = 0, \\ -\partial_Z L + \partial_R A = 0, \end{cases}$$

et une seconde apparaissant dans la formulation symétrisée (6.18)-(6.20)

$$(6.23) \quad \begin{cases} \partial_Z(rM) - \partial_R(rB) = 0, \\ -\partial_Z(rL) + \partial_R(rA) = J. \end{cases}$$

Bien sur, ces deux relations sont équivalentes au niveau continu, chacune pouvant se déduire de l'autre par une algèbre triviale. Mais au niveau discret nous devons assurer cette équivalence puisque la première est corrélée au déplacement du maillage - comme dans cas plan - et la seconde est partie constitutive du système de lois de conservation physiques.

**Première contrainte différentielle** - Nous rappelons rapidement la procédure employée dans le cas plan. En intégrant (6.22) sur la cellule  $\Omega_j^0$  et en utilisant la formule de Green nous trouvons

$$\int_{\partial\Omega_j^0} \begin{pmatrix} M \\ -B \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega_j^0} \begin{pmatrix} -L \\ A \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0 = 0.$$

Ceci amène à définir sur chaque arêtes les deux grandeurs

$$\sigma_{jk}(T) \equiv \frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} \begin{pmatrix} M \\ -B \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0 \quad \text{et} \quad \tau_{jk}(T) \equiv \frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} \begin{pmatrix} -L \\ A \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0,$$

de sorte que la contrainte différentielle (6.22) s'écrive au niveau discret

$$(6.24) \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \sigma_{jk}(T) = 0, \\ \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \tau_{jk}(T) = 0. \end{cases} \quad \forall T \geq 0, \quad \forall j.$$

Introduisons la vitesse  $\mathbf{u}_i(T) = (u_i^z(T), u_i^r(T))$  du nœud  $i$  à l'instant  $T$  :

$$(6.25) \quad d_T \mathbf{z}_i(T) = \mathbf{u}_i(T), \quad \mathbf{z}_i(0) = \mathbf{Z}_i,$$

de façon à ce que la contrainte (6.24) soit satisfaite avec

$$(6.26) \quad \begin{cases} \partial_T \sigma_{jk} = \frac{u_{i^+}^r - u_r^r}{l_{jk}^0} \quad \text{et} \quad \sigma_{jk}(0) = n_{jk}^Z, \\ \partial_T \tau_{jk} = -\frac{u_{i^+}^z - u_r^z}{l_{jk}^0} \quad \text{et} \quad \tau_{jk}(0) = n_{jk}^R. \end{cases}$$

On retrouve à nouveau l'interprétation géométrique sur maillage mobile :

**Lemme 10** *Sur le maillage mobile, les coefficients  $\sigma_{jk}$  et  $\tau_{jk}$  s'interprètent simplement comme*

$$(6.27) \quad l_{jk}^0 \begin{pmatrix} \sigma_{jk} \\ \tau_{jk} \end{pmatrix} = l_{jk}(T) \mathbf{n}_{jk}(T).$$

**Seconde contrainte différentielle** - Intégrons maintenant la contrainte (6.23) sur la cellule  $\Omega_j^0$ , en employant encore la formule de Green. Pour la seconde relation, l'intégrale de  $J$  sur le domaine initial  $\Omega_j^0$  est égale, après changement de variable, à la surface de la maille mobile, notée  $s_j(T)$ . Nous avons donc

$$(6.28) \quad \int_{\partial\Omega_j^0} r \begin{pmatrix} M \\ -B \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega_j^0} r \begin{pmatrix} -L \\ A \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0 = s_j(T).$$

Similairement au cas précédent nous définissons

$$\check{\sigma}_{jk}(T) \equiv \frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} r \begin{pmatrix} M \\ -B \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0 \quad \text{et} \quad \check{\tau}_{jk}(T) \equiv \frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} r \begin{pmatrix} -L \\ A \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0,$$

et la seconde contrainte (6.23) s'écrit alors au niveau discret

$$(6.29) \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \check{\sigma}_{jk}(T) = 0, \\ \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \check{\tau}_{jk}(T) = s_j(T). \end{cases} \quad \forall t \geq 0, \quad \forall j.$$

La question est maintenant de savoir comment évaluer ces intégrales en fonction de  $(A_{jk}, B_{jk}, L_{jk}, D_{jk})$  de façon à rester compatible avec (6.24). Si nous considérons, comme précédemment,  $(A, B, L, M)$  constant par arêtes, alors ces nouvelles inconnues deviennent

$$\check{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} r(t, Z, R) d\Sigma^0 \quad \text{et} \quad \check{\tau}_{jk} = \frac{\tau_{jk}}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} r(t, Z, R) d\Sigma^0.$$

Il est ensuite simple de vérifier l'intégration exacte suivante

$$\frac{1}{l_{jk}^0} \int_{\Gamma_{jk}^0} r(t, Z, R) d\Sigma^0 = \frac{r_i(T) + r_{i+}(T)}{2},$$

qui amène à

$$(6.30) \quad \check{\sigma}_{jk}(T) = \frac{r_i(T) + r_{i+}(T)}{2} \sigma_{jk}(T) \quad \text{et} \quad \check{\tau}_{jk}(T) = \frac{r_i(T) + r_{i+}(T)}{2} \tau_{jk}(T).$$

Montrons pour vérification que cette discrétisation satisfait effectivement la seconde contrainte (6.29). D'une part, nous déduisons de l'interprétation géométrique du lemme 10 que  $l_{jk}^0 \check{\sigma}_{jk}(T) = 1/2(r_{i+}^2(T) - r_i^2(T))$ , ce qui permet de déduire la première relation. Pour la seconde relation nous remarquons que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \check{\tau}_{jk}(T) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} (r_i(T) + r_{i+}(T))(z_i(T) - z_{i+}(T)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \begin{vmatrix} z_i(T) & z_{i+}(T) \\ r_i(T) & r_{i+}(T) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Or d'après le lemme (5), ce second membre est exactement égal à la surface  $s_j(T)$  de la maille mobile  $\Omega_j(T)$ .

En conclusion, la discrétisation des inconnues géométriques a été faite d'une manière cohérente avec les deux contraintes différentielles, en introduisant des vitesses aux nœuds.

### 6.3.2 Discrétisation du système physique

On rappelle que le système de lois de conservation physique, en formulation entièrement axisymétrique, s'écrit sous la forme

$$(6.31) \quad \rho^0 R \partial_t \mathbf{U} + \partial_Z \left( \begin{array}{c} \check{M}^Z \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \check{M}^Z \Psi) \end{array} \right) + \partial_R \left( \begin{array}{c} \check{M}^R \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \check{M}^R \Psi) \end{array} \right) = \mathbf{Q}.$$

En vue de construire une méthode de type Volumes-Finis, les inconnues physiques conservatives sont choisies constantes par maille, considérée comme leur valeur moyenne sur la cellule  $\Omega_j^0$  :

$$(6.32) \quad \mathbf{U}_j(T) \equiv \frac{1}{s_j^0} \int_{\Omega_j^0} \mathbf{U}(t, Z, R) dR dZ.$$

Nous devons donc définir des *volumes* dans le plan lagrangien

$$v_j^0 = \int_{\Omega_j^0} R dR dZ,$$

ainsi que sur le maillage mobile

$$v_j(T) = \int_{\Omega_j^0} r J dR dZ = \int_{\Omega_j(T)} r dr dz.$$

Ces volumes peuvent se calculer de façon exactes en fonction des coordonnées des nœuds définissant  $\Omega_j$  dans le plan bidimensionnel  $(Z, R)$ , grâce à la formule suivante.

**Lemme 11** *Considérons une cellule triangulaire  $T_j$  de sommets  $(Z_i, R_i)_{1 \leq i \leq 3}$  et de surface  $|T_j|$ . Alors nous avons*

$$(6.33) \quad \int_{T_j} R dR dZ = \frac{1}{3} \left( \sum_i R_i \right) |T_j|.$$

*L'intégration sur un polygone quelconque peut donc se faire exactement, par triangulation.*

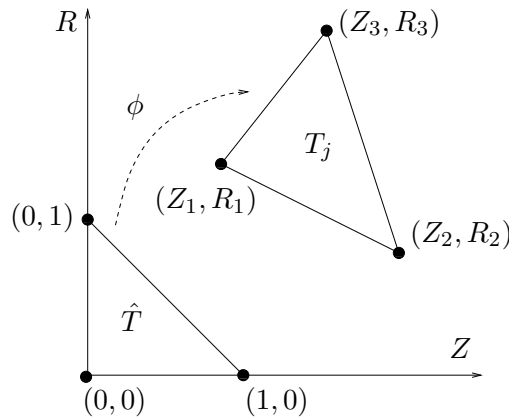


FIG. 6.4 – Triangle de référence

*Preuve.* – La preuve est classique : elle consiste en l'intégration exacte sur un triangle de référence, puis au retour à un triangle quelconque. Notons  $(Z_i, R_i)_{1 \leq i \leq 3}$  les sommets du triangle  $T_j$  et considérons l'application

$$\begin{aligned} \hat{T} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \phi : (\xi, \eta) &\longmapsto (Z, R) = \begin{pmatrix} Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_1 \\ R_2 - R_1 & R_3 - R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ R_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui transforme le triangle de référence  $\hat{T}$  en  $T_j$  (voir figure 6.4). Par changement de variables, nous avons pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  la règle

$$\int_{T_j} f(Z, R) dZ dR = \int_{\hat{T}} f(\phi(\xi, \eta)) |\nabla \phi| d\xi d\eta.$$

Le Jacobien  $|\nabla \phi|$  est précisément égal au double de la surface  $|T_j|$ . Dans notre cas, pour  $f(Z, R) = R$ , nous trouvons donc

$$\int_{T_j} R dR dZ = 2|T_j| \int_{\hat{T}} ((R_2 - R_1)\xi + (R_3 - R_1)\eta + R_1) d\xi d\eta.$$

Nous calculons maintenant simplement de façon exacte l'intégrale ci-dessus sur le triangle de référence par les relations

$$\int_{\hat{T}} \xi d\xi d\eta = \int_{\hat{T}} \eta d\xi d\eta = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\hat{T}} 1 d\xi d\eta = \frac{1}{2},$$

ce qui achève la preuve. □

Il est désormais possible d'obtenir une approximation Volumes-Finis usuelle en intégrant les équations aux dérivées partielles (6.31) sur la cellule  $\Omega_j^0$  :

$$(6.34) \quad \rho_j^0 v_j^0 \partial_t \mathbf{U}_j + \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \begin{pmatrix} \check{\mathbb{M}}_{jk} \Psi_{jk} \\ -\frac{1}{2}(\Psi_{jk}, \check{\mathbb{M}}_{jk} \Psi_{jk}) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_j(T),$$

où  $\Psi_{jk} = (p_{jk}, -u_{jk}^z, -u_{jk}^r)$  et

$$\check{\mathbb{M}}_{jk} = n_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk}^Z + n_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk}^R = \begin{pmatrix} 0 & \check{\sigma}_{jk} & \check{\tau}_{jk} \\ \check{\sigma}_{jk} & 0 & 0 \\ \check{\tau}_{jk} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous discuterons plus tard de la forme exacte du terme  $\mathbf{Q}_j(T)$ , une approximation du terme source  $\mathbf{Q}$  sur la maille  $j$ . On peut noter que la seconde contrainte discrétisée signifie exactement que

$$(6.35) \quad \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_j \\ 0 & 0 & 0 \\ s_j & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

à comparer avec son analogue plan (3.7).

### 6.3.3 Conservation de la masse et vitesses aux nœuds

Comme dans le cas plan, nous sommes en présence de deux formulations de conservation de la masse :

- la formulation Volumes-Finis (6.34) *i.e.*

$$(6.36) \quad \rho_j^0 v_j^0 \partial_t \tau_j(T) = \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 (\check{\sigma}_{jk}(T) u_{jk}^z + \check{\tau}_{jk}(T) u_{jk}^r),$$

- ou la conservation directe de la masse lagrangienne par

$$(6.37) \quad \rho_j(T) v_j(T) = \rho_j^0 v_j^0.$$

La même problématique se présente donc à nous : la première approche n'assure pas, *a priori*, la conservation de la masse de chaque cellule, alors que la seconde n'apparaît pas comme une méthode Volumes-Finis. De plus la première nécessite des vitesses *sur les arêtes* - ou plus exactement leur projection selon les normales aux arêtes - alors que la seconde emploie des vitesses *aux nœuds* pour déplacer le maillage et calculer les volumes à chaque instant. C'est pourquoi nous voulons, comme dans le cas plan bidimensionnel, relier les expressions des vitesses aux arêtes  $(u_{jk}^z, u_{jk}^r)$  aux vitesses aux nœuds  $(u_i^z, u_i^r)$  de telle manière que les deux approches deviennent compatibles et équivalentes. La proposition suivante répond à cette question.

**Proposition 12** *Relions les vitesses aux arêtes et aux nœuds par*

$$(6.38) \quad u_{jk}^z = \frac{1}{3} \left( u_i^z + u_{i+}^z + \frac{r_i u_i^z + r_{i+} u_{i+}^z}{r_i + r_{i+}} \right) \quad \text{et} \quad u_{jk}^r = \frac{1}{3} \left( u_i^r + u_{i+}^r + \frac{r_i u_i^r + r_{i+} u_{i+}^r}{r_i + r_{i+}} \right),$$

*alors l'approche Volumes-Finis (6.36) préserve la masse (6.37).*

Nous renvoyons la preuve en annexe C. L'unicité de cette relation est probable, au vue de l'estimation unique de la dérivée du volume cylindrique utilisée dans la démonstration (sur ce point on peut également se référer à [62] et [72]). On note en outre que cette formule est pertinente avec les cas limites de distance à l'axe  $Z$  :

**Corollaire 3** *Lorsque l'arête  $\Gamma_{jk}(T)$  est colinéaire avec l'axe de symétrie (*i.e.*  $r_i = r_{i+} = r$ ), par exemple si elle est sur l'axe de symétrie ( $r = 0$ ), ou très loin de celui-ci ( $r \rightarrow \infty$ ), on retrouve avec accord les formules du cas plan*

$$u_{jk}^z = \frac{u_i^z + u_{i+}^z}{2} \quad \text{et} \quad u_{jk}^r = \frac{u_i^r + u_{i+}^r}{2}.$$

### 6.3.4 Solveur axisymétrique aux nœuds

Afin de satisfaire la relation de compatibilité (6.38) entre les vitesses aux nœuds et aux arêtes, nous introduisons les flux  $\Psi_{ji} = (p_{ji}, -u_i^z, -u_i^r)$  à chaque nœud  $i$  de la cellule  $j$  de sorte que

$$(6.39) \quad \Psi_{jk} = \frac{1}{3(r_i + r_{i+})} ((2r_i + r_{i+}) \Psi_{ji} + (r_i + 2r_{i+}) \Psi_{ji+}).$$

Il y a donc multiplicité des pressions  $p_{ji}$  à chaque nœud  $i$ , en fonction des mailles en regard. Ceci permet de remanier la formulation Volumes-Finis classique aux arêtes (6.34) en une nouvelle aux nœuds. On a en effet

$$\sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} \Psi_{jk} = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \check{\mathbb{N}}_{ji} \Psi_{ji}$$

avec

$$(6.40) \quad \check{\mathbb{N}}_{ji} = l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} \frac{2r_i + r_{i+}}{3(r_i + r_{i+})} + l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} \frac{2r_i + r_{i-}}{3(r_i + r_{i-})}.$$

Donc si l'on fait l'approximation (consistante) pour le flux quadratique

$$\sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 \left( \Psi_{jk}, \check{\mathbb{M}}_{jk} \Psi_{jk} \right) \approx \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \Psi_{ji}, \check{\mathbb{N}}_{ji} \Psi_{ji} \right),$$

alors la formulation aux nœuds s'écrit

$$(6.41) \quad \rho_j^0 v_j^0 \partial_T \mathbf{U}_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \begin{array}{c} \check{\mathbb{N}}_{ji} \Psi_{ji} \\ -\frac{1}{2}(\Psi_{ji}, \check{\mathbb{N}}_{ji} \Psi_{ji}) \end{array} \right) = \mathbf{Q}_j(T).$$

Explicitons la nouvelle matrice  $\check{\mathbb{N}}_{ji}$  définie dans (6.40) ; avec les notations précédentes on a

$$(6.42) \quad \check{\mathbb{N}}_{ji} = \frac{1}{3} \left( l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} + l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} \right) + \frac{1}{6} r_i \left( l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} + l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} \right).$$

L'intérêt principal de cette écriture est qu'elle permet de déduire très facilement les deux lemmes utiles suivants.

**Lemme 12** *Pour chaque maille  $\Omega_j$ , les matrices  $\check{\mathbb{N}}_{ji}$  satisfont*

$$(6.43) \quad \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \check{\mathbb{N}}_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_j \\ 0 & 0 & 0 \\ s_j & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Preuve.* – Remarquons tout d'abord qu'avec notre notation locale, la somme sur  $\{i \in \mathcal{N}(j)\}$  est exactement la somme sur  $\{k \in \mathcal{A}(j)\}$ , ce qui permet d'utiliser (6.35). Nous avons donc

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} + l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} \right) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_j \\ 0 & 0 & 0 \\ s_j & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, nous avons

$$r_i \left( l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} + l_{jk}^0 \check{\mathbb{M}}_{jk} \right) = \begin{pmatrix} 0 & r_i r_{i+} - r_i - r_i & r_i z_{i-} - r_i z_{i+} \\ r_i r_{i+} - r_i - r_i & 0 & 0 \\ 0 & r_i z_{i-} - r_i z_{i+} & 0 \end{pmatrix}.$$

En permutant simplement les indices dans la somme, nous trouvons

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} r_i r_{i+} - r_i - r_i = 0.$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} r_i z_{i-} - r_i z_{i+} &= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} r_{i+z_i} - r_{i+z_i} \\ &= 2s_j \end{aligned}$$

en vertu du lemme 5. Ceci achève le calcul.  $\square$

**Lemme 13** Autour de chaque nœud  $i$ , les matrices  $\check{\mathbb{N}}_{ji}$  satisfont

$$(6.44) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \check{\mathbb{N}}_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Preuve.* – Avec l'écriture (6.42), la preuve est triviale, puisque  $r_i$  peut se sortir de la somme et que  $\check{\mathbb{M}}_{jk} = -\check{\mathbb{M}}_{kj}$ .  $\square$

Comme dans le cas plan, ce déplacement de point de vue nous amène naturellement à considérer une *normale aux nœuds*, de norme  $\check{s}_{ji}$  et de direction  $\check{\mathbf{n}}_{ji}$ , dont les composantes sont les deux entrées non nulles de la matrice  $\check{\mathbb{N}}_{ji}$  (6.42) :

$$\check{\mathbb{N}}_{ji} = \check{s}_{ji} \begin{pmatrix} 0 & \check{n}_{ji}^z & \check{n}_{ji}^r \\ \check{n}_{ji}^z & 0 & 0 \\ \check{n}_{ji}^r & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette direction privilégiée peut d'ailleurs s'explicitier en fonction de son analogue  $\mathbf{n}_{ji}$  du cas plan par le calcul suivant :

– d'une part on a

$$\begin{aligned} l_{jk}^0 \sigma_{jk}(2r_i + r_{i+}) + l_{jk}^0 \sigma_{jk-}(2r_i + r_{i-}) &= (r_{i+} - r_i)(2r_i + r_{i+}) + (r_i - r_{i-})(2r_i + r_{i-}) \\ &= (r_{i-} + r_i + r_{i+})(r_{i+} - r_{i-}). \end{aligned}$$

– d'autre part,

$$\begin{aligned} l_{jk}^0 \tau_{jk}(2r_i + r_{i+}) + l_{jk}^0 \tau_{jk-}(2r_i + r_{i-}) &= (z_i - z_{i+})(2r_i + r_{i+}) + (z_{i-} - z_i)(2r_i + r_{i-}) \\ &= (r_{i-} + r_i + r_{i+})(z_{i-} - z_{i+}) + 2s_{ji}, \end{aligned}$$

où  $s_{ji}$  est la surface de la sous-cellule triangulaire de sommets  $(i^-, i, i^+)$ , voir figure 6.5 ; en notant  $r_{ji}$  le rayon barycentrique de cette sous-cellule (locale) on a donc

$$\check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} = r_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ s_{ji} \end{pmatrix}$$

On voit bien ici que cette normale est homogène à une surface.

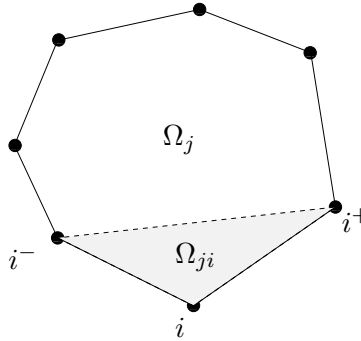


FIG. 6.5 – Sous-maille  $\Omega_{ji}$  de surface  $s_{ji}$  et rayon barycentrique  $r_{ji}$ .

Afin de rester dans l'esprit d'un formalisme Volumes-Finis, nous voulons aussi construire un schéma localement conservatif, ce qui impose de nouvelles relations sur les flux :

$$(6.45) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \begin{pmatrix} \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_{ji} \\ -\frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_{ji} \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dans ce cas, aux conditions aux limites près, nous avons

$$(6.46) \quad \partial_T \left( \sum_{\forall j} \rho_j^0 v_j^0 \mathbf{U}_j \right) = \sum_{\forall j} \mathbf{Q}_j(T).$$

La relation (6.45) ajoute seulement des contraintes aux pressions aux nœuds :

**Proposition 13** *Le schéma est localement conservatif dans le sens (6.45) si et seulement si les pressions aux nœuds  $p_{ji}$  satisfont*

$$(6.47) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} p_{ji} = 0,$$

La preuve est parfaitement identique à celle du cas plan.

Nous allons maintenant nous pencher sur le critère de production d'entropie, ce qui va nous guider dans la discrétisation du terme source et des pressions aux nœuds. Nous voulons un schéma entropique, *i.e*

$$(6.48) \quad \partial_T \eta_j(T) \geq 0 \quad \forall j, \quad \forall T.$$

La discrétisation suivante permettent d'assurer cette production.

**Proposition 14** *Supposons que le terme source soit discrétisé selon*

$$(6.49) \quad \mathbf{Q}_j(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_j s_j(T) \\ 0 \end{pmatrix},$$

et que les pressions aux nœuds soient reliées aux vitesses aux nœuds par

$$(6.50) \quad p_{ji} = p_j + \alpha_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i),$$

où  $\alpha_{ji}$  est un coefficient positif. Alors le schéma est entropique, c'est-à-dire (6.48) est toujours vérifiée.

*Preuve.* – Par définition de la variable entropique  $\Psi$  on a

$$\begin{aligned} \rho_j^0 v_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j &= \rho_j^0 v_j^0 \left\langle \begin{pmatrix} \Psi_j \\ 1 \end{pmatrix}, \partial_T \mathbf{U}_j \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \Psi_j \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_j - \sum_i \left( -\frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_{ji} \rangle \right) \right\rangle \\ &= \langle \Psi_j, \mathbf{Q}_j \rangle - \sum_i \langle \Psi_j, \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_{ji} \rangle + \sum_i \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_{ji} \rangle. \end{aligned}$$



Ici on se permet un abus de notation en faisant le produit scalaire de  $\Psi_j$ , de dimension trois, avec  $\mathbf{Q}_j$ , de dimension quatre mais de dernière composante nulle. La discrétisation (6.49) permet d'écrire, grâce à la propriété (6.43), que

$$(6.51) \quad \langle \Psi_j, \mathbf{Q}_j \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \Psi_j, \left( \sum_i \check{\mathbf{N}}_{ji} \right) \Psi_j \right\rangle,$$

ce qui conduit à

$$\rho_j^0 v_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j = \sum_i \left( \frac{1}{2} \langle \Psi_j, \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_j \rangle - \langle \Psi_j, \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_{ji} \rangle + \sum_i \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}, \check{\mathbf{N}}_{ji} \Psi_{ji} \rangle \right).$$

On reconnaît ici, formellement, le même bilan entropique que celui exhibé dans le cas plan, cf. lemme 6 du chapitre 3, aux brèves près. Les mêmes calculs donnent donc

$$\rho_j^0 v_j^0 \mathcal{T}_j \partial_T \eta_j = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (p_{ji} - p_j) \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j).$$

L'expression des pressions aux nœuds (6.50) est alors exactement choisie pour assurer un bilan positif.  $\square$

Il est à noter que cette discrétisation du terme source s'avère très naturelle avec l'approche Volumes-Finis, puisque si l'on considère une pression constante par maille, on obtient exactement

$$\int_{\Omega_j^0} p(t, Z, R) J(t, Z, R) dZ dR = \int_{\Omega_j(T)} p(T, z, r) dz dr = p_j s_j.$$

Mais nous souhaitons bien insister sur le fait que choisir  $p_j$  dans ce terme est avant tout crucial pour obtenir l'équation (6.51), consistante avec la contrainte différentielle discrète (6.43) ; d'une certaine façon, la contrainte de divergence non nulle se combine avec le terme source non nul de la même façon que le fait, dans le cas plan, la contrainte de divergence nulle avec le terme source nul. Ceci met en lumière, à nos yeux, l'importance de la structure symétrisée du système.

Enfin, la combinaison de (6.47) et (6.50) conclut la construction du solveur aux nœuds :

**Proposition 15** *Les vitesses de déplacement du maillage  $\mathbf{u}_i$  sont déterminées par l'inversion à chaque nœud  $i$  du système linéaire  $2 \times 2$  local*

$$(6.52) \quad \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} \otimes \check{\mathbf{n}}_{ji} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji}.$$

### 6.3.5 Intégration en temps et résultats numériques

L'ajout du terme source nous amène à rentrer dans le détail de l'intégration en temps. Nous définissons le déplacement du maillage par

$$(6.53) \quad \begin{cases} z_i^{n+1} = z_i^n + \Delta t \{u_i^z\}^n, \\ r_i^{n+1} = r_i^n + \Delta t \{u_i^r\}^n. \end{cases}$$

La question est de trouver une discrétisation en temps de (6.41) de la forme

$$(6.54) \quad \rho_j^0 v_j^0 \frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\Delta t} + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( -\frac{1}{2} (\Psi_{ji}^n, \check{\mathbf{N}}_{ji}^{n+} \Psi_{ji}^n) \right) = \mathbf{Q}_j^{n+},$$

dans laquelle  $n^+$  représente un temps entre  $n$  et  $n + 1$ , et telle que les propriétés énoncées précédemment restent vraies au niveau discret. Les mêmes difficultés que dans le cas plan resurgissent : une algèbre calculatoire, que nous ne détaillons pas ici, permet de trouver une discrétisation en temps qui préserve la masse, c'est-à-dire

$$\rho_j^n v_j^n = \rho_j^0 v_j^0 \quad \forall j, \quad \forall n,$$

mais celle-ci ne paraît pas compatible avec la production d'entropie. Aussi devons-nous faire un compromis, en imposant « en dur » la relation ci-dessus après déplacement du maillage, pour assurer plutôt un bilan d'entropie toujours positif. Ceci est réalisé de la façon suivante.

**Proposition 16 (Stabilité)** *Soit  $\alpha_{jr}^n$  un paramètre libre mais strictement positif pour tout  $(j, r, n)$  et définissons les deux quantités*

$$\sigma_j^{(1)} = (\rho_j^n c_j^n)^2 \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{\check{s}_{ji}^n}{2\alpha_{ji}^n},$$

$$\sigma_j^{(2)} = \frac{\sum_i \check{s}_{ji}^n \alpha_{ji}^n + \sqrt{(\sum_i \check{s}_{ji}^n \alpha_{ji}^n)^2 - 4(\sum_i (\lambda_{ji}^n)^2 \sum_i (\mu_{ji}^n)^2 - (\sum_i \lambda_{ji}^n \mu_{ji}^n)^2)}}{4},$$

où  $\lambda_{ji}^n = \sqrt{\check{s}_{ji}^n \alpha_{ji}^n} (n_{ji}^z)^n$ ,  $\mu_{ji}^n = \sqrt{\check{s}_{ji}^n \alpha_{ji}^n} (n_{ji}^r)^n$ . Posons enfin  $\sigma_j^n = \max(\sigma_j^{(1)}, \sigma_j^{(2)})$ .

Discrétisons le terme source par

$$(6.55) \quad \mathbf{Q}_j^{n+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_j^{n+1} s_j^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors, si pour tout  $j$  le pas de temps  $\Delta t^n$  est contrôlé par

$$(6.56) \quad \sigma_j^n \frac{\Delta t^n}{\rho_j^0 s_j^0} \leq \frac{T_j^{n+1}}{T_j^n},$$

le schéma est entropique au troisième ordre dans le sens où il existe un nombre positif  $C_j^n$  et une forme quadratique positive  $\mathcal{G}$  tels que

$$(6.57) \quad \eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) = \eta(\mathbf{U}_j^n) + C_j^n + \mathcal{G}(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) + \mathcal{O}(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n)^3.$$

Clairement, ce résultat est strictement identique à la proposition 9, mais pour arriver à une telle similitude il a fallu discrétiser le terme source convenablement. La démonstration suivante se restreint donc à montrer en quoi cette discrétisation permet de se replacer dans la preuve du cas cartésien.

*Preuve.* – Les mêmes techniques nous font arriver à l'estimation (3.28). Tout se joue alors dans le premier terme du membre de droite.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_j^{n+1}, \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \rangle &= -\frac{\Delta t^n}{\rho_j^0 v_j^0} \left\langle \mathbf{V}_j^{n+1}, -\mathbf{Q}_j^{n+} + \sum_{i \in \mathcal{N}(i)} \left( -\frac{1}{2} \langle \check{\Psi}_{ji}^n, \check{\check{\mathbb{N}}}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \rangle \right) \right\rangle \\ &= -\frac{\Delta t^n}{\rho_j^0 v_j^0} \frac{1}{T_j^{n+1}} \left( -\langle \Psi_j^{n+1}, \mathbf{Q}_j^{n+} \rangle + \left\langle \Psi_j^{n+1}, \sum_{i \in \mathcal{N}(i)} \check{\check{\mathbb{N}}}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{2} \langle \Psi_{ji}^n, \check{\check{\mathbb{N}}}_{ji}^n \Psi_{ji}^n \rangle \right) \end{aligned}$$

L'implication de la *pression* dans  $\mathbf{Q}_j^{n+}$ , mais pas de la *surface*  $s_j$ , permet d'écrire, grâce à la contrainte discrète de « divergence non-nulle » (6.43) que

$$\left\langle \Psi_j^{n+1}, \mathbf{Q}_j^{n+} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \Psi_j^{n+1}, \sum_{i \in \mathcal{N}(i)} \check{\mathbb{N}}_{ji}^n \Psi_j^{n+1} \right\rangle,$$

qui nous amène à

$$\left\langle \mathbf{V}_j^{n+1}, \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \right\rangle = \frac{\Delta t^n}{s_j^0 \rho_j^0} \frac{1}{\mathcal{T}_j^{n+1}} \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle \Psi_{ji}^n - \Psi_j^{n+1}, \mathbb{N}_{ji}^n (\Psi_{jr}^n - \Psi_j^{n+1}) \right\rangle.$$

On retombe donc sur la même estimation que celle de la preuve de la proposition 9, et la boucle est bouclée.  $\square$

*A priori* l'implication de la pression intervenant dans le terme source pose problème pour incrémenter d'un pas de temps la solution. Elle se reporte en effet sur la loi de conservation de l'impulsion selon  $r$  :

$$\{u_j^r\}^{n+1} = \{u_j^r\}^n - \frac{\Delta t}{\rho_j^0 v_j^0} \sum_i \{n_{ji}^r\}^n p_{ji}^n + \frac{\Delta t}{\rho_j^0 v_j^0} s_j^n p_j^{n+1}.$$

En toute généralité on est donc obligé d'imaginer un mécanisme itératif intermédiaire pour résoudre cette équation. Mais pour une loi d'état de *gaz raidi* (5.2), et *a fortiori* de gaz parfait, ce problème se ramène à une équation du second degré en  $\{u_j^r\}^{n+1}$  ; en effet on a

$$\begin{cases} p_j^{n+1} = (\gamma_j - 1) \rho_j^{n+1} \varepsilon_j^{n+1} - \gamma_j \pi_j, \\ \varepsilon_j^{n+1} = e_j^{n+1} - \frac{1}{2} \left( \{u_j^z\}^{n+1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \{u_j^r\}^{n+1} \right)^2, \end{cases}$$

et donc  $\{u_j^r\}^{n+1}$  est solution de

$$a_j \left( \{u_j^r\}^{n+1} \right)^2 + \{u_j^r\}^{n+1} + b_j = 0$$

avec

$$a_j = \frac{1}{2} (\gamma_j - 1) \rho_j^{n+1} \frac{\Delta t}{\rho_j^0 v_j^0} s_j^n$$

et

$$\begin{aligned} b_j = & -\{u_j^r\}^n + \frac{\Delta t}{\rho_j^0 v_j^0} \sum_i \{n_{ji}^r\}^n p_{ji}^n \\ & - \frac{\Delta t}{\rho_j^0 v_j^0} s_j^n \left( (\gamma_j - 1) \rho_j^{n+1} \left( e_j^{n+1} - \frac{1}{2} \left( \{u_j^z\}^{n+1} \right)^2 \right) - \gamma_j \pi_j \right). \end{aligned}$$

Autrement dit on calcule d'abord  $\tau_j^{n+1}$ ,  $\{u_j^z\}^{n+1}$  et  $e_j^{n+1}$ , puis on conclut avec  $\{u_j^r\}^{n+1}$ .

Nous illustrons cette méthode sur le problème de l'effondrement d'une couronne, cas-test critique introduit précédemment en section 5.4. Cette fois-ci la physique du phénomène est sphérique (il s'agit donc de l'implosion d'une coquille dont on ne trace qu'une coupe dans un plan de symétrie). Les paramètres du problème restent inchangés mise à part la vitesse initiale qui doit être à divergence nulle *en coordonnées sphériques* (c'est-à-dire en  $1/r^2$  au lieu de  $1/r$ ) pour éviter à nouveau la génération d'ondes acoustiques. Nous

lançons la simulation sur un maillage initial polaire équisectoriel, et comparons la solution avec un code sphérique monodimensionnel convergé. On trace des portions de coquille de  $10^\circ$  autour des trois directions  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  afin d’observer le comportement du schéma selon la distance à l’axe  $Z$ , tout en réduisant les coûts de calculs. On observe sur la figure 6.6 que la symétrie sphérique est perdue au voisinage de l’axe. Ceci est un défaut bien connu de la plupart des codes axisymétriques non-conçus pour assurer cette symétrie (voir par exemple [72] ou le schéma de Goad [16]). Les déformations près de l’axe peuvent être suffisamment importantes pour faire se croiser les mailles et arrêter la simulation ; c’est pourquoi on a dû mener le calcul avec un raffinement plus important que dans le cas plan (100 couches et des secteurs angulaires de  $1^\circ$ ). Par contre lorsque l’on s’éloigne de l’axe la compression est parfaitement retrouvée, cf. figure 6.7. L’énergie totale est bien capturée dans toutes les directions.

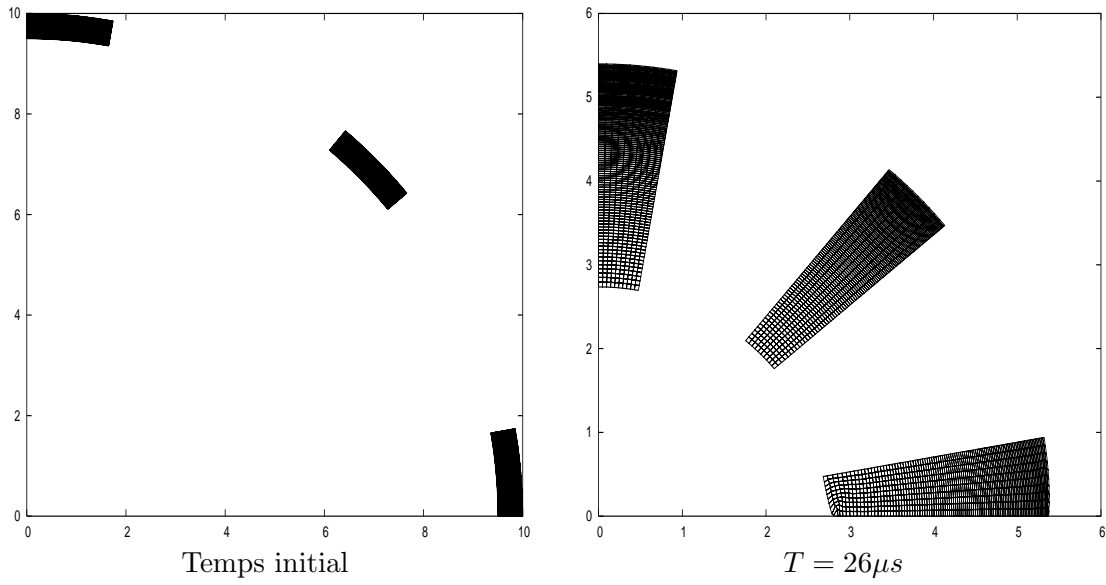


FIG. 6.6 – Effondrement d’une coquille sphérique dans le vide - Maillage lagrangien résolu par le schéma en formulation entièrement axisymétrique, dans trois directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), pour 100 couches et des secteurs angulaires de  $1^\circ$  (maillage polaire équisectoriel).

## 6.4 Discrétisation en formulation plane

Dans cette section nous mettons en évidence et discrétisons une autre formulation possible de l’hydrodynamique lagrangienne axisymétrique, dite *plane* pour des raisons qui seront bientôt évidentes. En sortant le rayon  $r$  des flux de la formulation initiale (6.18), nous trouvons en effet après calcul

$$(6.58) \quad \rho J \partial_T \mathbf{U} + \partial_Z \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^Z \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^Z \Psi) \end{array} \right) + \partial_R \left( \begin{array}{c} \mathbb{M}^R \Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, \mathbb{M}^R \Psi) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \frac{Ju^r}{r} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{Ju^r}{r} p \end{array} \right).$$

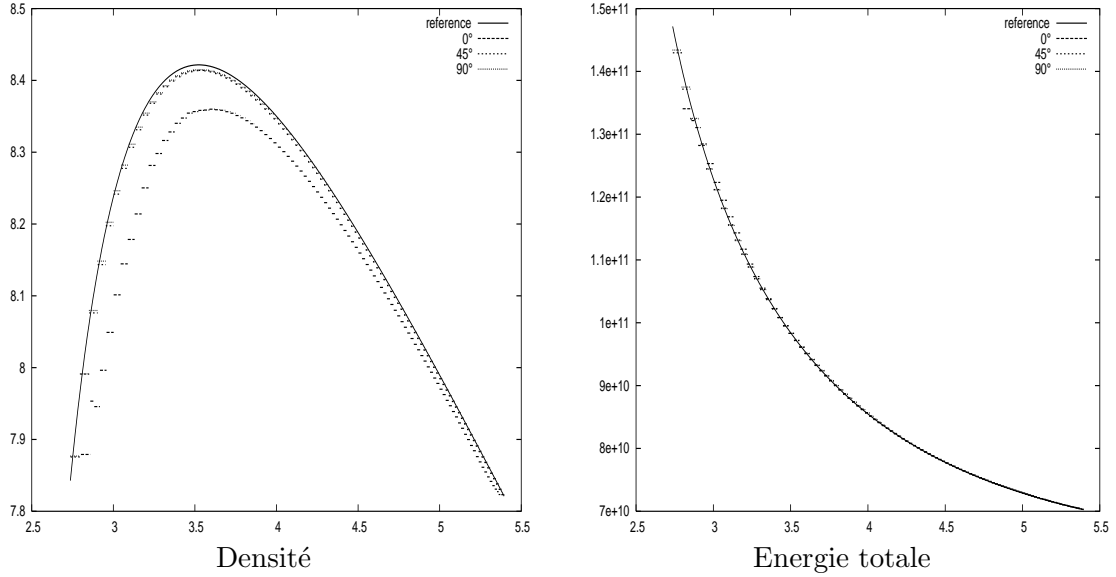


FIG. 6.7 – Effondrement d’une coquille sphérique dans le vide - Profils de densité et d’énergie totale à l’instant  $T = 26\mu s$ , obtenus par le schéma en formulation entièrement axisymétrique, dans trois directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), pour 100 couches et des secteurs angulaires de  $1^\circ$  (maillage initialement polaire équisectoriel). Sur la figure de gauche, la densité à  $0^\circ$  est largement sous-estimée.

Au vu du terme source, ce système est posé uniquement lorsque  $r$  est non nul. Mais lorsqu’on se trouve sur l’axe  $r = 0$ , par symétrie axisymétrique, la vitesse radiale est nulle ( $u^r = 0$ ) et l’on retrouve la formulation plane du chapitre 3.

On observe que désormais l’équation sur la quantité de mouvement devient conservative, comme en formulation plane. En outre les matrices symétriques de flux sont strictement les mêmes que celles du cas plan, à la notation  $Z \rightarrow X$  et  $R \rightarrow Y$  près. C’est ce qui justifie l’appellation de *formulation plane*, dans le plan  $(Z, R)$ . Cette manipulation, consistant à éliminer l’effet axisymétrique dans l’impulsion, est bien connue (voir [62] par exemple), mais l’originalité de notre approche est de conserver une formulation abstraite symétrisée qui ajoute des termes sources pour la masse et l’énergie totale.

La contrainte différentielle *naturelle* sur les inconnues géométriques se résume à l’identité de Piola plane

$$(6.59) \quad \partial_Z M^Z + \partial_R M^R = \mathbb{O}.$$

La seconde contrainte qui faisait partie intégrante de la précédente formulation est désormais désuète.

Il est intéressant de mettre en évidence le lien entre le terme source, l’identité de Piola

plane, et le flux d'entropie, par le calcul ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\rho J T \partial_T \eta &= \left\langle \begin{pmatrix} \Psi \\ 1 \end{pmatrix}, \rho J \partial_T \mathbf{U} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \Psi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{J u^r}{r} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{J u^r}{r} p \end{pmatrix} \right\rangle - \langle \Psi, \partial_Z(\mathbb{M}^Z \Psi) \rangle - \langle \Psi, \partial_R(\mathbb{M}^R \Psi) \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_Z \langle \Psi, \mathbb{M}^Z \Psi \rangle - \frac{1}{2} \partial_R \langle \Psi, \mathbb{M}^R \Psi \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \Psi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{J u^r}{r} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{J u^r}{r} p \end{pmatrix} \right\rangle - \frac{1}{2} \langle \Psi, (\partial_Z(\mathbb{M}^Z) + \partial_R(\mathbb{M}^R)) \Psi \rangle \\
&= p \frac{J u^r}{r} - \frac{J u^r}{r} p + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Les enchaînements de ce calcul sont donc encore différents de la situation précédente, et nous allons les exploiter à nouveau au niveau discret.

Sur la base de tous les détails numériques des sections et chapitres précédents, nous abrégeons la présentation de la discrétisation du système (6.58) en allant directement à l'essentiel. En effet, toujours avec notre même approche Volumes-Finis déplacée aux nœuds, le schéma continu en temps s'écrit sous sa forme la plus générale

$$(6.60) \quad \rho_j s_j \partial_T \mathbf{U}_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{N}}_{ji} \Psi_{ji} \\ -\frac{1}{2} (\Psi_{ji}, \hat{\mathbb{N}}_{ji} \Psi_{ji}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \\ 0 \\ \mu_j \end{pmatrix}.$$

Les matrices aux nœuds  $\hat{\mathbb{N}}_{ji}$  ont une structure identique à celles des matrices  $\mathbb{N}_{ji}$  et  $\check{\mathbb{N}}_{ji}$ . On pourrait songer à les identifier directement à  $\mathbb{N}_{ji}$ , puisqu'elles discrétisent les mêmes inconnues géométriques planes; mais pour l'instant nous les gardons comme degré de liberté de la méthode, en leur associant une direction aux nœuds  $\hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}$  *a priori* nouvelle et distincte de  $l_{ji} \mathbf{n}_{ji}$ .

Les grandeurs  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  discrétisent le nouveau terme source. En ajustant convenablement le terme  $\lambda_j$ , la méthode conserve la masse lagrangienne des cellules quelle que soit la direction  $\hat{\mathbf{n}}_{ji}$  :

**Proposition 17** *Quelle que soit  $\hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \in \mathbb{R}^2$ , le schéma (6.60) conserve la masse si*

$$(6.61) \quad \lambda_j = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{s_j}{v_j} \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} - \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \right) \cdot \mathbf{u}_i.$$

Nous montrerons plus loin en quoi (6.61) constitue une discrétisation cohérente de  $\frac{J u^r}{r}$ , notamment vis-à-vis de la dépendance selon  $u^r$  et pas  $u^z$ .

Il y a ici une différence essentielle avec les approches précédentes : la détermination de la direction aux nœuds  $\hat{\mathbf{n}}_{ji}$  ne se fait pas par le critère de conservation de la masse. Par cohérence avec l'égalité de Piola plane, on impose la contrainte

$$(6.62) \quad \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \hat{\mathbb{N}}_{ji} = 0.$$

La détermination de  $\mu_j$  se fait par le critère d'entropie. On a un résultat analogue à celui de la section précédente :

**Proposition 18** *Supposons que, quel que soit  $\hat{l}_{ji}\hat{\mathbf{n}}_{ji} \in \mathbb{R}^2$ , le terme source de l'énergie totale soit discrétisé selon*

$$(6.63) \quad \mu_j = -p_j\lambda_j = -p_j \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{s_j}{v_j} \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} - \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \right) \cdot \mathbf{u}_i,$$

et que les pressions aux nœuds soient reliées aux vitesses aux nœuds par

$$(6.64) \quad p_{ji} = p_j + \alpha_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i).$$

Alors le schéma est entropique, c'est-à-dire (6.48) est toujours vérifiée.

*Preuve.* – L'idée est que ce choix permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} \Psi_j \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \\ 0 \\ -p_j\lambda_j \end{pmatrix} = 0 = \frac{1}{2} \Psi_j \cdot \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \hat{\mathbf{N}}_{ji} \right) \Psi_j,$$

ce qui nous replace dans le cadre de la preuve de la proposition 14.  $\square$

Il est donc intéressant de noter l'accord entre divergence (discrète) nulle des matrices, et annulation du terme source par produit scalaire contre  $(\Psi_j, 1)$  : cette situation est encore différente du cas purement plan, ou de la formulation axisymétrique.

Il faut conclure sur le choix de  $\hat{l}_{ji}\hat{\mathbf{n}}_{ji}$ . C'est le caractère conservatif du schéma qui va permettre de construire *in fine* ce vecteur. On étudie pour cela

- la conservation de l'impulsion selon l'axe  $Z$ ,
- la conservation de l'énergie totale,

toutes deux exprimées dans la formulation axisymétrique, la seule qui ait un sens physique en terme de lois de conservation. A partir de (6.60) le bilan sur tout le domaine s'écrit

$$\begin{cases} \sum_{\forall j} \rho_j^0 v_j^0 \partial_T u_j^z + \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{v_j}{s_j} p_{ji} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}^z \right) = 0, \\ \sum_{\forall j} \rho_j^0 v_j^0 \partial_T e_j + \sum_{\forall j} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{v_j}{s_j} (p_{ji} - p_j) \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} + p_j \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} \right) \cdot \mathbf{u}_i = 0. \end{cases}$$

Pour conserver globalement l'impulsion et l'énergie totale il est donc suffisant d'imposer localement autour de chaque nœud les relations

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \left( \frac{v_j}{s_j} p_{ji} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}^z \right) = 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \left( \frac{v_j}{s_j} (p_{ji} - p_j) \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} + p_j \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} \right) = 0. \end{cases}$$

Pour rendre compatible ces deux équations quelles que soient les pressions  $p_j$ , il faut

$$(6.65) \quad \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}^z = \frac{s_j}{v_j} \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji}^z,$$

et on a bien  $\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}^z = 0$ . Pour l'axe  $r$ , plusieurs idées sont envisageables :

- On pourrait d’abord être tenté par le pendant de la relation ci-dessus, c’est-à-dire  $\hat{l}_{ji}\hat{n}_{ji}^r = \frac{s_j}{v_j}\check{s}_{ji}\check{n}_{ji}^r$ . Mais cette direction n’est pas admissible car  $\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \frac{s_j}{v_j}\check{s}_{ij}\check{n}_{ji}^r = \frac{s_j}{v_j}s_j$ , ce qui contredit notre hypothèse (6.62).
- Le choix  $\hat{l}_{ji}\hat{n}_{ji}^r = \frac{s_j}{v_j}r_{ji}l_{ji}n_{ji}^r$  pourrait être un bon candidat car il décentre les normales aux nœuds de la même façon selon  $z$  et  $r$  (en effet on a  $\check{s}_{ji}\check{n}_{ji}^z = r_{ji}l_{ji}n_{ji}^z$ ). Toutefois la contrainte de divergence nulle n’est toujours pas satisfaite, *sauf sur des triangles*, ce qui pourrait être une propriété intéressante mais ne correspond pas au jeu de simulations que l’on s’est donné.
- Finalement nous arrêtons tout simplement notre choix sur la normale *plane*

$$(6.66) \quad \hat{l}_{ji}\hat{n}_{ji}^r = l_{ji}n_{ji}^r,$$

qui vérifie (6.62) et assure donc un bilan d’entropie positif.

La méthode obtenue est ainsi très originale car le déplacement des inconnues des faces aux nœuds n’est pas fait de la même façon selon  $Z$  et  $R$ .

Sur le fait que l’on n’ait pas cherché à assurer la conservation de l’impulsion selon l’axe  $R$ , il faut se rappeler qu’en regard de chaque volume de fluide dans un plan  $(Z, R)$  défini par un angle  $\Theta$  répond le même volume dans le plan  $\Theta + \pi$ , avec une impulsion de signe opposé ; donc le jeu de coordonnées axisymétrique préserve par lui-même l’impulsion selon l’axe  $R$ , intégrée sur toute la géométrie de révolution.

Finalement, en injectant le calcul des pressions  $p_{ji}$  (6.64) dans les deux contraintes de conservation ci-dessus, on trouve le solveur aux nœuds suivant :

$$(6.67) \quad \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \frac{v_j}{s_j} \alpha_{ji} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{ji} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \left( \frac{v_j}{s_j} (p_j + \alpha_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} + p_j \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} \right).$$

Le test de ce solveur sur l’implosion de coquille donne des résultats analogues à la formulation entièrement axisymétrique, *cf.* figure 6.8 pour le maillage et figure 6.9 pour les profils de densité. Une fois de plus le maillage est déformé près de l’axe  $Z$ , en étant toutefois moins pincé vers le rayon extérieur ; la compression près de l’axe est encore sous-estimée, dans une moindre mesure toutefois. L’énergie totale est toujours bien restituée, quelle que soit la direction.

## 6.5 Discrétisation à symétrie sphérique

Pour conclure ce chapitre nous présentons une dernière discrétisation qui répond à l’exigence de symétrie plane (*i.e.* d’invariance selon la distance à l’axe  $Z$ ), ce que ne peuvent satisfaire les deux précédentes. Ce gain se fait au prix d’un éclatement de la structure canonique de type (6.41) ou (6.60), et entraîne *a priori* la perte du caractère entropique.

Partons de la formulation plane (6.60)-(6.67). Une raison pour laquelle le solveur aux nœuds (6.67) dépend de la distance à l’axe  $Z$  provient du poids  $\frac{v_j}{s_j} \hat{l}_{ji}$ , qui inclut un terme en  $r_{ji}$  (distance à l’axe d’une sous-maille autour du nœuds  $i$ , *cf.* figure 6.5). Imaginons une nouvelle normale aux nœuds  $\hat{l}_{ji}\hat{\mathbf{n}}_{ji}$ , toujours homogène à une grandeur plane, mais définie par

$$(6.68) \quad \hat{l}_{ji}\hat{\mathbf{n}}_{ji} = \frac{s_j}{v_j} r_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji}.$$



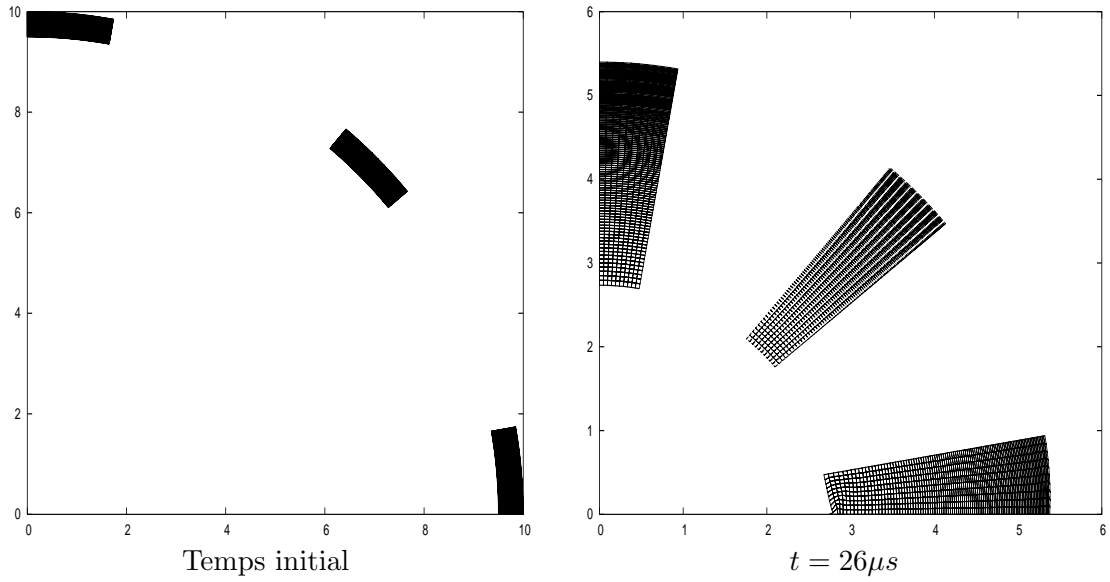


FIG. 6.8 – Effondrement d’une coquille sphérique dans le vide - Maillage lagrangien résolu par le schéma en formulation plane, dans trois directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), pour 100 couches et des secteurs angulaires de  $1^\circ$  (maillage polaire équisectoriel).

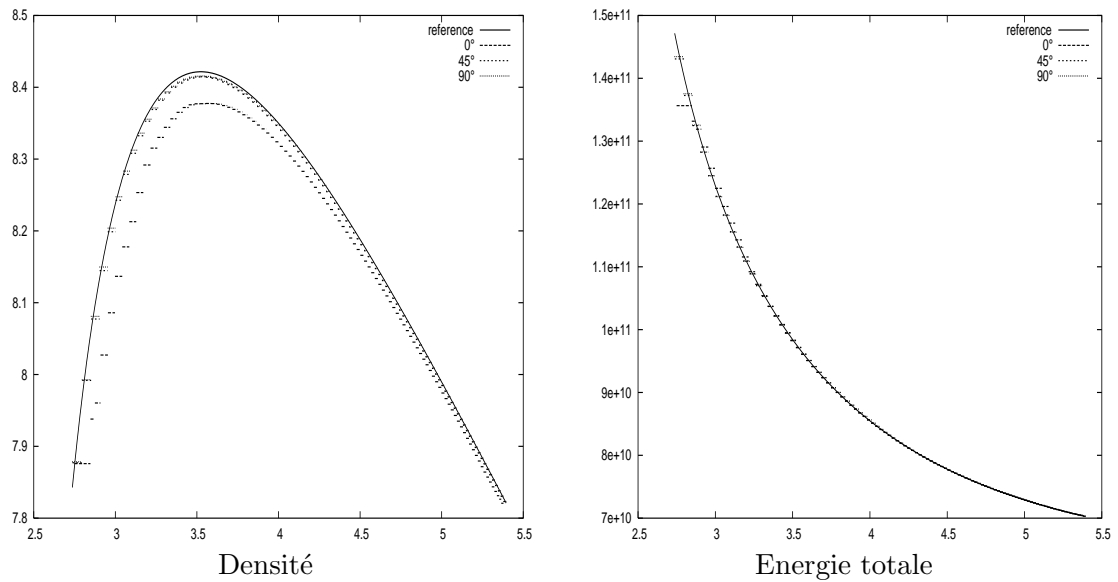


FIG. 6.9 – Effondrement d’une coquille sphérique dans le vide - Profils de densité et d’énergie totale à l’instant  $T = 26 \mu s$ , obtenus par le schéma en formulation plane, dans trois directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), pour 100 couches et des secteurs angulaires de  $1^\circ$  (maillage polaire équisectoriel). Sur la figure de gauche, la densité à  $0^\circ$  est encore sous-estimée.

On a donc  $\hat{\mathbf{n}}_{ji} = \mathbf{n}_{ji}$ , et la norme est bien homogène à une longueur. Cette normale dépend encore de la distance à l'axe, mais *de façon constante autour du nœud  $i$*  lorsque multipliée par le barycentre  $\frac{v_j}{s_j}$  : aussi ce poids reste-t-il sans effet dans la partie de gauche du solveur (6.67). Ensuite, le terme supplémentaire en  $p_j \check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji}$  résulte directement du terme source  $\mu_j$ , redistribué aux nœuds ; or on va voir que ce terme est nul dans les écoulements cylindriques, avec le choix (6.68). Cela nous permet de retrouver exactement le solveur plan (3.22). La vitesse  $\mathbf{u}_i$  qui en résulte, ainsi que les pressions  $p_{ji}$  données par (6.64), sont donc invariantes par rapport à la distance à l'axe  $Z$ . La conservation de la masse (locale) et de l'énergie totale peut alors se faire comme précédemment, c'est-à-dire par respectivement la première et la dernière équation de (6.64), toutes deux valides quel que soit le choix de la normale  $\hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}$ . Par contre nous ne discrétisons pas l'impulsion comme en (6.64), ce qui rajouterait le poids  $r_i$ , mais selon la normale plane  $\mathbf{n}_{ji}$  : c'est pour cela que la structure canonique est éclatée, et que l'on ne conserve donc pas rigoureusement l'impulsion cylindrique. Le point fort de cette méthode, que l'on résume ci-dessous, est de préserver la symétrie sur maillage polaire.

**Proposition 19** *Choisissons la normale aux nœuds (6.68) et discrétisons les équations de l'hydrodynamique en coordonnées axisymétriques (et formulation plane) par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j s_j \partial_T \tau_j - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_j, \\ \rho_j s_j \partial_T \mathbf{u}_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} p_{ji} \hat{l}_{ji} \mathbf{n}_{ji} = 0, \\ \rho_j s_j \partial_T e_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} p_{ji} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \cdot \mathbf{u}_i = \mu_j, \end{array} \right.$$

où  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  sont définis en fonction de  $\hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}$  comme en (6.61) et (6.63) et les grandeurs  $p_{ji}$  et  $u_i$  sont déterminées par le solveur aux nœuds

$$(6.69) \quad \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \frac{v_j}{s_j} \alpha_{ji} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{ji} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \frac{v_j}{s_j} (p_j + \alpha_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji}.$$

Ce schéma possède alors les propriétés suivantes

- il conserve la masse lagrangienne des cellules,
- il conserve l'énergie totale axisymétrique,
- il conserve l'impulsion plane,
- il respecte la symétrie des écoulements sphériques résolus sur maillage polaire équi-sectoriel (c'est-à-dire qu'il est invariant selon la distance à l'axe  $Z$ ).

*Preuve.* – Les deux premières propriétés sont évidentes par construction si l'on admet que  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  sont nuls (ce que l'on va démontrer plus loin) : les équations deviennent compatibles avec ce qui a été dit dans la section 6.4 précédente. La conservation de l'impulsion *plane* est elle aussi imposée par construction. Par contre il faut noter que l'on ne conserve pas l'impulsion *axisymétrique*, qui aurait nécessité une discrétisation de la forme

$$\rho_j s_j \partial_T \mathbf{u}_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} p_{ji} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} = 0,$$

comme précédemment. Ce point constitue la principale différence de cette troisième méthode.

Il reste à démontrer la préservation de la symétrie sphérique sur maillage polaire équi-sectoriel, grâce au choix *ad hoc* des normales aux nœuds ; nous procédons en trois étapes. Premièrement, le solveur (6.69) détaillé avec la normale (6.68) s'écrit

$$r_i \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji} \right) \mathbf{u}_i = r_i \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji},$$

donc la simplification par  $r_i$  redonne exactement le solveur de la méthode plane (3.22). Il faut d'ailleurs réellement appliquer ce solveur plan pour éviter la singularité de l'axe ( $r_i = 0$ ). Ainsi, sur maillage polaire équisectoriel, on retrouve le fait que d'une part les pressions aux nœuds  $p_{ji}$  sont constantes sur une couche donnée<sup>4</sup>, et que d'autre part les vitesses aux nœuds  $u_i$  sont également de norme constante par couche et de direction radiale (« sphériquement » radiale). Ainsi la vitesse  $\mathbf{u}_j$  de la maille  $\Omega_j$  est également radiale et constante par couche, donc invariante selon la distance à l'axe  $Z$ .

Ensuite, il faut étudier la symétrie de la densité. Plaçons nous pour cela sur une maille quadrangulaire  $\Omega_j$  délimitée par les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  et les rayons sphériques  $d_1$  et  $d_2$ , comme en figure 6.10. Nous avons vu que la discrétisation de l'équation de conservation

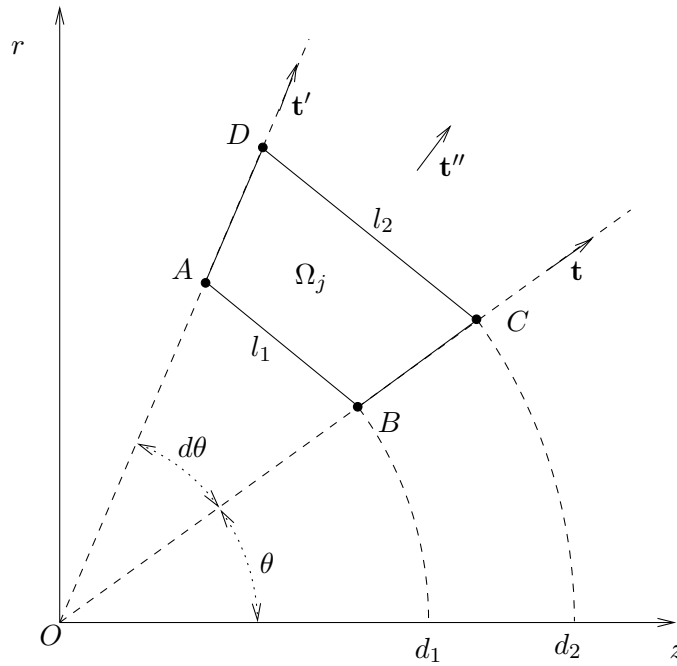


FIG. 6.10 – Etude de la symétrie plane du troisième solveur axisymétrique, sur maillage polaire équisectoriel. La direction  $\mathbf{t}''$  est définie par  $\mathbf{t}'' = (\cos(\theta + d\theta/2), \sin(\theta + d\theta/2))^T$ . La longueur du côté  $AB$  est notée  $l_1 = 2d_1 \sin(d\theta/2)$ , celle du côté  $CD$   $l_2 = 2d_2 \sin(d\theta/2)$ .

de la masse avec  $\lambda_j$  définie par (6.61) est équivalente à  $\rho_j(T)v_j(T) = \rho_j^0 v_j^0$ , où  $v_j$  est le volume sphérique de la maille  $\Omega_j$ . Ici  $v_j$  peut se calculer comme la différence des volumes (sphériques) des triangle  $OCD$  et  $OAB$ , que l'on peut eux-mêmes intégrer exactement

<sup>4</sup>Le paramètre  $\alpha_{ji}$  doit être choisi comme en plan.

grâce au lemme 11 :

$$\begin{aligned}
v_j &= v_{OCD} - v_{OAB} \\
&= s_{OCD} \times \frac{r_O + r_C + r_D}{3} - s_{OAB} \times \frac{r_O + r_A + r_B}{3} \\
&= \frac{1}{3} ((d_2)^3 - (d_1)^3) \sin(d\theta) \sin(\theta + d\theta/2) \cos(d\theta/2).
\end{aligned}$$

Ainsi la densité à l'instant courant vaut

$$\rho_j(T) = \rho_j^0 \frac{(d_2^0)^3 - (d_1^0)^3}{(d_2(T))^3 - (d_1(T))^3}$$

et ne dépend donc pas de  $\theta$  : la densité prend la même valeur pour toutes les mailles d'une même couche (dès lors que c'est vrai à l'instant initial, évidemment).

Penchons nous enfin sur l'énergie totale. Pour montrer qu'elle est constante par couche, nous allons montrer dans un premier temps que le terme source  $\mu_j = -p_j \lambda_j$  est nul, sur ce type de géométrie et d'écoulement. En effet on a

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (\check{s}_{ji} \check{\mathbf{n}}_{ji} - r_i l_{ji} \mathbf{n}_{ji}) \cdot \mathbf{u}_i \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( \frac{r_i^+ + r_i^- - 2r_i}{3} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s_{ji}}{3} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{u}_i.
\end{aligned}$$

Dans cette somme, calculons la contribution des nœuds  $A$  et  $B$  de la figure 6.10. Pour cela on se souvient que les vitesses aux nœuds résultant du solveur (6.69) sont de la forme

$$\mathbf{u}_A = u_1 \mathbf{t}', \quad \mathbf{u}_B = u_1 \mathbf{t}$$

et que les normales *planes* aux nœuds valent

$$l_A \mathbf{n}_A = \frac{d_2 - d_1}{2} \mathbf{t}'^\perp - \frac{l_1}{2} \mathbf{t}'', \quad l_B \mathbf{n}_B = -\frac{d_2 - d_1}{2} \mathbf{t}^\perp - \frac{l_2}{2} \mathbf{t}''.$$

De plus les surfaces des sous-mailles  $ABC$  et  $ABD$  sont égales. Ainsi cette contribution vaut-elle

$$\begin{aligned}
\lambda_j^{(AB)} &= -u_1 \frac{l}{2} \left( \frac{r_D + r_B - 2r_A}{3} + \frac{r_A + r_C - 2r_B}{3} \right) \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' + u_1 \frac{s_{ABC}}{3} (\mathbf{t}' + \mathbf{t}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -u_1 \frac{l}{3} (d_2 \sin(\theta + d\theta/2) \cos(d\theta/2) - d_1 \sin(\theta + d\theta/2) \cos(d\theta/2)) \cos(d\theta/2) \\
&\quad + u_1 (d_2 - d_1) \cos(d\theta/2) \sin(\theta + d\theta/2) \cos(d\theta/2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La contribution des nœuds  $C$  et  $D$  s'annule pour les mêmes raisons, ce qui montre que  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  sont nuls. L'équation sur l'énergie totale se résume donc à

$$\rho_j s_j \partial_T e_j + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} p_{ji} \hat{l}_{ji} \hat{\mathbf{n}}_{ji} \cdot \mathbf{u}_i = 0.$$

La multiplication de cette équation par  $\frac{v_j}{s_j}$  permet d'étudier plus simplement le flux. Les pressions aux nœuds sont constantes par couches :  $p_{jA} = p_{jB} \equiv p_1$  et  $p_{jC} = p_{jD} \equiv p_2$ . On

a donc

$$\begin{aligned}
\rho_j^0 v_j^0 \partial_T e_j &= - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} p_{ji} r_i l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_i \\
&= \left( p_1 d_1 \sin(\theta + d\theta) \frac{l_1}{2} u_1 + p_1 d_1 \sin(\theta) \frac{l_1}{2} u_1 \right. \\
&\quad \left. - p_2 d_2 \sin(\theta) \frac{l_2}{2} u_2 - p_2 d_2 \sin(\theta + d\theta) \frac{l_2}{2} u_2 \right) \cos(d\theta/2) \\
&= ((d_1)^2 p_1 u_1 - (d_2)^2 p_2 u_2) \sin(d\theta) \sin(\theta + d\theta/2) \cos(d\theta/2).
\end{aligned}$$

Le terme géométrique en facteur de ce flux est donc exactement le même que celui du volume  $v_j$  que nous avons calculé plus haut. Après simplification, l'énergie totale n'est donc pas dépendante de  $\theta$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Cette dernière méthode se comporte très bien sur le problème d'implosion de coquille. Comme attendu, le maillage reste symétrique sur tout le domaine (voir figure 6.11), mais les profils de densité et énergie totale sont également très bien retranscrits. La perte d'impulsion cylindrique (mais pas plane) n'est donc pas pénalisante sur ce problème.

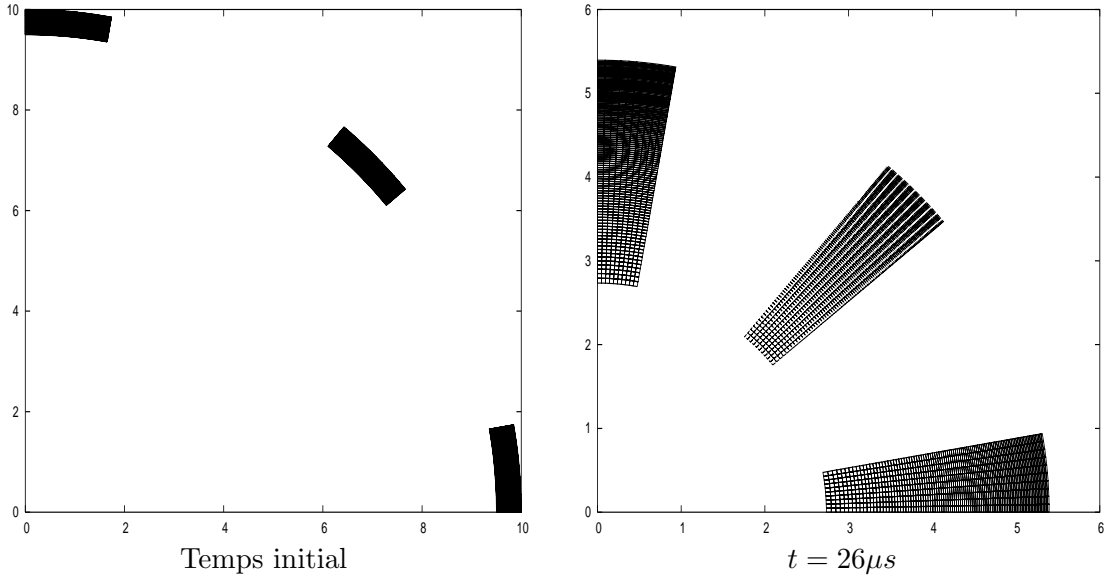


FIG. 6.11 – Effondrement d'une coquille sphérique dans le vide - Maillage lagrangien résolu par le schéma à symétrie sphérique, dans trois directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), pour 100 couches et des secteurs angulaires de  $1^\circ$  (maillage polaire équisectoriel).

La synthèse des trois méthodes de ce chapitre est la suivante.

- La première formulation, dite *cylindrique*, conserve la masse lagrangienne des cellules, l'impulsion et l'énergie totale, et produit de l'entropie. C'est une exploitation directe de la structure canonique et du schéma numérique mis en avant en coordonnées planes, qui intègre sans discernement le poids de la distance à l'axe  $Z$ . Cette méthode capture parfaitement la physique de l'implosion d'une coquille lorsque l'on n'est pas sur l'axe, mais génère des déformations près de celui-ci.

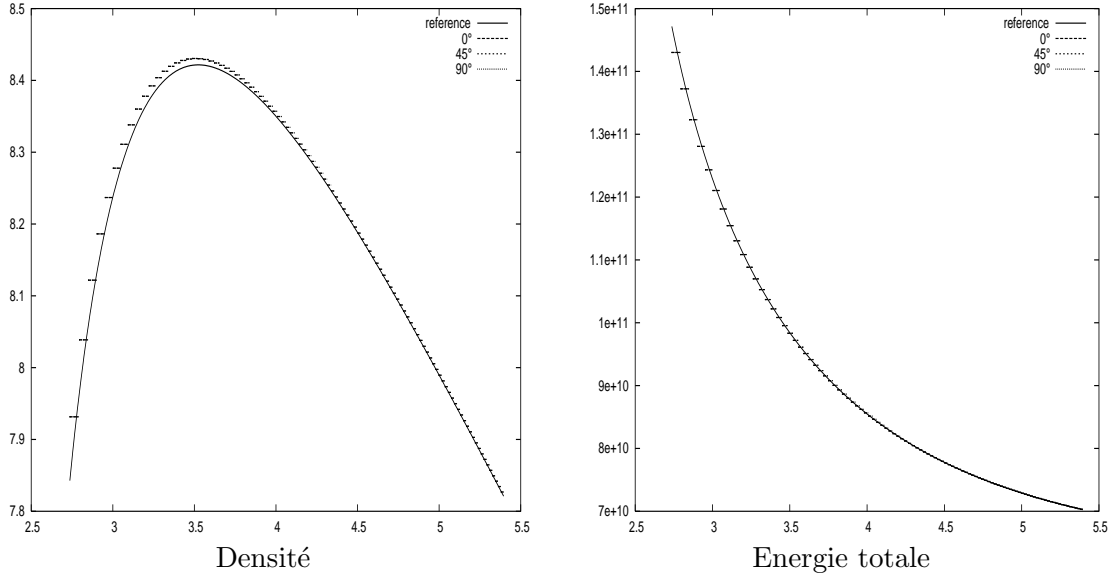


FIG. 6.12 – Effondrement d’une coquille sphérique dans le vide - Profils de densité et d’énergie totale à l’instant  $T = 26\mu s$ , obtenus par le schéma à symétrie sphérique, dans trois directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), pour 100 couches et des secteurs angulaires de  $1^\circ$  (maillage polaire équisectoriel). Les profils sont superposés.

- La deuxième méthode exploite une formulation *plane* originale, également entropique, qui conserve la masse lagrangienne, l’impulsion selon  $Z$ , l’énergie totale. Le choix des normales aux nœuds est moins sensible que le précédent à la distance à l’axe, sans échapper toutefois à des déformations réhibitoires.
- Le dernier schéma reprend des éléments des deux précédents, modifiés, et paraît à ce titre le moins rigoureux sur papier. C’est pourtant le plus efficace sur notre cas-test d’implosion car il capture correctement les profils, conserve la masse lagrangienne, l’énergie totale et assure la symétrie sphérique sur maillage polaire, quel que soit son raffinement.

On pourrait imaginer, selon les contraintes physiques retenues, d’autres méthodes d’approximation. Par exemple il serait aisé de créer une variante à symétrie sphérique, entropique, conservative en impulsion, mais pas en énergie totale (du moins pas rigoureusement, à maillage donné). Nous avons présenté ici celles qui peuvent avoir un intérêt pour les applications en fusion par confinement inertiel.

# Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire nous avons présenté une série de réflexions et de résultats autour de l'hydrodynamique lagrangienne, à la fois du point de vue de sa structure mathématique comme un système venant de la physique, de ses propriétés mathématiques - en particulier en distinction de sa formulation eulérienne - et de son approximation numérique, dans différentes géométries, par un solveur original qui répond à des attentes actuelles en simulation numérique pour la fusion. L'apport essentiel est sans doute d'avoir posé un cadre mathématique capable d'apporter une formulation claire de l'hydrodynamique lagrangienne, de construire des méthodes numériques et de pouvoir les étudier avec des outils relativement simples. Ce travail, qui fait partie d'un domaine d'étude né il y a une soixantaine d'années mais que nous avons essayé d'attaquer sous un angle nouveau, ouvre le champ à au moins cinq axes de recherche, de nature distincte, que nous présentons en guise de conclusion.

Premièrement, les résultats de structure symétrisée, bâtis sur des principes physiques généraux mais utiles à la construction de méthodes numériques, devraient être comparés à toute la série de travaux de S. K. Godunov et E. I. Romensky sur la formulation et la génération d'équations physiques à partir d'un potentiel. Il y aurait certainement un lien à faire entre l'approche de B. Després dont nous sommes partis, basée l'entropie, et celle de ces auteurs qui contient notamment la notion d'invariance par rotation [36] [37] [38] [39] [40]. Toujours sur cette structure, sa validité à certains systèmes avec contraintes involutives n'a pu être qu'illustrée ici, sans être démontrée. Les travaux fondamentaux de Boillat [7][8][9], qui parvient à inclure ces contraintes dans un système de lois de conservation étendu classique, pourraient peut-être donner des idées de preuve.

Deuxièmement, les propriétés mathématiques de l'hydrodynamique en variable de Lagrange n'ont été ici que trop vite abordées (en réalité nous nous sommes contenté de classifier ce système en montrant qu'il ne fait pas partie des systèmes hyperboliques symétrisables classiques). Une fois mise en avant, la faible hyperbolicité pose des questions fondamentales : par exemple comment mesurer les solutions de type Dirac qui peuvent apparaître dans les inconnues géométriques ? Les travaux de F. Bouchut et F. James [12] (voir également [15]) sur les systèmes faiblement hyperboliques des gaz sans pression (dont on a donné dans l'exemple (2.27) une version lagrangienne) seraient-ils utiles pour étudier l'hydrodynamique lagrangienne ?

Troisièmement, la formulation symétrisée abstraite que nous avons mise en avant dans l'écriture des systèmes (chapitre 1 mais aussi géométrie cylindrique) pose la question de l'extension de ce travail à d'autres équations de la physique, notamment pour les méthodes numériques. Beaucoup de résultats et de démonstrations s'appuient, explicitement ou non, sur cette structure et devraient donc s'étendre à d'autres systèmes : modèle bi-température,

modèle d'élastoplasticité (voir en particulier [23] avec une introduction assez proche des contraintes de divergence nulle), certains modèles bifluides (sur lesquels nous avons travaillé, en une dimension d'espace, avec T. Takahashi, S. Jaouen et B. Després dans [28]). Toutefois cette généralisation n'est sans doute pas toujours triviale : par exemple pour la MHD, comment discrétiser le champ magnétique, qui est à la fois une composante de l'inconnue conservative, et possède une contrainte de divergence nulle ? Cette variable ne joue pas exactement le même rôle que les inconnues géométriques de notre travail ; peut-être en passant par le potentiel vecteur pourrait-on la traiter de façon analogue à la vitesse et aux tenseur gradient de transformation ? La mise en commun de notre méthode avec des travaux de A. Bossavit pourrait être fertile, notamment afin de réécrire la partie géométrique de l'algorithme sous l'angle des Eléments-Finis.

Quatrièmement, l'étude numérique de notre méthode n'est certainement pas achevée dans ce travail. Nous avons introduit la méthode et ses principes de construction et les avons illustrés dans quelques situations. P.-H. Maire nous a indiqué sa faiblesse lorsque l'on raffine le maillage dans le sens orthogonal à l'écoulement : pour des raisons géométriques liées au choix du coefficient  $\alpha_{jr}$ , une instabilité apparaît, notamment sur le problème de Noh ; une variante développée précisément dans [2] corrige ce défaut mais retombe, comme nous l'avons montré au chapitre 5, dans d'autres travers des méthodes Volumes-Finis standards. Peut-être y-a-t-il une solution intermédiaire, dans le choix de ce coefficient ou dans d'autre positionnement des degré de liberté, pour régler les deux problèmes ? Sur la variante isentropique, une validation plus poussée reste à faire. De même les solveurs en géométrie axisymétrique, bien que prometteurs, restent à confronter à d'autres approches (schéma de Wilkins par exemple).

Cinquièmement, et toujours en rapport avec les questions numériques, le traitement des inconnues géométriques que nous avons proposé donne peut-être des outils d'analyse des maillages, qui n'ont pas été exploités ici. Nous avons prouvé grâce aux propriétés physiques de la méthode un résultat de non-croisement de mailles triangulaires (pour la discrétisation continue en temps), mais réciproquement les déformations des mailles peuvent-elles donner des informations sur la physique, par exemple pour remailler astucieusement ? Ce travail en formulation purement lagrangienne pourrait également donner des idées pour les méthodes ALE. Enfin nous n'avons pas fait l'analyse précise du lien entre faible hyperbolicité du système et déformation parasite des maillages lagrangiens (référéncé depuis longtemps [5][62]) : la nature mathématique du système que nous avons mis en avant constitue peut-être une voie de recherche. Il est assez frappant d'observer, dans le cas-test de Noh, une solution physique exacte alors que les mailles se croisent, dans un mode parasite qui de fait doit être admissible.



## Annexe A

# Preuve des relations thermodynamiques du théorème 9

Nous montrons le résultat pour un système de loi de conservation quelconque de taille  $m$  qui admet une entropie. L'emploi du formalisme entropique abstrait permettent d'éviter des développements pénibles qui apparaîtraient avec le système de la dynamique des gaz, même si la preuve reste calculatoire. L'approche est quasiment identique à celle détaillée dans [25].

Rappelons que l'on note  $\mathbf{U}$  la variable conservative (en variable de Lagrange) et  $\eta$  l'entropie du système, qui permet d'introduire

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}}.$$

La stricte concavité de l'entropie par rapport à  $\mathbf{U}$  assure d'une part un difféomorphisme entre  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , et d'autre part montre que la matrice  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}$  est symétrique définie négative. On définit alors la variable  $\Psi \in \mathbb{R}^{m-1}$  par

$$\Psi = \frac{1}{V_m} (V_1, V_2, \dots, V_{m-1}).$$

Dans la preuve du théorème 9, les variables  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont écrites en fonction du vecteur

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \eta \end{pmatrix},$$

et il s'agit de d'expliciter la matrice

$$\left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \Psi |_{\eta}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi |_{\eta}} & \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \Psi |_{\eta}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta |_{\Psi}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \eta |_{\Psi}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi |_{\eta}} & \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \eta |_{\Psi}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta |_{\Psi}} \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord on remarque que cette matrice est symétrique car

$$\left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} = \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}}.$$

Etudions ensuite le terme sous-diagonal. La définition de  $\Psi$  implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta |_{\Psi}} &= \left( \Psi_1 \frac{\partial V_m}{\partial \eta |_{\Psi}}, \Psi_2 \frac{\partial V_m}{\partial \eta |_{\Psi}}, \dots, \Psi_{m-1} \frac{\partial V_m}{\partial \eta |_{\Psi}}, \frac{\partial V_m}{\partial \eta |_{\Psi}} \right)^T \\ &= \frac{1}{V_m} \frac{\partial V_m}{\partial \eta} \mathbf{V}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} &= \frac{1}{V_m} \frac{\partial V_m}{\partial \eta} \left( \mathbf{V}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} \right) \\
&= \frac{1}{V_m} \frac{\partial V_m}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} \right) \\
&= \frac{1}{V_m} \frac{\partial V_m}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \Psi|_\eta} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La matrice est donc diagonale. Explicitons enfin sa première entrée. Pour prendre en compte la différence de taille entre les vecteurs on va noter  $\tilde{\mathbf{U}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  la restriction de  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  à leurs  $m - 1$  premières composantes. Ainsi on a

$$\frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \Psi|_\eta} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}^T}{\partial \Psi|_\eta} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta} + \frac{\partial V_m}{\partial \Psi|_\eta} \frac{\partial U_m}{\partial \Psi|_\eta}.$$

Introduisons alors l'enthalpie du système par

$$H = \frac{1}{V_m} \langle \mathbf{V}, \mathbf{U} \rangle = \langle (\Psi, 1), \mathbf{U} \rangle.$$

Cette nouvelle variable permet de mener le calcul suivant.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \Psi|_\eta} &= \tilde{\mathbf{U}} + (\Psi, 1)^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} \\
&= \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{V_m} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} \\
&= \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{V_m} \frac{\partial \eta}{\partial \Psi|_\eta} \\
&= \tilde{\mathbf{U}}.
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta} = \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta},$$

d'où, avec  $\tilde{\mathbf{V}} = V_m \Psi$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \Psi|_\eta} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}^T}{\partial \Psi|_\eta} \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta} + \frac{\partial V_m}{\partial \Psi|_\eta} \frac{\partial U_m}{\partial \Psi|_\eta} \\
&= V_m \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta} + \frac{\partial V_m}{\partial \Psi|_\eta} \Psi^T \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta} + \frac{\partial V_m}{\partial \Psi|_\eta} \frac{\partial U_m}{\partial \Psi|_\eta} \\
&= V_m \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta} + \frac{\partial V_m}{\partial \Psi|_\eta} \left( \Psi^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \Psi|_\eta} + \frac{\partial U_m}{\partial \Psi|_\eta} \right) \\
&= V_m \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta} + \frac{\partial V_m}{\partial \Psi|_\eta} \left( \frac{1}{V_m} \mathbf{V}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Psi|_\eta} \right) \\
&= V_m \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta} + \frac{\partial V_m}{\partial \Psi|_\eta} \left( \frac{1}{V_m} \frac{\partial \eta}{\partial \Psi|_\eta} \right) \\
&= V_m \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2|_\eta}.
\end{aligned}$$

On a donc montré le résultat voulu :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}}\right)^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{W}} = \begin{pmatrix} V_m \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2} |_{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \eta} |_{\Psi} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} |_{\Psi} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas de la dynamique des gaz,  $V_m$  est l'inverse de la température.



## Annexe B

# Symétrie du solveur aux nœuds dans les écoulements à géométrie convergente

Nous montrons ici que le solveur aux nœuds respecte la symétrie des écoulements à géométrie convergente, sur maillage polaire équisectoriel. Rappelons que les quantités aux nœuds  $(p_{ji}, \mathbf{u}_i)$  sont calculées par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji}, \\ p_{ji} = p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i). \end{array} \right.$$

Il s'agit de vérifier que, partant d'une distribution à symétrie convergente, la vitesse  $\mathbf{u}_i$  reste radiale et que les pressions aux nœuds  $p_{ji}$  sont uniformes selon un secteur. Pour cela on se place dans la géométrie de la figure B.1, choisie dans un repère privilégié.

Indépendamment de leurs estimations précises en fonction de  $\theta$  et des rayons, les normales aux nœuds  $l_{ji} \mathbf{n}_{ji}$ , définies à partir des normales aux faces par (3.15), vérifient par symétrie :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{4i} = l_{1i} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{4i} = \begin{pmatrix} n_{1i}^x \\ -n_{1i}^y \end{pmatrix}, \\ l_{3i} = l_{2i} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{3i} = \begin{pmatrix} n_{2i}^x \\ -n_{2i}^y \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

De plus les grandeurs physiques sont constantes selon une couche, et les vitesses (centrées) sont radiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_4 \quad \text{et} \quad p_2 = p_3, \\ \alpha_{1i} = \alpha_{4i} \quad \text{et} \quad \alpha_{2i} = \alpha_{3i}, \\ \mathbf{u}_1 = U_1 \mathbf{n}_{12} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_4 = U_1 \mathbf{n}_{43}, \\ \mathbf{u}_2 = U_2 \mathbf{n}_{12} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_3 = U_2 \mathbf{n}_{43}, \end{array} \right.$$

où l'on note  $U_i$  la norme de la vitesse radiale selon la couche  $i$ .

Ceci implique d'une part que la matrice associée au système linéaire de  $\mathbf{u}_i$  est diagonale :

$$\left( \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} \alpha_{ji} l_{ji} \mathbf{n}_{ji} \otimes \mathbf{n}_{ji} \right) = 2 \begin{pmatrix} \alpha_{1i} l_{1i} (n_{1i}^x)^2 + \alpha_{2i} l_{2i} (n_{2i}^x)^2 & 0 \\ 0 & \alpha_{1i} l_{1i} (n_{1i}^y)^2 + \alpha_{2i} l_{2i} (n_{2i}^y)^2 \end{pmatrix},$$

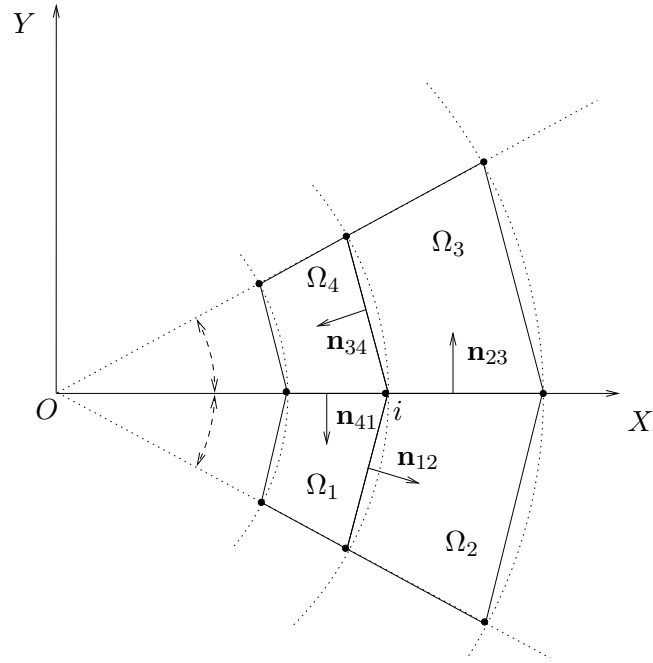


FIG. B.1 – Etude de la symétrie convergente du solveur aux nœuds, sur maillage polaire équisectoriel.

et d'autre part que le second membre du système a une composante nulle selon  $Y$  :

$$\sum_{j \in \mathcal{M}(i)} (p_j + \alpha_{ji} \mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{u}_j) l_{ji} \mathbf{n}_{ji} = 2 \begin{pmatrix} (p_1 + \alpha_{1i} \mathbf{n}_{1i} \cdot \mathbf{u}_1) l_{1i} n_{1i}^x + (p_2 + \alpha_{2i} \mathbf{n}_{2i} \cdot \mathbf{u}_2) l_{2i} n_{2i}^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la vitesse au nœud  $\mathbf{u}_i$  n'a-t-elle qu'une composante selon  $X$ . Puis, cela implique aussi  $\mathbf{n}_{1i} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{n}_{4i} \cdot \mathbf{u}_i$ , et de même sur la seconde couche, d'où  $p_{1i} = p_{4i}$  et  $p_{3i} = p_{2i}$ .

## Annexe C

# Compatibilité entre vitesses aux nœuds et aux arêtes en géométrie axisymétrique

Il s'agit de démontrer la condition nécessaire de compatibilité entre les vitesses aux nœuds du maillage lagrangien et celles aux arêtes de la formulation Volumes-Finis, en géométrie axisymétrique, annoncée dans la proposition 12 du chapitre 6.

*Preuve de la proposition 12.* – La preuve est uniquement calculatoire, comme dans le cas plan, mais encore plus lourde. L'idée est toujours d'imposer

$$(C.1) \quad \rho_j^0 v_j^0 \partial_t \tau_j(T) = \partial_t v_j(T)$$

de sorte que  $\partial_T \left( \tau_j(T) \left( \rho_j^0 v_j^0 - v_j(T) \rho_j(T) \right) \right) = 0$ , ce qui implique l'équation (6.37).

L'expression du terme de gauche de (C.1) est donnée explicitement en fonction de  $(u_{jk}^z, u_{jk}^r)$  par

$$(C.2) \quad \rho_j^0 v_j^0 \partial_T \tau_j(T) = \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} \frac{r_i + r_{i+}}{2} \left( (r_{i+} - r_i) u_{jk}^z + (z_i - z_{i+}) u_{jk}^r \right).$$

Quant au terme de droite, il se calcule grâce au lemme 11 et aux interprétations géométriques précédemment mises en avant, de la façon suivante.

Supposons dans un premier temps que les cellules soient triangulaires. Alors on a  $v_j(T) = \frac{1}{3} (\sum_i r_i(T)) s_j(T)$  et  $s_j(T) = \frac{1}{2} \sum_i (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+})$ , d'où

$$\begin{aligned} \partial_T v_j(T) = \frac{1}{6} & \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} u_i^r \right) \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+}) \\ & + \frac{1}{6} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} r_i \right) \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (u_i^r + u_{i+}^r)(z_i - z_{i+}) \right. \\ & \left. + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_i + r_{i+})(u_i^z - u_{i+}^z) \right). \end{aligned}$$

Regardons la contribution de  $u^z$ , que l'on note temporairement  $C$  :

$$\begin{aligned}
C &= \left( \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} r_i \right) \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_i + r_{i+})(u_i^z - u_{i+}^z) \\
&= \left( \sum_i r_i \right) \sum_i (r_{i+} - r_i)(u_i^z + u_{i+}^z) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_{i+}^2 - r_i^2)(u_i^z + u_{i+}^z) + r_{i-}(r_{i+} - r_i)(u_i^z + u_{i+}^z) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_{i+}^2 - r_i^2)(u_i^z + u_{i+}^z) + r_{i+}r_i(u_{i-}^z + u_i^z) - r_{i+}r_i(u_{i+}^z + u_{i-}^z) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_{i+}^2 - r_i^2)(u_i^z + u_{i+}^z) + r_i r_{i+}(u_i^z - u_{i+}^z) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_{i+}^2 - r_i^2)(u_i^z + u_{i+}^z) + (r_{i+} - r_i)(r_i u_i^z + r_{i+} u_{i+}^z) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (r_{i+}^2 - r_i^2) \left( u_i^z + u_{i+}^z + \frac{r_i u_i^z + r_{i+} u_{i+}^z}{r_i + r_{i+}} \right)
\end{aligned}$$

Puis étudions la contribution de  $u^r$ , que l'on note temporairement  $D$  :

$$D = \left( \sum_i u_i^r \right) \sum_{k/\Gamma_{jk} \subset \partial\Omega_j} (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+}) + \left( \sum_i r_i \right) \sum_{k/\Gamma_{jk} \subset \partial\Omega_j} (u_i^r + u_{i+}^r)(z_i - z_{i+}),$$

soit

$$\begin{aligned}
D &= 2 \sum_i (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+})(u_i^r + u_{i+}^r) + \sum_i u_{i-}^r (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+}) \\
&\quad + \sum_i r_{i-} (z_i - z_{i+})(u_i^r + u_{i+}^r).
\end{aligned}$$

Or d'une part

$$\sum_i u_{i-}^r (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+}) = \sum_i r_{i+} (z_{i+} - z_{i-}) u_i^r + \sum_i r_i (z_{i-} - z_i) u_{i+}^r$$

et d'autre part

$$\sum_i r_{i-} (z_i - z_{i+})(u_i^r + u_{i+}^r) = \sum_i r_i (z_{i+} - z_{i-}) u_{i+}^r + \sum_i r_{i+} (z_{i-} - z_i) u_i^r.$$

Ainsi cette seconde contribution s'écrit-elle

$$\begin{aligned}
D &= 2 \sum_i (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+})(u_i^r + u_{i+}^r) + \sum_i (z_{i+} - z_i)(r_i u_{i+}^r + r_{i+} u_i^r) \\
&= \sum_i (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+}) \left( u_i^r + u_{i+}^r + \frac{r_i u_i^r + r_{i+} u_{i+}^r}{r_i + r_{i+}} \right).
\end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\begin{aligned}
\partial_T v_j(T) &= \frac{1}{6} \left( \sum_i (r_{i+}^2 - r_i^2) \left( u_i^z + u_{i+}^z + \frac{r_i u_i^z + r_{i+} u_{i+}^z}{r_i + r_{i+}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_i (r_i + r_{i+})(z_i - z_{i+}) \left( u_i^r + u_{i+}^r + \frac{r_i u_i^r + r_{i+} u_{i+}^r}{r_i + r_{i+}} \right) \right).
\end{aligned}$$



Il est maintenant acquis qu'imposer la relation (6.38) conduit à (C.1) pour des cellules triangulaires.

Considérons enfin une cellule polygonale quelconque  $\Omega_j$ , et décomposons la en  $N_j$  triangles  $\{T_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq N_j}$  sans introduire de nouveaux sommets. Cette triangulation ajoute de nouvelles arêtes internes  $\Gamma_{\alpha\beta}$ . Supposons que la relation (6.38) soit satisfaite pour toutes les vitesses  $(u_{\alpha k}^z, u_{\alpha k}^r)$ , alors on vient juste de montrer que

$$\sum_{k \in \mathcal{A}(\alpha)} l_{\alpha k}^0 (\check{\sigma}_{\alpha k}(T) u_{\alpha k}^z + \check{\tau}_{\alpha k}(T) u_{\alpha k}^r) = \partial_T v_\alpha.$$

D'une part, comme  $l_{\alpha\beta}^0 \check{\sigma}_{\alpha\beta} = -l_{\beta\alpha}^0 \check{\sigma}_{\beta\alpha}$  et  $l_{\alpha\beta}^0 \check{\tau}_{\alpha\beta} = -l_{\beta\alpha}^0 \check{\tau}_{\beta\alpha}$ , on a

$$\sum_{\alpha=1}^{N_j} \sum_{k \in \mathcal{A}(T_\alpha)} l_{\alpha k}^0 (\check{\sigma}_{\alpha k}(T) u_{\alpha k}^z + \check{\tau}_{\alpha k}(T) u_{\alpha k}^r) = \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 (\check{\sigma}_{jk}(T) u_{jk}^z + \check{\tau}_{jk}(T) u_{jk}^r).$$

D'autre part, par additivité du volume et à connectivité fixe des triangles,  $\sum_\alpha v_\alpha = v_j$ . On a donc le résultat

$$\begin{aligned} \rho_j^0 v_j^0 \partial_T \tau_j(T) &= \sum_{k \in \mathcal{A}(j)} l_{jk}^0 (\check{\sigma}_{jk}(T) u_{jk}^z + \check{\tau}_{jk}(T) u_{jk}^r) \\ &= \sum_{\alpha} \left( \sum_{k \in \mathcal{A}(T_\alpha)} l_{\alpha k}^0 \check{\sigma}_{\alpha k}(T) u_{\alpha k}^z + \check{\tau}_{\alpha k}(T) u_{\alpha k}^r \right) \\ &= \sum_{\alpha} \partial_T v_\alpha \\ &= \partial_T v_j, \end{aligned}$$

ce qui est précisément nécessaire et suffisant pour prouver la conservation de la masse.  $\square$



# Bibliographie

- [1] R. Abgrall, R. Loubere et J. Ovadia, A Lagrangian Discontinuous Galerkin Type Method on Unstructured Meshes to Solve Hydrodynamics Problems, *Int. J. Numer. Math. Fluids*, 44, Issue 6, pp. 645-663 (2004).
- [2] R. Abgrall, J. Breil, P.-H. Maire et J. Ovadia, Un schéma centré pour l'hydrodynamique lagrange bidimensionnelle, Rapport interne Mathématiques Appliquées de Bordeaux LRC 04-10, 2004.
- [3] C. Bacon et J. Pouyet, *Mécanique des solides déformables*, Hermes Science Publications, Paris, 2000.
- [4] G. Beckett, J. A. Mackenzie, A. Ramage et D. M. Sloan, Computational solution of two-dimensional unsteady PDEs using moving mesh methods, *Journal of Computational Physics*, 182 No 2 (2002), p. 478-495.
- [5] D. J. Benson, Computational methods in lagrangian and eulerian hydrocodes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 99 (1992), 235-394.
- [6] F. Bezaud et B. Després, An entropic solver for ideal Lagrangian magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol. 154 No 1 (1999), pp. 65-89.
- [7] G. Boillat, Sur l'existence et la recherche d'équations de conservation supplémentaires pour les systèmes hyperboliques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 278, série A, p. 909-912, 1974.
- [8] G. Boillat, Symétrisation des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec densité d'énergie convexe et contraintes. *C. R Acad. Sc. Paris*, 295, série I, p. 551-554, 1982.
- [9] G. Boillat, Sur l'élimination des contraintes involutives, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 318, Série I, p.1053-1058, 1994.
- [10] G. Boillat, Nonlinear hyperbolic fields and waves. Recent mathematical methods in nonlinear wave propagation (Montecatini Terme, 1994), 1-47, *Lecture Notes in Math.*, 1640, Springer, Berlin, 1996.
- [11] F. Bouchut, Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources, *Frontiers in Mathematics series*, Birkhauser, 2004.
- [12] F. Bouchut et F. James, Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 24 (1999), n° 11-12, 2173-2189.
- [13] M. Born and L. Infeld, Foundations of a new field theory, *Proc. Roy. Soc. London*, A 144, (1934), pp 425-451.
- [14] Y. Brenier, Hydrodynamic structure of the augmented Born-Infeld equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 172 (2004) 65-91.
- [15] Y. Brenier et E. Grenier, Sticky particles and scalar conservation laws, *Siam J. Numer. Anal.*, 35, 1998, 2317-2328.

- [16] Ph. L. Browne et K. B. Wallick, The reduction of mesh tangling in 2D lagrangian hydrodynamics codes by the use of artificial viscosity and temporary triangular sub-zoning for long, thin zones. Technical Report LA-4740-MS, 1971.
- [17] E. J. Caramana et P. P. Whalen, Numerical preservation of symmetry properties of continuum problems, *Journal of computational physics* 141, 174-198 (1998).
- [18] C. Chainais-Hillairet, Schémas volumes finis pour des problèmes hyperboliques : convergence et estimations d'erreur, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1998.
- [19] C. Cherfils, Approximation numérique des écoulements compressibles par des méthodes lagrangiennes sur des maillages non structurés, thèse de PhD Université Pierre et Marie Curie, 1988.
- [20] F. Coquel et B. Perthame, Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics, *Siam J. Numer. Anal.*, 35 (6), pp 2223–2249, 1998.
- [21] Y. Coudière, J.-P. Vila et P. Villedieu, Convergence d'un schéma volumes finis explicite en temps pour les systèmes hyperboliques linéaires symétriques en domaines bornés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 331, Série I, p. 95-100, 2000.
- [22] C. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer Verlag 325, Berlin, 2000.
- [23] S. Demoulini, D. M. A. Stuart et A. E. Tzavaras, A variational approximation scheme for three dimensional elastodynamics with polyconvex energy, *Arch. Rational Mech. Anal.* 157 n°4 (2001) 325-344
- [24] B. Després, Structure des systèmes de lois de conservation en variables Lagrangiennes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I*, 328, pp 721–724, 1999.
- [25] B. Després, Lagrangian system of conservation laws, *Numer. Math.* (2001) 89, pp 99–134.
- [26] B. Després, Lax theorem and finite volume schemes, 73 (2004), 1203-1234.
- [27] B. Després et F. Desveaux, Tech. Report, CMLA, 1998, France.
- [28] B. Després, S. Jaouen, C. Mazeran et T. Takahashi, Numerical study of a conservative bifluid model with interpenetration, *Proc. CEMRACS 2004 in Numerical Methods for Hyperbolic and Kinetic problems*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 7, 2005.
- [29] B. Després et C. Mazeran, Symétrisation de la dynamique des gaz lagrangienne multidimensionnelle et schémas numériques multidimensionnels, technical report CEA/DIF/DSSI/SNEC, 2003.
- [30] B. Després et C. Mazeran, Lagrangian Gas Dynamics in Two Dimensions and Lagrangian systems, *Arch. Rational Mech. Anal.* 178 (2005) 327-372.
- [31] J. K. Dukowicz et B. Meltz, Vorticity errors in multidimensional lagrangian codes, *J. Comput. Phys.* 99 (1992), no. 1, 115–134.
- [32] R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. VII, 2000, p. 703-1020. Editors : P. G. Ciarlet and J. L. Lions.
- [33] M.-C. Glatard, Evaluation d'un nouveau schéma numérique pour l'hydrodynamique lagrangienne bidimensionnelle, rapport de DESS Université Paris 6, 2004.
- [34] E. Godlewski et P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer Verlag New York, AMS 118, 1996.

- [35] S. K. Godunov, Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques, in *Nonlinear hyperbolic problems*, Proc. 1986 Nonlinear Hyperbolic Problem XV, p. 135-149, C. Carasso, P.-A. Raviart, D. Serre eds., Lect. Notes Math. 1270, Springer-Verlag 1987.
- [36] S. K. Godunov, Thermodynamics, conservation laws and their rotation invariance, in *Godunov Methods : Theory and Applications*, Edited by E. F. Toro, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2001.
- [37] S. K. Godunov et V. M. Gordienko, The simplest Galilean-invariant and thermodynamically consistent conservation laws, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 43, No. 1, pp. 1-12, 2002.
- [38] S. K. Godunov et V. M. Gordienko, Complicated structures of Galilean-invariant conservation laws, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 43, No. 2, pp. 175-189, 2002.
- [39] S. K. Godunov et E. I. Romensky, Thermodynamics, conservation laws, and symmetries forms of differential equations in mechanics of continuous media, in M/ Hafez and K. Oshima (eds.), *Comput. Fluid Dynamics Review*, John Wiley, New York, 1995, pp. 19-31.
- [40] S. K. Godunov, T. Yu. Mikhailova et E. I. Romensky, Systems of thermodynamically coordinated laws of conservation invariant under rotations, *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 37, No. 4, 1996.
- [41] S. K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko et G. Prokopov, *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique de gaz*, Edition Mir, Moscou, 1979.
- [42] F. Hermeline, Comparaison de solveurs lagrangiens pour l'hydrodynamique tridimensionnelle, rapport interne CEA-DAM, 2005.
- [43] W. H. Hui et S. Kudriakov, A unified coordinate system for solving the three-dimensional Euler equations. *J. Comput. Phys.* 172 (2001), no. 1, 235–260.
- [44] C. H. Hui et C. Y. Loh, A new lagrangian method for steady supersonic flow computation, part I : Godunov scheme, *JCP*, 89, pp 207–240, 1990.
- [45] W. H. Hui, P. Y. Li et Z. W. Li, A unified coordinate system for solving the two-dimensional Euler equations. *J. Comput. Phys.* 153 (1999), no. 2, 596–637.
- [46] P. Joly, Méthode de couches parfaitement adaptées à la propagation d'ondes en régime transitoire, proceedings du Congrès d'Analyse Numérique, SMAI, 2003.
- [47] R. E. Kidder, Laser-driven compression of hollow shells : power requirements and stability limitations, *Nuclear Fusion* 1, 3-14 (1976).
- [48] H.-O. Kreiss, Initial boundary value problem for hyperbolic systems, *Pure and applied mathematics*, vol. XXIII, 277-298 (1970).
- [49] H.-O. Kreiss et J. Lorenz, Initial-boundary value problems and the Navier Stokes equation, *Pure and applied math.*, 136, Academic press, Boston, 1989.
- [50] L. Landau et F. Lifchitz, *Electrodynamique des milieux continus*. Tome 8. Editions MIR Moscou (1969).
- [51] R. Liska, M. Shashkov et B. Wendroff, Lagrangian composite schemes on triangular unstructured grids, Los Alamos National Lab. Report 02-7834.
- [52] R. Loubere, Une méthode particulière lagrangienne de type Galerkin Discontinu, Application à la mécanique des fluides et l'interaction laser/plasma, Thèse de PhD, Université de Bordeaux I, 2002.

- [53] J. Von Neumann et R. D. Richtmyer, A methode for the numerical calculation of hydrodynamics shocks, *Journal of Applied Physics*, Vol. 21, No. 3, 232-237, 1950.
- [54] W. F. Noh, Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux, *J. Comput. Phys.* 72, 78-120 (1978).
- [55] P. J. Olver, Conservation laws and null divergences, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1983), 94, 529.
- [56] K. G. Powell, P. L. Roe, R. S. Myong, T. Gombosi et D. De Zeuw, An Up-wind scheme for Magnetohydrodynamics. AIAA Paper 95-1704-CP, 1995.
- [57] T. Quin, Symmetrizing nonlinear elastodynamic system, *J. Elasticity*, 50 (1998), 245–252.
- [58] P.-A. Raviart et J.-M. Thomas, A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, in *Mathematical aspects of finite element methods*, Roma 1975, Galligari & Magenes Eds., Springer-Verlag, Berlin, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 606, 292-315.
- [59] R. D. Richtmyer et K. W. Morton, *Difference methods for initial-value problems*, Interscience Publishers, 1957.
- [60] H. Robbins, A remark of Stirling’s formula, *Amer. Math. Monthly* 62, 26-29, 1955.
- [61] E. I. Romensky, Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics, in *Godunov Methods : Theory and Applications*, Edited by E. F. Toro, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2001.
- [62] B. Scheurer, Quelques schémas numériques pour l’hydrodynamique lagrangienne, *Rapport CEA-R-5942*, 2000.
- [63] D. Serre, *Systèmes de lois de conservation I et II*, Diderot Editeur, Paris, 1996.
- [64] D. Serre, Hyperbolicity of the non-linear models of Maxwell’s equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 172, No 3, 2004, p. 309-331.
- [65] G. A. Sod, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 27, 1-31 (1978).
- [66] E. Tadmor, Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes, *Mathematicd of Computation*, Vol. 43, No. 168, 1984, pp. 369-381.
- [67] E. Tadmor, Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems, *Acta Numerica* (2004), pp. 451-512
- [68] H. E. Trease, M. J. Fritts et W. P. Crowley editor, *Lecture Notes in Physics*, 395, Springer Verlag, 1991.
- [69] J.-P. Vila et P. Villedieu, Convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes de Friedrichs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série I, p. 671-676, 1997.
- [70] D. H. Wagner, Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions, *J. Diff. Eq.*, 68, 118-136, 1987.
- [71] D. H. Wagner, Conservation laws, coordinate transformations and differential forms, in *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Application*, edited by J. Glimm, J. W. Grove, M. J. Graham, B. J. Plohr, Nord Scientific, 1996, pp. 471-487.
- [72] P. P. Whalen, Algebraic limitations on two-dimensional hydrodynamics simulations, *Journal of computational physics* 124, 46-54 (1996).
- [73] M. L. Wilkins, Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations, *Journal of computational physics* **36**, 281-303 (1980).
- [74] Z. N. Wu, A note on the unified coordinate system for computing shock waves, *Journal of computational physics* **180**, pp 110-119, 2002.